BAZI RASYONEL FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Merve KARA

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Uygulamalı Matematik Programı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Ağustos-2015

T.C.

KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI RASYONEL FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Merve KARA

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Uygulamalı Matematik

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

KARAMAN – 2015

TEZ ONAYI

Merve KARA tarafından hazırlanan "**Bazı Rasyonel Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman:

Yrd. Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Juri Üyeleri İmza:

Ünvanı, Adı ve Soyadı : Yrd. Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Ünvanı, Adı ve Soyadı : Doç. Dr. Murat YILDIZ

Ünvanı, Adı ve Soyadı : Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN

Ünvanı, Adı ve Soyadı : Yrd.Doç. Dr. Kamil ARI

Ünvanı, Adı ve Soyadı : Yrd. Doç. Dr. Nihal YOKUŞ

Tez Savunma Tarihi: 12/08/2015

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Prof. Dr. Fevzi KILIÇEL

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Merve KARA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI RASYONEL FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

Merve KARA

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Ağustos, 2015, 73 sayfa

Bu çalışmada başlangıç şartları birer reel sayı olmak üzere; iki boyutlu

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{\mp 1 \mp y_{n-2} x_{n-1} y_n},\ y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{\mp 1 \mp x_{n-2} y_{n-1} x_n},\ n = 0,1,...,$$

rasyonel fark denklem sistemleri ile üç boyutlu

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-5}}{\mp 1 \mp y_{n-5} x_{n-3} y_{n-1}},$$

$$y_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{\mp 1 \mp x_{n-5} y_{n-3} x_{n-1}},$$

$$z_{n+1} = \frac{x_{n-5} + y_{n-5}}{\mp 1 \mp x_{n-5} y_{n-3} x_{n-1}},\ n = 0,1,...,$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümleri ve çözümlerin özellikleri incelenmektedir.

Anahtar Kelimeler: Rasyonel Fark Denklem Sistemi, Çözüm, Periyodiklik

ABSTRACT

Ms Thesis

SOLUTIONS OF SOME RATIONAL DIFFERENCE EQUATION SYSTEMS

Merve KARA

Karamanoğlu Mehmetbey University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department Of Mathematics

Supervisor: Asst. Prof.Dr. Ali GELİŞKEN

August, 2015, 73 pages

In this study, solutions and properties of the solutions of two dimensional systems of rational difference equations

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{\mp 1 \mp y_{n-2}x_{n-1}y_n}, \; y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{\mp 1 \mp x_{n-2}y_{n-1}x_n}, \; n = 0,1,...,$$

and three dimensional systems of rational difference equations

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-5}}{\mp 1 \mp y_{n-5}x_{n-3}y_{n-1}},$$

$$y_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{\mp 1 \mp x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}},$$

$$z_{n+1} = \frac{x_{n-5} + y_{n-5}}{\mp 1 \mp x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}}, \; n = 0,1,...,$$

where initial conditions are real numbers, are investigated.

Keywords: System of the Rational Difference Equation, Solution, Periodicity

ÖN SÖZ

Bu çalışma, Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Kamil Özdağ Fen Fakültesi Matematik Ana Bilim Dalı Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Ali GELİŞKEN yönetiminde yapılarak Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışmada bana yol gösteren saygıdeğer hocalarım Yrd. Doç. Dr. Ali GELİŞKEN ve Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN'a ve her zaman yanımda olan annem Mediha KARA ve babam Muzaffer KARA'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Merve KARA

Ağustos, 2015

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET……………...……………………………………………………….……… i

ABSTRACT…………………...………………………………….……………… ii

ÖN SÖZ………………………..…………………………………….………... iii

ÇİZELGELER DİZİNİ………………..…….……………………………..…. v

ŞEKİLLER DİZİNİ…………………..……………….……..…………..……..... vi

1. GİRİŞ………………………………………………………..…...…....... 1

1.1. Fark Denklem Sistemleri İle İlgili Yapılmış Bazı Çalışmalar....................... 1

2. FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER.. 12

3. BAZI RASYONEL FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ…... 15

3.1. İki Boyutlu Rasyonel Fark Denklem Sistemleri….. 15

3.2. Üç Boyutlu Rasyonel Fark Denklem Sistemleri.. 30

4. UYGULAMALAR……………………..…...………………..............…..... 54

SONUÇ VE ÖNERİLER…………………...………...…...…………..……... 65

KAYNAKLAR……………………………………….…………...………... 66

ÖZGEÇMİŞ……………………………………….………………...….... 73

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 4.1. (3.1.1) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 6$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümü…......... 54

Çizelge 4.2. (3.1.2) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 3$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümü............ 55

Çizelge 4.3. (3.1.3) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 6$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümü..…….. 56

Çizelge 4.4. (3.1.4) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = -1$, $y_{-1} = 1$, $y_{-2} = 2$, $x_0 = -2{,}5$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümü….... 57

Çizelge 4.5. (3.2.1) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5} = -1$, $x_{-4} = -2$, $x_{-3} = -3$, $x_{-2} = -4$, $x_{-1} = -5$, $x_0 = -6$, $y_{-5} = 6$, $y_{-4} = 5$, $y_{-3} = 4$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 2$, $y_0 = 1$ başlangıç şartları altındaki çözümü..…….…………………………...…..... 58

Çizelge 4.6. (3.2.2) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5} = -1$, $x_{-4} = -2$, $x_{-3} = -3$, $x_{-2} = -4$, $x_{-1} = -5$, $x_0 = -6$, $y_{-5} = 6$, $y_{-4} = 5$, $y_{-3} = 4$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 2$, $y_0 = 1$ başlangıç şartları altındaki çözümü..………………………...…....…..... 60

Çizelge 4.7. (3.2.3) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5} = -1$, $x_{-4} = -2$, $x_{-3} = -3$, $x_{-2} = -4$, $x_{-1} = -5$, $x_0 = -6$, $y_{-5} = 6$, $y_{-4} = 5$, $y_{-3} = 4$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 2$, $y_0 = 1$ başlangıç şartları altındaki çözümü..…………….……………..…...…..... 61

Çizelge 4.8. (3.2.4) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5} = -1$, $x_{-4} = -2$, $x_{-3} = -3$, $x_{-2} = -4$, $x_{-1} = -5$, $x_0 = -6$, $y_{-5} = 6$, $y_{-4} = 5$, $y_{-3} = 4$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 2$, $y_0 = 1$ başlangıç şartları altındaki çözümü..…………………….................…..... 63

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 4.1. (3.1.1) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 6$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği………………………………………………………………………….. 55

Şekil 4.2. (3.1.2) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 3$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği……………………………………………………………………….….. 56

Şekil 4.3. (3.1.3) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 6$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği…………………………………………………………………………... 57

Şekil 4.4. (3.1.4) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = -1$, $y_{-1} = 1$, $y_{-2} = 2$, $x_0 = -2,5$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği…………………………………………………………………………... 58

Şekil 4.5. (3.2.1) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5} = -1$, $x_{-4} = -2$, $x_{-3} = -3$, $x_{-2} = -4$, $x_{-1} = -5$, $x_0 = -6$, $y_{-5} = 6$, $y_{-4} = 5$, $y_{-3} = 4$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 2$, $y_0 = 1$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği..………………….… 59

Şekil 4.6. (3.2.2) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5} = -1$, $x_{-4} = -2$, $x_{-3} = -3$, $x_{-2} = -4$, $x_{-1} = -5$, $x_0 = -6$, $y_{-5} = 6$, $y_{-4} = 5$, $y_{-3} = 4$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 2$, $y_0 = 1$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği............................. 61

Şekil 4.7. (3.2.3) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5} = -1$, $x_{-4} = -2$, $x_{-3} = -3$, $x_{-2} = -4$, $x_{-1} = -5$, $x_0 = -6$, $y_{-5} = 6$, $y_{-4} = 5$, $y_{-3} = 4$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 2$, $y_0 = 1$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği…......................... 62

Şekil 4.8. (3.2.4) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5} = -1$, $x_{-4} = -2$, $x_{-3} = -3$, $x_{-2} = -4$, $x_{-1} = -5$, $x_0 = -6$, $y_{-5} = 6$, $y_{-4} = 5$, $y_{-3} = 4$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 2$, $y_0 = 1$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği…..…................... 64

1. GİRİŞ

Fark denklemleri sadece diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde değil, aynı zamanda biyoloji, mühendislik, ekonomi, savunma, demografi ve benzeri alanlarda ortaya çıkan matematiksel modellerde ya doğrudan ya da dolaylı olarak yer alırlar. Bu denklemlerde bağımsız değişken tam sayılar üzerinde tanımlanır. Dolayısıyla fark denklemlerinde türev terimleri yerine bilinmeyen fonksiyonun farkları bulunur. Bu bakımdan fark denklemleri daha ziyade sürekli olmayan problemleri karakterize eder (Bereketoğlu ve Kutay, 2012).

1.1. Fark Denklem Sistemleri İle İlgili Yapılmış Bazı Çalışmalar

Bu bölümde fark denklem sistemleri ile ilgili yapılmış bazı çalışmalar hakkında bilgi verilmiştir.

Schinas (1997), yapmış olduğu çalışmada $n = 0,1,2...$ için

$$x_{n+1} = \frac{ay_n + A}{x_{n-1}}, \ y_{n+1} = \frac{bx_n + A}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{a_n y_n + A}{x_{n-1}}, \ y_{n+1} = \frac{b_n x_n + A}{y_{n-1}}$$

$$x_{n+1} = \frac{\max\{a_n y_n, A\}}{x_{n-1}}, \ y_{n+1} = \frac{\max\{b_n x_n, A\}}{y_{n-1}}$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerinin özelliklerini incelemiştir.

Papaschinopoulos ve Schinas (1998), p ve q pozitif tamsayıları için lineer olmayan iki fark denkleminden oluşan,

$$x_{n+1} = \frac{A + y_n}{x_{n-p}}, \ y_{n+1} = \frac{A + x_n}{y_{n-q}}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin salınımlı davranışını ve sınırlılığını incelediler. Ayrıca bu fark denklem sisteminin pozitif denge noktasının global asimptotik kararlılığını çalıştılar. Bu çalışmada fark denklem sisteminin denge noktasının $(c,c) = (1+A, 1+A)$ olduğunu elde ettiler ve sisteminin çözümlerinin $A \in (0,\infty)$ için bu noktada salınımlı olduğunu gördüler. Aynı şartlarda sistemin çözümlerinin alt ve üst sınırlarını elde ettiler. $A > 1$ için de pozitif denge noktasının global asimptotik kararlı olduğunu elde ettiler.

Grove vd. (1998) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1} = \frac{a_n x_n + b_n}{x_{n-1}} \ , \ n = 0,1,2,...$$

otonom olmayan Lyness fark denklemi ile

$$y_{n+1}=\frac{\max\{a_n y_n, b_n\}}{y_{n-1}},\ n=0,1,2,...$$

maksimumlu fark denkleminde katsayıların negatif olmayan $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizileri olduğunu varsaydılar. Bu varsayımlar doğrultusunda bu fark denklemlerinin her pozitif çözümlerinin sürekli ve sınırlı olabilmesi için yeter şartlar elde ettiler. Ayrıca zıt durumların her biri için örnekler gösterdiler.

Valicenti (1999) yaptığı çalışmada;

$$x_{n+1}=\frac{a_n x_n+b_n}{x_{n-1}} \text{ ve } x_{n+1}=\frac{a_n x_n+b_n}{x_{n-1}}$$

denklemlerinin çözümlerinin periyodikliği ve global asimptotik kararlılığı üzerine çalışmıştır.

Grove vd. (2001), a,b,c,d ile x_0, y_0 başlangıç değerleri keyfi reel sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1}=\frac{a}{x_n}+\frac{b}{y_n},\ y_{n+1}=\frac{c}{x_n}+\frac{d}{y_n},\ n=0,1,2,...$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin davranışlarını araştırdılar.

Clark ve Kulenovic (2002) a,b,c,d pozitif sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{a+cy_n},\ y_{n+1}=\frac{y_n}{b+dx_n}$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin asimptotik davranışını incelediler.

Papaschinopoulos ve Schinas (2002), $i\in\{0,1,...,k\}$, için A_i, B_i, p_i, q_i ve $i=-k,-k+1,...,0$ için x_i, y_i başlangıç değerleri pozitif sayılar olmak üzere,

$$x_{n+1}=\sum_{i=0}^{k}\frac{A_i}{y_{n-i}^{p_i}},\ y_{n+1}=\sum_{i=0}^{k}\frac{B_i}{x_{n-i}^{q_i}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerin sınırlılığını, sürekliliğini, salınımlılığını ve denge noktasının kararlılığını incelediler.

Kulenovic ve Nurkanovic (2003), A ile B katsayıları $(0,\infty)$ aralığında seçilen reel sayılar ve x_0, y_0 başlangıç şartları negatif olmayan keyfi sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=Ax_n\frac{y_n}{1+y_n}\ ,\ y_{n+1}=By_n\frac{x_n}{1+x_n}$$

denklem sisteminin çözümlerinin global asimptotik kararlılığını araştırdılar.

Papaschinopoulos vd. (2003) yaptıkları çalışmada

$$x_{n+1}=\frac{\max\{a_n y_n,b_n\}}{y_n x_{n-1}}\ ,\ y_{n+1}=\frac{\max\{c_n x_n,d_n\}}{x_n y_{n-1}},\ n=0,1,...,$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin sınırlılık, süreklilik ve periyodiklik özelliklerini araştırdılar.

Clark vd. (2003) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1}=\frac{x_n}{a+cy_n},\ y_{n+1}=\frac{y_n}{b+dx_n}\ ,\ n=0,1,2,...$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimptotik davranışını incelediler.

Çinar ve Yalçınkaya (2004) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1}=\frac{1}{z_n},\ y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}y_{n-1}}\ ,\ z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodiklik özelliğini incelediler.

Çinar ve Yalçınkaya (2004) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1}=\frac{1}{z_n},\ y_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}\ ,\ z_{n+1}=\frac{1}{x_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin periyodikliğini incelediler.

Camouzis ve Papaschinopoulos (2004) yaptıkları çalışmada; m pozitif tamsayı ve $i=-m,-m+1,...,0$ için x_i ve y_i pozitif sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=1+\frac{x_n}{y_{n-m}},\ y_{n+1}=1+\frac{y_n}{x_{n-m}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin global asimptotik davranışlarını, sınırlılığını ve sürekliliğini incelemişlerdir.

Çinar (2004) yaptığı çalışmada; $n=0,1,2,...,x_0,x_{-1},y_0,y_{-1}\in R^+$ için

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_n}\ ,\ y_{n+1}=\frac{y_n}{x_{n-1}y_{n-1}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini incelemiştir.

Sun ve Xi (2005), yaptıkları çalışmada $x_{n+1} = f(x_{n-s}, x_{n-t}), n \in N_0$ ve $s < t \quad s,t \in N$ olmak üzere lineer olmayan fark denkleminin tüm pozitif çözümlerinin tek denge noktasına yakınsaması için yeterli şartları ortaya koymuştur.

Yang (2005) yaptığı çalışmada;

$$x_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}}, \; y_n = A + \frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}, \; n = 1,2,...$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelediler.

Kulenovic ve Nurkanovic (2005) yaptıkları çalışmada; $a,b,c,d,e,f \in (0,\infty)$ ve x_0, y_0, z_0 negatif olmayan reel sayılar olmak üzere;

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n}{b + y_n}, \; y_{n+1} = \frac{c + y_n}{d + z_n}, \; z_{n+1} = \frac{e + z_n}{f + x_n}, \; n = 0,1,2,...$$

fark denklem sisteminin çözümlerinin global asimptotik davranışlarını incelediler.

Yang vd. (2005) yaptıkları çalışmada; $p,q \in Z^+$ için $p \le q$ ve a,b pozitif sabitler olmak üzere

$$x_n = \frac{a}{y_{n-p}}, \; y_n = \frac{by_{n-p}}{x_{n-q} + y_{n-q}}$$

rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelediler.

Zhang vd. (2006) yaptıkları çalışmada; $p \ge 1, q \ge 1, r \ge 1, s \ge 1, A \ge 0,$ $x_{1-r}, x_{2-r}, ..., x_0, y_{1-\max\{p,s\}}, y_{2-\max\{p,s\}}, ..., y_0 \in R^+$ olmak üzere

$$x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}}, \; y_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r} + y_{n-s}}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını incelediler.

Sun ve Xi (2006) yaptıkları çalışmalarda;

$$x_{n+1} = f(x_n, y_{n-k}), \; y_{n+1} = f(y_n, x_{n-k}), \; n \in N_0$$

ve

$$x_{n+1} = f(y_{n-q}, x_{n-s}), \; y_{n+1} = g(x_{n-t}, y_{n-p}), \; n \in N_0$$

fark denklem sistemlerinin pozitif çözümlerinin kararlılığını incelemişlerdir.

Özban (2006) yaptığı çalışmada; tüm başlangıç şartları ve parametreler pozitif olmak üzere

$$x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-k}} \ , \ y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m} y_{n-m-k}}$$

fark denklem sistemini çözümlerinin periyodikliğini araştırmıştır.

Iricanin ve Stevic (2006) yaptıkları çalışmada; aşağıdaki iki fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini çalışmışlardır:

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{1 + x_n^{(2)}}{x_{n-1}^{(3)}} \ , \ x_{n+1}^{(2)} = \frac{1 + x_n^{(3)}}{x_{n-1}^{(4)}}, \ldots, \ x_{n+1}^{(k)} = \frac{1 + x_n^{(1)}}{x_{n-1}^{(2)}} \ ,$$

$$x_{n+1}^{(1)} = \frac{1 + x_n^{(2)} + x_{n-1}^{(3)}}{x_{n-2}^{(4)}} \ , \ x_{n+1}^{(2)} = \frac{1 + x_n^{(3)} + x_{n-1}^{(4)}}{x_{n-2}^{(5)}}, \ldots, \ x_{n+1}^{(k)} = \frac{1 + x_n^{(1)} + x_{n-1}^{(2)}}{x_{n-2}^{(3)}} \ , \ k \in N \ .$$

Özban (2006) yaptığı çalışmada; $n = 0,1,2,...$ için

$$x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-k}} \ , \ y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-m} y_{n-m-k}}$$

rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerini incelemiştir.

