SINIR KOŞULLARI SPEKTRAL PARAMETREYE BAĞIMLI DİSKRET SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Nimet ÇOŞKUN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Programı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nihal YOKUŞ

Haziran-2015

T.C.

KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SINIR KOŞULLARI SPEKTRAL PARAMETREYE BAĞIMLI DİSKRET SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nimet ÇOŞKUN

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Nihal YOKUŞ

KARAMAN – 2015

TEZ ONAYI

Nimet ÇOŞKUN tarafından hazırlanan "**Sınır Koşulları Spektral Parametreye Bağımlı Diskret Schrödinger Operatörünün Spektral Analizi**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman:

Yrd. Doç. Dr. Nihal YOKUŞ

Juri Üyeleri | İmza:

Ünvanı, Adı ve Soyadı : Yrd. Doç. Dr. Nihal YOKUŞ

Ünvanı, Adı ve Soyadı : Doç. Dr. Ahmet İPEK

Ünvanı, Adı ve Soyadı : Doç. Dr. Yıldıray KESKİN

Ünvanı, Adı ve Soyadı : Doç. Dr. Murat YILDIZ

Ünvanı, Adı ve Soyadı : Yrd. Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Tez Savunma Tarihi: 17/06/2015

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Fevzi KILIÇEL

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Nimet ÇOŞKUN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SINIR KOŞULLARI SPEKTRAL PARAMETREYE BAĞIMLI DİSKRET SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN SPEKTRAL ANALİZİ

Nimet ÇOŞKUN

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Nihal YOKUŞ

Haziran, 2015, 51 sayfa

Bu çalışmada, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli diziler, $\gamma_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 0,1,2$ ve λ bir spektral parametre olmak üzere

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n \, , n \in \mathbb{N} = \{1,2,...\}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2)y_1 + (\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)y_0 = 0$$

sınır değer probleminin $\varepsilon > 0$ ve $\frac{1}{2} \le \delta \le 1$ olmak üzere

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\exp(\varepsilon n^{\delta})(|1-a_n| + |b_n|) \right] < \infty$$

koşulu altında spektral özellikleri incelenmiştir

Bu tez, üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş bölümüne ayrılmıştır.

İkinci bölümde spektral analizin temel tanım ve teoremleri hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde sınır koşulları spektral parametreye bağımlı diskret Schrödinger operatörünün Jost çözümü, Jost fonksiyonu, sürekli spektrumu, özdeğerleri, spektral tekillikleri ile bu özdeğer ve spektral tekilliklerin nicel özellikleri incelenmiştir.

Anahtar kelimeler: Fark denklemi, Spektral analiz, Jost çözümü, Jost fonksiyonu, Özdeğer, Spektral tekillik, Sınır değer problemi.

ABSTRACT

Ms Thesis

SPECTRAL ANALYSIS OF DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATOR WITH BOUNDARY CONDITION DEPENDING ON THE SPECTRAL PARAMETER

Nimet ÇOŞKUN

Karamanoğlu Mehmetbey University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Dr. Nihal YOKUŞ

June, 2015, 51 pages

In this study, spectral properties of the boundary value problem

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n,\ n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2)y_1 + (\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)y_0 = 0$$

is investigated under the condition

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\exp(\varepsilon n^{\delta})(|1-a_n| + |b_n|\right] < \infty$$

for $\varepsilon > 0$ and $\frac{1}{2} \le \delta \le 1$ where $(a_n), (b_n)$ complex sequences $\gamma_i, \beta_i \in \mathbb{C}$, $i = 0, 1, 2$ and λ is a spectral parameter.

This thesis contains three chapters.

The first chapter is devoted to introduction.

In the second chapter, some basic definitions and main theorems of spectral analysis are recalled.

In the third chapter, Jost solution, Jost function, continous spectrum, eigenvalues, spectral singularities and quantitive properties of eigenvalues and spectral singularities of the discrete Schrödinger operator with boundary condition depending on the spectral parameter is investigated.

Keywords: Difference equations, Spectral analysis, Jost solution, Jost function, Eigenvalue, Spectral singularity, Boundary value problem.

ÖN SÖZ

Yüksek lisans eğitimim boyunca beni yönlendiren, akademik çalışma hayatında ufkumun genişlemesine katkı sağlayan danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Nihal YOKUŞ'a, destek ve yardımlarından dolayı Sayın Doç. Dr. Yıldıray KESKİN'e ve beni bugünlere getiren, maddi manevi desteğini esirgemeyen aileme en içten teşekkürlerimi sunarım.

Nimet ÇOŞKUN

Haziran, 2015

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{C}_+$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$
$\overline{\mathbb{C}_+}$	$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$
$L_2(\mathbb{R}_+)$	$\left\{ y : y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}, \int_0^\infty \lvert y(x) \rvert^2 dx < \infty \right\}$
$l^2(\mathbb{Z})$	$\left\{ a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} : \lVert a \rVert^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \lvert a_n \rvert^2 < \infty \right\}$
$l^2(\mathbb{N})$	$\left\{ a = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \lVert a \rVert^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lvert a_n \rvert^2 < \infty \right\}$
$D(L)$	L operatörünün tanım kümesi
$R(L)$	L operatörünün görüntü kümesi
$R_\lambda(L)$	L operatörünün resolvent operatörü
$\mu(G)$	G kümesinin Lebesque ölçüsü
$\sigma(L)$	L operatörünün spektrumu
$\sigma_d(L)$	L operatörünün özdeğerleri
$\sigma_c(L)$	L operatörünün sürekli spektrumu
$\sigma_r(L)$	L operatörünün rezidü spektrumu
$\sigma_{ss}(L)$	L operatörünün spektral tekillikleri kümesi

1. GİRİŞ

Diferansiyel operatörlerin spektral analizi Fonksiyonel analiz, Matematiksel fizik, Kuantum mekaniği gibi birçok alanda çok sayıda problemin çözülmesinde önemli rol oynamaktadır. Bu sebeple, birçok matematikçi Sturm-Liouville, Klein-Gordon, Dirac ve Schrödinger diferansiyel denklemleri gibi denklemler yardımıyla elde edilen diferansiyel operatörlerin spektral analiziyle ilgili çalışmalar yapmıştır.

q kompleks değerli bir fonksiyon, $h \in \mathbb{C}$ ve λ bir spektral parametre olmak üzere $L_2(\mathbb{R}^+)$ uzayında

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda^2 y, 0 \le x < \infty \\ \qquad y'(0) - hy(0) = 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

sınır değer problemini ilk defa Naimark (1960) incelemiştir. Naimark çalışmasında, (1.1) sınır değer probleminin spektrumunun sürekli spektrum , özdeğerler ve spektral tekilliklerden oluştuğunu, ayrıca (1.1)'in spektral tekilliklerinin, resolventin kutup noktaları olup sürekli spektrumunun üzerinde bulunduğunu fakat özdeğerler olmadığını göstermiştir. Bununla birlikte, q potansiyel fonksiyonunun

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon x} |q(x)| dx < \infty, \ \varepsilon > 0$$

koşulunu sağlaması durumunda, (1.1) sınır değer probleminin spektral tekilliklerinin ve özdeğerlerinin sonlu sayıda ve sonlu katlı olduklarını kanıtlamıştır.

Pavlov (1967), Naimark'ın bu çalışmasında incelediği operatörün spektral tekilliklerinin yapısının, potansiyel fonksiyonun sonsuzluktaki davranışına bağlı olduğunu göstermiş ve bu operatörün esas fonksiyonlarını kullanarak spektral açılım elde etmiştir. Pavlov'un çalışması, spektral tekilliklerin göz önüne alınarak spektral açılımın verildiği ilk çalışma olması nedeniyle önem arz etmektedir.

Naimark'ın çalışmaları, Kemp (1958) tarafından tüm reel eksende tanımlı diferansiyel operatörlere ve Gasymov (1968) tarafından üç boyutlu Schrödinger operatörlerine genişletilmiştir.

Bilgisayar, mühendislik, ekonomi ve birçok bilim dalının bazı problemlerinin modellemelerindeki gelişmelerle birlikte diskret diferansiyel operatörlerinin spektral analizi son yıllarda büyük önem kazanmıştır.

Guseinov (1976), $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ ve $\{b_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ reel terimli diziler ve her $n\in\mathbb{Z}$ için $a_n > 0$ olmak üzere $l_2(\mathbb{Z})$ uzayında

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n \ , \quad n\in\mathbb{Z} \tag{1.2}$$

fark denkleminin

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |n| \left(|1-a_n| + |b_n|\right) < \infty \tag{1.3}$$

koşulu altında spektrumunun, sürekli spektrum ve özdeğerlerden oluştuğunu göstermiş ve (1.2) fark denklemi için saçılma teorisinin ters problemini çalışmıştır.

Bairamov ve Çelebi (1999), $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli diziler olmak üzere $l_2(\mathbb{N},\mathbb{C}^2)$ uzayında

$$\begin{cases} y_{n+1}^{(2)} - y_n^{(2)} + p_n y_n^{(1)} = \lambda y_n^{(1)} \\ -y_n^{(1)} + y_{n-1}^{(1)} + a_n y_n^{(2)} = \lambda y_n^{(2)} \end{cases} \tag{1.4}$$

denklem sistemi ve $y_0^{(1)} = 0$ sınır koşulu yardımıyla üretilen Dirac operatörünün $\varepsilon > 0$ için

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \exp(\varepsilon\sqrt{n})(|p_n| + |q_n|) \right\} < \infty$$

koşulunda özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonlu sayıda ve sonlu katlı olduklarını göstermiş ayrıca Dirac operatörünün Weyl fonksiyonu için buldukları bir integral gösterimden yararlanarak bir spektral açılım elde etmişlerdir.

Bairamov ve ark. (2001), $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli diziler ve $a_0 = 1$ olmak üzere, $L_2(\mathbb{N})$ uzayında

$$a_{n-1}y_{n-1}+b_ny_n+a_ny_{n+1}=\lambda y_n\ ,\quad n\in\mathbb{Z}$$

fark denklemi ve

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}h_ny_n=0$$

sınır koşulu yardımıyla tanımlanan non-selfadjoint diskret operatörün

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}e^{\varepsilon n^{\beta}}(|1-a_n|+|b_n|+|h_n|)<\infty\quad \varepsilon>0,\ \frac{1}{2}\leq\beta\leq1$$

koşulu altında sonlu sayıda, sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahip olduklarını, 2π periyotlu analitik fonksiyonlar için verdikleri Şeritte Birebirlik Teoreminden yararlanarak göstermişlerdir.

Krall ve ark. (2001), $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli dizi olmak üzere $L_2(\mathbb{N})$ uzayında

$$(ly)_n=y_{n-1}+y_{n+1}+b_ny_n,\quad n\in\mathbb{N}$$
$$y_0=0$$

sınır değer problemi tarafından üretilen fark operatörünün Weyl-Titchmarch fonksiyonunu araştırmışlar ve bu fonksiyon ile operatörün Marchenko anlamında genelleştirilmiş spektral fonksiyonu arasında bir bağlantı bulmuşlardır. Bununla beraber, Weyl-Titchmarch fonksiyonu için Cauchy tipinde bir integral gösterimi bulmuşlar ve bu gösterim yardımıyla bir spektral açılım vermişlerdir.

Yukarıda belirtilen çalışmaların hepsinde sınır koşulları spektral parametreden bağımsızdır. Son zamanlarda ise, sınır koşullarında spektral parametreye bağımlı diferansiyel operatörlerin spektral analizi çalışılmaya başlanmıştır (Bairamov ve ark., 2011; Köprübaşı ve Yokuş, 2014; Yokuş ve Köprübaşı, 2015).

Bu tezde, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli diziler, $n\in\mathbb{N}=\{1,2,...\}$, $a_n\neq0$, $i=0,1,2$ için λ bir spektral parametre, $\gamma_0\beta_1-\gamma_1\beta_0\neq0$, $|\gamma_2|+|\beta_2|\neq0$ ve $\gamma_2\neq\frac{-\beta_1}{a_0}$ olmak üzere non-selfadjoint ikinci derece fark denklemi için

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2)y_1 + (\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)y_0 = 0$$

sınır değer problemine karşılık gelen L operatörünün

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|1 - a_n| + |b_n|) < \infty$$

koşulu altında Jost çözümü, spektrumu ve resolvent operatörü incelenecek olup, ayrıca $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks terimli dizilerinin

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\exp(\varepsilon n^{\delta})(|1 - a_n| + |b_n|) \right] < \infty \quad \varepsilon > 0, \ \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1$$

koşulunu gerçeklemesi durumunda, L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekillikleri ile özdeğerler ve spektral tekilliklerin nicel özellikleri araştırılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde ileride kullanılacak tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1. X ve Y, K cismi üzerinde vektör uzaylar ve $D(L) \subset X$ olmak üzere

$$L : D(L) \to Y$$

operatörü verilsin. L operatörünün $D(L)$ tanım bölgesi ve $R(L)$ değer bölgesi olmak üzere $D(L)$ ve $R(L)$ sırasıyla X ve Y uzaylarının alt vektör uzayları olsunlar. Eğer $\forall\, x, y \in D(L)$ ve $\forall\, \alpha, \beta \in K$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

sağlanıyorsa L operatörü lineerdir denir (Akhiezer, 1965).

Tanım 2.2. X ve Y, K cismi üzerinde normlu iki uzay ve $D(L)$, X in alt uzayı olmak üzere $L : D(L) \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer $\forall x \in D(L)$ için

$$\|Lx\| \le C\|x\|$$

olacak şekilde $C > 0$ sabiti varsa L operatörüne sınırlı lineer operatör denir (Lusternik-Sobolev, 1968).

Tanım 2.3. X ve Y, K cismi üzerinde normlu iki uzay ve

$$L : X \to Y$$

lineer bir operatör olsun. X uzayının sınırlı her alt kümesinin L operatörü altındaki görüntüsü Y uzayında kompakt ise, L operatörüne kompakt operatör denir (Akhiezer, 1965).

Teorem 2.1. ($l^2(\mathbb{N})$ 'de Kompaktlık Kriteri) $M \subset l^2(\mathbb{N})$ sınırlı bir küme olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ..., \xi_n, ...\} \in M$ için $n > N_0$ oldukça

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} |\xi_i|^2 < \varepsilon^2$$

sağlanacak şekilde en az bir N_0 sayısı varsa M kompakttır (Lusternik-Sobolev, 1968).

Teorem 2.2. (Borel-Lebesque Teoremi) Reel sayılar kümesinin kapalı ve sınırlı her alt aralığı kompaktır (Lusternik-Sobolev, 1968).

Tanım 2.4. X bir Hilbert uzayı

$$L : D(L) \subset X \rightarrow Y$$

lineer bir operatör ve $\overline{D(L)} = X$ olsun. $y \in Y$ olmak üzere $\forall x \in D(L)$ için

$$\langle Lx, y \rangle = \langle x, L^* y \rangle$$

eşitliği gerçekleniyorsa L^* operatörüne L operatörünün Hilbert adjointi denir (Akhiezer, 1965).

Tanım 2.5. X bir Hilbert uzayı ve L, X üzerinde tanımlı lineer bir operatör olsun. Eğer

$$L^* x = Lx$$

eşitliği gerçekleniyorsa L operatörüne selfadjoint operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.6. X bir Hilbert uzayı olmak üzere tanım kümesi X 'de yoğun olan selfadjoint operatöre simetrik operatör denir (Naimark, 1968).

Teorem 2.3. X bir Hilbert uzayı olsun ve $L : X \rightarrow X$ sınırlı lineer operatörü verilsin. L operatörünün selfadjoint olması için gerek ve yeter koşul simetrik olmasıdır (Akhiezer, 1965).

Tanım 2.7. $X \neq \{0\}$ kompleks normlu uzay $L : D(L) \subset X \rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere $R_\lambda(L) = (L - \lambda I)^{-1}$ operatörüne L 'nin resolvent operatörü ya da kısaca resolventi denir (Lusternik, 1974).

Tanım 2.8. $R_\lambda(L)$ resolvent operatörü mevcut, sınırlı ve tanım kümesi X uzayında yoğun ise, $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısına L operatörünün regüler değeri denir. L operatörünün regüler değerlerinden oluşan kümeye ise L 'nin resolvent kümesi denir ve $\rho(L)$ ile gösterilir (Lusternik, 1974).

Tanım 2.9. L operatörünün spektrumu $\sigma(L)$ ile gösterilir ve

$$\sigma(L)=\mathbb{C}\setminus\rho(L)$$

şeklinde tanımlıdır (Naimark, 1968).

Tanım 2.10. $R_\lambda(L)$ resolvent operatörünün mevcut olmayacak şekildeki λ kompleks sayılarının cümlesine L operatörünün diskret spektrumu ya da nokta spektrumu denir. (Lusternik, 1974).

Tanım 2.11. $R_\lambda(L)$ resolvent operatörü mevcut, sınırsız ve $R_\lambda(L)$ operatörünün tanım kümesi X uzayında yoğun olacak şekildeki λ kompleks sayılarının oluşturduğu kümeye L operatörünün sürekli spektrumu denir (Lusternik, 1974).

Tanım 2.12. X bir kompleks vektör uzay ve $L:X\rightarrow X$ lineer bir operatör olsun. λ kompleks sayısı için $Lx=\lambda x$ denkleminin aşikar olmayan bir $x\in X$ çözümü varsa λ sayısına L operatörünün özdeğeri denir. Bu x çözümüne ise L operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu adı verilir (Lusternik, 1974).

Tanım 2.13. Bir L operatörünün resolventinin çekirdeğinin kutup noktası olup, sürekli spektrumda bulunan ve L operatörünün özdeğeri olmayan noktalara L operatörünün spektral tekillikleri adı verilir (Naimark, 1960).

Teorem 2.4. (Weyl-Kompakt Heyecanlandırma Teoremi) L_1 self-adjoint, L_2 kompakt bir operatör ve $L=L_1+L_2$ ise

$$\sigma_c(L)=\sigma_c(L_1)$$

eşitliği gerçeklenir (Glazman, 1965).

Teorem 2.5. Kompleks bir H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı, selfadjoint, lineer $L:H\rightarrow H$ operatörünün özdeğerleri reeldir (Lusternik-Sobolev, 1968).

Teorem 2.6. Kompleks bir H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı, selfadjoint, lineer $L:H\rightarrow H$ operatörünün $\sigma_r(L)$ rezidü spektrumu boştur (Lusternik-Sobolev, 1968).

Teorem 2.7. Kompleks bir H Hilbert uzayı üzerinde sınırlı selfadjoint lineer $L: H \to H$ operatörünün spektrumu reel eksende bulunur (Lusternik-Sobolev, 1968).

Teorem 2.8. Özdeş olarak sıfır olmayan analitik bir fonksiyonun, analitiklik bölgesi içindeki sıfırları (eğer varsa) ayrıktır (Dolzhenko, 1979).

Teorem 2.9. Özdeş olarak sıfır olmayan analitik fonksiyonun, analitiklik bölgesi içindeki sıfırlarının limit noktaları (eğer varsa) analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko, 1979).

Teorem 2.10. Özdeş olarak sıfır olmayan analitik fonksiyonun sonsuz katlı sıfırları analitiklik bölgesinin sınırındadır (Dolzhenko, 1979).

Teorem 2.11. (Privalov Teoremi) Açık üst düzlemde özdeş olarak sıfır olmayan analitik fonksiyonun reel eksendeki sıfırlarının Lebesque ölçüsü sıfırdır (Dolzhenko, 1979).

Teorem 2.12. (Pavlov Teoremi) g fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}_+}$ da her mertebeden türeve sahip bir fonksiyon ve $\mu(G = \{x \in \mathbb{R} : g^{(n)}(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}) = 0$ olsun. Ayrıca

$$\left|g^{(k)}(z)\right| \le \eta_k, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

eşitsizliği sağlayacak şekilde η_k sayıları mevcut olmakla birlikte G_s, G kümesinin $s-$ komşuluğu, $t(s) = \inf_k \frac{\eta_k s^k}{k!}$ ve $\omega > 0$ olmak üzere

$$\int_0^{\omega} Int(s)d\mu(G_s) = -\infty$$

sağlansın. Bu durumda g fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}_+}$ da özdeş olarak sıfırdır (Pavlov, 1975).

3. SINIR KOŞULLARI SPEKTRAL PARAMETREYE BAĞIMLI DİSKRET SCHRÖDİNGER OPERATÖRÜNÜN JOST ÇÖZÜMÜ VE JOST FONKSİYONU

$\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ kompleks terimli diziler, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$, $a_n \neq 0$, $i = 0,1,2$ için γ_i, $\beta_i \in \mathbb{C}$, λ bir spektral parametre olmak üzere ikinci dereceden non-selfadjoint fark denklemi için

$$a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n \tag{3.1}$$

$$(\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2)y_1 + (\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)y_0 = 0 \ , \ \gamma_0\beta_1 - \gamma_1\beta_0 \neq 0 ,$$

$$|\gamma_2| + |\beta_2| \neq 0 \text{ ve } \gamma_2 \neq \frac{-\beta_1}{a_0} \tag{3.2}$$

sınır değer problemi göz önüne alınsın. (3.1)-(3.2) sınır değer problemine karşılık gelen $L : l^2(\mathbb{N}) \to l^2(\mathbb{N})$ operatörü,

$$(ly)_n = a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1}$$

fark ifadesi ve (3.2) sınır koşuluyla tanımlanır. Burada

$$h_n = a_{n-1} + a_n + b_n$$

olmak üzere (3.1) fark denklemi,

$$\nabla(a_n \Delta y_n) + h_n y_n = \lambda y_n \tag{3.3}$$

Sturm-Liouville formunda yazılabilir. Burada Δ ileri fark operatörü, ∇ geri fark operatörü olup

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$$

$$\nabla y_n = y_n - y_{n-1}$$

fark ifadeleri ile tanımlanır.

3.1. (3.1)-(3.2) Sınır Değer Probleminin Jost Çözümü

Teorem 3.1. $\lambda = 2\cos z$ ve $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ olmak üzere

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(|1-a_n| + |b_n|) \tag{3.4}$$

koşulu altında, (3.1) denklemi

$$e_n(z) = \alpha_n e^{inz}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}\right), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{3.5}$$

çözümüne sahiptir. Burada α_n ve A_{nm}, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri cinsinden tek olarak belirlenir.

İspat : $\lambda = 2\cos z = e^{iz} + e^{-iz}$ ve (3.5) eşitliği (3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}e^{i(n-1)z}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{n-1,m} e^{imz}\right] + b_n\alpha_n e^{inz}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}\right] + a_n\alpha_{n+1}e^{i(n+1)z}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{n+1,m} e^{imz}\right]$$

$$= \alpha_n e^{inz}(e^{iz} + e^{-iz})\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}\right] \tag{3.6}$$

bulunur. (3.6) düzenlenip e^{inz} in kuvvetlerinin katsayıları karşılıklı olarak eşitlenirse;

$$a_{n-1}\alpha_{n-1} = \alpha_n \tag{3.7}$$

$$b_n\alpha_n + a_{n-1}\alpha_{n-1}A_{n-1,1} = \alpha_n A_{n1} \tag{3.8}$$

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}A_{n-1,2} + b_n\alpha_n A_{n1} + a_n\alpha_{n+1} = \alpha_n + \alpha_n A_{n2} \tag{3.9}$$

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}A_{n-1,3} + b_n\alpha_n A_{n2} + a_n\alpha_{n+1}A_{n+1,1} = \alpha_n A_{n1} + \alpha_n A_{n3} \tag{3.10}$$

$m \geq 3$ için

$$a_{n-1}\alpha_{n-1}A_{n-1,m} + b_n\alpha_n A_{n,m-1} + a_n\alpha_{n+1}A_{n+1,m-2} = \alpha_n A_{n,m-2} + \alpha_n A_{nm} \tag{3.11}$$

olmak üzere (3.7)-(3.11) fark denklem sistemi elde edilir. Elde edilen fark denklem sistemi çözülürse α_n ve A_{nm} ifadeleri

$$\alpha_n = \left(\prod_{k=n}^{\infty} a_k \right)^{-1}$$

$$A_{n,1} = -\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k$$

$$A_{n,2} = \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ (1-a_k^{\ 2}) - b_k A_{k1} \right\}$$

$$A_{n,m} = A_{n+1,m-2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ (1-a_k^{\ 2}) A_{k+1,m-2} - b_k A_{k,m-1} \right\}$$

şeklinde olup $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ kompleks dizileri cinsinden bulunur.

Lemma 3.1. A_{nm} katsayıları , $\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]$, $\frac{m}{2}$ sayısının tam kısmı ve $c > 0$ bir sabit olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $m \in \mathbb{N}$ için

$$|A_{nm}| \le c \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k| + |b_k|) \tag{3.12}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

İspat : Tümevarım metodu ve A_{nm} ifadeleri kullanılırsa

$m = 1$ için

$$|A_{n1}| = \left| -\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k| < \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k| + |b_k|)$$

olduğu görülür.

$m = 2$ için

$$|A_{n2}| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ (1-a_k^{\ 2}) - b_k A_{k1} \right\} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \left\{ (1-a_k^{\ 2}) + b_k \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j \right\} \right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left| (1-a_k{}^2) + b_k \sum_{j=k+1}^{\infty} b_j \right|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|1-a_k{}^2\right| + |b_k| \sum_{j=k+1}^{\infty} |b_j|$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (|1-a_k||1+a_k|) + |b_k| \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|$$

burada $c = \sup_k \left\{ |1+a_k|, \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| \right\}$ seçilirse

$$|A_{n2}| \leq c \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k| + |b_k|)$$

elde edilir.

Tümevarım metodu gereğince $m-1$'inci terime kadar (3.12) eşitsizliği gerçeklensin. Bu durumda $c_1 > 0$ sabit olmak üzere

$$|A_{nm}| = \left| A_{n+1,m-2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-a_k{}^2) A_{k+1,m-2} - b_k A_{k,m-1} \right|$$

$$\leq |A_{n+1,m-2}| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|1-a_k{}^2\right| |A_{k+1,m-2}| + |b_k| |A_{k,m-1}|$$

$$\leq c_1 \sum_{k=n+1+\left[\left|\frac{m-2}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k| + |b_k|) + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\left|1-a_k{}^2\right| c_1 \sum_{j=k+1+\left[\left|\frac{m-2}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_j| + |b_j|) + c_1 |b_k| \sum_{j=k+\left[\left|\frac{m-1}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_j| + |b_j|) \right]$$

$$= c_1 \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k| + |b_k|) + c_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[\left(\left|1-a_k{}^2\right| \right) \sum_{j=k+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_j| + |b_j|) + |b_k| \sum_{j=k+\left[\left|\frac{m-1}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_j| + |b_j|) \right]$$

$$\leq c_1 \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k|+|b_k|) + c_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} \left[|1-a_k{}^2| \sum_{j=1}^{\infty} (|1-a_j|+|b_j|) + |b_k| \sum_{j=1}^{\infty} (|1-a_j|+|b_j|) \right]$$

$$= c_1 \left[\sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k|+|b_k|) + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (|1-a_k{}^2|+|b_k|) \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} (|1-a_j|+|b_j|) \right) \right]$$

elde edilir. $c_2 := \sup\limits_{k \geq n+1} \{|1+a_k|, 1\}$ olmak üzere $|A_{nm}|$ için

$$|A_{nm}| \leq c_1 \left[\sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k|+|b_k|) + c_2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} (|1-a_j|+|b_j|) \right) \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (|1-a_k|+|b_k|) \right) \right]$$

$$\leq c_1 \left[\sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k|+|b_k|) + c_2 \left(\sum_{j=1}^{\infty} (|1-a_j|+|b_j|) \right) \left(\sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k|+|b_k|) \right) \right]$$

$$= c_1 \left[\sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k|+|b_k|) \left(1 + c_2 \sum_{j=1}^{\infty} (|1-a_j|+|b_j|) \right) \right]$$

eşitsizliğine ulaşılır. Burada $c = c_1 + c_1 c_2 \sum\limits_{j=1}^{\infty} (|1-a_j|+|b_j|)$ seçilirse

$$|A_{nm}| \leq c \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k|+|b_k|)$$

olarak elde edilir.