Özban (2007) yaptığı çalışmada; $q, q > 3$ ve 3'ün katı olmayan pozitif bir tamsayı, *a, b* ve $x_{-q+1}, x_{-q+2}, ..., x_0, y_{-q+1}, y_{-q+2}, ..., y_0$ başlangıç değerleri pozitif reel sayılar olan;

$$x_n = \frac{a}{y_{n-3}} \ , \ y_n = \frac{b y_{n-3}}{x_{n-q} y_{n-q}}$$

rasyonel fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin davranışlarını inceledi.

Zhang vd. (2007) yaptıkları çalışmada; $n = 0,1,...$ ve $A > 0$ için

$$x_{n+1} = A + \frac{y_{n-m}}{x_n} \ , \ y_{n+1} = A + \frac{x_{n-m}}{y_n}$$

fark denklem sisteminin pozitif çözümlerinin global asimptotik kararlılığını, sınırlılığını ve sürekliliği üzerine inceleme yapmışlardır.

Papaschinopoulos vd. (2007) yaptıkları çalışmada; $k \geq 3$ ve $i = 1,2,...,k$ için a_i, b_i pozitif sabitler ve başlangıç şartları pozitif olmak üzere $i = 3,4,...,k$ için

$$x_1(n+1) = \frac{a_k x_k(n) + b_k}{x_{k-1}(n-1)} \ , \ x_2(n+1) = \frac{a_1 x_1(n) + b_1}{x_k(n-1)} \ , \ x_i(n+1) = \frac{a_{i-1} x_{i-1}(n) + b_{i-1}}{x_{i-2}(n-1)}$$

denklem sistemini çözümlerini incelemişlerdir.

Yalçınkaya vd. (2008), yaptıkları çalışmalarda

$$z_{n+1}=\frac{t_n z_{n-1}+a}{t_n+z_{n-1}} \;,\; t_{n+1}=\frac{z_n t_{n-1}+a}{z_n+t_{n-1}}$$

ile

$$z_{n+1}=\frac{z_n t_{n-1}+a}{z_n+t_{n-1}} \,,\; t_{n+1}=\frac{t_n z_{n-1}+a}{t_n+z_{n-1}}$$

fark denklem sistemlerinin global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Şimşek vd. (2009), yaptıkları çalışmada, pozitif başlangıç değerleri için

$$x_{n+1}=\max\{\frac{A}{x_n},\frac{y_n}{x_n}\} \;,\; y_{n+1}=\max\{\frac{A}{y_n},\frac{x_n}{y_n}\}$$

fark denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Amleh vd. (2009) yaptıkları çalışmalarında;

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{\beta_1 x_n}{A_1+B_1x_n+C_1y_n} \\ y_{n+1}=\dfrac{\alpha_2+\beta_2x_n+\gamma_2y_n}{A_2+B_2x_n+C_2y_n} \end{cases} ,n=0,1,...$$

rasyonel denklem sisteminin negatif olmayan çözümlerinin sınırlılık özelliklerini incelemişlerdir.

Camouzis vd. (2010) araştırmalarında;

$$\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{\alpha_1}{A_1+B_1x_n+C_1y_n} \\ y_{n+1}=\dfrac{\alpha_2+\beta_2x_n+\gamma_2y_n}{A_2+B_2x_n+C_2y_n} \end{cases} ,n=0,1,...$$

rasyonel denklem sisteminin negatif olmayan çözümlerinin sınırlılık özelliklerini incelemişlerdir.

Yalçınkaya ve Çinar (2010) yaptıkları çalışmada;

$$z_{n+1}=\frac{t_n+z_{n-1}}{t_n z_{n-1}+a} \;,\; t_{n+1}=\frac{z_n+t_{n-1}}{z_n t_{n-1}+a} \,,\; n=0,1,2,...$$

lineer olmayan fark denklemlerinden oluşan sisteminin global asimptotik kararlılığını incelemişlerdir.

Elsayed (2010) yaptığı çalışmada;

$$x_{n+1}=\frac{1}{y_{n-k}}\ ,\ y_{n+1}=\frac{y_{n-k}}{x_n y_n}$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini inceledi.

Akgüneş (2010) tez çalışmasında

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-a_1}, y_{n-b_1}) \\ y_n = g(y_{n-b_2}, z_{n-c_1})\ ,\ n\in N_0\ \ a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2\in N \\ z_n = h(z_{n-c_2}, x_{n-a_2}) \end{cases}$$

fark denklem sistemini tanımlayıp ve pozitif çözümlerinin hangi koşullar altında tek denge noktasına yakınsayacağını belirlemiştir.

Kurbanlı vd. (2011) yaptıkları çalışmalarda; başlangıç değerleri reel sayılar olmak üzere;

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{1+y_n x_{n-1}}\ ,\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{1+x_n y_{n-1}}$$

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1}\ ,\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1}\ ,\ z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{y_n z_{n-1}-1}$$

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}+y_n}{y_n x_{n-1}-1}\ ,\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}+x_n}{x_n y_{n-1}-1}$$

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1}\ ,\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1}\ ,\ z_{n+1}=\frac{x_n}{y_n z_{n-1}}$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerinin davranışlarını incelemişlerdir.

Steviç (2011) yaptığı çalışmada; $a,b,c,\alpha,\beta,\gamma$ parametreleri ve x_{-1},x_0,y_{-1},y_0 başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{a x_{n-1}}{b y_n x_{n-1}+c}\ ,\ y_{n+1}=\frac{\alpha y_{n-1}}{\beta x_n y_{n-1}+\gamma}\ ,\ n\in N_0$$

rasyonel fark denklem sistemini inceledi.

Kılıklı (2011) yaptığı tez çalışmasında

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_n}\ ,\ y_{n+1}=\frac{B}{z_n},\ z_{n+1}=\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-1}},\ n=0,1,2,...,$$

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-1}}\ ,\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-1}},\ z_{n+1}=\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-2}},\ n=0,1,2,...,$$

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-2}}\ ,\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-2}},\ z_{n+1}=\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-3}},\ n=0,1,2,...,$$

$A=1, B=1$ için fark denklem sisteminin çözümlerini araştırmıştır. Sonuçta;

$$x_{n+1}=\frac{A}{y_{n-k}}\ ,\ y_{n+1}=\frac{B}{z_{n-k}},\ z_{n+1}=\frac{Bx_{n-1}}{x_n y_{n-(k+1)}},\ n=0,1,2,...,$$

$A=1, B=1$ ve $A, B\in R-\{0\}$ olduğu durumlarda genel rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerinin de periyodik olduğu ve bu denklem sisteminin kararlılığını göstermiştir.

Touafek ve Elsayed (2012) yaptıkları çalışmada; başlangıç şartları sıfırdan

farklı reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-3}}{\pm1\pm x_{n-3}y_{n-1}}\ ,\ y_{n+1}=\frac{y_{n-3}}{\pm1\pm y_{n-3}x_{n-1}}$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümleri ve çözümlerinin periyodikliğini incelediler.

Elsayed (2012) yaptığı çalışmada; başlangıç şartları sıfırdan farklı reel sayı olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{\pm1\pm x_{n-1}y_n}\ ,\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{\pm1\pm y_{n-1}x_n}$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini inceledi.

Tütüncü (2012) yaptığı tez çalışmasında;

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\ y_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1}$$

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1}, z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$$

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}+1},\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}+1},\ z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{x_{n-1}y_n+y_{n-1}x_n}$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini ve çözümlerin davranışlarını incelemiştir.

Keying vd. (2012) yaptıkları çalışmada; $x_0, x_{-1}, y_0, y_{-1}, z_0, z_{-1} \in R-\{0\}$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1},\ y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1},\ z_{n+1} = \frac{1}{x_n z_{n-1}}$$

rasyonel fark denklemleri sisteminin çözümlerinin davranışlarını incelediler.

Elsayed vd. (2012) yaptıkları çalışmada

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n-p} y_{n-p}},\ y_{n+1} = \frac{x_{n-p} y_{n-p}}{x_{n-q} y_{n-q}}$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_{n-p} y_{n-p} z_{n-p}},\ y_{n+1} = \frac{x_{n-p} y_{n-p} z_{n-p}}{x_{n-q} y_{n-q} z_{n-q}},\ z_{n+1} = \frac{x_{n-q} y_{n-q} z_{n-q}}{x_{n-r} y_{n-r} z_{n-r}}$$

fark denklem sistemlerinin çözümlerini araştırmışlardır.

Mansour vd. (2012) çalışmalarında

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{\pm 1 \pm x_{n-5} y_{n-2}},\ y_{n+1} = \frac{y_{n-5}}{\pm 1 \pm y_{n-5} x_{n-2}}$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini inceleyip periyodik olduğunu göstermişlerdir.

Stevic (2012, 2013) yaptığı çalışmalarda $k \in N, a_n, b_n, c_n, d_n, \alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ dizileri ve başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere;

$$x_{n+1} = \frac{x_n y_{n-k}}{y_{n-k+1}(a_n + b_n x_n y_{n-k})},\ y_{n+1} = \frac{y_n x_{n-k}}{x_{n-k+1}(c_n + d_n y_n x_{n-k})}\quad n \in N_0$$

$$x_n = \frac{c_n x_{n-4}}{a_n + b_n y_{n-1} x_{n-2} y_{n-3} x_{n-4}},\ y_n = \frac{\gamma_n y_{n-4}}{\alpha_n + \beta_n x_{n-1} y_{n-2} x_{n-3} y_{n-4}}\quad n \in N_0$$

$$x_n = \frac{c_n y_{n-3}}{a_n + b_n y_{n-1} x_{n-2} y_{n-3}},\ y_n = \frac{\gamma_n x_{n-3}}{\alpha_n + \beta_n x_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}}\quad n \in N_0$$

$$x_n = \frac{c_n y_{n-(2k-1)}}{a_n + b_n y_{n-(2k-1)} \prod_{i=1}^{k-1} y_{n-(2i-1)} x_{n-2i}},\ y_n = \frac{\gamma_n x_{n-(2k-1)}}{\alpha_n + \beta_n x_{n-(2k-1)} \prod_{i=1}^{k-1} x_{n-(2i-1)} y_{n-2i}}$$

denklem sistemlerinin çözümlerinin özelliklerini incelemiştir.

Fotiades ve Papaschinopoulos (2013) yaptıkları çalışmada A, B katsayıları ile x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1}=\max\{A,\frac{y_n}{x_{n-1}}\}\ ,\ y_{n+1}=\max\{B,\frac{x_n}{y_{n-1}}\}$$

denklem sisteminin her bir çözümünün er geç periyodik olduğunu göstermişlerdir.

Stevic (2013) yaptığı çalışmada α,β parametrelerine ve x_0, y_0 pozitif başlangıç şartlarına bağlı olarak

$$x_{n+1}=\frac{1}{x_n}+\frac{\alpha}{y_n}\ ,\ y_{n+1}=\frac{\beta}{x_n}+\frac{1}{y_n}\ ,\ n\in N_0$$

fark denklem sisteminin her bir çözümünün yakınsaklığını ve iki periyotlu olduğunu göstermiştir.

Yazlık vd. (2013) yaptıkları çalışmada

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}\pm 1}{y_n x_{n-1}}\ ,\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}\pm 1}{x_n y_{n-1}}$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümlerini incelediler.

Kurbanlı vd. (2013) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1}\ ,\ y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1}\ ,\ z_{n+1}=\frac{x_n z_{n-1}}{y_n}$$

denklem sisteminin çözümünü ve çözümlerin özelliklerini araştırmışlardır.

Özkan ve Kurbanlı (2013) yaptıkları çalışmada;

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-2}}{-1\pm y_{n-2}x_{n-1}y_n}\ ,\ y_{n+1}=\frac{x_{n-2}}{-1\pm x_{n-2}y_{n-1}x_n}\ ,\ z_{n+1}=\frac{x_{n-2}+y_{n-2}}{-1\pm x_{n-2}y_{n-1}x_n}\ ,\ n\in N_0$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümünün periyodikliğini araştırmışlardır. Sonuç olarak denklem sisteminin çözümünün 6 periyotlu olduğuna göstermişlerdir.

Tollu (2014) tez çalışmasında x_0, y_0 sıfırdan farklı başlangıç şartları ve p_n, q_n, r_n, s_n dizilerinin her biri ise x_n, y_n dizilerinden biri olmak üzere

$$x_{n+1}=\frac{1+p_n}{q_n}\ ,\ y_{n+1}=\frac{1+r_n}{s_n}\ ,\ n\in N_0$$

fark denklem sistemlerinin on altı olası durumundan on dört tanesinin çözülebilir olduğunu gösterdi. Ayrıca, elde ettiği genel çözümler vasıtasıyla çözümlerin asimptotik davranışlarını inceledi.

Brett ve Kulenovic (2014) yaptıkları çalışmada pozitif a,b,c,d sayıları ve başlangıç şartları $x_0, y_0 \geq 0$ olmak üzere

$$x_{n+1} = \frac{ax_n^2}{1+x_n^2+cy_n} \ , \ y_{n+1} = \frac{by_n^2}{1+y_n^2+dx_n} \ , \ n = 0,1,...$$

denklem sisteminin çözümlerini incelemişlerdir.

Zhang vd. (2014) yaptıkları çalışmada

$$x_{n+1} = \max\{\frac{\beta}{x_n}, y_{n-1}\} \ , \ y_{n+1} = \max\{\frac{\beta}{y_n}, x_{n+1}\} \ , \ n \in N_0$$

fark denklem sisteminin 4 periyotlu olduğunu göstermişlerdir.

Papaschinopoulos vd. (2014) çalışmalarında a,b,c,d katsayılar ve x_{-1}, x_0, y_{-1}, y_0 başlangıç şartları pozitif reel sayılar olmak üzere

$$x_{n+1} = ax_n + by_{n-1}e^{-x_n} \ , \ y_{n+1} = cy_n + dx_{n-1}e^{-y_n} \ , \ n = 0,1,...$$

denklem sisteminin pozitif denge noktasının varlığını, sınırlılığını ve pozitif çözümlerini elde etmişlerdir.

Bu tezde, iki boyutlu

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{\mp 1 \mp y_{n-2}x_{n-1}y_n} \ , \ y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{\mp 1 \mp x_{n-2}y_{n-1}x_n} \ , \ n = 0,1,...,$$

rasyonel fark denklem sistemi ile üç boyutlu

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-5}}{\mp 1 \mp y_{n-5}x_{n-3}y_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{\mp 1 \mp x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}}, z_{n+1} = \frac{x_{n-5}+y_{n-5}}{\mp 1 \mp x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}}, n = 0,1,...,$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümleri elde edilip çözümlerin periyodikliği araştırılacaktır.

2. FARK DENKLEMLERİ İLE İLGİLİ GENEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde fark denklemleri ile ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir.

x bağımsız değişkeninin tanımlı olduğu aralıkta, $y(x)$ bağımlı değişkeninin değişimi $y^{'}(x), y^{''}(x), ..., y^{(n)}(x), ...$ türevleri yardımıyla açıklanabilmektedir. Ancak x' in kesikli değerler alması durumunda değişim türevler yardımıyla açıklanamaz (Çalık, 2011).

Bu bölümde x' in tamsayı değerler aldığı durumlarda ortaya çıkan ve içinde sonlu farkların bulunduğu fark denklemleri üzerinde duracağız.

Tanım 2.1. n bağımsız değişken ve buna bağımlı değişken de y olmak üzere, bağımlı değişken ve bağımsız değişken ile bağımlı değişkenin

$$E(y), E^2(y), E^3(y), ..., E^n(y), ...$$

gibi farklarını içeren bağıntılara *Fark Denklemi* denir (Akgüneş, 2010).

Bir fark denkleminin mertebesi; denklemdeki en büyük indis ile en küçük indisin farkına eşittir.

Birinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n+1) + a_1 y(n) = f(n)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden bir fark denklemi;

$$a_0 y(n+2) + a_1 y(n+1) + a_2 y(n) = g(n)$$

şeklindedir.

Tanım 2.2. Bir fark denkleminde bağımlı değişkenler birinci dereceden ve denklem bağımlı değişkenlerin parantezine alındığında katsayılar sadece bağımsız değişkenlerden oluşuyorsa bu denkleme lineer fark denklemi denir (Kılıklı, 2011).

Genel olarak lineer fark denklemleri

$$y_{n+k} + a_{k-1} y_{n+k-1} + ... + a_0 y_n = F(n)$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1. I reel sayıların herhangi bir alt aralığı olmak üzere, $f : I^{k+1} \to I$ sürekli diferansiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Her $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ başlangıç şartları için

$$x_{n+1} = f(x_n, x_{n-1}, ..., x_{n-k}), \ \ n = 0,1,... \tag{2.1}$$

denklemi bir tek $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümüne sahiptir (Akgüneş, 2010).

Tanım 2.3. Eğer $\{x_n\}_{n=n_0}^{\infty}$ $n_0 \in Z$ her $n \geq n_0$ dizisi için $x_{n+p} = x_n$ ise $\{x_n\}$ dizisi p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Çalık, 2011).

Tanım 2.4. Eğer $\{x_n\}$ dizisinde sonlu sayıda terim hariç tutulduğunda, geriye kalan sonsuz sayıdaki terim için $x_{n+p} = x_n$ ise $\{x_n\}$ dizisine er geç p periyotludur denir ve p bu şartı sağlayan en küçük pozitif tam sayıdır (Çalık, 2011).

Tanım 2.5. (2.1) denkleminde

$$\bar{x} = f(\bar{x}, \bar{x}, ..., \bar{x})$$

şartını sağlayan $\bar{x}$ noktasına (2.1) denkleminin denge noktası denir (Akgüneş, 2010).

Tanım 2.6. $\bar{x}$, (2.1) denkleminin denge noktası olmak üzere:

a) Eğer $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ olmak üzere $\forall \varepsilon > 0$ için $|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-(k-1)} - \bar{x}| + ... + |x_0 - \bar{x}| < \delta$ iken $\forall n \geq 0$ için $|x_n - \bar{x}| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası kararlıdır denir.

b) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ olacak şekilde $|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-(k-1)} - \bar{x}| + ... + |x_0 - \bar{x}| < \gamma$ şartını sağlayan $\gamma > 0$ sayısı varsa, $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır denir.

c) Eğer $\forall x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ ise, $\bar{x}$ denge noktasına çekim noktası denir.

d) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı ve çekim noktası ise, $\bar{x}$ denge noktası global asimptotik kararlıdır denir.

e) Eğer $\bar{x}$ denge noktası kararlı değil ise, kararsızdır denir.

f) Eğer $x_{-k}, x_{-(k-1)}, ..., x_0 \in I$ iken $|x_{-k} - \bar{x}| + |x_{-(k-1)} - \bar{x}| + ... + |x_0 - \bar{x}| < r$ ve bazı $N \geq -k$ sayıları için $|x_N - \bar{x}| \geq r$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa $\bar{x}$ denge noktasına repeller denir (Akgüneş, 2010).

Tanım 2.7. (2.1) denkleminden elde edilen

$$y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}} (\bar{x}, ..., \bar{x}) y_{n-i} \tag{2.2}$$

denklemine, $\bar{x}$ denge noktası civarında lineer denklem denir (Akgüneş, 2010).

(2.2) denkleminin karakteristik denklemi

$$\lambda^{k+1} - \sum_{i=0}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_{n-i}} (\bar{x}, ..., \bar{x}) \lambda^{k-i} = 0 \tag{2.3}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2. (Lineer Kararlılık Teoremi)

a) Eğer (2.3) denkleminin bütün kökleri mutlak değerce 1'den küçük ise $\bar{x}$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır (Çalık, 2011).
b) Eğer (2.3) denkleminin köklerinden en az biri mutlak değerce 1'den büyük ise $\bar{x}$ denge noktası kararsızdır (Çalık, 2011).

Tanım 2.8. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ çözümlerinin hepsi birden $\bar{x}$ denge noktasından ne büyük ne de küçük ise bu çözümlere $\bar{x}$ denge noktası civarında salınımlıdır denir. Aksi halde bu çözümlere salınımlı değildir denir (Akgüneş, 2010).

Tanım 2.9. $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisinde $\forall n$ için $P \le x_n \le Q$ olacak şekilde P ve Q pozitif sayıları varsa $\{x_n\}_{n=-k}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır denir (Akgüneş, 2010).

3. BAZI RASYONEL FARK DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİ

3.1. İki Boyutlu Rasyonel Fark Denklem Sistemleri

Bu bölümde; başlangıç değerleri reel sayılar olan

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{-1+y_{n-2}x_{n-1}y_n} \ , \ y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{-1+x_{n-2}y_{n-1}x_n}, n = 0,1,..., \tag{3.1.1}$$

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{-1-y_{n-2}x_{n-1}y_n} \ , \ y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{-1-x_{n-2}y_{n-1}x_n}, n = 0,1,..., \tag{3.1.2}$$

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{1+y_{n-2}x_{n-1}y_n} \ , \ y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{1-x_{n-2}y_{n-1}x_n}, n = 0,1,..., \tag{3.1.3}$$

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{1-y_{n-2}x_{n-1}y_n} \ , \ y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{1+x_{n-2}y_{n-1}x_n}, n = 0,1,..., \tag{3.1.4}$$

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümleri ve bu çözümlerin özellikleri araştırılmıştır.

Lemma 3.1.1. $\{x_n, y_n\}$ (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) ya da (3.1.4) denklem sistemlerinden herhangi birinin çözümü ise; $n \geq 0$ için aşağıdakiler doğrudur:

(i) $x_{n+2}y_{n+3} = y_{n-1}x_n$

(ii) $y_{n+2}x_{n+3} = x_{n-1}y_n$

İspat:

(i) İlk olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.1) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$x_{n+2}y_{n+3} = \frac{y_{n-1}}{-1+y_{n-1}x_ny_{n+1}} . \frac{x_n}{-1+x_ny_{n+1}x_{n+2}}$$

$$= y_{n-1}x_n \frac{1}{(-1+y_{n-1}x_ny_{n+1})(-1+x_ny_{n+1}x_{n+2})}$$

$$= y_{n-1}x_n[(-1+y_{n-1}x_ny_{n+1})(-1+x_ny_{n+1}\frac{y_{n-1}}{(-1+y_{n-1}x_ny_{n+1})})]^{-1}$$

$$= y_{n-1}x_n[(-1+y_{n-1}x_ny_{n+1})\frac{1}{(-1+y_{n-1}x_ny_{n+1})}]^{-1}$$

$$= y_{n-1}x_n$$

olur.

İkinci olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.2) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$x_{n+2}y_{n+3} = \frac{y_{n-1}}{-1-y_{n-1}x_ny_{n+1}}.\frac{x_n}{-1-x_ny_{n+1}x_{n+2}}$$

$$= y_{n-1}x_n \frac{1}{(-1-y_{n-1}x_ny_{n+1})(-1-x_ny_{n+1}x_{n+2})}$$

$$= y_{n-1}x_n[(-1-y_{n-1}x_ny_{n+1})(-1-x_ny_{n+1} \frac{y_{n-1}}{(-1-y_{n-1}x_ny_{n+1})})]^{-1}$$

$$= y_{n-1}x_n[(-1-y_{n-1}x_ny_{n+1}) \frac{1}{(-1-y_{n-1}x_ny_{n+1})}]^{-1}$$

$$= y_{n-1}x_n$$

olur.

Üçüncü olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.3) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$x_{n+2}y_{n+3} = \frac{y_{n-1}}{1+y_{n-1}x_ny_{n+1}}.\frac{x_n}{1-x_ny_{n+1}x_{n+2}}$$

$$= y_{n-1}x_n \frac{1}{(1+y_{n-1}x_ny_{n+1})(1-x_ny_{n+1}x_{n+2})}$$

$$= y_{n-1}x_n[(1+y_{n-1}x_ny_{n+1})(1-x_ny_{n+1} \frac{y_{n-1}}{(1+y_{n-1}x_ny_{n+1})})]^{-1}$$

$$= y_{n-1}x_n[(1+y_{n-1}x_ny_{n+1}) \frac{1}{(1+y_{n-1}x_ny_{n+1})}]^{-1}$$

$$= y_{n-1}x_n$$

olur.

Dördüncü olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.4) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$x_{n+2}y_{n+3} = \frac{y_{n-1}}{1-y_{n-1}x_ny_{n+1}}.\frac{x_n}{1+x_ny_{n+1}x_{n+2}}$$

$$= y_{n-1}x_n \frac{1}{(1-y_{n-1}x_n y_{n+1})(1+x_n y_{n+1}x_{n+2})}$$

$$= y_{n-1}x_n[(1-y_{n-1}x_n y_{n+1})(1+x_n y_{n+1}\frac{y_{n-1}}{(1-y_{n-1}x_n y_{n+1})})]^{-1}$$

$$= y_{n-1}x_n[(1-y_{n-1}x_n y_{n+1})\frac{1}{(1-y_{n-1}x_n y_{n+1})}]^{-1}$$

$$= y_{n-1}x_n$$

olur.

(ii) İlk olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.1) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$y_{n+2}x_{n+3} = \frac{x_{n-1}}{-1+x_{n-1}y_n x_{n+1}}.\frac{y_n}{-1+y_n x_{n+1}y_{n+2}}$$

$$= x_{n-1}y_n \frac{1}{(-1+x_{n-1}y_n x_{n+1})(-1+y_n x_{n+1}y_{n+2})}$$

$$= x_{n-1}y_n[(-1+x_{n-1}y_n x_{n+1})(-1+y_n x_{n+1}\frac{x_{n-1}}{(-1+x_{n-1}y_n x_{n+1})})]^{-1}$$

$$= x_{n-1}y_n[(-1+x_{n-1}y_n x_{n+1})\frac{1}{(-1+x_{n-1}y_n x_{n+1})}]^{-1}$$

$$= x_{n-1}y_n$$

olur.

İkinci olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.2) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$y_{n+2}x_{n+3} = \frac{x_{n-1}}{-1-x_{n-1}y_n x_{n+1}}.\frac{y_n}{-1-y_n x_{n+1}y_{n+2}}$$

$$= x_{n-1}y_n \frac{1}{(-1-x_{n-1}y_n x_{n+1})(-1-y_n x_{n+1}y_{n+2})}$$

$$= x_{n-1}y_n[(-1-x_{n-1}y_n x_{n+1})(-1-y_n x_{n+1}\frac{x_{n-1}}{(-1-x_{n-1}y_n x_{n+1})})]^{-1}$$

$$= x_{n-1}y_n[(-1-x_{n-1}y_n x_{n+1})\frac{1}{(-1-x_{n-1}y_n x_{n+1})}]^{-1}$$

$$= x_{n-1}y_n$$

olur.

Üçüncü olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.3) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$y_{n+2}x_{n+3} = \frac{x_{n-1}}{1 - x_{n-1}y_n x_{n+1}} \cdot \frac{y_n}{1 + y_n x_{n+1} y_{n+2}}$$

$$= x_{n-1}y_n \frac{1}{(1 - x_{n-1}y_n x_{n+1})(1 + y_n x_{n+1} y_{n+2})}$$

$$= x_{n-1}y_n [(1 - x_{n-1}y_n x_{n+1})(1 + y_n x_{n+1} \frac{x_{n-1}}{(1 - x_{n-1}y_n x_{n+1})})]^{-1}$$

$$= x_{n-1}y_n [(1 - x_{n-1}y_n x_{n+1}) \frac{1}{(1 - x_{n-1}y_n x_{n+1})}]^{-1}$$

$$= x_{n-1}y_n$$

olur.

Dördüncü olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.4) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$y_{n+2}x_{n+3} = \frac{x_{n-1}}{1 + x_{n-1}y_n x_{n+1}} \cdot \frac{y_n}{1 - y_n x_{n+1} y_{n+2}}$$

$$= x_{n-1}y_n \frac{1}{(1 + x_{n-1}y_n x_{n+1})(1 - y_n x_{n+1} y_{n+2})}$$

$$= x_{n-1}y_n [(1 + x_{n-1}y_n x_{n+1})(1 - y_n x_{n+1} \frac{x_{n-1}}{(1 + x_{n-1}y_n x_{n+1})})]^{-1}$$

$$= x_{n-1}y_n [(1 + x_{n-1}y_n x_{n+1}) \frac{1}{(1 + x_{n-1}y_n x_{n+1})}]^{-1}$$

$$= x_{n-1}y_n$$

olur ki ispat biter.

Teorem 3.1.1. $\{x_n, y_n\}$ (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) ya da (3.1.4) denklem sistemlerinden herhangi birinin çözümü ise; $\{x_n, y_n\}$ 6 periyotludur.

İspat:

Her $n \geq -2$ için $x_{n+6} = x_n$ ve $y_{n+6} = y_n$ olduğunu göstermemiz gerekir.

İlk olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.1) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

Lemma 3.1.1 (i) göz önüne alındığında;

$$x_{n+6} = \frac{y_{n+3}}{-1 + y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}}$$

$$= \frac{x_n}{(-1 + y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5})(-1 + x_n y_{n+1}x_{n+2})}$$

$$= x_n(1 - y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5} - x_n y_{n+1}x_{n+2} + y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}x_n y_{n+1}x_{n+2})^{-1}$$

$$= x_n(1 - y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5} - x_n y_{n+1}x_{n+2} + y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}(\frac{x_n}{y_{n+3}} + 1))^{-1}$$

$$= \frac{x_n}{1 + x_{n+4}y_{n+5}x_n - x_n y_{n+1}x_{n+2}}$$

$$= \frac{x_n}{1 + x_n(x_{n+4}y_{n+5} - y_{n+1}x_{n+2})}$$

$$= x_n$$

Lemma 3.1.1 (ii) göz önüne alındığında;

$$y_{n+6} = \frac{x_{n+3}}{-1 + x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}}$$

$$= \frac{y_n}{(-1 + x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5})(-1 + y_n x_{n+1}y_{n+2})}$$

$$= y_n(1 - y_n x_{n+1}y_{n+2} - x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5} + x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}y_n x_{n+1}y_{n+2})^{-1}$$

$$= y_n(1 - y_n x_{n+1}y_{n+2} - x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5} + x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}(\frac{y_n}{x_{n+3}} + 1))^{-1}$$

$$= \frac{y_n}{1 - y_n x_{n+1}y_{n+2} + y_{n+4}x_{n+5}y_n}$$

$$= \frac{y_n}{1 + y_n(y_{n+4}x_{n+5} - x_{n+1}y_{n+2})}$$

$= y_n$

olur ki $\{x_n, y_n\}$ çözümü 6 periyotludur.

İkinci olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.2) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

Lemma 3.1.1 (i) göz önüne alındığında;

$$x_{n+6} = \frac{y_{n+3}}{-1 - y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}}$$

$$= \frac{x_n}{(-1 - y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5})(-1 - x_n y_{n+1} x_{n+2})}$$

$$= x_n (1 + y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5} + x_n y_{n+1}x_{n+2} + y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}x_n y_{n+1}x_{n+2})^{-1}$$

$$= x_n (1 + y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5} + x_n y_{n+1}x_{n+2} + y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}(-\frac{x_n}{y_{n+3}} - 1))^{-1}$$

$$= \frac{x_n}{1 - x_{n+4}y_{n+5}x_n + x_n y_{n+1}x_{n+2}}$$

$$= \frac{x_n}{1 - x_n (x_{n+4}y_{n+5} - y_{n+1}x_{n+2})}$$

$$= x_n$$

Lemma 3.1.1 (ii) göz önüne alındığında;

$$y_{n+6} = \frac{x_{n+3}}{-1 - x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}}$$

$$= \frac{y_n}{(-1 - x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5})(-1 - y_n x_{n+1} y_{n+2})}$$

$$= y_n (1 + y_n x_{n+1}y_{n+2} + x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5} + x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}y_n x_{n+1}y_{n+2})^{-1}$$

$$= y_n (1 + y_n x_{n+1}y_{n+2} + x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5} + x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}(-\frac{y_n}{x_{n+3}} - 1))^{-1}$$

$$= \frac{y_n}{1 + y_n x_{n+1}y_{n+2} - y_{n+4}x_{n+5}y_n}$$

$$=\frac{y_n}{1-y_n(y_{n+4}x_{n+5}-x_{n+1}y_{n+2})}$$

$$=y_n$$

olur ki $\{x_n, y_n\}$ çözümü 6 periyotludur.

Üçüncü olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.3) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

Lemma 3.1.1 (i) göz önüne alındığında;

$$x_{n+6}=\frac{y_{n+3}}{1+y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}}$$

$$=\frac{x_n}{(1+y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5})(1-x_ny_{n+1}x_{n+2})}$$

$$=x_n(1+y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}-x_ny_{n+1}x_{n+2}-y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}x_ny_{n+1}x_{n+2})^{-1}$$

$$=x_n(1+y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}-x_ny_{n+1}x_{n+2}-y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}(1-\frac{x_n}{y_{n+3}}))^{-1}$$

$$=\frac{x_n}{1+x_{n+4}y_{n+5}x_n-x_ny_{n+1}x_{n+2}}$$

$$=\frac{x_n}{1+x_n(x_{n+4}y_{n+5}-y_{n+1}x_{n+2})}$$

$$=x_n$$

Lemma 3.1.1 (ii) göz önüne alındığında;

$$y_{n+6}=\frac{x_{n+3}}{1-x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}}$$

$$=\frac{y_n}{(1-x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5})(1+y_nx_{n+1}y_{n+2})}$$

$$=y_n(1+y_nx_{n+1}y_{n+2}-x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}-x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}y_nx_{n+1}y_{n+2})^{-1}$$

$$=y_n(1+y_nx_{n+1}y_{n+2}-x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}-x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}(\frac{y_n}{x_{n+3}}-1))^{-1}$$

$$=\frac{y_n}{1+y_nx_{n+1}y_{n+2}-y_{n+4}x_{n+5}y_n}$$

$$=\frac{y_n}{1-y_n(y_{n+4}x_{n+5}-x_{n+1}y_{n+2})}$$

$$=y_n$$

olur ki $\{x_n, y_n\}$ çözümü 6 periyotludur.

Dördüncü olarak $\{x_n, y_n\}$ çözümünün (3.1.4) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

Lemma 3.1.1 (i) göz önüne alındığında;

$$x_{n+6}=\frac{y_{n+3}}{1-y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}}$$

$$=\frac{x_n}{(1-y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5})(1+x_ny_{n+1}x_{n+2})}$$

$$=x_n(1-y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}+x_ny_{n+1}x_{n+2}-y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}x_ny_{n+1}x_{n+2})^{-1}$$

$$=x_n(1-y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}+x_ny_{n+1}x_{n+2}-y_{n+3}x_{n+4}y_{n+5}(\frac{x_n}{y_{n+3}}-1))^{-1}$$

$$=\frac{x_n}{1-x_{n+4}y_{n+5}x_n+x_ny_{n+1}x_{n+2}}$$

$$=\frac{x_n}{1-x_n(x_{n+4}y_{n+5}-y_{n+1}x_{n+2})}$$

$$=x_n$$

Lemma 3.1.1 (ii) göz önüne alındığında;

$$y_{n+6}=\frac{x_{n+3}}{1+x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}}$$

$$=\frac{y_n}{(1+x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5})(1-y_nx_{n+1}y_{n+2})}$$

$$=y_n(1-y_nx_{n+1}y_{n+2}+x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}-x_{n+3}y_{n+4}x_{n+5}y_nx_{n+1}y_{n+2})^{-1}$$

$$= y_n(1 - y_n x_{n+1} y_{n+2} + x_{n+3} y_{n+4} x_{n+5} - x_{n+3} y_{n+4} x_{n+5}(1 - \frac{y_n}{x_{n+3}}))^{-1}$$

$$= \frac{y_n}{1 - y_n x_{n+1} y_{n+2} + y_{n+4} x_{n+5} y_n}$$

$$= \frac{y_n}{1 + y_n(y_{n+4} x_{n+5} - x_{n+1} y_{n+2})}$$

$$= y_n$$

olur ki $\{x_n, y_n\}$ çözümü 6 periyotlu olup ispat biter.