Lemma 3.2. $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$ için $\{A_{nm}\}_{n=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$ ve $\{A_{nm}\}_{m=1}^{\infty} \in l^1(\mathbb{N})$ gerçeklenir.

İspat : Lemma (3.1)' den $c > 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_{nm}| \leq c \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} (|1-a_k|+|b_k|)$$

olduğu biliniyor. $\sum_{n=1}^{\infty}|A_{nm}|$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}|A_{nm}|\leq c\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty}(|1-a_k|+|b_k|)\leq c\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}(|1-a_k|+|b_k|)$$

$$=c\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}(|1-a_k|+|b_k|)=\sum_{k=1}^{\infty}k(|1-a_k|+|b_k|)<\infty$$

yakınsaklık bilgisine ulaşılır. Dolayısıyla $\{A_{nm}\}_{n=1}^{\infty}\in l^1(\mathbb{N})$ elde edilir. Benzer şekilde $\{A_{nm}\}_{m=1}^{\infty}\in l^1(\mathbb{N})$ olduğu gösterilir.

Lemma 3.3. $\forall n\in\mathbb{N}$ için (3.5) ile verilen $e_n(z)$ çözümü, $\mathbb{C}_+=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z>0\}$ bölgesinde analitik, $\overline{\mathbb{C}}_+=\{z\in\mathbb{C}:\operatorname{Im}z\geq 0\}$ bölgesinde süreklidir.

İspat : $e_n(z)=\alpha_n e^{inz}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}e^{imz}\right]$ ifadesinde e^{inz} ile verilen fonksiyon tüm $\mathbb{C}$ 'de analitik olduğundan, ispat için $\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}e^{imz}$ serisinin analitikliğinin araştırılırması yeterli olacaktır. $\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}e^{imz}$ ve $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(A_{nm}e^{imz}\right)$ serilerinin düzgün ve mutlak yakınsaklığı incelenirse, $\operatorname{Im}z\geq 0$ için $\left|e^{-m\operatorname{Im}z}\right|\leq 1$ ve $\{A_{nm}\}_{m=1}^{\infty}\in l^1(\mathbb{N})$ olduğu kullanılarak,

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}e^{imz}\right|\leq\sum_{m=1}^{\infty}|A_{nm}|\left|e^{im(\operatorname{Re}z+i\operatorname{Im}z)}\right|=\sum_{m=1}^{\infty}|A_{nm}|\left|e^{-m\operatorname{Im}z}\right|\leq\sum_{m=1}^{\infty}|A_{nm}|<\infty$$

elde edilir.

Ayrıca $\operatorname{Im}z>0$ için,

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}ime^{imz}\right|\leq\sum_{m=1}^{\infty}|A_{nm}|m\left|e^{im(\operatorname{Re}z+i\operatorname{Im}z)}\right|\leq\sum_{m=1}^{\infty}|A_{nm}|m\left|e^{-m\operatorname{Im}z}\right|\leq\sum_{m=1}^{\infty}|A_{nm}|<\infty$$

bulunur. Dolayısıyla seri $\operatorname{Im}z>0$ için analitiktir.

Süreklilik içinse benzer şekilde e^{inz} kompleks düzlemde sürekli olduğundan $\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}$ serisinin süreklilik bölgesinin bulunması yeterli olacaktır. $\operatorname{Im} z \geq 0$ için,

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left|A_{nm}\right| \left|e^{im(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left|A_{nm}\right| \left|e^{-m \operatorname{Im} z}\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \left|A_{nm}\right| < \infty$$

olduğundan

$$\lim_{z \to z_0} \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \lim_{z \to z_0} e^{imz} = \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz_0}$$

sağlanır. Sonuç olarak $e_n(z)$ ifadesi $\mathbb{C}_+$'da analitik, $\overline{\mathbb{C}_+}$'da süreklidir.

3.2. (3.1), (3.2) Sınır Değer Probleminin Resolventi

(3.2) sınır koşulu ve (3.5) eşitliği kullanılarak

$$f(z) := (\gamma_0 + 2\gamma_1 \cos z + 4\gamma_2 \cos^2 z) e_1(z) + (\beta_0 + 2\beta_1 \cos z + 4\beta_2 \cos^2 z) e_0(z) \tag{3.13}$$

şeklinde tanımlanan $f(z)$ fonksiyonu, Lemma 3.3. ve (3.13)'den $\mathbb{C}_+$'da analitik, $\overline{\mathbb{C}_+}$ süreklidir ve $f(z) = f(z + 2\pi)$ eşitliğini gerçekler. (3.13) denklemiyle verilen $f(z)$ fonksiyonuna (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin Jost fonksiyonu denir.

Teorem 3.2. $P_0 := \{z : z \in \mathbb{C}, z = \xi + i\tau, 0 \leq \xi \leq 2\pi, \tau > 0\}$ ve $P := P_0 \cup [0, 2\pi]$ bölgeleri tanımlansın. Her $z \in P$ ve $f(z) \neq 0$ için (3.1), (3.2) sınır değer probleminin Green fonksiyonu

$$G_{nk}(z) = \begin{cases} \dfrac{-\varphi_k(z) e_n(z)}{a_0 f(z)}, k \leq n \\ \dfrac{-\varphi_n(z) e_k(z)}{a_0 f(z)}, k > n \end{cases} \tag{3.14}$$

olmak üzere, resolvent operatörü

$$R_\lambda(L)\psi_n := \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk}(z)\psi_k \ , \ n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \ , \psi=\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in l^2(\mathbb{N}) \tag{3.15}$$

ile verilir.

İspat : $\varphi(z) := \varphi(2\cos z) = \left\{\varphi_n(2\cos z)\right\}$**,** $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ fonksiyonu (3.1) denkleminin

$$\begin{aligned}\varphi_0(\lambda) &= -(\gamma_0+\gamma_1\lambda+\gamma_2\lambda^2)\\ \varphi_1(\lambda) &= (\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2)\end{aligned} \tag{3.16}$$

sınır koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\varphi(z)$ ve $e(z)$ fonksiyonlarının Wronskiyeni

$$W\left[\varphi(z),e(z)\right] := a_n\left[\varphi_{n+1}(2\cos z)e_n(z) - e_{n+1}(z)\varphi_n(2\cos z)\right]$$

şeklinde tanımlıdır. Wronskiyen n 'den bağımsız olup $n=0$ için

$$W\left[\varphi(z),e(z)\right] = a_0\left[\varphi_1(2\cos z)e_0(z) - e_1(z)\varphi_0(2\cos z)\right] := a_0 f(z)$$

şeklinde elde edilir. $\forall z\in P$ için $f(z)\neq 0$ ise $\varphi(z)$ ve $e(z)$ lineer bağımsız olup (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin temel çözümler sistemini oluştururlar. (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin resolvent operatörünü bulmak için (3.3) denkleminden

$$\nabla(a_n\Delta y_n) + h_n y_n - \lambda y_n = \psi_n \tag{3.17}$$

fark denkleminin çözümünün bulunması gerekir. (3.17) denklemine ilişkin homojen denklem

$$\nabla(a_n\Delta y_n) + h_n y_n - \lambda y_n = 0$$

şeklinde olup, bu denklemin genel çözümü

$$y_n = ce_n + d\varphi_n$$

olur. (3.17) denklemine ilişkin genel çözüm

$$y_n = c_n e_n + d_n\varphi_n$$

şeklindedir. Δy_n ifadesininin açılımında $c_n e_{n+1}$ ve $d_n \varphi_{n+1}$ ifadeleri eklenip çıkartılırsa

$$\Delta y_n = c_{n+1}e_{n+1} + d_{n+1}\varphi_{n+1} - c_n e_n - d_n \varphi_n$$

$$= (c_{n+1} - c_n)e_{n+1} + (d_{n+1} - d_n)\varphi_{n+1} + c_n(e_{n+1} - e_n) + d_n(\varphi_{n+1} - \varphi_n)$$

bulunur. $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$(c_{n+1} - c_n)e_{n+1} + (d_{n+1} - d_n)\varphi_{n+1} = 0 \tag{3.18}$$

olmak üzere

$$\Delta y_n = c_n(e_{n+1} - e_n) + d_n(\varphi_{n+1} - \varphi_n)$$

elde edilir. Buradan da Δy_n, $\nabla(a_n \Delta y_n)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$\nabla(a_n \Delta y_n) = a_n c_n(e_{n+1} - e_n) + a_n d_n(\varphi_{n+1} - \varphi_n) - a_{n-1}c_{n-1}(e_n - e_{n-1}) - a_{n-1}d_{n-1}(\varphi_n - \varphi_{n-1})$$

bulunur. Son elde edilen eşitlik (3.17) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\psi_n = a_n c_n e_{n+1} - a_n c_n e_n + a_n d_n \varphi_{n+1} - a_n d_n \varphi_n - a_{n-1}c_{n-1}e_n + a_{n-1}c_{n-1}e_{n-1}$$

$$-a_{n-1}d_{n-1}\varphi_n + a_{n-1}d_{n-1}\varphi_{n-1} + b_n c_n e_n + b_n d_n \varphi_n + a_n c_n e_n + a_n d_n \varphi_n$$

$$+a_{n-1}c_n e_n + a_{n-1}d_n \varphi_n - \lambda c_n e_n - \lambda d_n \varphi_n$$

$$= c_n(a_n e_{n+1} + b_n e_n - \lambda e_n) + d_n(a_n \varphi_{n+1} + b_n \varphi_n - \lambda \varphi_n)$$

$$-a_{n-1}c_{n-1}e_n + a_{n-1}c_{n-1}e_{n-1} - a_{n-1}d_{n-1}\varphi_n + a_{n-1}d_{n-1}\varphi_{n-1} + a_{n-1}c_n e_n + a_{n-1}d_n \varphi_n$$

$$= -c_n a_{n-1}e_{n-1} - d_n a_{n-1}\varphi_{n-1} - a_{n-1}c_{n-1}e_n + a_{n-1}c_{n-1}e_{n-1}$$

$$-a_{n-1}d_{n-1}\varphi_{n-1} + a_{n-1}d_{n-1}\varphi_{n-1} + a_{n-1}c_n e_n + a_{n-1}d_n \varphi_n$$

$$= -a_{n-1}\left[(c_n - c_{n-1})e_{n-1} + (d_n - d_{n-1})\varphi_{n-1}\right] + a_{n-1}\left[(c_n - c_{n-1})e_n + (d_n - d_{n-1})\varphi_n\right]$$

bulunur. (3.18) eşitliğinden

$$(c_n - c_{n-1})e_n + (d_n - d_{n-1})\varphi_n = 0$$

olduğundan

$$(c_n - c_{n-1})e_{n-1} + (d_n - d_{n-1})\varphi_{n-1} = -\frac{\psi_n}{a_{n-1}}$$

elde edilir. Bu bilgiler ışığında

$$\begin{cases} (c_n - c_{n-1})e_n + (d_n - d_{n-1})\varphi_n = 0 \\ (c_n - c_{n-1})e_{n-1} + (d_n - d_{n-1})\varphi_{n-1} = -\dfrac{\psi_n}{a_{n-1}} \end{cases}$$

fark denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminden

$$c_n - c_{n-1} = \frac{-\psi_n \varphi_n}{a_{n-1}(\varphi_n e_{n-1} - \varphi_{n-1} e_n)} \tag{3.19}$$

$$d_n - d_{n-1} = \frac{\psi_n e_n}{a_{n-1}(\varphi_n e_{n-1} - \varphi_{n-1} e_n)} \tag{3.20}$$

bulunur. (3.19)’dan

$$c_1 - c_0 = \frac{-\psi_1 \varphi_1}{a_0(\varphi_1 e_0 - \varphi_0 e_1)}$$

$$c_2 - c_1 = \frac{-\psi_2 \varphi_2}{a_1(\varphi_2 e_1 - \varphi_1 e_2)}$$

$$c_3 - c_2 = \frac{-\psi_3 \varphi_3}{a_2(\varphi_3 e_2 - \varphi_2 e_3)}$$

.

.