Aşağıdaki teoremler (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) ve (3.1.4) denklem sistemlerinin çözümlerini açık bir şekilde göstermektedir.

Teorem 3.1.2. $y_0 = a, y_{-1} = b, y_{-2} = c, x_0 = d, x_{-1} = e, x_{-2} = f$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere (3.1.1) denklem sisteminin çözümü $\{x_n, y_n\}$ olsun. $fbd \neq 1$ ve $cea \neq 1$ olmak üzere (3.1.1) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıdaki gibidir: $n \geq 0$ için

$$x_{6n+1} = -\frac{c}{1 - cea}\ ,\ y_{6n+1} = \frac{f}{fbd - 1}$$

$$x_{6n+2} = b(fbd - 1)\ ,\ y_{6n+2} = e(cea - 1)$$

$$x_{6n+3} = \frac{a}{1 - cea}\ ,\ y_{6n+3} = \frac{d}{fbd - 1} \qquad (3.1.5)$$

$$x_{6n+4} = f\ ,\ y_{6n+4} = c$$

$$x_{6n+5} = e\ ,\ y_{6n+5} = b$$

$x_{6n+6} = d\ ,\ y_{6n+6} = a$ (Özkan; Kurbanlı, 2013).

İspat:

İspatı tümevarımla yapalım. (3.1.5) eşitliklerinden; $n = 0$ için;

$$x_1 = -\frac{c}{1 - cea}\ ,\ y_1 = \frac{f}{fbd - 1}$$

$$x_2 = b(fbd - 1)\ ,\ y_2 = e(cea - 1)$$

$$x_3 = \frac{a}{1-cea}\ ,\ y_3 = \frac{d}{fbd-1}$$

$$x_4 = f\ ,\ y_4 = c$$

$$x_5 = e\ ,\ y_5 = b$$

$$x_6 = d\ ,\ y_6 = a$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (3.1.5) eşitliklerinin pozitif bir $n = N$ tamsayısı için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda;

$$x_{6N+1} = -\frac{c}{1-cea}\ ,\ y_{6N+1} = \frac{f}{fbd-1}$$

$$x_{6N+2} = b(fbd-1)\ ,\ y_{6N+2} = e(cea-1)$$

$$x_{6N+3} = \frac{a}{1-cea}\ ,\ y_{6N+3} = \frac{d}{fbd-1}$$

$$x_{6N+4} = f\ ,\ y_{6N+4} = c$$

$$x_{6N+5} = e\ ,\ y_{6N+5} = b$$

$$x_{6N+6} = d\ ,\ y_{6N+6} = a$$

eşitlikleri vardır. İterasyona devam edildiğinde;

$$x_{6N+7} = -\frac{c}{1-cea}\ ,\ y_{6N+7} = \frac{f}{fbd-1}$$

$$x_{6N+8} = b(fbd-1)\ ,\ y_{6N+8} = e(cea-1)$$

$$x_{6N+9} = \frac{a}{1-cea}\ ,\ y_{6N+9} = \frac{d}{fbd-1}$$

$$x_{6N+10} = f\ ,\ y_{6N+10} = c$$

$$x_{6N+11} = e\ ,\ y_{6N+11} = b$$

$$x_{6N+12} = d\ ,\ y_{6N+12} = a$$

eşitlikleri elde edilir ki (3.1.5) eşitlikleri $n = N+1$ için de doğru olur. Böylece ispat biter.

Teorem 3.1.3. $y_0 = a, y_{-1} = b, y_{-2} = c, x_0 = d, x_{-1} = e, x_{-2} = f$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere (3.1.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n, y_n\}$ olsun. $fbd \neq -1$ ve $cea \neq -1$ olmak üzere (3.1.2) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıdaki gibidir: $n \geq 0$ için

$$x_{6n+1} = -\frac{c}{1+cea}, \quad y_{6n+1} = -\frac{f}{fbd+1}$$

$$x_{6n+2} = -b(fbd+1), \quad y_{6n+2} = -e(cea+1)$$

$$x_{6n+3} = -\frac{a}{1+cea}, \quad y_{6n+3} = -\frac{d}{fbd+1} \tag{3.1.6}$$

$$x_{6n+4} = f, \quad y_{6n+4} = c$$

$$x_{6n+5} = e, \quad y_{6n+5} = b$$

$x_{6n+6} = d$, $y_{6n+6} = a$ (Özkan; Kurbanlı, 2013).

İspat:

İspatı tümevarımla yapalım. (3.1.6) eşitliklerinden; $n = 0$ için

$$x_1 = -\frac{c}{1+cea}, \quad y_1 = -\frac{f}{fbd+1}$$

$$x_2 = -b(fbd+1), \quad y_2 = -e(cea+1)$$

$$x_3 = -\frac{a}{1+cea}, \quad y_3 = -\frac{d}{fbd+1}$$

$$x_4 = f, \quad y_4 = c$$

$$x_5 = e, \quad y_5 = b$$

$$x_6 = d, \quad y_6 = a$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (3.1.6) eşitliklerinin pozitif bir $n = N$ tamsayısı için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda;

$$x_{6N+1} = -\frac{c}{1+cea}, \quad y_{6N+1} = -\frac{f}{fbd+1}$$

$$x_{6N+2} = -b(fbd+1), \quad y_{6N+2} = -e(cea+1)$$

$$x_{6N+3} = -\frac{a}{1+cea}, \; y_{6N+3} = -\frac{d}{fbd+1}$$

$$x_{6N+4} = f, \; y_{6N+4} = c$$

$$x_{6N+5} = e, \; y_{6N+5} = b$$

$$x_{6N+6} = d, \; y_{6N+6} = a$$

eşitlikleri vardır. İterasyona devam edildiğinde;

$$x_{6N+7} = -\frac{c}{1+cea}, \; y_{6N+7} = -\frac{f}{fbd+1}$$

$$x_{6N+8} = -b(fbd+1), \; y_{6N+8} = -e(cea+1)$$

$$x_{6N+9} = -\frac{a}{1+cea}, \; y_{6N+9} = -\frac{d}{fbd+1}$$

$$x_{6N+10} = f, \; y_{6N+10} = c$$

$$x_{6N+11} = e, \; y_{6N+11} = b$$

$$x_{6N+12} = d, \; y_{6N+12} = a$$

eşitlikleri elde edilir ki (3.1.6) eşitlikleri $n = N+1$ için de doğru olur. Böylece ispat biter.

Teorem 3.1.4. $y_0 = a, y_{-1} = b, y_{-2} = c, x_0 = d, x_{-1} = e, x_{-2} = f$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere (3.1.3) denklem sisteminin çözümü $\{x_n, y_n\}$ olsun. $fbd \neq 1$ ve $cea \neq -1$ olmak üzere (3.1.3) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıdaki gibidir: $n \geq 0$ için

$$x_{6n+1} = \frac{c}{1+cea}, \; y_{6n+1} = \frac{f}{1-fbd}$$

$$x_{6n+2} = b(1-fbd), \; y_{6n+2} = e(1+cea)$$

$$x_{6n+3} = \frac{a}{1+cea}, \; y_{6n+3} = \frac{d}{1-fbd} \tag{3.1.7}$$

$$x_{6n+4} = f, \; y_{6n+4} = c$$

$$x_{6n+5} = e, \; y_{6n+5} = b$$

$x_{6n+6} = d$, $y_{6n+6} = a$

İspat:

İspatı tümevarımla yapalım. (3.1.7) eşitliklerinden; $n = 0$ için

$$x_1 = \frac{c}{1+cea}, \ y_1 = \frac{f}{1-fbd}$$

$$x_2 = b(1-fbd) \ , \ y_2 = e(1+cea)$$

$$x_3 = \frac{a}{1+cea}, \ y_3 = \frac{d}{1-fbd}$$

$$x_4 = f \ , \ y_4 = c$$

$$x_5 = e, \ y_5 = b$$

$$x_6 = d \ , \ y_6 = a$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (3.1.7) eşitliklerinin pozitif bir $n = N$ tamsayısı için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda;

$$x_{6N+1} = \frac{c}{1+cea} \ , \ y_{6N+1} = \frac{f}{1-fbd}$$

$$x_{6N+2} = b(1-fbd) \ , \ y_{6N+2} = e(1+cea)$$

$$x_{6N+3} = \frac{a}{1+cea}, \ y_{6N+3} = \frac{d}{1-fbd}$$

$$x_{6N+4} = f \ , \ y_{6N+4} = c$$

$$x_{6N+5} = e, \ y_{6N+5} = b$$

$$x_{6N+6} = d \ , \ y_{6N+6} = a$$

eşitlikleri vardır. İterasyona devam edildiğinde;

$$x_{6N+7} = \frac{c}{1+cea} \ , \ y_{6N+7} = \frac{f}{1-fbd}$$

$$x_{6N+8} = b(1-fbd) \ , \ y_{6N+8} = e(1+cea)$$

$$x_{6N+9} = \frac{a}{1+cea}, \; y_{6N+9} = \frac{d}{1-fbd}$$

$$x_{6N+10} = f, \; y_{6N+10} = c$$

$$x_{6N+11} = e, \; y_{6N+11} = b$$

$$x_{6N+12} = d, \; y_{6N+12} = a$$

eşitlikleri elde edilir ki (3.1.7) eşitlikleri $n = N+1$ için de doğru olur. Böylece ispat biter.

Teorem 3.1.5. $y_0 = a, y_{-1} = b, y_{-2} = c, x_0 = d, x_{-1} = e, x_{-2} = f$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere (3.1.4) denklem sisteminin çözümü $\{x_n, y_n\}$ olsun. $fbd \neq -1$ ve $cea \neq 1$ olmak üzere (3.1.4) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıdaki gibidir: $n \geq 0$ için

$$x_{6n+1} = \frac{c}{1-cea}, \; y_{6n+1} = \frac{f}{1+fbd}$$

$$x_{6n+2} = b(1+fbd), \; y_{6n+2} = e(1-cea)$$

$$x_{6n+3} = \frac{a}{1-cea}, \; y_{6n+3} = \frac{d}{1+fbd} \tag{3.1.8}$$

$$x_{6n+4} = f, \; y_{6n+4} = c$$

$$x_{6n+5} = e, \; y_{6n+5} = b$$

$$x_{6n+6} = d, \; y_{6n+6} = a$$

İspat:

İspatı tümevarımla yapalım. (3.1.8) eşitliklerinden; $n = 0$ için

$$x_1 = \frac{c}{1-cea}, \; y_1 = \frac{f}{1+fbd}$$

$$x_2 = b(1+fbd), \; y_2 = e(1-cea)$$

$$x_3 = \frac{a}{1-cea}, \; y_3 = \frac{d}{1+fbd}$$

$$x_4 = f, \; y_4 = c$$

$x_5 = e$, $y_5 = b$

$x_6 = d$, $y_6 = a$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (3.1.8) eşitliklerinin pozitif bir $n = N$ tamsayısı için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda;

$$x_{6N+1} = \frac{c}{1-cea} \ , \ y_{6N+1} = \frac{f}{1+fbd}$$

$$x_{6N+2} = b(1+fbd) \ , \ y_{6N+2} = e(1-cea)$$

$$x_{6N+3} = \frac{a}{1-cea} , \ y_{6N+3} = \frac{d}{1+fbd}$$

$$x_{6N+4} = f \ , \ y_{6N+4} = c$$

$$x_{6N+5} = e , \ y_{6N+5} = b$$

$$x_{6N+6} = d \ , \ y_{6N+6} = a$$

eşitlikleri vardır. İterasyona devam edildiğinde;

$$x_{6N+7} = \frac{c}{1-cea} \ , \ y_{6N+7} = \frac{f}{1+fbd}$$

$$x_{6N+8} = b(1+fbd) \ , \ y_{6N+8} = e(1-cea)$$

$$x_{6N+9} = \frac{a}{1-cea} , \ y_{6N+9} = \frac{d}{1+fbd}$$

$$x_{6N+10} = f \ , \ y_{6N+10} = c$$

$$x_{6N+11} = e , \ y_{6N+11} = b$$

$$x_{6N+12} = d \ , \ y_{6N+12} = a$$

eşitlikleri elde edilir ki (3.1.8) eşitlikleri $n = N+1$ için de doğru olur. Böylece ispat biter.

3.2.Üç Boyutlu Rasyonel Fark Denklem Sistemleri

Bu bölümde; başlangıç değerleri reel sayılar olan

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-5}}{-1+y_{n-5}x_{n-3}y_{n-1}}\ ,y_{n+1}=\frac{x_{n-5}}{-1+x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}},z_{n+1}=\frac{x_{n-5}+y_{n-5}}{-1+x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}},n=0,1,..., \quad (3.2.1)$$

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-5}}{-1-y_{n-5}x_{n-3}y_{n-1}}\ ,y_{n+1}=\frac{x_{n-5}}{-1-x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}},z_{n+1}=\frac{x_{n-5}+y_{n-5}}{-1-x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}},n=0,1,...,$$
(3.2.2)

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-5}}{1+y_{n-5}x_{n-3}y_{n-1}}\ ,y_{n+1}=\frac{x_{n-5}}{1-x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}},z_{n+1}=\frac{x_{n-5}+y_{n-5}}{1-x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}},n=0,1,..., \quad (3.2.3)$$

$$x_{n+1}=\frac{y_{n-5}}{1-y_{n-5}x_{n-3}y_{n-1}}\ ,y_{n+1}=\frac{x_{n-5}}{1+x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}},z_{n+1}=\frac{x_{n-5}+y_{n-5}}{1+x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}},n=0,1,...,$$
(3.2.4)

rasyonel fark denklem sistemlerinin çözümleri ve çözümlerinin özellikleri araştırılmıştır.

Lemma 3.2.1. $\{x_n,y_n,z_n\}$ (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) ya da (3.2.4) denklem sistemlerinden herhangi birinin çözümü ise; $n\geq -2$ için aşağıdakiler doğrudur:

(i) $x_{n+3}y_{n+5}=y_{n-3}x_{n-1}$

(ii) $y_{n+3}x_{n+5}=x_{n-3}y_{n-1}$

İspat:

(i) İlk olarak $\{x_n,y_n,z_n\}$ çözümünün (3.2.1) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$x_{n+3}y_{n+5}=\frac{y_{n-3}}{-1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1}}.\frac{x_{n-1}}{-1+x_{n-1}y_{n+1}x_{n+3}}$$

$$=y_{n-3}x_{n-1}\frac{1}{(-1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})(-1+x_{n-1}y_{n+1}x_{n+3})}$$

$$=y_{n-3}x_{n-1}[(-1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})(-1+x_{n-1}y_{n+1}\frac{y_{n-3}}{(-1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})})]^{-1}$$

$$=y_{n-3}x_{n-1}[(-1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})\frac{1}{(-1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})}]^{-1}$$

$$=y_{n-3}x_{n-1}$$

olur.

İkinci olarak $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümünün (3.2.2) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$x_{n+3}y_{n+5} = \frac{y_{n-3}}{-1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{-1-x_{n-1}y_{n+1}x_{n+3}}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}\frac{1}{(-1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})(-1-x_{n-1}y_{n+1}x_{n+3})}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}[(-1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})(-1-x_{n-1}y_{n+1}\frac{y_{n-3}}{(-1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})})]^{-1}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}[(-1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})\frac{1}{(-1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})}]^{-1}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}$$

olur.

Üçüncü olarak $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümünün (3.2.3) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$x_{n+3}y_{n+5} = \frac{y_{n-3}}{1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{1-x_{n-1}y_{n+1}x_{n+3}}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}\frac{1}{(1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})(1-x_{n-1}y_{n+1}x_{n+3})}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}[(1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})(1-x_{n-1}y_{n+1}\frac{y_{n-3}}{(1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})})]^{-1}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}[(1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})\frac{1}{(1+y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})}]^{-1}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}$$

olur.

Dördüncü olarak $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümünün (3.2.4) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$x_{n+3}y_{n+5} = \frac{y_{n-3}}{1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1}} \cdot \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}y_{n+1}x_{n+3}}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}\frac{1}{(1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})(1+x_{n-1}y_{n+1}x_{n+3})}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}[(1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})(1+x_{n-1}y_{n+1}\frac{y_{n-3}}{(1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})})]^{-1}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}[(1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})\frac{1}{(1-y_{n-3}x_{n-1}y_{n+1})}]^{-1}$$

$$= y_{n-3}x_{n-1}$$

olur.

(ii) İlk olarak $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümünün (3.2.1) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$y_{n+3}x_{n+5} = \frac{x_{n-3}}{-1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1}}.\frac{y_{n-1}}{-1+y_{n-1}x_{n+1}y_{n+3}}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}\frac{1}{(-1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})(-1+y_{n-1}x_{n+1}y_{n+3})}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}[(-1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})(-1+y_{n-1}x_{n+1}\frac{x_{n-3}}{(-1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})})]^{-1}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}[(-1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})\frac{1}{(-1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})}]^{-1}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}$$

olur.

İkinci olarak $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümünün (3.2.2) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$y_{n+3}x_{n+5} = \frac{x_{n-3}}{-1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1}}.\frac{y_{n-1}}{-1-y_{n-1}x_{n+1}y_{n+3}}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}\frac{1}{(-1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})(-1-y_{n-1}x_{n+1}y_{n+3})}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}[(-1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})(-1-y_{n-1}x_{n+1}\frac{x_{n-3}}{(-1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})})]^{-1}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}[(-1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})\frac{1}{(-1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})}]^{-1}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}$$

olur.