.

$$c_n - c_{n-1} = \frac{-\psi_n \varphi_n}{a_{n-1}(\varphi_n e_{n-1} - \varphi_{n-1} e_n)}$$

olup bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$c_n = c_0 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k \varphi_k}{a_{k-1}(\varphi_k e_{k-1} - \varphi_{k-1} e_k)}$$

biçiminde elde edilir. Benzer şekilde (3.20)'den

$$d_{n+1} - d_n = \frac{\psi_{n+1} e_{n+1}}{a_n(\varphi_{n+1} e_n - \varphi_n e_{n+1})}$$

$$d_{n+2} - d_{n+1} = \frac{\psi_{n+2} e_{n+2}}{a_{n+1}(\varphi_{n+2} e_{n+1} - \varphi_{n+1} e_{n+2})}$$

$$d_{n+3} - d_{n+2} = \frac{\psi_{n+3} e_{n+3}}{a_{n+2}(\varphi_{n+3} e_{n+2} - \varphi_{n+2} e_{n+3})}$$

.

.

.

$$d_m - d_{m-1} = \frac{\psi_m e_m}{a_{m-1}(\varphi_m e_{m-1} - \varphi_{m-1} e_m)}$$

bulunup, elde edilen denklemler taraf tarafa toplanırsa

$$-d_n + d_m = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\psi_k e_k}{a_{k-1}(\varphi_k e_{k-1} - \varphi_{k-1} e_k)}$$

gerçeklenir. Son eşitlikte $m \to \infty$ için limit alınırsa

$d_m \xrightarrow{m\to\infty} s$ olmak üzere

$$d_n = s - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\psi_k e_k}{a_{k-1}(\varphi_k e_{k-1} - \varphi_{k-1} e_k)}$$

elde edilir. Bulunan c_n ve d_n katsayıları y_n çözümünde yerine yazılırsa

$$y_n = c_n e_n + d_n \varphi_n$$

$$=c_0e_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi_k\varphi_k e_n}{a_{k-1}(\varphi_k e_{k-1}-\varphi_{k-1}e_k)}+s\varphi_n-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\psi_k e_k\varphi_n}{a_{k-1}(\varphi_k e_{k-1}-\varphi_{k-1}e_k)}$$

olur. Burada $y_n\in l_2(\mathbb{N})$ dir. $\varphi_n\notin l_2(\mathbb{N})$ olduğundan $s=0$ dır. Dolayısıyla

$$y_n=c_0e_n-\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi_k\varphi_k e_n}{a_{k-1}(\varphi_k e_{k-1}-\varphi_{k-1}e_k)}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\psi_k e_k\varphi_n}{a_{k-1}(\varphi_k e_{k-1}-\varphi_{k-1}e_k)} \tag{3.21}$$

elde edilir. Ayrıca (3.2) sınır koşulu ve (3.16)’dan

$$0=(\gamma_0+\gamma_1\lambda+\gamma_2\lambda^2)y_1+(\beta_0+\beta_1\lambda+\beta_2\lambda^2)y_0=-(\varphi_0y_1-\varphi_1y_0) \tag{3.22}$$

yazılabilir. Son eşitlikte (3.22)’yi de kullanarak

$$0=\varphi_0y_1-\varphi_1y_0$$

$$=\varphi_0\left(c_0e_1-\frac{\psi_1\varphi_1e_1}{a_0(\varphi_1e_0-\varphi_0e_1}-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\psi_k e_k\varphi_1}{a_{k-1}(\varphi_k e_{k-1}-\varphi_{k-1}e_k)}\right)$$

$$-\varphi_1\left(c_0e_0-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_k e_k\varphi_0}{a_{k-1}(\varphi_k e_{k-1}-\varphi_{k-1}e_k)}\right)$$

$$=c_0\varphi_0e_1-\frac{\psi_1\varphi_0\varphi_1e_1}{a_0(\varphi_1e_0-\varphi_0e_1)}-c_0\varphi_1e_0+\frac{\psi_1\varphi_0\varphi_1e_1}{a_0(\varphi_1e_0-\varphi_0e_1)}$$

$$=c_0(\varphi_0e_1-\varphi_1e_0)$$

bulunur. Burada $\varphi_0e_1-\varphi_1e_0\neq 0$ olduğundan $c_0=0$ elde edilir. Bulunan değerler yerine yazıldığında

$$y_n=-\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi_k\varphi_k e_n}{a_{k-1}(\varphi_k e_{k-1}-\varphi_{k-1}e_k)}-\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\psi_k e_k\varphi_n}{a_{k-1}(\varphi_k e_{k-1}-\varphi_{k-1}e_k)}$$

olur. Sonuç olarak (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin Green fonksiyonu

$$G_{nk}(z)=\begin{cases}\dfrac{-\varphi_k(z)e_n(z)}{a_0 f(z)}, k\le n\\ \dfrac{-\varphi_n(z)e_k(z)}{a_0 f(z)}, k>n\end{cases} \tag{3.14}$$

şeklinde olup, resolvent operatörü de ,

$$R_\lambda(L)\psi_n := \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk}(z)\psi_k \quad , \psi=\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \in l^2(\mathbb{N}),\ n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \tag{3.15}$$

şeklindedir.

3.3. *L* Operatörünün Sürekli Spektrumu

Teorem 3.3. L operatörünün sürekli spektrumu $\sigma_c(L)=[-2,2]$ kapalı aralığına eşittir.

Bu teoremin ispatı için aşağıdaki bilgi ve lemmalar kullanılacaktır.

L_1 ile $l^2(\mathbb{N})$ 'de

$$(l_1 y)_1 = y_2$$

$$(l_1 y)_n = y_{n-1}+y_{n+1}, n\ge 2$$

ve L_2 ile $l^2(\mathbb{N})$ 'de

$$(l_2 y)_n = (a_{n-1}-1)y_{n-1}+(a_n-1)y_{n+1}+b_n y_n, n\in\mathbb{N}$$

fark ifadeleri yardımıyla tanımlanan L_1 ve L_2 operatörleri gösterilsin. Bu durumda

$$L=L_1+L_2$$

gerçeklenir.

Lemma 3.4. L_1 operatörü lineer, sınırlı ve selfadjointtir.

İspat : L_1 operatörünün lineerliği açıktır. Her $\psi=\{\psi_n(\lambda)\}$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$\|L_1\psi\| = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |(l_1\psi)_n|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_{n-1} + \psi_{n+1}|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_{n-1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_{n+1}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2\|\psi\|$$

bulunur. Tanım 2.2.'den L_1 operatörünün sınırlı olduğu görülür.

Her $\varphi = \{\varphi_n(\lambda)\}, \psi = \{\psi_n(\lambda)\} \in l^2(\mathbb{N})$ için

$$\langle L_1\varphi, \psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_{n-1} + \varphi_{n+1})\overline{\psi_n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n-1}\overline{\psi_n} + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{n+1}\overline{\psi_n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\overline{\psi_{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\overline{\psi_{n-1}}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n\overline{(\psi_{n-1} + \psi_{n+1})}$$

$$= \langle \varphi, L_1\psi \rangle$$

bulunur. Dolayısıyla L_1 simetriktir. Teorem (2.3)'ten L_1 operatörü selfadjointtir.

Lemma 3.5. L_2 operatörü kompakt bir operatördür.

İspat : L_2 operatörünün lineerliği açıktır. Teorem 2.1.'den $M \subset l_2(\mathbb{N})$ sınırlı bir kümedir. $M_1 = L_2(M)$ olsun. L_2 operatörünün kompaktlığını göstermek için, M_1 kümesinin kompaktlığı gösterilmelidir. M kümesinin sınırlılığından $\forall \psi \in M$ için

$\|\psi\| \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ sabiti mevcuttur. $L_2(M) = M_1$ olduğundan $\forall \varphi \in M_1$ için $\varphi = L_2\psi$ olacak şekilde en az bir ψ vardır. $|a+b|^2 \leq 2|a|^2 + 2|b|^2$ eşitsizliği kullanılarak

$$\|\varphi\|^2 = \|L_2\psi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(a_{n-1}-1)\psi_{n-1} + (a_n - 1)\psi_{n+1} + b_n\psi_n|$$

$$\leq 2\sum_{n=1}^{\infty} |(a_{n-1}-1)\psi_{n-1} + b_n\psi_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |(a_n - 1)\psi_{n+1}|^2$$

$$\leq 4\sum_{n=1}^{\infty} |(a_{n-1}-1)|^2 . \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_{n-1}|^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 . \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2 + 2\sum_{n=1}^{\infty} |a_n - 1|^2 . \sum_{n=1}^{\infty} |\psi_{n+1}|^2$$

bulunur. Son elde edilen ifadenin yakınsaklığı araştırılsa, $\psi \in M \subset l_2(\mathbb{N})$ olduğundan $\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_{n-1}|^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_n|^2$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} |\psi_{n+1}|^2$ serilerinin de yakınsak olduğu görülür. Ayrıca (3.4) koşulu ve serilerde karşılaştırma testinden,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |1 - a_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |1 - a_n| \sum_{n=1}^{\infty} |1 - a_n| < \infty$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$$

serileri de yakınsak olduğundan

$$\|\varphi\|^2 < \infty$$

gerçeklenir. Bu ise M_1 kümesinin sınırlı olduğunu gösterir. Böylece $\psi_n \in M \subset l_2(\mathbb{N})$ ve $\forall \varphi = \{\varphi_n\} = l_2\psi \in M_1$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_0 \ni \forall n \geq N_0$ için $\sum_{k=n+1}^{\infty} |\varphi_k|^2 < \varepsilon^2$ olacak şekilde bir $N_0(\varepsilon)$ sayısı mevcut olur. Kompaktlık kriterinden L_2 operatörünün kampaktlığı elde edilir. O halde Weyl-Kompakt Heyecanlandırma teoremi gereğince $\sigma_c(L) = \sigma_c(L_1)$ bulunur.

Lemma 3.6. Yukarıda tanımlı L_1 operatörü , $\lambda = 2\cos z$, yeterince küçük ϑ ler ve her bir $z \in D_+ = \{ z \in \mathbb{C}_+ : |z| < \vartheta \}$ için

$$\|R_\lambda(L_1)\| \geq \frac{c_z}{|\sin z| \sqrt{1 - e^{-2\operatorname{Im} z}}} \tag{3.23}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir c_z mevcuttur.

İspat : Teorem (3.1)'e benzer olarak L_1 operatörünün rezolvent operatörü

$$\left(R_\lambda(L_1)\varphi\right)_n := \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk}(z)\varphi_k \ , \quad \varphi = \{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in l_2(\mathbb{N})$$

ve $z \in P$, $\sin z \neq 0$ olmak üzere

$$G_{nk}(z) = \begin{cases} \dfrac{e^{-ikz}e^{inz}}{2i\sin z}, k < n \\ \dfrac{e^{ikz}e^{-inz}}{2i\sin z}, k \geq n \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon Green fonksiyonudur.

$$g_k(z) := \begin{cases} (\overline{e^{-ikz}}), \ k < n \\ \ \ 0 \quad \ , k \geq n \end{cases}$$

biçiminde tanımlı fonksiyon için,

$$\|g_k(z)\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(z)|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \left|\overline{e^{-ikz}}\right|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \left|e^{ik(\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z)}\right|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} e^{-2k\operatorname{Im} z} < \infty$$

olduğundan $g_k(z) \in l_2(\mathbb{N})$ dir. O halde

$$(R_\lambda(L_1)g)_n = \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk} g_k = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{e^{-ikz}e^{inz}\overline{e^{-ikz}}}{2i\sin z} = \frac{e^{inz}}{2i\sin z} \sum_{k=1}^{n-1} e^{-ikz}\,\overline{e^{-ikz}}$$

$$= \frac{e^{inz}}{2i\sin z} \sum_{k=1}^{n-1} \left|e^{-ikz}\right|^2 = \frac{e^{inz}}{2i\sin z} \|g_k(z)\|^2$$

ve

$$\left|e^{inz}\right| = \left|e^{in(\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z)}\right| = \left|e^{in\operatorname{Re} z}\right| . \left|e^{-n\operatorname{Im} z}\right| = e^{-n\operatorname{Im} z} > \frac{1}{2}e^{-n\operatorname{Im} z}$$

olduğundan

$$\left\|R_\lambda(L_1)g\right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{e^{inz}}{2i\sin z}\left\|g_k(z)\right\|^2\right|^2 = \frac{\left\|g_k(z)\right\|^4}{4\left|\sin z\right|^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left|e^{inz}\right|^2$$

$$\geq \frac{\left\|g_k(z)\right\|^4}{4\left|\sin z\right|^2}\sum_{n=k}^{\infty}\left|e^{inz}\right|^2 \geq \frac{\left\|g_k(z)\right\|^4}{4\left|\sin z\right|^2}\sum_{n=k}^{\infty}\left|\frac{1}{2}e^{-n\operatorname{Im} z}\right|^2$$

$$= \frac{\left\|g_k(z)\right\|^4}{16\left|\sin z\right|^2}\sum_{n=k}^{\infty}e^{-2n\operatorname{Im} z} = \frac{\left\|g_k(z)\right\|^4}{16\left|\sin z\right|^2}\sum_{n=k}^{\infty}(e^{-2\operatorname{Im} z})^n$$

$$= \frac{\left\|g_k(z)\right\|^4}{16\left|\sin z\right|^2}\left[e^{-2\operatorname{Im} zk} + e^{-2\operatorname{Im} z(k+1)} + e^{-2\operatorname{Im} z(k+2)} + \ldots\right]$$

$$= \frac{\left\|g_k(z)\right\|^4}{16\left|\sin z\right|^2}\left[e^{-2\operatorname{Im} zk}\left(1 + e^{-2\operatorname{Im} z} + (e^{-2\operatorname{Im} z})^2 + \ldots\right)\right]$$

$$= \frac{\left\|g_k(z)\right\|^4 e^{-2\operatorname{Im} zk}}{16\left|\sin z\right|^2(1 - e^{-2\operatorname{Im} z})}$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$\left\|R_\lambda(L_1)\right\| \geq \frac{\left\|g_k(z)\right\| e^{-\operatorname{Im} zk}}{4\left|\sin z\right|\sqrt{1 - e^{-2\operatorname{Im} z}}}$$

olduğu görülür. Son eşitsizlikte

$$c_z = \frac{\left\|g_k(z)\right\|}{4}e^{-k\operatorname{Im} z}$$

seçilirse ispat tamamlanmış olur.