Üçüncü olarak $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümünün (3.2.3) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$y_{n+3}x_{n+5} = \frac{x_{n-3}}{1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1}} \cdot \frac{y_{n-1}}{1+y_{n-1}x_{n+1}y_{n+3}}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}\frac{1}{(1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})(1+y_{n-1}x_{n+1}y_{n+3})}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}[(1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})(1+y_{n-1}x_{n+1}\frac{x_{n-3}}{(1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})})]^{-1}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}[(1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})\frac{1}{(1-x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})}]^{-1}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}$$

olur.

Dördüncü olarak $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümünün (3.2.4) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$y_{n+3}x_{n+5} = \frac{x_{n-3}}{1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1}} \cdot \frac{y_{n-1}}{1-y_{n-1}x_{n+1}y_{n+3}}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}\frac{1}{(1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})(1-y_{n-1}x_{n+1}y_{n+3})}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}[(1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})(1-y_{n-1}x_{n+1}\frac{x_{n-3}}{(1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})})]^{-1}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}[(1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})\frac{1}{(1+x_{n-3}y_{n-1}x_{n+1})}]^{-1}$$

$$= x_{n-3}y_{n-1}$$

olur ki ispat biter.

Teorem 3.2.1. $\{x_n, y_n, z_n\}$ (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) ya da (3.2.4) denklem sistemlerinden herhangi birinin bir çözümü ise; $\{x_n, y_n, z_n\}$ 12 periyotludur.

İspat:

Her $n>0$ için $x_{n+12}=x_n$, $y_{n+12}=y_n$ ve $z_{n+12}=z_n$ olduğunu göstermemiz gerekir.

İlk olarak $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümünün (3.2.1) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

Lemma 3.2.1 (i) göz önüne alındığında; $n\geq -5$ için

$$x_{n+12}=\frac{y_{n+6}}{-1+y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10}}$$

$$=\frac{x_n}{(-1+y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10})(-1+x_ny_{n+2}x_{n+4})}$$

$$=x_n(1-y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10}-x_ny_{n+2}x_{n+4}+y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10}x_ny_{n+2}x_{n+4})^{-1}$$

$$=x_n(1-y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10}-x_ny_{n+2}x_{n+4}+y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10}(\frac{x_n}{y_{n+6}}+1))^{-1}$$

$$=\frac{x_n}{1+x_{n+8}y_{n+10}x_n-x_ny_{n+2}x_{n+4}}$$

$$=\frac{x_n}{1+x_n(x_{n+8}y_{n+10}-y_{n+2}x_{n+4})}$$

$$=x_n$$

elde edilir.

Lemma 3.2.1 (ii) göz önüne alındığında; $n\geq -5$ için

$$y_{n+12}=\frac{x_{n+6}}{-1+x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}}$$

$$=\frac{y_n}{(-1+x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10})(-1+y_nx_{n+2}y_{n+4})}$$

$$=y_n(1-y_nx_{n+2}y_{n+4}-x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}+x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}y_nx_{n+2}y_{n+4})^{-1}$$

$$=y_n(1-y_nx_{n+2}y_{n+4}-x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}+x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}(\frac{y_n}{x_{n+6}}+1))^{-1}$$

$$=\frac{y_n}{1-y_nx_{n+2}y_{n+4}+y_nx_{n+10}y_{n+8}}$$

$$= \frac{y_n}{1 + y_n (y_{n+8} x_{n+10} - x_{n+2} y_{n+4})}$$

$$= y_n$$

elde edilir.

$x_{n+12} = x_n$ ve $y_{n+12} = y_n$ olduğunu da göz önüne alarak; $n > 0$ için

$$z_{n+12} = \frac{x_{n+6} + y_{n+6}}{-1 + x_{n+6} y_{n+8} x_{n+10}}$$

$$= \frac{x_{n-6} + y_{n-6}}{-1 + x_{n-6} y_{n-4} x_{n-2}}$$

$$= z_n$$

olur ki $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümü 12 periyotludur.

İkinci olarak $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümünün (3.2.2) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

Lemma 3.2.1 (i) göz önüne alındığında; $n \geq -5$ için

$$x_{n+12} = \frac{y_{n+6}}{-1 - y_{n+6} x_{n+8} y_{n+10}}$$

$$= \frac{x_n}{(-1 - y_{n+6} x_{n+8} y_{n+10})(-1 - x_n y_{n+2} x_{n+4})}$$

$$= x_n (1 + y_{n+6} x_{n+8} y_{n+10} + x_n y_{n+2} x_{n+4} + y_{n+6} x_{n+8} y_{n+10} x_n y_{n+2} x_{n+4})^{-1}$$

$$= x_n (1 + y_{n+6} x_{n+8} y_{n+10} + x_n y_{n+2} x_{n+4} + y_{n+6} x_{n+8} y_{n+10} (-\frac{x_n}{y_{n+6}} - 1))^{-1}$$

$$= \frac{x_n}{1 - x_{n+8} y_{n+10} x_n + x_n y_{n+2} x_{n+4}}$$

$$= \frac{x_n}{1 - x_n (x_{n+8} y_{n+10} - y_{n+2} x_{n+4})}$$

$$= x_n$$

elde edilir.

Lemma 3.2.1 (ii) göz önüne alındığında; $n \geq -5$ için

$$y_{n+12}=\frac{x_{n+6}}{-1-x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}}$$

$$=\frac{y_n}{(-1-x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10})(-1-y_nx_{n+2}y_{n+4})}$$

$$=y_n(1+y_nx_{n+2}y_{n+4}+x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}+x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}y_nx_{n+2}y_{n+4})^{-1}$$

$$=y_n(1+y_nx_{n+2}y_{n+4}+x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}+x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}(-\frac{y_n}{x_{n+6}}-1))^{-1}$$

$$=\frac{y_n}{1+y_nx_{n+2}y_{n+4}-y_nx_{n+10}y_{n+8}}$$

$$=\frac{y_n}{1-y_n(y_{n+8}x_{n+10}-x_{n+2}y_{n+4})}$$

$$=y_n$$

elde edilir.

$x_{n+12}=x_n$ ve $y_{n+12}=y_n$ olduğunu da göz önüne alarak; $n>0$ için

$$z_{n+12}=\frac{x_{n+6}+y_{n+6}}{-1-x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}}$$

$$=\frac{x_{n-6}+y_{n-6}}{-1-x_{n-6}y_{n-4}x_{n-2}}$$

$$=z_n$$

olur ki $\{x_n,y_n,z_n\}$ çözümü 12 periyotludur.

Üçüncü olarak $\{x_n,y_n,z_n\}$ çözümünün (3.2.3) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

Lemma 3.2.1 (i) göz önüne alındığında; $n\geq -5$ için

$$x_{n+12}=\frac{y_{n+6}}{1+y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10}}$$

$$=\frac{x_n}{(1+y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10})(1-x_ny_{n+2}x_{n+4})}$$

$$=x_n(1+y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10}-x_ny_{n+2}x_{n+4}-y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10}x_ny_{n+2}x_{n+4})^{-1}$$

$$= x_n (1 + y_{n+6} x_{n+8} y_{n+10} - x_n y_{n+2} x_{n+4} - y_{n+6} x_{n+8} y_{n+10} (1 - \frac{x_n}{y_{n+6}}))^{-1}$$

$$= \frac{x_n}{1 + x_{n+8} y_{n+10} x_n - x_n y_{n+2} x_{n+4}}$$

$$= \frac{x_n}{1 + x_n (x_{n+8} y_{n+10} - y_{n+2} x_{n+4})}$$

$$= x_n$$

elde edilir.

Lemma 3.2.1 (ii) göz önüne alındığında; $n \geq -5$ için

$$y_{n+12} = \frac{x_{n+6}}{1 - x_{n+6} y_{n+8} x_{n+10}}$$

$$= \frac{y_n}{(1 - x_{n+6} y_{n+8} x_{n+10})(1 + y_n x_{n+2} y_{n+4})}$$

$$= y_n (1 + y_n x_{n+2} y_{n+4} - x_{n+6} y_{n+8} x_{n+10} - x_{n+6} y_{n+8} x_{n+10} y_n x_{n+2} y_{n+4})^{-1}$$

$$= y_n (1 + y_n x_{n+2} y_{n+4} - x_{n+6} y_{n+8} x_{n+10} - x_{n+6} y_{n+8} x_{n+10} (\frac{y_n}{x_{n+6}} - 1))^{-1}$$

$$= \frac{y_n}{1 + y_n x_{n+2} y_{n+4} - y_n x_{n+10} y_{n+8}}$$

$$= \frac{y_n}{1 - y_n (y_{n+8} x_{n+10} - x_{n+2} y_{n+4})}$$

$$= y_n$$

elde edilir.

$x_{n+12} = x_n$ ve $y_{n+12} = y_n$ olduğunu da göz önüne alarak; $n > 0$ için

$$z_{n+12} = \frac{x_{n+6} + y_{n+6}}{1 - x_{n+6} y_{n+8} x_{n+10}}$$

$$= \frac{x_{n-6} + y_{n-6}}{1 - x_{n-6} y_{n-4} x_{n-2}}$$

$$= z_n$$

olur ki $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümü 12 periyotludur.

Dördüncü olarak $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümünün (3.2.4) denklem sisteminin bir çözümü olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

Lemma 3.2.1 (i) göz önüne alındığında; $n \geq -5$ için

$$x_{n+12} = \frac{y_{n+6}}{1 - y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10}}$$

$$= \frac{x_n}{(1 - y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10})(1 + x_n y_{n+2}x_{n+4})}$$

$$= x_n(1 - y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10} + x_n y_{n+2}x_{n+4} - y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10}x_n y_{n+2}x_{n+4})^{-1}$$

$$= x_n(1 - y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10} + x_n y_{n+2}x_{n+4} - y_{n+6}x_{n+8}y_{n+10}(\frac{x_n}{y_{n+6}} - 1))^{-1}$$

$$= \frac{x_n}{1 - x_{n+8}y_{n+10}x_n + x_n y_{n+2}x_{n+4}}$$

$$= \frac{x_n}{1 - x_n(x_{n+8}y_{n+10} - y_{n+2}x_{n+4})}$$

$$= x_n$$

elde edilir.

Lemma 3.2.1 (ii) göz önüne alındığında; $n \geq -5$ için

$$y_{n+12} = \frac{x_{n+6}}{1 + x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}}$$

$$= \frac{y_n}{(1 + x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10})(1 - y_n x_{n+2}y_{n+4})}$$

$$= y_n(1 - y_n x_{n+2}y_{n+4} + x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10} - x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}y_n x_{n+2}y_{n+4})^{-1}$$

$$= y_n(1 - y_n x_{n+2}y_{n+4} + x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10} - x_{n+6}y_{n+8}x_{n+10}(1 - \frac{y_n}{x_{n+6}}))^{-1}$$

$$= \frac{y_n}{1 - y_n x_{n+2}y_{n+4} + y_n x_{n+10}y_{n+8}}$$

$$= \frac{y_n}{1 + y_n (y_{n+8} x_{n+10} - x_{n+2} y_{n+4})}$$

$$= y_n$$

elde edilir.

$x_{n+12} = x_n$ ve $y_{n+12} = y_n$ olduğunu da göz önüne alarak; $n > 0$ için

$$z_{n+12} = \frac{x_{n+6} + y_{n+6}}{1 + x_{n+6} y_{n+8} x_{n+10}}$$

$$= \frac{x_{n-6} + y_{n-6}}{1 + x_{n-6} y_{n-4} x_{n-2}}$$

$$= z_n$$

olur ki $\{x_n, y_n, z_n\}$ çözümü 12 periyotlu olup ispat biter.

Aşağıdaki teoremler (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.4) denklem sistemlerinin çözümlerini açık bir şekilde göstermektedir.

Teorem 3.2.2. $x_{-5} = a$, $x_{-4} = b$, $x_{-3} = c$, $x_{-2} = d$, $x_{-1} = e$, $x_0 = f$, $y_{-5} = k$, $y_{-4} = l$, $y_{-3} = m$, $y_{-2} = n$, $y_{-1} = p$, $y_0 = r$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere (3.2.1) denklem sisteminin çözümü $\{x_n, y_n, z_n\}$ olsun. $y_{-5} x_{-3} y_{-1} \neq 1$, $x_{-5} y_{-3} x_{-1} \neq 1$, $y_{-4} x_{-2} y_0 \neq 1$ ve $x_{-4} y_{-2} x_0 \neq 1$ olmak üzere (3.2.1) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıdaki gibidir: $n \geq 0$ için

$$x_{12n+1} = \frac{k}{kcp - 1}, \; y_{12n+1} = \frac{a}{ame - 1}, \; z_{12n+1} = \frac{a + k}{ame - 1}$$

$$x_{12n+2} = \frac{l}{ldr - 1}, \; y_{12n+2} = \frac{b}{bnf - 1}, \; z_{12n+2} = \frac{b + l}{bnf - 1}$$

$$x_{12n+3} = m(ame - 1), \; y_{12n+3} = c(kcp - 1), \; z_{12n+3} = (c + m)(kcp - 1)$$

$$x_{12n+4} = n(bnf - 1), \; y_{12n+4} = d(ldr - 1), \; z_{12n+4} = (d + n)(ldr - 1)$$

$$x_{12n+5} = \frac{p}{kcp - 1}, \; y_{12n+5} = \frac{e}{ame - 1}, \; z_{12n+5} = \frac{e + p}{ame - 1}$$

$$x_{12n+6} = \frac{r}{ldr - 1}, \; y_{12n+6} = \frac{f}{bnf - 1}, \; z_{12n+6} = \frac{f + r}{bnf - 1} \tag{3.2.5}$$

$$x_{12n+7}=a\,,\ y_{12n+7}=k\,,\ z_{12n+7}=k+a\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_{12n+8}=b\,,\ y_{12n+8}=l\,,\ z_{12n+8}=l+b\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

$$x_{12n+9}=c\,,\ y_{12n+9}=m\,,\ z_{12n+9}=m+c\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_{12n+10}=d\,,\ y_{12n+10}=n\,,\ z_{12n+10}=n+d\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

$$x_{12n+11}=e\,,\ y_{12n+11}=p\,,\ z_{12n+11}=p+e\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_{12n+12}=f\,,\ y_{12n+12}=r\,,\ z_{12n+12}=r+f\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

İspat:

İspatı tümevarımla yapalım. (3.2.5) eşitliklerinden; $n=0$ için

$$x_1=\frac{k}{kcp-1}\,,y_1=\frac{a}{ame-1}\,,\ z_1=\frac{a+k}{ame-1}$$

$$x_2=\frac{l}{ldr-1}\,,y_2=\frac{b}{bnf-1}\,,\ z_2=\frac{b+l}{bnf-1}$$

$$x_3=m(ame-1)\,,\ y_3=c(kcp-1)\,,\ z_3=(c+m)(kcp-1)$$

$$x_4=n(bnf-1)\,,\ y_4=d(ldr-1)\,,\ z_4=(d+n)(ldr-1)$$

$$x_5=\frac{p}{kcp-1}\,,\ y_5=\frac{e}{ame-1}\,,\ z_5=\frac{e+p}{ame-1}$$

$$x_6=\frac{r}{ldr-1}\,,\ y_6=\frac{f}{bnf-1}\,,\ z_6=\frac{f+r}{bnf-1}$$

$$x_7=a\,,\ y_7=k\,,\ z_7=k+a\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_8=b\,,\ y_8=l\,,\ z_8=l+b\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

$$x_9=c\,,\ y_9=m\,,\ z_9=m+c\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_{10} = d\ ,\ y_{10} = n\ ,\ z_{10} = n + d\,\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

$$x_{11} = e,\ y_{11} = p\ ,\ z_{11} = p + e\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_{12} = f\ ,\ y_{12} = r\ ,\ z_{12} = r + f\,\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (3.2.5) eşitliklerinin pozitif bir $n = N$ tamsayısı için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda;

$$x_{12N+1} = \frac{k}{kcp-1}, y_{12N+1} = \frac{a}{ame-1},\ z_{12N+1} = \frac{a+k}{ame-1}$$

$$x_{12N+2} = \frac{l}{ldr-1}, y_{12N+2} = \frac{b}{bnf-1},\ z_{12N+2} = \frac{b+l}{bnf-1}$$

$$x_{12N+3} = m(ame-1),\ y_{12N+3} = c(kcp-1),\ z_{12N+3} = (c+m)(kcp-1)$$

$$x_{12N+4} = n(bnf-1),\ y_{12N+4} = d(ldr-1),\ z_{12N+4} = (d+n)(ldr-1)$$

$$x_{12N+5} = \frac{p}{kcp-1},\ y_{12N+5} = \frac{e}{ame-1},\ z_{12N+5} = \frac{e+p}{ame-1}$$

$$x_{12N+6} = \frac{r}{ldr-1},\ y_{12N+6} = \frac{f}{bnf-1},\ z_{12N+6} = \frac{f+r}{bnf-1}$$

$$x_{12N+7} = a\ ,\ y_{12N+7} = k\ ,\ z_{12N+7} = k + a\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_{12N+8} = b,\ y_{12N+8} = l\ ,\ z_{12N+8} = l + b\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

$$x_{12N+9} = c,\ y_{12N+9} = m,\ z_{12N+9} = m + c\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_{12N+10} = d\ ,\ y_{12N+10} = n\ ,\ z_{12N+10} = n + d\,\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

$$x_{12N+11} = e,\ y_{12N+11} = p\ ,\ z_{12N+11} = p + e\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_{12N+12}=f\,,\ y_{12N+12}=r\,,\ z_{12N+12}=r+f\,\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

eşitlikleri vardır. İterasyona devam edildiğinde;

$$x_{12N+13}=\frac{k}{kcp-1}\,,y_{12N+13}=\frac{a}{ame-1}\,,\ z_{12N+13}=\frac{a+k}{ame-1}$$

$$x_{12N+14}=\frac{l}{ldr-1}\,,y_{12N+14}=\frac{b}{bnf-1}\,,\ z_{12N+14}=\frac{b+l}{bnf-1}$$

$$x_{12N+15}=m(ame-1)\,,\ y_{12N+15}=c(kcp-1)\,,\ z_{12N+15}=(c+m)(kcp-1)$$

$$x_{12N+16}=n(bnf-1)\,,\ y_{12N+16}=d(ldr-1)\,,\ \ z_{12N+16}=(d+n)(ldr-1)$$

$$x_{12N+17}=\frac{p}{kcp-1}\,,\ y_{12N+17}=\frac{e}{ame-1}\,,\ z_{12N+17}=\frac{e+p}{ame-1}$$

$$x_{12N+18}=\frac{r}{ldr-1}\,,\ y_{12N+18}=\frac{f}{bnf-1}\,,\ z_{12N+18}=\frac{f+r}{bnf-1}$$

$$x_{12N+19}=a\,,\ y_{12N+19}=k\,,\ z_{12N+19}=k+a\,\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_{12N+20}=b\,,\ y_{12N+20}=l\,,\ z_{12N+20}=l+b\,\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

$$x_{12N+21}=c\,,\ y_{12N+21}=m\,,\ z_{12N+21}=m+c\,\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_{12N+22}=d\,,\ y_{12N+22}=n\,,\ z_{12N+22}=n+d\,\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

$$x_{12N+23}=e\,,\ y_{12N+23}=p\,,\ z_{12N+23}=p+e\,\frac{(kcp-1)}{(ame-1)}$$

$$x_{12N+24}=f\,,\ y_{12N+24}=r\,,\ z_{12N+24}=r+f\,\frac{(ldr-1)}{(bnf-1)}$$

eşitlikleri elde edilir ki (3.2.5) eşitlikleri $n=N+1$ için de doğru olur. Böylece ispat biter.

Teorem 3.2.3. $x_{-5}=a$, $x_{-4}=b$, $x_{-3}=c$, $x_{-2}=d$, $x_{-1}=e$, $x_0=f$, $y_{-5}=k$, $y_{-4}=l$, $y_{-3}=m$, $y_{-2}=n$, $y_{-1}=p$, $y_0=r$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere (3.2.2) denklem sisteminin çözümü $\{x_n, y_n, z_n\}$ olsun. $y_{-5}x_{-3}y_{-1}\neq -1$, $x_{-5}y_{-3}x_{-1}\neq -1$,

$y_{-4}x_{-2}y_0 \neq -1$ ve $x_{-4}y_{-2}x_0 \neq -1$ olmak üzere (3.2.2) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıdaki gibidir: $n \geq 0$ için

$$x_{12n+1} = \frac{k}{-1-kcp},\ y_{12n+1} = \frac{a}{-1-ame},\ z_{12n+1} = \frac{a+k}{-1-ame}$$

$$x_{12n+2} = \frac{l}{-1-ldr},\ y_{12n+2} = \frac{b}{-1-bnf},\ z_{12n+2} = \frac{b+l}{-1-bnf}$$

$$x_{12n+3} = m(-1-ame),\ y_{12n+3} = c(-1-kcp),\ z_{12n+3} = (c+m)(-1-kcp)$$

$$x_{12n+4} = n(-1-bnf),\ y_{12n+4} = d(-1-ldr),\ z_{12n+4} = (d+n)(-1-ldr)$$

$$x_{12n+5} = \frac{p}{-1-kcp},\ y_{12n+5} = \frac{e}{-1-ame},\ z_{12n+5} = \frac{e+p}{-1-ame}$$

$$x_{12n+6} = \frac{r}{-1-ldr},\ y_{12n+6} = \frac{f}{-1-bnf},\ z_{12n+6} = \frac{f+r}{-1-bnf} \qquad (3.2.6)$$

$$x_{12n+7} = a,\ y_{12n+7} = k,\ z_{12n+7} = k + a\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_{12n+8} = b,\ y_{12n+8} = l,\ z_{12n+8} = l + b\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

$$x_{12n+9} = c,\ y_{12n+9} = m,\ z_{12n+9} = m + c\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_{12n+10} = d,\ y_{12n+10} = n,\ z_{12n+10} = n + d\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

$$x_{12n+11} = e,\ y_{12n+11} = p,\ z_{12n+11} = p + e\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_{12n+12} = f,\ y_{12n+12} = r,\ z_{12n+12} = r + f\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

İspat:

İspatı tümevarımla yapalım. (3.2.6) eşitliklerinden; $n = 0$ için

$$x_1 = \frac{k}{-1-kcp},\ y_1 = \frac{a}{-1-ame},\ z_1 = \frac{a+k}{-1-ame}$$

$$x_2=\frac{l}{-1-ldr},\ y_2=\frac{b}{-1-bnf},\ z_2=\frac{b+l}{-1-bnf}$$

$$x_3=m(-1-ame),\ y_3=c(-1-kcp),\ z_3=(c+m)(-1-kcp)$$

$$x_4=n(-1-bnf),\ y_4=d(-1-ldr),\ z_4=(d+n)(-1-ldr)$$

$$x_5=\frac{p}{-1-kcp},\ y_5=\frac{e}{-1-ame},\ z_5=\frac{e+p}{-1-ame}$$

$$x_6=\frac{r}{-1-ldr},\ y_6=\frac{f}{-1-bnf},\ z_6=\frac{f+r}{-1-bnf}$$

$$x_7=a,\ y_7=k,\ z_7=k+a\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_8=b,\ y_8=l,\ z_8=l+b\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

$$x_9=c,\ y_9=m,\ z_9=m+c\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_{10}=d,\ y_{10}=n,\ z_{10}=n+d\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

$$x_{11}=e,\ y_{11}=p,\ z_{11}=p+e\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_{12}=f,\ y_{12}=r,\ z_{12}=r+f\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (3.2.6) eşitliklerinin pozitif bir $n=N$ tamsayısı için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda;

$$x_{12N+1}=\frac{k}{-1-kcp},\ y_{12N+1}=\frac{a}{-1-ame},\ z_{12N+1}=\frac{a+k}{-1-ame}$$

$$x_{12N+2}=\frac{l}{-1-ldr},\ y_{12N+2}=\frac{b}{-1-bnf},\ z_{12N+2}=\frac{b+l}{-1-bnf}$$

$$x_{12N+3}=m(-1-ame),\ y_{12N+3}=c(-1-kcp),\ z_{12N+3}=(c+m)(-1-kcp)$$

$$x_{12N+4}=n(-1-bnf),\ y_{12N+4}=d(-1-ldr),\ z_{12N+4}=(d+n)(-1-ldr)$$

$$x_{12N+5}=\frac{p}{-1-kcp},\ y_{12N+5}=\frac{e}{-1-ame},\ z_{12N+5}=\frac{e+p}{-1-ame}$$

$$x_{12N+6}=\frac{r}{-1-ldr},\ y_{12N+6}=\frac{f}{-1-bnf},\ z_{12N+6}=\frac{f+r}{-1-bnf}$$

$$x_{12N+7}=a,\ y_{12N+7}=k,\ z_{12N+7}=k+a\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_{12N+8}=b,\ y_{12N+8}=l,\ z_{12N+8}=l+b\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

$$x_{12N+9}=c,\ y_{12N+9}=m,\ z_{12N+9}=m+c\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_{12N+10}=d,\ y_{12N+10}=n,\ z_{12N+10}=n+d\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

$$x_{12N+11}=e,\ y_{12N+11}=p,\ z_{12N+11}=p+e\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_{12N+12}=f,\ y_{12N+12}=r,\ z_{12N+12}=r+f\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

eşitlikleri vardır. İterasyona devam edildiğinde;

$$x_{12N+13}=\frac{k}{-1-kcp},y_{12N+13}=\frac{a}{-1-ame},\ z_{12N+13}=\frac{a+k}{-1-ame}$$

$$x_{12N+14}=\frac{l}{-1-ldr},y_{12N+14}=\frac{b}{-1-bnf},\ z_{12N+14}=\frac{b+l}{-1-bnf}$$

$$x_{12N+15}=m(-1-ame),\ y_{12N+15}=c(-1-kcp),\ z_{12N+15}=(c+m)(-1-kcp)$$

$$x_{12N+16}=n(-1-bnf),\ y_{12N+16}=d(-1-ldr),\ z_{12N+16}=(d+n)(-1-ldr)$$

$$x_{12N+17}=\frac{p}{-1-kcp},\ y_{12N+17}=\frac{e}{-1-ame},\ z_{12N+17}=\frac{e+p}{-1-ame}$$

$$x_{12N+18}=\frac{r}{-1-ldr},\ y_{12N+18}=\frac{f}{-1-bnf},\ z_{12N+18}=\frac{f+r}{-1-bnf}$$

$$x_{12N+19}=a,\ y_{12N+19}=k,\ z_{12N+19}=k+a\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_{12N+20}=b,\ y_{12N+20}=l,\ z_{12N+20}=l+b\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

$$x_{12N+21}=c,\ y_{12N+21}=m,\ z_{12N+21}=m+c\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_{12N+22}=d,\ y_{12N+22}=n,\ z_{12N+22}=n+d\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

$$x_{12N+23}=e,\ y_{12N+23}=p,\ z_{12N+23}=p+e\frac{(-1-kcp)}{(-1-ame)}$$

$$x_{12N+24}=f,\ y_{12N+24}=r,\ z_{12N+24}=r+f\frac{(-1-ldr)}{(-1-bnf)}$$

eşitlikleri elde edilir ki (3.2.6) eşitlikleri $n=N+1$ için de doğru olur. Böylece ispat biter.

Teorem 3.2.4. $x_{-5}=a$, $x_{-4}=b$, $x_{-3}=c$, $x_{-2}=d$, $x_{-1}=e$, $x_0=f$, $y_{-5}=k$, $y_{-4}=l$, $y_{-3}=m$, $y_{-2}=n$, $y_{-1}=p$, $y_0=r$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere (3.2.3) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. $y_{-5}x_{-3}y_{-1}\neq -1$, $x_{-5}y_{-3}x_{-1}\neq 1$, $y_{-4}x_{-2}y_0\neq -1$ ve $x_{-4}y_{-2}x_0\neq 1$ olmak üzere (3.2.3) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıdaki gibidir: $n\geq 0$ için

$$x_{12n+1}=\frac{k}{1+kcp},\ y_{12n+1}=\frac{a}{1-ame},\ z_{12n+1}=\frac{a+k}{1-ame}$$

$$x_{12n+2}=\frac{l}{1+ldr},\ y_{12n+2}=\frac{b}{1-bnf},\ z_{12n+2}=\frac{b+l}{1-bnf}$$

$$x_{12n+3}=m(1-ame),\ y_{12n+3}=c(1+kcp),\ z_{12n+3}=(c+m)(1+kcp)$$

$$x_{12n+4}=n(1-bnf),\ y_{12n+4}=d(1+ldr),\ z_{12n+4}=(d+n)(1+ldr)$$

$$x_{12n+5}=\frac{p}{1+kcp},\ y_{12n+5}=\frac{e}{1-ame},\ z_{12n+5}=\frac{e+p}{1-ame}$$

$$x_{12n+6}=\frac{r}{1+ldr},\ y_{12n+6}=\frac{f}{1-bnf},\ z_{12n+6}=\frac{f+r}{1-bnf} \tag{3.2.7}$$

$$x_{12n+7}=a,\ y_{12n+7}=k,\ z_{12n+7}=k+a\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_{12n+8} = b\,,\; y_{12n+8} = l\,,\; z_{12n+8} = l + b\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

$$x_{12n+9} = c\,,\; y_{12n+9} = m\,,\; z_{12n+9} = m + c\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_{12n+10} = d\,,\; y_{12n+10} = n\,,\; z_{12n+10} = n + d\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

$$x_{12n+11} = e\,,\; y_{12n+11} = p\,,\; z_{12n+11} = p + e\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_{12n+12} = f\,,\; y_{12n+12} = r\,,\; z_{12n+12} = r + f\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

İspat:

İspatı tümevarımla yapalım. (3.2.7) eşitliklerinden; $n = 0$ için

$$x_1 = \frac{k}{1+kcp}\,, y_1 = \frac{a}{1-ame}\,,\; z_1 = \frac{a+k}{1-ame}$$

$$x_2 = \frac{l}{1+ldr}\,, y_2 = \frac{b}{1-bnf}\,,\; z_2 = \frac{b+l}{1-bnf}$$

$$x_3 = m(1-ame)\,,\; y_3 = c(1+kcp)\,,\; z_3 = (c+m)(1+kcp)$$

$$x_4 = n(1-bnf)\,,\; y_4 = d(1+ldr)\,,\; z_4 = (d+n)(1+ldr)$$

$$x_5 = \frac{p}{1+kcp}\,,\; y_5 = \frac{e}{1-ame}\,,\; z_5 = \frac{e+p}{1-ame}$$

$$x_6 = \frac{r}{1+ldr}\,,\; y_6 = \frac{f}{1-bnf}\,,\; z_6 = \frac{f+r}{1-bnf}$$

$$x_7 = a\,,\; y_7 = k\,,\; z_7 = k + a\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_8 = b\,,\; y_8 = l\,,\; z_8 = l + b\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

$$x_9 = c\,,\; y_9 = m\,,\; z_9 = m + c\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_{10} = d\,,\; y_{10} = n\,,\; z_{10} = n + d\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

$$x_{11} = e\,,\; y_{11} = p\,,\; z_{11} = p + e\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_{12} = f\,,\; y_{12} = r\,,\; z_{12} = r + f\,\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (3.2.7) eşitliklerinin pozitif bir $n = N$ tamsayısı için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda;

$$x_{12N+1} = \frac{k}{1+kcp}\,, y_{12N+1} = \frac{a}{1-ame}\,,\; z_{12N+1} = \frac{a+k}{1-ame}$$

$$x_{12N+2} = \frac{l}{1+ldr}\,, y_{12N+2} = \frac{b}{1-bnf}\,,\; z_{12N+2} = \frac{b+l}{1-bnf}$$

$$x_{12N+3} = m(1-ame)\,,\; y_{12N+3} = c(1+kcp)\,,\; z_{12N+3} = (c+m)(1+kcp)$$

$$x_{12N+4} = n(1-bnf)\,,\; y_{12N+4} = d(1+ldr)\,,\; z_{12N+4} = (d+n)(1+ldr)$$

$$x_{12N+5} = \frac{p}{1+kcp}\,,\; y_{12N+5} = \frac{e}{1-ame}\,,\; z_{12N+5} = \frac{e+p}{1-ame}$$

$$x_{12N+6} = \frac{r}{1+ldr}\,,\; y_{12N+6} = \frac{f}{1-bnf}\,,\; z_{12N+6} = \frac{f+r}{1-bnf}$$

$$x_{12N+7} = a\,,\; y_{12N+7} = k\,,\; z_{12N+7} = k + a\,\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_{12N+8} = b\,,\; y_{12N+8} = l\,,\; z_{12N+8} = l + b\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

$$x_{12N+9} = c\,,\; y_{12N+9} = m\,,\; z_{12N+9} = m + c\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_{12N+10} = d\,,\; y_{12N+10} = n\,,\; z_{12N+10} = n + d\,\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

$$x_{12N+11} = e\,,\; y_{12N+11} = p\,,\; z_{12N+11} = p + e\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_{12N+12} = f\,,\; y_{12N+12} = r\,,\; z_{12N+12} = r + f\,\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

eşitlikleri vardır. İterasyona devam edildiğinde;

$$x_{12N+13}=\frac{k}{1+kcp},\ y_{12N+13}=\frac{a}{1-ame},\ z_{12N+13}=\frac{a+k}{1-ame}$$

$$x_{12N+14}=\frac{l}{1+ldr},\ y_{12N+14}=\frac{b}{1-bnf},\ z_{12N+14}=\frac{b+l}{1-bnf}$$

$$x_{12N+15}=m(1-ame),\ y_{12N+15}=c(1+kcp),\ z_{12N+15}=(c+m)(1+kcp)$$

$$x_{12N+16}=n(1-bnf),\ y_{12N+16}=d(1+ldr),\ z_{12N+16}=(d+n)(1+ldr)$$

$$x_{12N+17}=\frac{p}{1+kcp},\ y_{12N+17}=\frac{e}{1-ame},\ z_{12N+17}=\frac{e+p}{1-ame}$$

$$x_{12N+18}=\frac{r}{1+ldr},\ y_{12N+18}=\frac{f}{1-bnf},\ z_{12N+18}=\frac{f+r}{1-bnf}$$

$$x_{12N+19}=a,\ y_{12N+19}=k,\ z_{12N+19}=k+a\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_{12N+20}=b,\ y_{12N+20}=l,\ z_{12N+20}=l+b\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

$$x_{12N+21}=c,\ y_{12N+21}=m,\ z_{12N+21}=m+c\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_{12N+22}=d,\ y_{12N+22}=n,\ z_{12N+22}=n+d\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

$$x_{12N+23}=e,\ y_{12N+23}=p,\ z_{12N+23}=p+e\frac{(1+kcp)}{(1-ame)}$$

$$x_{12N+24}=f,\ y_{12N+24}=r,\ z_{12N+24}=r+f\frac{(1+ldr)}{(1-bnf)}$$

eşitlikleri elde edilir ki (3.2.7) eşitlikleri $n=N+1$ için de doğru olur. Böylece ispat biter.