Lemma 3.7. $\sigma(L_1) = \sigma_c(L_1) = \left[-2, 2\right]$

İspat : $(\Rightarrow)$ $\lambda = 2\cos z \in \sigma_c(L_1)$ olsun. Bu durumda $\left\|R_\lambda(L_1)\right\| \geq \dfrac{c_z}{|\sin z|\sqrt{1-e^{-2\operatorname{Im} z}}}$ ifadesinden ve $\sigma_c(L_1)$ tanımından $R_\lambda(L_1)$ ifadesinin sınırsız olması gerekir.

$R_\lambda(L_1)$ sınırsız $\Leftrightarrow |\sin z|\sqrt{1-e^{-2\operatorname{Im} z}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-e^{-2\operatorname{Im} z}} = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$

$\operatorname{Im} z = 0$ ise

$$\lambda = 2\cos z = e^{iz} + e^{-iz} = e^{i(\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z)} + e^{-i(\operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z)}$$

$$= \cos(\operatorname{Re} z) + i\sin(\operatorname{Re} z) + \cos(-\operatorname{Re} z) + i\sin(-\operatorname{Re} z)$$

$$= 2\cos(\operatorname{Re} z)$$

gerçeklenir. $-1 \leq \cos(\operatorname{Re} z) \leq 1$ olduğundan $-2 \leq \lambda \leq 2$ yani $\lambda \in [-2,2]$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $\lambda = 2\cos z = [-2,2]$ olsun. Bu durumda $z \in \overline{\mathbb{C}}_+$ ve $\cos z$ tam fonksiyon olduğundan $\cos z$ sınırsızdır. Fakat $-2 \leq 2\cos z \leq 2$ kabul edildi. Bu ise ancak $z \in \mathbb{R}$ için mümkündür. Yani $\operatorname{Im} z = 0$ olmalı.

$$\left\|R_\lambda(L_1)\right\| \geq \frac{c_z}{|\sin z|\sqrt{1-e^{-2\operatorname{Im} z}}}$$

eşitsizliğinden $\operatorname{Im} z \to 0$ için $\left\|R_\lambda(L_1)\right\| \to \infty$ bulunur. Bu ise $R_\lambda(L_1)$ operatörünün $\operatorname{Im} z = 0$ için sınırsız olduğunu gösterir. $z \in [0, 2\pi]$ için $\lambda \in [-2,2]$ ve $[-2,2] \subset \sigma_c(L_1)$ olup $[-2,2] = \sigma_c(L_1)$ olduğu görülür.

Lemma 3.8. $\sigma_d(L_1) = \varnothing$

İspat : L_1 operatörünün özdeğeri olması için

$$\begin{cases} L_1 y = \lambda y = (2\cos z) y \\ \qquad y_0 = 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

denklem sistemini sağlayan özdeş olarak sıfırdan farklı bir $y \in l_2(\mathbb{N})$ çözümü olmalıdır. (3.24) denklem sisteminin aşikar olmayan çözümleri e^{inz} ve e^{-inz} olup diğer tüm çözümler bu iki çözümün lineer kombinasyonu cinsindendir. O halde $\operatorname{Im} z = 0$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{inz} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{in(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{2in \operatorname{Re} z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{-inz} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{-in(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)} \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| e^{-2in \operatorname{Re} z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} 1$$

olduğundan bu seriler ıraksaktır. Dolayısıyla $e^{inz} \notin l_2(\mathbb{N})$ ve $e^{-inz} \notin l_2(\mathbb{N})$ olup L_1 operatörünün özdeğeri mevcut değildir.

Teorem 2.6.'dan L_1 operatörünün $\sigma_r(L_1)$ rezidü spektrumunun boş olduğu aşikardır. O halde

$$\sigma(L_1) = \sigma_c(L_1) \cup \sigma_d(L_1) \cup \sigma_r(L_1) = [-2, 2]$$

elde edilir. Sonuç olarak Weyl-Kompakt Heyecanlandırma Teoreminden

$$\sigma_c(L) = \sigma_c(L_1) = [-2, 2]$$

bulunur. □

3.4. *L* Operatörünün Özdeğerleri ve Spektral Tekillikleri

L operatörünün özdeğerler kümesi ve spektral tekillikler kümesi (3.2) koşulu altında sırasıyla $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ ile gösterilsin.

Teorem 3.4. $\sigma_d(L) = \{\lambda : \lambda = 2\cos z, z \in P_0, f(z) = 0\}$ (3.25)

İspat : $A := \{\lambda : \lambda = 2\cos z, z \in P_0, f(z) = 0\}$ kümesi tanımlansın. $\sigma_d(L) = A$ olduğu gösterilecektir.

$(\Rightarrow)$ $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ olsun. Bu durumda $\lambda_0 = 2\cos z_0$, $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, ...\}$ olmak üzere

$$\begin{cases} a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n \\ (\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2) y_1 + (\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2) y_0 = 0 \end{cases}$$

sınır değer problemini sağlayan özdeş olarak sıfırdan farklı $\xi(z_0) := \xi_n(\lambda_0) \in l_2(\mathbb{N})$ çözümü mevcuttur. Yani

$$\begin{cases} L\xi_n(z_0) = \lambda_0 \xi_n(\lambda_0) \\ (\gamma_0 + \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda^2)\xi_1 + (\beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2)\xi_0 = 0 \end{cases}$$

gerçeklenir. Şimdi $\varphi_n(\lambda_0)$ ve $\xi_n(z_0)$ ifadelerinin Wronskiyenlerine bakılırsa

$$W\left[\varphi_n(\lambda_0), \xi_n(\lambda_0)\right] = a_0\left[\varphi_{n+1}(\lambda_0)\xi_n(\lambda_0) - \xi_{n+1}(\lambda_0)\varphi_n(\lambda_0)\right] = 0$$

elde edilir. Burada $\varphi_n(\lambda_0)$ ve $\xi_n(\lambda_0)$ ifadeleri lineer bağımlı olduğundan $c \neq 0$ olmak üzere

$$\xi_n(\lambda_0) = c\varphi_n(\lambda_0)$$

şeklinde yazılabilir. $\xi_n(\lambda_0)$ ile $e_n(z_0)$ ifadelerinin Wronskiyenlerine bakılırsa

$$\begin{aligned} W\left[\xi_n(\lambda_0), e_n(z_0)\right] &= a_0\left[\xi_{n+1}(\lambda_0)e_n(z_0) - e_{n+1}(z_0)\xi_n(\lambda_0)\right] \\ &= a_0\left[c\varphi_{n+1}(\lambda_0)e_n(z_0) - e_{n+1}(z_0)c\varphi_n(\lambda_0)\right] \\ &= a_0 c\left[\varphi_{n+1}(\lambda_0)e_n(z_0) - e_{n+1}(z_0)\varphi_n(\lambda_0)\right] \\ &= a_0 c\left[\varphi_1(\lambda_0)e_0(z_0) - e_1(z_0)\varphi_0(\lambda_0)\right] \\ &= a_0 c f(z_0) \end{aligned} \tag{3.26}$$

olur. Diğer taraftan;

$$W\left[\xi_n(\lambda_0), e_n(z_0)\right] = a_0\left[\xi_{n+1}(\lambda_0)e_n(z_0) - e_{n+1}(z_0)\xi_n(\lambda_0)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} a_0\left[\xi_{n+1}(\lambda_0)e_n(z_0) - e_{n+1}(z_0)\xi_n(\lambda_0)\right] = 0 \qquad (3.27)$$

elde edilir. Buradan $\xi_n(\lambda_0)$ ve $e_n(z_0)$ ifadeleri lineer bağımlı olduğundan $c \neq 0$ bir sabit olmak üzere

$$\xi_n(\lambda_0) = ce_n(z_0)$$

şeklinde yazılabileceği görülür. Dolayısıyla $e_n(z_0)$, 2π periyotlu fonksiyonu da bir özfonksiyondur ve $e_n(z_0) \subset l^2(\mathbb{N})$ olmalıdır. Bu ise $z \in P_0$ bölgesinde olduğunu gösterir. Diğer taraftan (3.26) , (3.27) den $f(z_0) = 0$ dir. Yani sonuç olarak $\forall \lambda_0 \in \sigma_d(L)$ için $\lambda_0 \in A = \{\lambda : \lambda = 2\cos z, z \in P_0, f(z) = 0\}$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $\lambda_0 \in A$ olsun. Bu durumda A kümesinin tanımından $\lambda_0 = 2\cos z_0$ olacak şekilde en az bir $z_0 \in P_0$ vardır öyle ki burada $f(z_0) = 0$ gerçeklenir.

$$W\left[\varphi(z), e(z)\right] = a_0\left[\varphi_1(2\cos z)e_0(z) - e_1(z)\varphi_0(2\cos z)\right] := a_0 f(z)$$

ifadesinden

$$W\left[\varphi(z_0), e(z_0)\right] = W\left[\varphi_1(\lambda_0)e_0(z_0) - e_1(z_0)\varphi_0(\lambda_0)\right] = a_0 f(z_0) = 0$$

yazılabilir. Wronskiyenleri sıfır olduğundan $e_n(z_0)$ ve $\varphi_n(z_0)$ lineer bağımlı olup, $c \neq 0$ olmak üzere

$$\varphi_n(\lambda_0) = ce_n(z_0)$$

gerçeklenir. $\lambda_0 \in A$ için $e_n(z_0) \in l_2(\mathbb{N})$ dolayısıyla $\varphi_n(\lambda_0) \in l_2(\mathbb{N})$ olur. Buradan da $f(z_0) \in l_2(\mathbb{N})$ bulunur. Böylece $\lambda_0 \in \sigma_d(L)$ elde edilir.

□

Teorem 3.5. $\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda = 2\cos z, z \in [0, 2\pi], f(z) = 0\} \setminus \{0, \pi\}$ (3.28)

İspat : $B=\{\lambda:\lambda=2\cos z, z\in[0,2\pi], f(z)=0\}\setminus\{0,\pi\}$ kümesi tanımlansın.

$(\Rightarrow)$ $\lambda_0\in B$ kabul edilsin. Bu durumda B kümesinin tanımından $\lambda_0=2\cos z_0$ olacak şekilde en az bir $z_0\in[0,2\pi]$ vardır öyle ki burada $f(z_0)=0$ gerçeklenir. (3.14) ve (3.15)'ten $f(z_0)=0$ için, z_0 resolvent operatörün kutup noktası olur. Ayrıca $z_0\in[0,2\pi]\Rightarrow\lambda_0\in\sigma_c(L)=[-2,2]$ olduğu açıktır. Spektral tekilliğin tanımından $\lambda_0\in\sigma_{ss}(L)$ bulunur.

$(\Leftarrow)$ $\lambda_0\in\sigma_{ss}(L)$ olsun. Spektral tekilliğin tanımı gereği $\lambda_0\in\sigma_c(L)=[-2,2]$, $\lambda_0=2\cos z_0$ ve resolventin kutubu olacak şekilde en az bir $z_0\in[0,2\pi]$ vardır. Buradan $f(z_0)=0$ eşitliği görülür. Bu bilgilere ek olarak, daha önce sürekli spektrum L_1 operatörünün resolvent operatöründen faydalanılarak bulunduğu biliniyor. L_1 operatörünün resolvent operatörünün tanımlı olması için $\sin z\neq 0$ olmalıdır. Dolayısıyla B kümesinden $\sin z$ fonksiyonunu sıfır yapan $\{0,\pi\}$ noktaları çıkarılmalıdır. Böylece $\lambda_0\in B$ elde edilerek ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi $f(z)$ fonksiyonu, $\cos z=\dfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $e_n(z)$ ve (3.13) ifadelerinden yararlanılarak açık olarak yazılırsa

$$\begin{aligned}
f(z)=&\left[\gamma_0+\gamma_1(e^{iz}+e^{-iz})+\gamma_2(2+e^{2iz}+e^{-2iz})\right]\left[\alpha_1e^{iz}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}A_{1m}e^{imz}\right)\right]\\
&+\left[\beta_0+\beta_1(e^{iz}+e^{-iz})+\beta_2(2+e^{2iz}+e^{-2iz})\right]\left[\alpha_0\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}A_{0m}e^{imz}\right)\right]\\
=&\,\alpha_0\beta_2e^{-2iz}+(\alpha_1\gamma_2+\alpha_0\beta_1)e^{-iz}+\alpha_1\gamma_1+\alpha_0(\beta_0+2\beta_2)+\left[\alpha_1(\gamma_0+2\gamma_2)+\alpha_0\beta_1\right]e^{iz}\\
&+\alpha_1\gamma_2e^{3iz}+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_0\beta_2A_{0m}e^{i(m-2)z}+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_1\gamma_2A_{1m}+\alpha_0\beta_1A_{0m})e^{i(m-1)z}\\
&+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_1\gamma_1A_{1m}+\alpha_0(\beta_0+2\beta_2)A_{0m}\right]e^{imz}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_1(\gamma_0+2\gamma_2)A_{1m}+\alpha_0\beta_1A_{0m}\right]e^{i(m+1)z}
\end{aligned}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_1\gamma_1 A_{1m}+\alpha_0\beta_2 A_{0m})e^{i(m+2)z}+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_1\gamma_2 A_{1m}e^{i(m+3)z}$$