Teorem 3.2.5. $x_{-5}=a$, $x_{-4}=b$, $x_{-3}=c$, $x_{-2}=d$, $x_{-1}=e$, $x_0=f$, $y_{-5}=k$, $y_{-4}=l$, $y_{-3}=m$, $y_{-2}=n$, $y_{-1}=p$, $y_0=r$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere (3.2.4) denklem sisteminin çözümü $\{x_n,y_n,z_n\}$ olsun. $y_{-5}x_{-3}y_{-1}\neq 1$, $x_{-5}y_{-3}x_{-1}\neq -1$, $y_{-4}x_{-2}y_0\neq 1$ ve $x_{-4}y_{-2}x_0\neq -1$ olmak üzere (3.2.4) denklem sisteminin bütün çözümleri aşağıdaki gibidir: $n\geq 0$ için

$$x_{12n+1}=\frac{k}{1-kcp},\ y_{12n+1}=\frac{a}{1+ame},\ z_{12n+1}=\frac{a+k}{1+ame}$$

$$x_{12n+2}=\frac{l}{1-ldr},\ y_{12n+2}=\frac{b}{1+bnf},\ z_{12n+2}=\frac{b+l}{1+bnf}$$

$$x_{12n+3}=m(1+ame),\ y_{12n+3}=c(1-kcp),\ z_{12n+3}=(c+m)(1-kcp)$$

$$x_{12n+4}=n(1+bnf),\ y_{12n+4}=d(1-ldr),\ z_{12n+4}=(d+n)(1-ldr)$$

$$x_{12n+5}=\frac{p}{1-kcp},\ y_{12n+5}=\frac{e}{1+ame},\ z_{12n+5}=\frac{e+p}{1+ame}$$

$$x_{12n+6}=\frac{r}{1-ldr},\ y_{12n+6}=\frac{f}{1+bnf},\ z_{12n+6}=\frac{f+r}{1+bnf} \tag{3.2.8}$$

$$x_{12n+7}=a,\ y_{12n+7}=k,\ z_{12n+7}=k+a\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_{12n+8}=b,\ y_{12n+8}=l,\ z_{12n+8}=l+b\frac{(1-ldr)}{(1+bnf)}$$

$$x_{12n+9}=c,\ y_{12n+9}=m,\ z_{12n+9}=m+c\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_{12n+10}=d,\ y_{12n+10}=n,\ z_{12n+10}=n+d\frac{(1-ldr)}{(1+bnf)}$$

$$x_{12n+11}=e,\ y_{12n+11}=p,\ z_{12n+11}=p+e\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_{12n+12}=f,\ y_{12n+12}=r,\ z_{12n+12}=r+f\frac{(1-ldr)}{(1+bnf)}$$

İspat:

İspatı tümevarımla yapalım. (3.2.8) eşitliklerinden; $n=0$ için

$$x_1=\frac{k}{1-kcp},\ y_1=\frac{a}{1+ame},\ z_1=\frac{a+k}{1+ame}$$

$$x_2=\frac{l}{1-ldr},\ y_2=\frac{b}{1+bnf},\ z_2=\frac{b+l}{1+bnf}$$

$$x_3 = m(1+ame),\ y_3 = c(1-kcp),\ z_3 = (c+m)(1-kcp)$$

$$x_4 = n(1+bnf),\ y_4 = d(1-ldr),\ z_4 = (d+n)(1-ldr)$$

$$x_5 = \frac{p}{1-kcp},\ y_5 = \frac{e}{1+ame},\ z_5 = \frac{e+p}{1+ame}$$

$$x_6 = \frac{r}{1-ldr},\ y_6 = \frac{f}{1+bnf},\ z_6 = \frac{f+r}{1+bnf}$$

$$x_7 = a,\ y_7 = k,\ z_7 = k + a\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_8 = b,\ y_8 = l,\ z_8 = l + b\frac{(1-ldr)}{(1+bnf)}$$

$$x_9 = c,\ y_9 = m,\ z_9 = m + c\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_{10} = d,\ y_{10} = n,\ z_{10} = n + d\frac{(1-ldr)}{(1+bnf)}$$

$$x_{11} = e,\ y_{11} = p,\ z_{11} = p + e\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_{12} = f,\ y_{12} = r,\ z_{12} = r + f\frac{(1-ldr)}{(1+bnf)}$$

eşitlikleri elde edilir.

Şimdi (3.2.8) eşitliklerinin pozitif bir $n = N$ tamsayısı için sağlandığını kabul edelim. Bu durumda;

$$x_{12N+1} = \frac{k}{1-kcp},\ y_{12N+1} = \frac{a}{1+ame},\ z_{12N+1} = \frac{a+k}{1+ame}$$

$$x_{12N+2} = \frac{l}{1-ldr},\ y_{12N+2} = \frac{b}{1+bnf},\ z_{12N+2} = \frac{b+l}{1+bnf}$$

$$x_{12N+3} = m(1+ame),\ y_{12N+3} = c(1-kcp),\ z_{12N+3} = (c+m)(1-kcp)$$

$$x_{12N+4} = n(1+bnf),\ y_{12N+4} = d(1-ldr),\ z_{12N+4} = (d+n)(1-ldr)$$

$$x_{12N+5} = \frac{p}{1-kcp},\ y_{12N+5} = \frac{e}{1+ame},\ z_{12N+5} = \frac{e+p}{1+ame}$$

$$x_{12N+6}=\frac{r}{1-ldr}\,,\ y_{12N+6}=\frac{f}{1+bnf}\,,\ z_{12N+6}=\frac{f+r}{1+bnf}$$

$$x_{12N+7}=a\,,\ y_{12N+7}=k\,,\ z_{12N+7}=k+a\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_{12N+8}=b\,,\ y_{12N+8}=l\,,\ z_{12N+8}=l+b\frac{(1-ldr)}{(1+bnf)}$$

$$x_{12N+9}=c\,,\ y_{12N+9}=m\,,\ z_{12N+9}=m+c\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_{12N+10}=d\,,\ y_{12N+10}=n\,,\ z_{12N+10}=n+d\frac{(1-ldr)}{(1+bnf)}$$

$$x_{12N+11}=e\,,\ y_{12N+11}=p\,,\ z_{12N+11}=p+e\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_{12N+12}=f\,,\ y_{12N+12}=r\,,\ z_{12N+12}=r+f\frac{(1-ldr)}{(1+bnf)}$$

eşitlikleri vardır. İterasyona devam edildiğinde;

$$x_{12N+13}=\frac{k}{1-kcp}\,,y_{12N+13}=\frac{a}{1+ame}\,,\ z_{12N+13}=\frac{a+k}{1+ame}$$

$$x_{12N+14}=\frac{l}{1-ldr}\,,y_{12N+14}=\frac{b}{1+bnf}\,,\ z_{12N+14}=\frac{b+l}{1+bnf}$$

$$x_{12N+15}=m(1+ame)\,,\ y_{12N+15}=c(1-kcp)\,,\ z_{12N+15}=(c+m)(1-kcp)$$

$$x_{12N+16}=n(1+bnf)\,,\ y_{12N+16}=d(1-ldr)\,,\ z_{12N+16}=(d+n)(1-ldr)$$

$$x_{12N+17}=\frac{p}{1-kcp}\,,\ y_{12N+17}=\frac{e}{1+ame}\,,\ z_{12N+17}=\frac{e+p}{1+ame}$$

$$x_{12N+18}=\frac{r}{1-ldr}\,,\ y_{12N+18}=\frac{f}{1+bnf}\,,\ z_{12N+18}=\frac{f+r}{1+bnf}$$

$$x_{12N+19}=a\,,\ y_{12N+19}=k\,,\ z_{12N+19}=k+a\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_{12N+20}=b\,,\ y_{12N+20}=l\,,\ z_{12N+20}=l+b\frac{(1-ldr)}{(1+bnf)}$$

$$x_{12N+21}=c\,,\ y_{12N+21}=m\,,\ z_{12N+21}=m+c\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_{12N+22}=d\,,\ y_{12N+22}=n\,,\ z_{12N+22}=n+d\,\frac{(1-ldr)}{(1+bnf\,)}$$

$$x_{12N+23}=e\,,\ y_{12N+23}=p\,,\ z_{12N+23}=p+e\frac{(1-kcp)}{(1+ame)}$$

$$x_{12N+24}=f\,,\ y_{12N+24}=r\,,\ z_{12N+24}=r+f\,\frac{(1-ldr)}{(1+bnf\,)}$$

eşitlikleri elde edilir ki (3.2.8) eşitlikleri $n=N+1$ için de doğru olur. Böylece ispat biter.

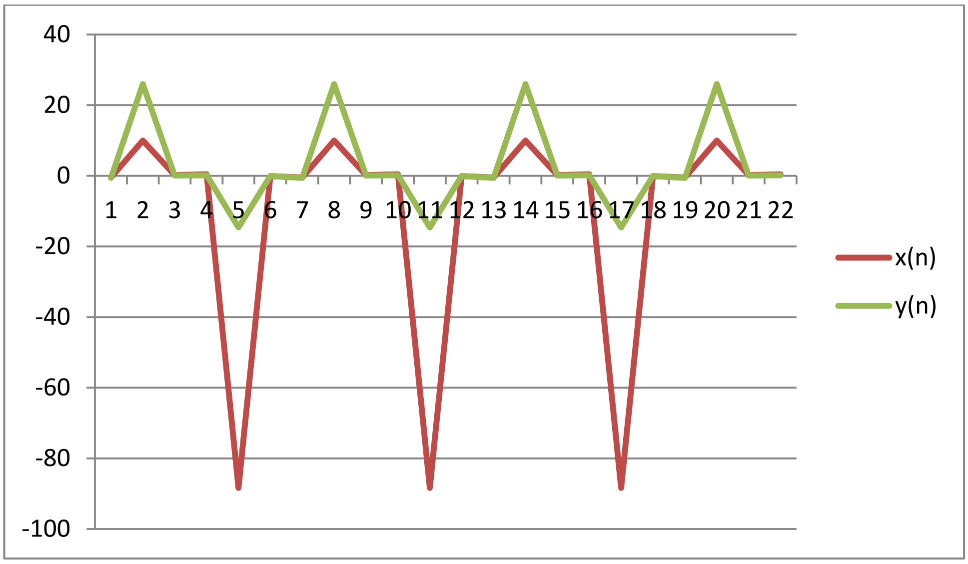
4. UYGULAMALAR

Bu bölümde 3. bölümde incelenmiş olan denklem sistemlerinin bazı özel çözümleri Microsoft Office Excell 2010 paket programı kullanılarak elde edilmiştir. Bu çözümler çizelgeler ve şekiller ile verilmiştir. Şekillerdeki kesikli değerler doğrular yardımıyla birleştirilmiştir.

Örnek 4.1. $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 6$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere; (3.1.1) fark denklem sisteminin çözümü aşağıdaki Çizelge 4.1. ve Şekil 4.1. ile verilmiştir.

Çizelge 4.1. (3.1.1) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 6$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümü

n	x_n	y_n
1	**-0,46154**	**-0,6**
2	10	26
3	0,2	0,076923
4	0,410526	0,135747
5	-88,4	-14,6154
6	-0,05263	-0,05882
7	**-0,46154**	**-0,6**
8	10	26
9	0,2	0,076923
10	0,410526	0,135747
11	-88,4	-14,6154
12	-0,05263	-0,05882
13	**-0,46154**	**-0,6**
14	10	26
15	0,2	0,076923
16	0,410526	0,135747
17	-88,4	-14,6154
18	-0,05263	-0,05882

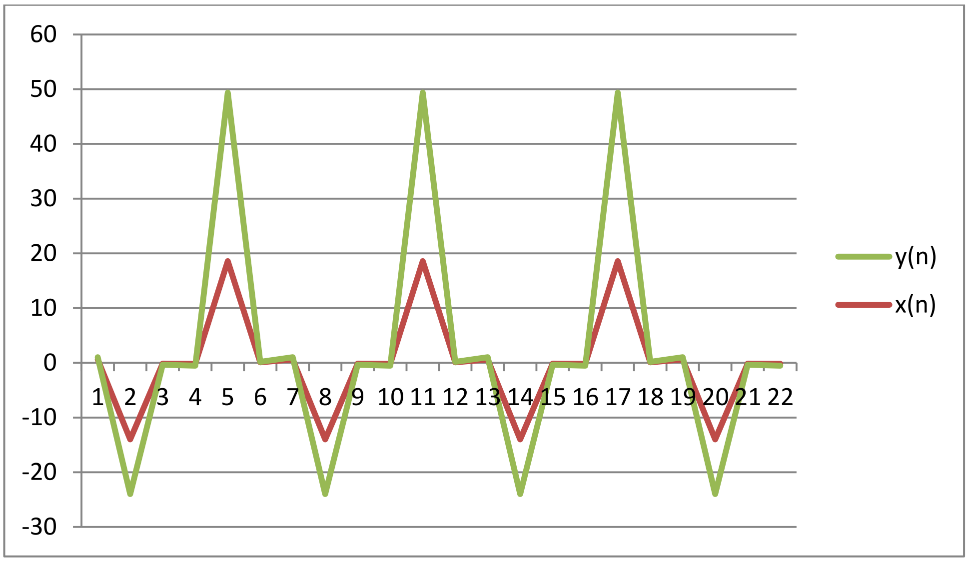


Şekil 4.1. (3.1.1) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 6$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği

Örnek 4.2. $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 3$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere; (3.1.2) fark denklem sisteminin çözümü aşağıdaki Çizelge 4.2. ve Şekil 4.2. ile verilmiştir.

Çizelge 4.2. (3.1.2) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 3$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümü

n	x_n	y_n
1	**0,6**	**0,428571**
2	-14	-10
3	-0,14286	-0,2
4	-0,19481	-0,32308
5	18,57143	30,8
6	0,090909	0,076923
7	**0,6**	**0,428571**
8	-14	-10
9	-0,14286	-0,2
10	-0,19481	-0,32308
11	18,57143	30,8
12	0,090909	0,076923
13	**0,6**	**0,428571**
14	-14	-10
15	-0,14286	-0,2
16	-0,19481	-0,32308
17	18,57143	30,8
18	0,090909	0,076923

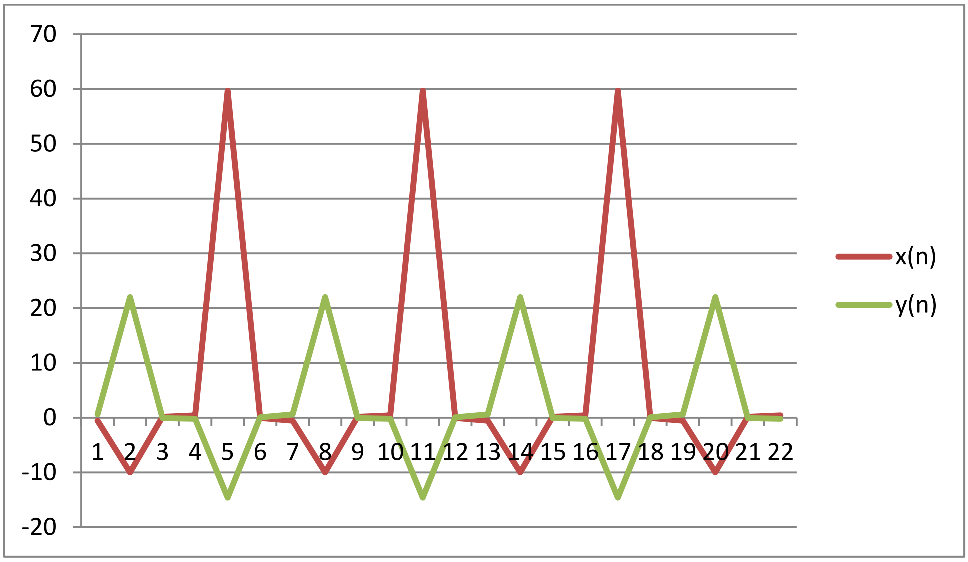


Şekil 4.2. (3.1.2) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 3$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği

Örnek 4.3. $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 6$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere; (3.1.3) fark denklem sisteminin çözümü aşağıdaki Çizelge 4.3. ve Şekil 4.3. ile verilmiştir.

Çizelge 4.3. (3.1.3) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 6$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümü

n	x_n	y_n
1	**-0,54545**	**0,6**
2	-10	22
3	0,142857	-0,07692
4	0,410526	-0,20096
5	59,71429	-14,6154
6	-0,05263	0,052632
7	**-0,54545**	**0,6**
8	-10	22
9	0,142857	-0,07692
10	0,410526	-0,20096
11	59,71429	-14,6154
12	-0,05263	0,052632
13	**-0,54545**	**0,6**
14	-10	22
15	0,142857	-0,07692
16	0,410526	-0,20096
17	59,71429	-14,6154
18	-0,05263	0,052632

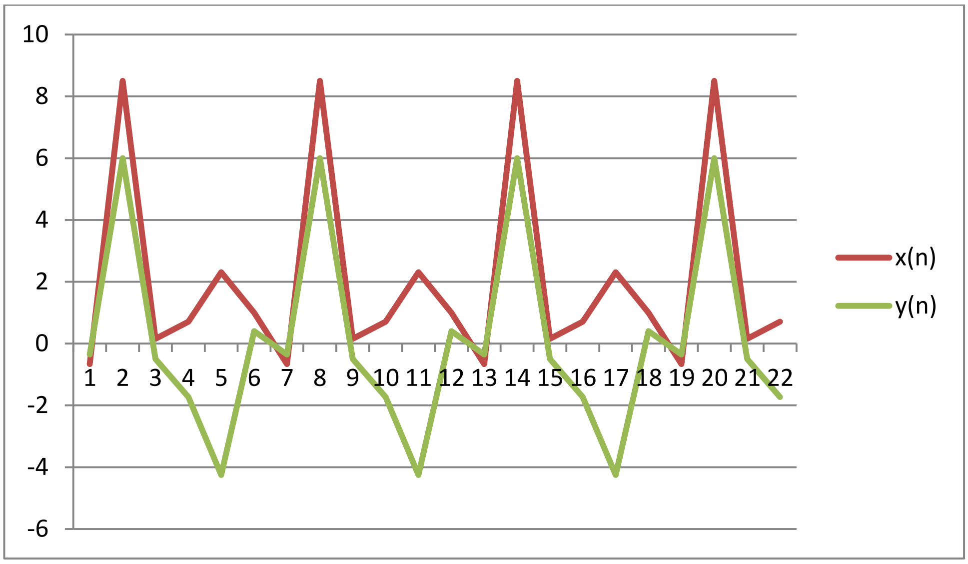


Şekil 4.3. (3.1.3) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = 1$, $y_{-1} = 2$, $y_{-2} = 6$, $x_0 = -1$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği

Örnek 4.4. $y_0 = -1$, $y_{-1} = 1$, $y_{-2} = 2$, $x_0 = -2{,}5$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere; (3.1.4) fark denklem sisteminin çözümü aşağıdaki Çizelge 4.4. ve Şekil 4.4. ile verilmiştir.