elde edilir. $F(z)$ fonksiyonu $F(z):=f(z)e^{2iz}$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda F, $\mathbb{C}_+$ da analitik, $\overline{\mathbb{C}}_+$ da sürekli olur. $F(z)$ in açık hali

$$F(z)=\alpha_0\beta_2+(\alpha_1\gamma_2+\alpha_0\beta_1)e^{iz}+\left[\alpha_1\gamma_1+\alpha_0(\beta_0+2\beta_2)\right]e^{2iz}$$

$$+\left[\alpha_1(\gamma_0+2\gamma_2)+\alpha_0\beta_1\right]e^{3iz}+(\alpha_1\gamma_1+\alpha_0\beta_2)e^{4iz}$$

$$+\alpha_1\gamma_2 e^{5iz}+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_0\beta_2 A_{0m}e^{imz}+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_1\gamma_2 A_{1m}+\alpha_0\beta_1 A_{0m})e^{i(m+1)z}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_1\gamma_1 A_{1m}+\alpha_0(\beta_0+2\beta_2)A_{0m}\right]e^{i(m+2)z}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_1(\gamma_0+2\gamma_2)A_{1m}+\alpha_0\beta_1 A_{0m}\right]e^{i(m+3)z}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_1\gamma_1 A_{1m}+\alpha_0\beta_2 A_{0m})e^{i(m+4)z}+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_1\gamma_2 A_{1m}e^{i(m+5)z} \tag{3.29}$$

biçimindedir. Ayrıca $F(z)=F(z+2\pi)$ sağlanır. Böylece (3.25) ve (3.28)'den

$$\sigma_d(L)=\left\{\lambda:\lambda=2\cos z,\ z\in P_0,\ F(z)=0\right\} \tag{3.30}$$

$$\sigma_{ss}(L)=\left\{\lambda:\lambda=2\cos z,\ z\in\left[0,2\pi\right],\ F(z)=0\right\}\setminus\left\{0,\pi\right\} \tag{3.31}$$

bulunur.

Tanım 3.1. F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının katına, L operatörünün özdeğerinin veya spektral tekilliğinin katı denir.

Tanım (3.1)'den görülür ki, L operatörünün özdeğerleri ve spektral tekilliklerinin sayısal özelliklerini incelemek için, F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının sayısal özelliklerini incelemek gerekir. Bu sıfırlar için;

$$M_1:=\left\{z:z\in P_0,\ F(z)=0\right\} \tag{3.32}$$

$$M_2:=\left\{z:z\in\left[0,2\pi\right],F(z)=0\right\} \tag{3.33}$$

ve M_1 'in limit noktalarının kümesini M_3 ile, F 'in sonsuz katlı sıfırlarının kümesi ise M_4 ile gösterilsin. Böylece (3.29), (3.30), (3.31)'den $\sigma_d(L)$ ve $\sigma_{ss}(L)$ kümeleri sırasıyla

$$\sigma_d(L) = \{\lambda : \lambda = 2\cos z, z \in M_1\}$$

$$\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda = 2\cos z, z \in M_2\} \setminus \{0, \pi\}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Teorem 3.6. (3.4) koşulu altında;

(i) M_1 kümesi sınırlı ve sayılabilirdir.

(ii) $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, $M_1 \cap M_4 = \varnothing$

(iii) M_2 kümesi kompakttır ve reel eksendeki Lebesgue ölçüsü μ olmak üzere $\mu(M_2) = 0$ olur.

(iv) $M_3 \subset M_2$, $M_4 \subset M_2$ ve $\mu(M_3) = \mu(M_4) = 0$ olur.

(v) $M_3 \subset M_4$ olur.

İspat : (i) İspat için aşağıdaki lemma kullanılacaktır.

Lemma 3.9. $F(z)$ fonksiyonu

$$F(z) = \begin{cases} \alpha_0\beta_2 + O(e^{-\tau}), & \beta_2 \neq 0,\ z \in P,\ \tau \to \infty \\ (\alpha_1\gamma_2 + \alpha_0\beta_1)e^{iz} + O(e^{-2\tau}), & \beta_2 = 0,\ z \in P,\ \tau \to \infty \end{cases} \tag{3.34}$$

asimptotik eşitliğini gerçekler.

İspat : (3.4) ve (3.29)'dan $\beta_2 \neq 0$ ve $\forall z \in P \ni z = \xi + i\tau$ için

$$\lim_{\tau\to\infty}\left[\left(F(z) - \alpha_0\beta_2\right)e^{\tau}\right] = \lim_{\tau\to\infty}\left[(\alpha_1\gamma_2 + \alpha_0\beta_1)e^{i(\xi+i\tau)}e^{\tau} + \left[\alpha_1\gamma_1 + \alpha_0(\beta_0 + 2\beta_2)\right]e^{2i(\xi+i\tau)}e^{\tau}\right.$$

$$+\left[\alpha_1(\gamma_0 + 2\gamma_2) + \alpha_0\beta_1\right]e^{3i(\xi+i\tau)}e^{\tau} + (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_0\beta_2)e^{4i(\xi+i\tau)}e^{\tau} + \alpha_1\gamma_2 e^{5i(\xi+i\tau)}e^{\tau}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_0\beta_2 A_{0m}e^{im(\xi+i\tau)}e^{\tau} + \sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_1\gamma_2 A_{1m} + \alpha_0\beta_1 A_{0m})e^{i(m+1)(\xi+i\tau)}e^{\tau}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_1\gamma_1 A_{1m}+\alpha_0(\beta_0+2\beta_2)A_{0m}\right]e^{i(m+2)(\xi+i\tau)}e^{\tau}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_1(\gamma_0+2\gamma_2)A_{1m}+\alpha_0\beta_1 A_{0m}\right]e^{i(m+3)(\xi+i\tau)}e^{\tau}$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_1\gamma_1 A_{1m}+\alpha_0\beta_2 A_{0m})e^{i(m+4)(\xi+i\tau)}e^{\tau}+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_1\gamma_2 A_{1m}e^{i(m+5)(\xi+i\tau)}e^{\tau}\right]=O(1)$$

bulunur. Buradan ise

$$\left(F(z)-\alpha_0\beta_2\right)e^{\tau}=O(1),\ \beta_2\neq 0,\, z\in P,\, \tau\to\infty$$

$$\Rightarrow F(z)=\alpha_0\beta_2+O(e^{-\tau}),\ \beta_2\neq 0,\, z\in P,\, \tau\to\infty$$

eşitlikleri yazılabilir. Benzer şekilde $\beta_2\neq 0$ ve $\forall z\in P \ni z=\xi+i\tau$ için

$$\lim_{\tau\to\infty}\left[\left(F(z)-(\alpha_1\gamma_2+\alpha_0\beta_1)e^{iz}\right)e^{2\tau}\right]=\lim_{\tau\to\infty}\left[\left(\alpha_1\gamma_1+\alpha_0\beta_0\right)e^{2i(\xi+i\tau)}e^{2\tau}\right.$$

$$+\left[\alpha_1(\gamma_0+2\gamma_2)+\alpha_0\beta_1\right]e^{3i(\xi+i\tau)}e^{2\tau}+(\alpha_1\gamma_1)e^{4i(\xi+i\tau)}e^{2\tau}+\alpha_1\gamma_2 e^{5i(\xi+i\tau)}e^{2\tau}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_1\gamma_2 A_{1m}+\alpha_0\beta_1 A_{0m})e^{i(m+1)(\xi+i\tau)}e^{2\tau}+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_1\gamma_1 A_{1m}+\alpha_0\beta_0 A_{0m}\right]e^{i(m+2)(\xi+i\tau)}e^{2\tau}$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\left[\alpha_1(\gamma_0+2\gamma_2)A_{1m}+\alpha_0\beta_1 A_{0m}\right]e^{i(m+3)(\xi+i\tau)}e^{2\tau}+\sum_{m=1}^{\infty}(\alpha_1\gamma_1 A_{1m})e^{i(m+4)(\xi+i\tau)}e^{2\tau}$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}\alpha_1\gamma_2 A_{1m}e^{i(m+5)(\xi+i\tau)}e^{2\tau}\right]=O(1)$$

bulunur. Bu ise

$$\left(F(z)-(\alpha_1\gamma_2+\alpha_0\beta_1)e^{iz}\right)e^{2\tau}=O(1),\ \beta_2=0,\, z\in P,\ \tau\to\infty$$

$$\Rightarrow F(z)=(\alpha_1\gamma_2+\alpha_0\beta_1)e^{iz}+O(e^{-2\tau}),\ \beta_2=0, z\in P,\, \tau\to\infty$$

olduğunu gösterir. □

(3.34) asimptotik eşitliği F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının sınırlı bir bölgede olduğunu, yani M_1 kümesinin sınırlı olduğunu gösterir. F fonksiyonu P_0 bölgesinde analitik olup Teorem (2.8)'den F fonksiyonun P_0 bölgesindeki sıfırlarının ayrık olduğu görülür. Bu ise M_1 kümesinin sayılabilir olduğunu gösterir.

(ii) F fonksiyonu P_0 bölgesinde analitik ve Teorem (2.9), Teorem (2.10)'dan, F fonksiyonunun P_0 bölgesindeki sıfırlarının limit noktaları ile P_0'daki sonsuz katlı sıfırları, P_0 bölgesinin sınırındadır. Buradan da $M_1 \cap M_2 = \varnothing$ ve $M_1 \cap M_4 = \varnothing$ olduğu görülür.

(iii) M_2 kümesinin tanımından $\forall z \in M_2$ için $z \in [0, 2\pi]$ olduğundan M_2 kümesi sınırlıdır ve F fonksiyonu $\mathbb{R}$'de sürekli olduğundan M_2 kümesinin limit noktaları yine M_2 kümesinin içinde kalır. Yani M_2 kümesi kapalıdır. Teorem (2.2)'den M_2 kümesi kompakttır. Teorem (2.11)'dan $\mu(M_2) = 0$ elde edilir.

(iv) F fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}_+}$'da sürekli olduğundan $F(z)$'nin P_0'daki sıfırlarının limit noktaları yine $F(z)$'nin sıfırı olur. Yani $F(z)$'nin sıfırlarının limit noktası Teorem (2.9)'den $[0, 2\pi]$ aralığına düşer. Buradan $M_3 \subset M_2$ olduğu görülür. Teorem (2.10)'dan da $M_4 \subset M_2$ olduğu açıktır. Buradan da $\mu(M_3) = \mu(M_4) = 0$ bulunur.

(v) M_3 kümesinden keyfi bir $z_0 \in M_3$ ve $z_0 \neq z_n$ için $z_n \in M_1$ alınsın. M_1 ve M_3 kümelerinin tanımından $F(z_n) = 0$ ve

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z_0$$

olduğu açıktır. F fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}_+}$'da sürekli olduğundan

$$\lim_{n \to \infty} F(z_n) = F(\lim_{n \to \infty} z_n) = F(z_0)$$

olur. Yani, z_0 $F(z)$ fonksiyonunun sıfırıdır. İspatın tamamlanması için $z_0 \in M_4$ olduğu gösterilmelidir. Tersine, kabul edilsin ki z_0, $F(z)$ fonksiyonunun sonlu katlı sıfırı olsun. Bu durumda hipotez gereği $\mathbb{C}_+$'da analitik, $\overline{\mathbb{C}_+}$'da sürekli öyle bir h fonksiyonu mevcuttur ki

$$F(z) = (z - z_0)^k h(z), \; h(z) \neq 0, \; 1 \leq k < \infty$$

gerçeklenir. Buradan da $z_0 \neq z_n$ olduğundan, tüm z_n 'ler h fonksiyonun da sıfırıdır. h fonksiyonu $\overline{\mathbb{C}_+}$ 'da sürekli olduğundan,

$$0 = \lim_{n\to\infty} h(z_n) = h(\lim_{n\to\infty} z_n) = h(z_0)$$

bulunur. Bu ise z_0 'ın, $F(z)$ 'in sonlu katlı sıfırı olması kabulüyle çelişir. O halde z_0, $F(z)$ 'in sonsuz katlı sıfırı olup $z_0 \in M_4$ bulunur. Buradan da $M_3 \subset M_4$ elde edilir.

Teorem 3.7. (3.4) koşulunda

(i) L operatörünün özdeğerler kümesi sınırlı, sayılabilir ve limit noktaları $[-2,2]$ kapalı aralığına düşer.

(ii) $\sigma_{ss}(L) \subset [-2,2]$ ve $\mu[\sigma_{ss}(L)] = 0$

gerçeklenir.

İspat : (i) M_1 kümesi sınırlı ve sayılabilir. $M_3 \subset M_2 = \{z : z \in [0,2\pi], F(z) = 0\}$ ve $\lambda = 2\cos z$ olduğundan $M_3 \subseteq [-2,2]$ bulunur.

(ii) $\sigma_{ss}(L) = \{\lambda : \lambda = 2\cos z, z \in M_2,\} \setminus \{0\} \subset [-2,2]$ ve $\mu(M_2) = 0$ olduğundan $\mu[\sigma_{ss}(L)] = 0$ eşitliği açıkça görülebilir.

□

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\exp(\varepsilon n^{\delta})(|1-a_n| + |b_n|) \right] < \infty, \quad \varepsilon > 0, \; \frac{1}{2} \leq \delta \leq 1 \tag{3.35}$$

koşulunda L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sayısal özelliklerini incelemek için (3.35)'nın $\delta = 1$ ve $\frac{1}{2} \leq \delta < 1$ durumları incelenecektir. $\delta = 1$ için

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left[\exp(\varepsilon n)(|1-a_n| + |b_n|) \right] < \infty \;, \; \varepsilon > 0 \tag{3.36}$$

koşulu göz önüne alınsın.

Teorem 3.8. Eğer

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\exp(\varepsilon n)(|1-a_n|+|b_n|\right]<\infty\,,\ \varepsilon>0 \tag{3.36}$$

koşulu gerçeklenirse L operatörü sonlu sayıda sonlu katlı özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahip olur.

İspat : $c>0$, $n,m\in\mathbb{N}$ için $|A_{nm}|\le c\sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty}(|1-a_k|+|b_k|)$ eşitsizliği biliniyor. Bu eşitsizlikten ve

$$k\ge n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]$$

$$\ge\frac{1}{6}(n+m)$$

olduğu dikkate alınarak

$$|A_{nm}|\le c\sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty}(|1-a_k|+|b_k|)$$

$$=\sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty}\exp(-\varepsilon k)\exp(\varepsilon k)(|1-a_k|+|b_k|)$$

$$\le c\exp\left[-\frac{\varepsilon}{6}(n+m)\right]\sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty}\exp(\varepsilon k)(|1-a_k|+|b_k|)$$

$$\le\exp\left[-\frac{\varepsilon}{6}(n+m)\right]$$

elde edilir. Buradan da

$$\left|\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}e^{imz}\right|\le\sum_{m=1}^{\infty}|A_{nm}||e^{imz}|\le c\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left[-\frac{\varepsilon}{6}(n+m)\right]\exp(-m\,\mathrm{Im}\,z)$$

$$\leq c\sum_{m=1}^{\infty}\exp\left[-m\left(\frac{\varepsilon}{6}+\operatorname{Im} z\right)\right]$$

bulunur. Elde edilen eşitsizlikten son serinin $\frac{\varepsilon}{6}+\operatorname{Im} z>0$ yakınsak olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla, $\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} e^{imz}$ serisi $\operatorname{Im} z>-\frac{\varepsilon}{6}$ için z'ye göre bu bölgede düzgün yakınsaktır. (3.29)'dan $F(z)$ fonksiyonu, $\mathbb{C}_+$'dan $\operatorname{Im} z>-\frac{\varepsilon}{6}$ bölgesine analitik olarak devam eder. Bu durumda ise Teorem (2.9)'den F fonksiyonunun P bölgesindeki sıfırlarının limit noktaları $[0,2\pi]$ aralığında olamaz. Dolayısıyla Teorem (3.6)'dan M_1 ve M_2 kümeleri sınırlı olup Bolzano–Weirstrass Teoremi gereğince M_1 ve M_2 kümeleri sonlu sayıda elemana sahiptirler. Bununla birlikte F fonksiyonu $\operatorname{Im} z>-\frac{\varepsilon}{6}$ bölgesinde analitik olduğundan, P bölgesi içindeki sıfırları sonlu katlıdır. O halde (3.32) ve (3.33)'den, L operatörünün sonlu sayıda, sonlu katlı özdeğerleri ve spektral tekillikleri vardır.

Şimdi de (3.35) koşulunu, (3.36) koşulundan daha zayıf olan $\varepsilon>0$ ve $\frac{1}{2}\leq\delta<1$ durumunda ele alalım.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\exp(\varepsilon n^{\delta})(|1-a_n|+|b_n|\right]<\infty \tag{3.37}$$

F fonksiyonu (3.37) koşulu altında $\mathbb{C}_+$ bölgesinde sonsuz diferansiyellenebilir fakat bu koşulu altında alt yarı düzleme analitik devama sahip değildir. Bunun için L operatörünün özdeğerlerinin ve spektral tekilliklerinin sonluluğu Teorem (2.12)'den faydanılanarak araştırılacaktır. Teorem (2.12)'deki g fonksiyonu yerine 2π periyotlu F fonksiyonu, G kümesi yerine $M_4\subset[0,2\pi]$ kümesi alınıp, ayrıca η_k ifadesi de belirlenecektir. O halde (3.37) koşulu altında $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ olmak üzere $F(z)$ fonksiyonunun türevleri (3.29) eşitliğinden,

$$\left|F^{(k)}(z)\right|\leq|\alpha_1\gamma_2+\alpha_0\beta_1|+2^k|\alpha_1\gamma_1+\alpha_0(\beta_0+2\beta_2)|+3^k|\alpha_1(\gamma_0+2\gamma_2+\alpha_0\beta_1|+4^k|\alpha_1\gamma_1+\alpha_0\beta_2|$$

$$+5^k\left|\alpha_1\gamma_2\right|+\sum_{m=1}^{\infty}m^k\left|\alpha_0\beta_2A_{0m}\right|\left|e^{imz}\right|$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(m+1)^k\left|\alpha_1\gamma_2A_{1m}+\alpha_0\beta_1A_{0m}\right|\left|e^{i(m+1)z}\right|$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(m+2)^k\left|\alpha_1\gamma_1A_{1m}+\alpha_0(\beta_0+2\beta_2)A_{0m}\right|\left|e^{i(m+2)z}\right|$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(m+3)^k\left|\alpha_1(\gamma_0+2\gamma_2)A_{1m}+\alpha_0\beta_1A_{0m}\right|\left|e^{i(m+3)z}\right|$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(m+4)^k\left|\alpha_1\gamma_1A_{1m}+\alpha_0\beta_2A_{0m}\right|\left|e^{i(m+4)z}\right|$$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}(m+5)^k\left|\alpha_1\gamma_2A_{1m}\right|\left|e^{i(m+5)z}\right|$$

olup burada $m\geq 1$ için $2m\geq 2$, $3m\geq 3, 4m\geq 4$ ve $5m\geq 5$ olduğundan

$$\left|F^{(k)}(z)\right|\leq 6^k\left(\left|\alpha_1\gamma_2+\alpha_0\beta_1\right|+\left|\alpha_1\gamma_1+\alpha_0(\beta_0+2\beta_2)\right|+\left|\alpha_1(\gamma_0+2\gamma_2+\alpha_0\beta_1\right|+\left|\alpha_1\gamma_1+\alpha_0\beta_2\right|+\left|\alpha_1\gamma_2\right|\right)$$

$$+6^k\left\{\sum_{m=1}^{\infty}m^k\left|\alpha_0\beta_2A_{0m}\right|+\sum_{m=1}^{\infty}m^k\left|\alpha_1\gamma_2A_{1m}+\alpha_0\beta_1A_{0m}\right|+\sum_{m=1}^{\infty}m^k\left|\alpha_1\gamma_1A_{1m}+\alpha_0(\beta_0+2\beta_2)A_{0m}\right|\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{\infty}m^k\left|\alpha_1(\gamma_0+2\gamma_2)A_{1m}+\alpha_0\beta_1A_{0m}\right|+\sum_{m=1}^{\infty}m^k\left|\alpha_1\gamma_1A_{1m}+\alpha_0\beta_2A_{0m}\right|+\sum_{m=1}^{\infty}m^k\left|\alpha_1\gamma_2A_{1m}\right|\right\}\quad(3.38)$$

Ayrıca $n\geq 0$ için

$$k\geq n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]\geq\frac{m}{6}$$

gerçeklenir. Bu eşitsizlik $\frac{1}{2}\leq\delta<1$ için

$$-k^{\delta}\leq-\frac{m^{\delta}}{6}$$

ifadesini gerçekler. Son bulunan eşitsizlik ve (3.12) kullanılarak

$$\left|A_{nm}\right| \le \sum_{k=n+\left[\left|\frac{m}{2}\right|\right]}^{\infty} \exp(-\varepsilon k^{\delta})\exp(\varepsilon k^{\delta})(\left|1-a_k\right|+\left|b_k\right|) \le c\exp\left[-\frac{\varepsilon}{6}(m^{\delta})\right] \tag{3.39}$$

yazılabilir. (3.37) ve (3.38)'dan

$$\left|F^{(k)}(z)\right| \le c6^k + c6^k \sum_{m=1}^{\infty} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{6}m^{\delta}} \tag{3.40}$$

elde edilir. Burada

$$\eta_k = c6^k \sum_{m=1}^{\infty} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{6}m^{\delta}}$$

olsun. Literatürde, $G:[a,b]\to\mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{m=1}^{n} G\left(a+m\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b G(t)dt$$

eşitliği biliniyor. Bu eşitlikte $a=0$, $b=n$ ve

$$G(t) = t^k e^{-\frac{\varepsilon}{6}t^{\delta}}$$

olmak üzere

$$\eta_k = c6^k \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} m^k e^{-\frac{\varepsilon}{6}m^{\delta}}$$

$$= c6^k \lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n} G(m)$$

$$= c6^k \int_0^n t^k e^{-\frac{\varepsilon}{6}t^{\delta}} dt$$

$$\le c6^k \int_0^\infty t^k e^{-\frac{\varepsilon}{6}t^{\delta}} dt$$

bulunur. $y=\frac{\varepsilon}{6}t^{\delta}$ dönüşümü yapılırsa,

$$t=\left(\frac{6y}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}$$

$$dt=\frac{1}{\delta}\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}y^{\frac{1}{\delta}-1}dy$$

olduğundan

$$\eta_k \le c6^k\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}}\frac{1}{\delta}\int_0^{\infty}y^{\frac{k+1}{\delta}-1}e^{-y}dy \tag{3.41}$$

yazılabilir. (3.41) eşitsizliğinde, $a=\frac{k+1}{\delta}-1$ için $a>1$ açıkça görülür. Gamma fonksiyonu kullanılarak (3.41) için

$$\eta_k \le c6^k\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}}\frac{1}{\delta}\Gamma(a+1)$$

$$=c6^k\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}}\frac{1}{\delta}a!$$

$$\le c6^k\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}}\frac{1}{\delta}a^a$$

$$\le c6^k\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}}\frac{1}{\delta}(a+1)^a$$

$$\le c6^k\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}}\frac{1}{\delta}\left(\frac{k+1}{\delta}\right)^{\frac{k+1}{\delta}-1}$$

$$=c6^k\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}}(k+1)^{-1}\left[\frac{1}{\delta}(k+1)\right]^{\frac{k+1}{\delta}}$$

eşitsizliği bulunur. Burada $\frac{1}{2} \le \delta < 1$ için $2 \ge \frac{1}{\delta}$ olduğu kullanılarak

$$\eta_k \le c6^k \left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} 2^{\frac{1}{\delta}(k+1)} (k+1)^{-1} (k+1)^{\frac{k+1}{\delta}}$$

$$\le c6^k \left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{-1} 2^{2(k+1)} (k+1)^{\frac{k}{\delta}} (k+1)^{\frac{1}{\delta}}$$

$$\le c6^{2k+1} \left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} (k+1)^{-1} (k+1)^{\frac{k}{\delta}} (k+1)^{\frac{1}{\delta}}$$

bulunur. Literatürde bilinen

$$(1+k)^{\frac{1}{\delta}-1} < e^{\frac{k}{\delta}}$$

eşitsizliği kullanılırsa

$$\eta_k \le c6^{2k+1} \left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}} (k+1)^{\frac{k}{\delta}} \tag{3.42}$$

ifadesi gerçeklenir. Yine literatürdeki

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^k < e$$

eşitsizliğinden

$$\left(1+\frac{1}{k}\right)^{\frac{k}{\delta}} < e^{\frac{1}{\delta}}$$

olup

$$(k+1)^{\frac{k}{\delta}} < k^{\frac{k}{\delta}} e^{\frac{1}{\delta}} \tag{3.43}$$

bulunur. Ayrıca

$$k^k < k!e^k$$

eşitsizliğinden

$$k^{\frac{k}{\delta}} < (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}}$$

yazılabilir. (3.44)'den ise,

$$(k+1)^{\frac{k}{\delta}} < (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k+1}{\delta}}$$

ifadesi kolayca görülebilir. Burada son elde edilen eşitsizlik (3.42)'de kullanılırsa

$$\eta_k \le c6^{2k+1}\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{k}{\delta}} (k!)^{\frac{1}{\delta}} e^{\frac{k+1}{\delta}}$$

$$= c6^{2k+1}\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{k+1}{\delta}} e^{\frac{2k+1}{\delta}} k!(k!)^{\frac{1}{\delta}-1}$$

$$= 6ce^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\left[36e^{\frac{2}{\delta}}\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]^k k!(k!)^{\frac{1}{\delta}-1}$$

$$= Dd^k k!(k!)^{\frac{1}{\delta}-1}$$

$$\le Dd^k k! k^{k(\frac{1}{\delta}-1)}$$

bulunur. $k \ge 1$ için $k! k^{k(\frac{1}{\delta}-1)} \ge 1$ olduğu bilgisi kullanılarak (3.40)'den,

$$\left|F^{(k)}(z)\right| \le c6^k + Dd^k k! k^{k(\frac{1}{\delta}-1)}$$

$$\le c6^k k! k^{k(\frac{1}{\delta}-1)} + Dd^k k! k^{k(\frac{1}{\delta}-1)} \le Dd^k k! k^{k(\frac{1}{\delta}-1)} \tag{3.44}$$

olur. Burada $D = 6ce^{\frac{1}{\delta}}\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}$ ve $d = \left[36e^{\frac{2}{\delta}}\left(\frac{6}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\delta}}\right]$ ve $D > 0$ ve $d > 0$ ifadeleri c, ε ve δ ifadelerine bağlı olarak yazılır. O halde Teorem (2.11)'deki η_k ifadesi yerine

$$\eta_k = Dd^k k! k^{k(\frac{1}{\delta}-1)}$$

alınacaktır.

Teorem 3.9. (3.37) koşulunda $M_4 = \varnothing$ olur.

İspat : İspat için Teorem (2.12) kullanılacaktır. Burada F fonksiyonu özdeş olarak sıfır değildir ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için

$$t(s) = \inf_k \frac{\eta_k s^k}{k!}$$

$$= \inf_k \frac{Dk! k^{k(\frac{1}{\delta}-1)} (ds)^k}{k!}$$

$$= D \inf_k \left[k^{k(\frac{1}{\delta}-1)} (ds)^k \right]$$

olmak üzere, Teorem (2.12)'deki integral aralığı $\omega > 0$ için $[0, \omega)$ alınırsa

$$\int_0^{\omega} Int(s) d\mu(A_{4,s}) > -\infty \qquad (3.45)$$

olur. Şimdi $t(s)$ fonksiyonunu göz önüne alınarak

$$h(x) = x^{x(\frac{1}{\delta}-1)} (ds)^x \qquad (3.46)$$

fonksiyonunu tanımlansın. $h(x)$ fonksiyonunun ekstremum noktaları bulunursa, $t(s)$ açıkça yazılabilir. Bunun için (3.46)'den,

$$lnh(x) = xIn(dsx^{\frac{1}{\delta}-1})$$

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1} \right) + \frac{x\left(\frac{1}{\delta}-1\right) dsx^{\frac{1}{\delta}-2}}{dsx^{\frac{1}{\delta}-1}}$$

$$=\frac{1}{\delta}-1+\ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)$$

ifadeleri elde edilir. Buradan da

$$h'(x)=x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x\left[\frac{1}{\delta}-1+\ln(dsx^{\frac{1}{\delta}-1})\right]$$

eşitliği gerçeklenir. O halde $h'(x_0)=0$ için

$$\frac{1}{\delta}-1+\ln(dsx_0^{\frac{1}{\delta}-1})=0$$

denklemi x_0 için çözülürse,

$$x_0=e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}$$

bulunur. Ayrıca

$$h''(x)=\left[x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x\right]'\left[\frac{1}{\delta}-1+\ln(dsx^{\frac{1}{\delta}-1})\right]+\left[x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x\right]\left[\frac{1}{\delta}-1+\ln(dsx^{\frac{1}{\delta}-1})\right]'$$

$$=x^{x(\frac{1}{\delta}-1)}(ds)^x\left\{\left[\frac{1}{\delta}-1+\ln\left(dsx^{\frac{1}{\delta}-1}\right)\right]^2+\left(\frac{1}{\delta}-1\right)x^{-1}\right\}$$

olup $\frac{1}{2}\leq\delta<1$ için $\frac{1}{\delta}>1$eşitsizliği açıktır. Yukarıda elde edilen x_0 değeri $h''(x)$ fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$h''(x_0)=e^{(\frac{1}{\delta}-1)e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}}\left[(\frac{1}{\delta}-1)e(ds)^{\frac{\delta}{1-\delta}}\right]>0$$

şeklinde bulunur. Bu son ifadeden ise x_0 değerinin $h(x)$ fonksiyonu için minimum değer olduğu görülür.

$$\min_{x\in[0,\infty)}h(x)=h(x_0)$$

$$=\left[e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\right]^{\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}}(ds)^{e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}}$$

$$=\exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{\frac{-\delta}{1-\delta}}s^{\frac{-\delta}{1-\delta}}\right)(ds)^{-e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}}(ds)^{e^{-1}(ds)^{\frac{-\delta}{1-\delta}}}$$

$$=\exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right)$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$t(s)=D\exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right) \tag{3.47}$$

bulunur. Buradan da (3.45) ve (3.47) kullanılarak

$$\int_0^{\omega} Int\left[D\exp\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right)\right]d\mu(A_{4,s})>-\infty$$

yazılabilir. Ayrıca Teorem (3.6)'dan $\mu(M_4)=0$ olduğundan

$$\infty>-\int_0^{\omega}\left[\ln D+\left(-\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\right)\right]d\mu(M_{4,s})$$

$$=-\ln D\int_0^{\omega}d\mu(M_{4,s})+\int_0^{\omega}\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(M_{4,s})$$

$$=-\ln D\left[\mu(M_{4,\omega})-\mu(M_4)\right]+\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\int_0^{\omega}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(M_{4,s})$$

$$=-\mu(M_{4,\omega})\ln D+\frac{1-\delta}{\delta}e^{-1}d^{-\frac{\delta}{1-\delta}}\int_0^{\omega}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(M_{4,s})$$

bulunur. Bu eşitsizlikten ise

$$\int_0^{\omega}s^{-\frac{\delta}{1-\delta}}d\mu(M_{4,s})<\infty \tag{3.48}$$

olması gerektiği görülür. Fakat (3.48)'un gerçekleşmesi ancak $M_4 = \varnothing$ için, yani $\mu(M_{4,s}) = 0$ için mümkündür. Tersine kabul edilsin ki; $M_4 \neq \varnothing$ olsun. Bu durumda,

$$\mu(M_{4,s}) \geq 2s$$

$$d\mu(M_{4,s}) \geq 2ds$$

elde edilir. $1 - \frac{\delta}{1-\delta} < 0$ eşitsizliği göz önünde bulundurularak

$$\infty > \int_0^{\omega} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} d\mu(M_{4,s})$$

$$\geq 2\int_0^{\omega} s^{-\frac{\delta}{1-\delta}} ds$$

$$= \frac{2(1-\delta)s^{1-\frac{\delta}{1-\delta}}}{1-2\delta}\Bigg|_0^{\omega}$$

$$= \frac{2(1-\delta)}{(1-2\delta)s^{\frac{\delta}{1-\delta}-1}}\Bigg|_0^{\omega}$$

yazılabilir. Son ifade ıraksak olduğundan $M_4 = \varnothing$ olmalıdır.

Teorem 3.10. (3.37) koşulunda L operatörü sonlu sayıda sonlu özdeğerlere ve spektral tekilliklere sahiptir ayrıca bunların herbirinin katı sonludur.

İspat: Teoremin ispatı için, (3.30), (3.31) eşitlikleri ve (3.37) koşulu altında F fonksiyonunun P bölgesinde sonlu sayıda, sonlu katlı sıfırlara sahip olduğu gösterilmelidir. Teorem (3.6) ve Teorem (3.9) gereğince $M_3 = \varnothing$ bulunur. Buradan M_1 ve M_2 sınırlı kümelerinin limit noktalarının olmadığı görülür. Bolzano-Weirstrass teoreminden M_1 ve M_2 kümeleri sonlu olur. Bu da F fonksiyonunun P yarı şeridinde sonlu sayıda sıfıra sahip olduğunu gösterir. Teorem (3.9)'dan $M_4 = \varnothing$ bilindiğinden F fonksiyonunun P yarı şeridinde sıfırlarının katı sonludur.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin spektral analizi (3.4) koşulunda incelenmiştir. Buna ek olarak (3.1)-(3.2) sınır değer probleminin (3.35) koşulunda özdeğer ve spektral tekilliklerinin nicel özellikleri araştırılmıştır. Sınır koşul spektral parametreye bağımlı olduğundan diğer çalışmalara göre Jost fonksiyonu, Green fonksiyonu, özdeğerler ve spektral tekilliklerin açılımında farklı sonuçlar elde edilmiştir.

Bu çalışma, Schrödinger operatörü için çalışılmış olup diğer diferansiyel operatörlerin (3.2) koşulu altında spektral analizi incelenebilir. Buna ek olarak, bu çalışmadaki (3.1) denkleminin farklı sınır koşullar, spektral parametreler veya farklı uzaylarda tanımlanmış halinin spektral özellikleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P., 2000. Difference Equation and Inequalities: Theory Methods and Applications, Markel Dekkar Inc., New York.

Akhiezer, N.I., 1965. The Classical Moment Problem and Some Related Questions in Analysis, Hafner Publishing Co., New York.

Kelley, W.G. ve Peterson, A.C., 2001. Difference Equations: An Introduction with Applications, Harcourt Academic Press.

Toda, M., 1981. Theory of Nonlinear Lattices, Springer-Verlag, Berlin.

Naimark, M.A., 1960. Investigation of the spectrum and the expansion in eigenfunctions of a non-selfadjoint operator of second order on a semi-axis, AMS Transl. 2(16), 103-193.

Lyance, V.E., 1967. A Differantial Operator with Spectral Singularities I-II AMS Transl. 60 (2). 185-225, 227-283.

Adıvar, M. ve Bairamov, E., 2001. Spectral properties of non-selfadjoint difference operators, J. Math. Anal. Appl. 261(2), 461-478.

Akbulut, A., Adıvar, M. ve Bairamov, E., 2005. On the Spectrum of the difference equations of second order, Publ. Math. Debrecen 67(3-4), 253-263.

Bairamov, E. ve Coskun, C., 2004. Jost Solution and the spectrum of the system of difference equations, Appl. Math. Lett. 17, 1039-1045.

Bairamov, E. ve Coskun, C., 2005. The Structure of the spectrum of a system of difference equations, Appl. Math. Lett. 18, 387-394.

Krall, A.M., Bairamov, E. ve Cakar, O., 2001. Spectral Analysis of non-selfadjoint discrete Shrödinger operator with spectral singularities, Math. Nachr 231, 89-104.

Bairamov, E. ve Celebi, A.O., 1999. Spectrum and spectral expansion for the non-selfadjoint discrete Dirac operators, Q. J. Math. Oxford Ser. 50(2), 371-384.

Bairamov, E. ve Yokus, N., 2009. Spectral singularities of Sturm-Liouville problems with eigenvalue dependent boundary conditions, Abstr. Appl. Anal.

Bairamov, E., Aygar, Y. ve Koprubasi, T., 2011. The Spectrum of Eigenparameter Dependent Discrete Sturm-Liouville Equations, J. Comput. Appl. Math. 235(16).

Olgun, M., Koprubasi, T. ve Aygar, Y., 2011. Principal Functions of non-selfadjoint difference operator with spectral parameter in boundary conditions, Abstr. Appl. Anal.

Guseinov, G.S., 1976. The Determination of an infinite Jacobi matrix from the scattering date, Sov.Math.Dokl.17, 1684-1688.

Naimark, M.A., 1968. Linear Differential Operators II, Ungar, New York.

Dolzhenko, E.P., 1979. Boundary value uniqueness theorems for analytic functions, Math. Notes 26 (6), 437-442.

Bairamov, E., Çakar, Ö. ve Çelebi, A.O., 1997. Quadratic Pencil of Schrödinger Operators with Spectral Singularities: Discrete Spectrum and Principal Functions, J. Math. Anal. Appl. 216 (1) 303-320.

Bairamov, E., Çakar, Ö. ve Yanik, C., 2001. Spectral Singularities of Klein-Gordon s-wave equation, Indian J. Pure Appl. Math. 32 (6) 851-857.

Krall, A.M., Bairamov, E. ve Cakar, O., 1999. Spectrum and spectral singularities of a quadratic pencil of a Schrödinger operator with a general boundary condition, J. Differential Equations 151 (2) 252-267.

Bairamov, E., Çakar, Ö. ve Krall, A.M., 2001. Non-selfadjoint difference operators and Jacobi Matrices with Spectral Singularitie, Math. Nachr. 229 5-14.

Agarwal, R.P. ve Wong, P.J.Y., 1997. Advanced Topics in Difference equations, in: Mathematics and its Applications, vol 404, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

Glazman, I.M., 1965, 1966. Direct methods of qualitive spectral analysis of singular diferential operators, in: Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, Translated from Russian by the IPST staff.

Gasymov, M.G., 1968. Expansion in terms of the solutions of a scattering theory problem for the non-selfadjoint Schrödinger equation. Sov. Math. Dokl. 9, 390-393.

Guseinov, G.S., 1976. The inverse problem of scattering theory for a second order difference equation on the whole axis. Sov. Math. Dokl. 17, 1684-1688.

Greiner, W., 1994. Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations. Springer Werlag.

Hruscev, S.V., 1984. Spectral singularities of dissipative Schrödinger operator with rapidly decreasing potential. Indiana Univ. Math. J. 33, 313-338.

Kemp, R.R.D., 1958. A singular boundary value problem for a non-selfadjoint differential operator. Canad. J.. Math. 10, 447-462.

Lusternik, L.A. ve Sobolev, V.J., 1968. Elements of Functional Analysis. Gordon and Breach, Science Publishers.

Pavlov, B.S., 1967. The non-selfadjoint Schrödinger operator in ‘Topics in Mathematics and Physics’ 1, 87-114. Consultants Bureau, New-York.

Schwartz, J.T., 1960. Some non-selfadjoint operators. Comm. Pure and Appl. Math. 13, 609-639.

Koprubasi, T. ve Yokus, N., 2014. Quadratic eigenparameter dependent discrete Sturm-Liouville equations with spectral singularities. Applied Mathematics and Computation.

Yokus, N. ve Koprubasi, T., 2015. Spectrum of the Sturm-Liouville operators with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter. Journal of Inequalities and Applications.

Yokus, N., 2011. Principal functions of non-selfadjoint Sturm-Liouville problems with eigenvalue-dependent boundary conditions. Abstract and Applied Analysis.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	: Nimet ÇOŞKUN
Doğum Tarihi ve Yer	: 01/01/1990 - Şaphane
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
e-mail	: cannimet@kmu.edu.tr

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Karamaoğlu Mehmetbey Üniversitesi	-
Lisans	Ortadoğu Teknik Üniversitesi	2012
Lise	Özel Üftade Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2012	Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi	Araştırma Görevlisi