Çizelge 4.4. (3.1.4) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = -1$, $y_{-1} = 1$, $y_{-2} = 2$, $x_0 = -2{,}5$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümü

n	x_n	y_n
1	**-0,66667**	**-0,35294**
2	8,5	6
3	0,153846	-0,5
4	0,705882	-1,73333
5	2,307692	-4,25
6	1	0,4
7	**-0,66667**	**-0,35294**
8	8,5	6
9	0,153846	-0,5
10	0,705882	-1,73333
11	2,307692	-4,25
12	1	0,4
13	**-0,66667**	**-0,35294**
14	8,5	6
15	0,153846	-0,5
16	0,705882	-1,73333
17	2,307692	-4,25
18	1	0,4



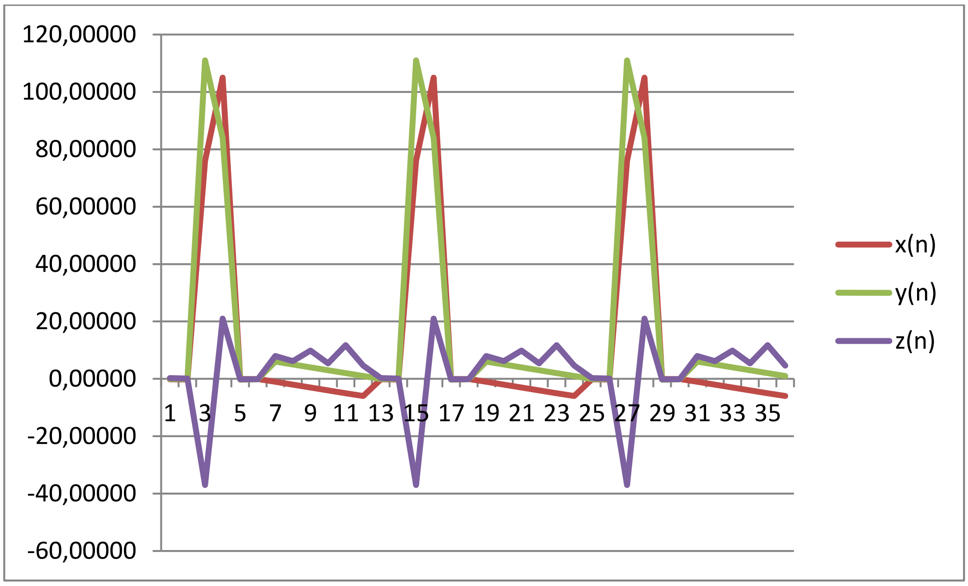
Şekil 4.4. (3.1.4) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $y_0 = -1$, $y_{-1} = 1$, $y_{-2} = 2$, $x_0 = -2,5$, $x_{-1} = -2$, $x_{-2} = -3$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği

Örnek 4.5. $x_{-5} = -1$, $x_{-4} = -2$, $x_{-3} = -3$, $x_{-2} = -4$, $x_{-1} = -5$, $x_0 = -6$, $y_{-5} = 6$, $y_{-4} = 5$, $y_{-3} = 4$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 2$, $y_0 = 1$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere; (3.2.1) fark denklem sisteminin çözümü aşağıdaki Çizelge 4.5. ve Şekil 4.5. ile verilmiştir.

Çizelge 4.5. (3.2.1) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5} = -1$, $x_{-4} = -2$, $x_{-3} = -3$, $x_{-2} = -4$, $x_{-1} = -5$, $x_0 = -6$, $y_{-5} = 6$, $y_{-4} = 5$, $y_{-3} = 4$, $y_{-2} = 3$, $y_{-1} = 2$, $y_0 = 1$ başlangıç şartları altındaki çözümü

n	x_n	y_n	z_n
1	**-0,16216**	**-0,05263**	**0,263158**
2	-0,23810	-0,05714	0,085714
3	76	111	-37
4	105	84	21
5	-0,05405	-0,26316	-0,15789
6	-0,04762	-0,17143	-0,14286
7	-1	6	7,947368
8	-2	5	6,2
9	-3	4	9,842105
10	-4	3	5,4
11	-5	2	11,73684
12	-6	1	4,6
13	**-0,16216**	**-0,05263**	**0,263158**
14	-0,23810	-0,05714	0,085714
15	76	111	-37
16	105	84	21
17	-0,05405	-0,26316	-0,15789
18	-0,04762	-0,17143	-0,14286

19	-1	6	7,947368
20	-2	5	6,2
21	-3	4	9,842105
22	-4	3	5,4
23	-5	2	11,73684
24	-6	1	4,6
25	**-0,16216**	**-0,05263**	**0,263158**
26	-0,23810	-0,05714	0,085714
27	76	111	-37
28	105	84	21
29	-0,05405	-0,26316	-0,15789
30	-0,04762	-0,17143	-0,14286
31	-1	6	7,947368
32	-2	5	6,2
33	-3	4	9,842105
34	-4	3	5,4
35	-5	2	11,73684
36	-6	1	4,6

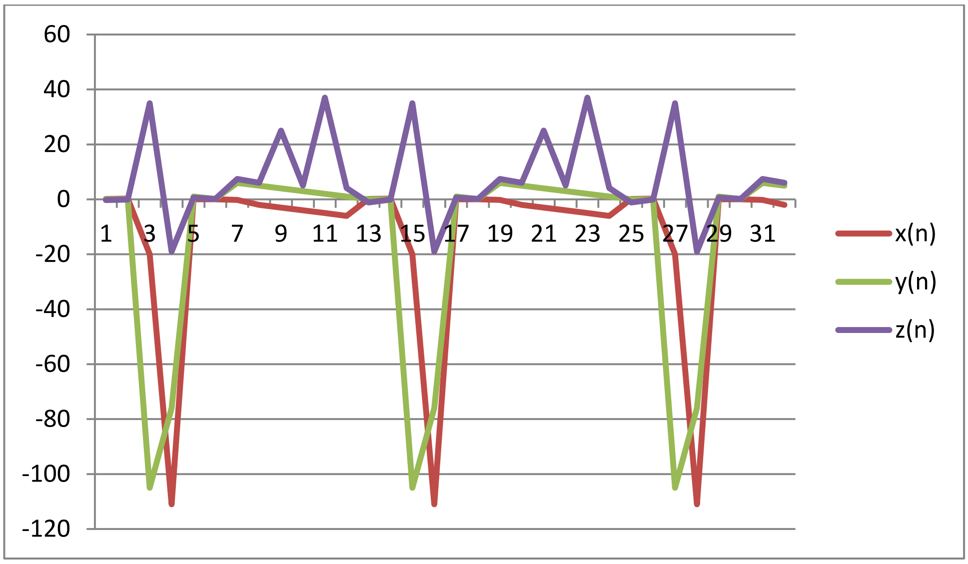


Şekil 4.5. (3.2.1) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5}=-1$, $x_{-4}=-2$, $x_{-3}=-3$, $x_{-2}=-4$, $x_{-1}=-5$, $x_0=-6$, $y_{-5}=6$, $y_{-4}=5$, $y_{-3}=4$, $y_{-2}=3$, $y_{-1}=2$, $y_0=1$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği

Örnek 4.6. $x_{-5}=-1$, $x_{-4}=-2$, $x_{-3}=-3$, $x_{-2}=-4$, $x_{-1}=-5$, $x_0=-6$, $y_{-5}=6$, $y_{-4}=5$, $y_{-3}=4$, $y_{-2}=3$, $y_{-1}=2$, $y_0=1$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere; (3.2.2) fark denklem sisteminin çözümü aşağıdaki Çizelge 4.6. ve Şekil 4.6. ile verilmiştir.

Çizelge 4.6. (3.2.2) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5}=-1$, $x_{-4}=-2$, $x_{-3}=-3$, $x_{-2}=-4$, $x_{-1}=-5$, $x_{0}=-6$, $y_{-5}=6$, $y_{-4}=5$, $y_{-3}=4$, $y_{-2}=3$, $y_{-1}=2$, $y_{0}=1$ başlangıç şartları altındaki çözümü

n	x_n	y_n	z_n
1	**0,171429**	**0,04**	**-1,16**
2	0,263158	0,054054	-0,08108
3	-20	-105	35
4	-111	-76	-19
5	0,057143	1	0,6
6	0,052632	0,162162	0,135135
7	-0,2	6	7,4
8	-2	5	6,027027
9	-3	4	25
10	-4	3	5,054054
11	-5	2	37
12	-6	1	4,081081
13	**0,171429**	**0,04**	**-1,16**
14	0,263158	0,054054	-0,08108
15	-20	-105	35
16	-111	-76	-19
17	0,057143	1	0,6
18	0,052632	0,162162	0,135135
19	-0,2	6	7,4
20	-2	5	6,027027
21	-3	4	25
22	-4	3	5,054054
23	-5	2	37
24	-6	1	4,081081
25	**0,171429**	**0,04**	**-1,16**
26	0,263158	0,054054	-0,08108
27	-20	-105	35
28	-111	-76	-19
29	0,057143	1	0,6
30	0,052632	0,162162	0,135135
31	-0,2	6	7,4
32	-2	5	6,027027
33	-3	4	25
34	-4	3	5,054054
35	-5	2	37
36	-6	1	4,081081



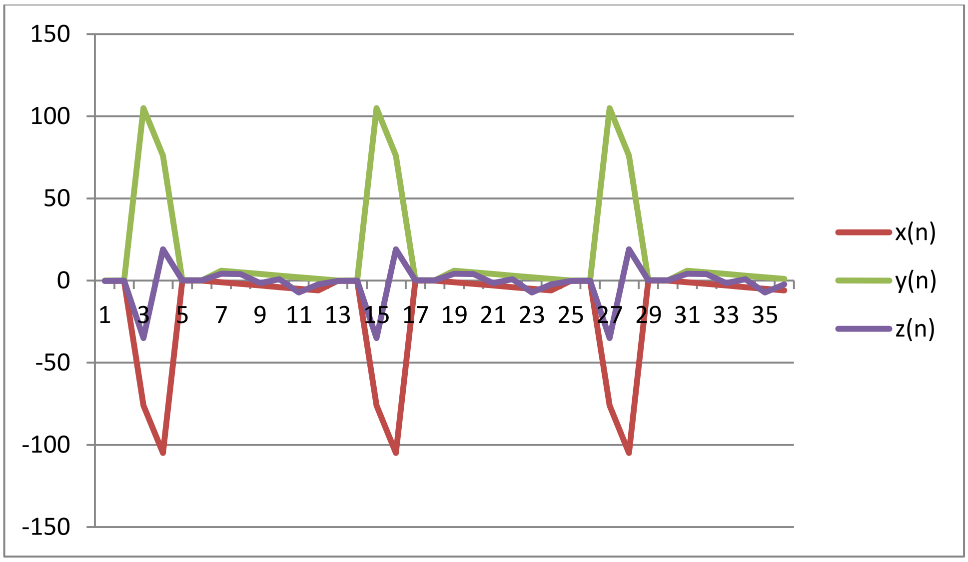
Şekil 4.6. (3.2.2) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5}=-1$, $x_{-4}=-2$, $x_{-3}=-3$, $x_{-2}=-4$, $x_{-1}=-5$, $x_0=-6$, $y_{-5}=6$, $y_{-4}=5$, $y_{-3}=4$, $y_{-2}=3$, $y_{-1}=2$, $y_0=1$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği

Örnek 4.7. $x_{-5}=-1$, $x_{-4}=-2$, $x_{-3}=-3$, $x_{-2}=-4$, $x_{-1}=-5$, $x_0=-6$, $y_{-5}=6$, $y_{-4}=5$, $y_{-3}=4$, $y_{-2}=3$, $y_{-1}=2$, $y_0=1$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere; (3.2.3) fark denklem sisteminin çözümü aşağıdaki Çizelge 4.7. ve Şekil 4.7. ile verilmiştir.

Çizelge 4.7. (3.2.3) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5}=-1$, $x_{-4}=-2$, $x_{-3}=-3$, $x_{-2}=-4$, $x_{-1}=-5$, $x_0=-6$, $y_{-5}=6$, $y_{-4}=5$, $y_{-3}=4$, $y_{-2}=3$, $y_{-1}=2$, $y_0=1$ başlangıç şartları altındaki çözümü

n	x_n	y_n	z_n
1	**-0,17143**	**0,052632**	**-0,26316**
2	-0,26316	0,057143	-0,08571
3	-76	105	-35
4	-105	76	19
5	-0,05714	0,263158	0,157895
6	-0,05263	0,171429	0,142857
7	-1	6	4,157895
8	-2	5	3,914286
9	-3	4	-1,52632
10	-4	3	0,828571
11	-5	2	-7,21053
12	-6	1	-2,25714
13	**-0,17143**	**0,052632**	**-0,26316**
14	-0,26316	0,057143	-0,08571
15	-76	105	-35
16	-105	76	19
17	-0,05714	0,263158	0,157895

18	-0,05263	0,171429	0,142857
19	-1	6	4,157895
20	-2	5	3,914286
21	-3	4	-1,52632
22	-4	3	0,828571
23	-5	2	-7,21053
24	-6	1	-2,25714
25	**-0,17143**	**0,052632**	**-0,26316**
26	-0,26316	0,057143	-0,08571
27	-76	105	-35
28	-105	76	19
29	-0,05714	0,263158	0,157895
30	-0,05263	0,171429	0,142857
31	-1	6	4,157895
32	-2	5	3,914286
33	-3	4	-1,52632
34	-4	3	0,828571
35	-5	2	-7,21053
36	-6	1	-2,25714

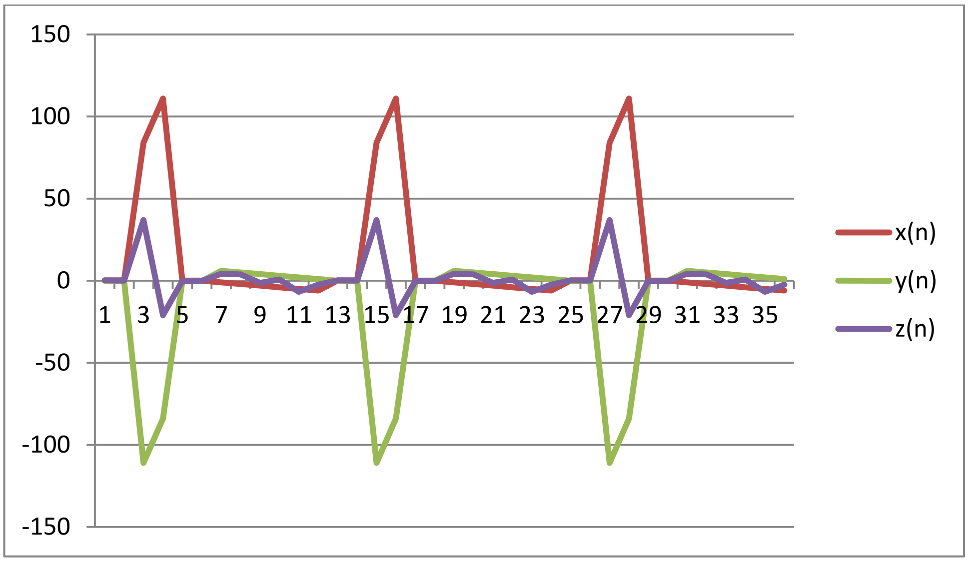


Şekil 4.7. (3.2.3) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5}=-1$, $x_{-4}=-2$, $x_{-3}=-3$, $x_{-2}=-4$, $x_{-1}=-5$, $x_0=-6$, $y_{-5}=6$, $y_{-4}=5$, $y_{-3}=4$, $y_{-2}=3$, $y_{-1}=2$, $y_0=1$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği

Örnek 4.8. $x_{-5}=-1$, $x_{-4}=-2$, $x_{-3}=-3$, $x_{-2}=-4$, $x_{-1}=-5$, $x_0=-6$, $y_{-5}=6$, $y_{-4}=5$, $y_{-3}=4$, $y_{-2}=3$, $y_{-1}=2$, $y_0=1$ başlangıç şartları reel sayılar olmak üzere; (3.2.4) fark denklem sisteminin çözümü aşağıdaki Çizelge 4.8. ve Şekil 4.8. ile verilmiştir.

Çizelge 4.8. (3.2.4) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5}=-1$, $x_{-4}=-2$, $x_{-3}=-3$, $x_{-2}=-4$, $x_{-1}=-5$, $x_0=-6$, $y_{-5}=6$, $y_{-4}=5$, $y_{-3}=4$, $y_{-2}=3$, $y_{-1}=2$, $y_0=1$ başlangıç şartları altındaki çözümü

n	x_n	y_n	z_n
1	**0,162162**	**-0,04762**	**0,238095**
2	0,238095	-0,05405	0,081081
3	84	-111	37
4	111	-84	-21
5	0,054054	-0,2381	-0,14286
6	0,047619	-0,16216	-0,13514
7	-1	6	4,238095
8	-2	5	3,864865
9	-3	4	-1,28571
10	-4	3	0,72973
11	-5	2	-6,80952
12	-6	1	-2,40541
13	**0,162162**	**-0,04762**	**0,238095**
14	0,238095	-0,05405	0,081081
15	84	-111	37
16	111	-84	-21
17	0,054054	-0,2381	-0,14286
18	0,047619	-0,16216	-0,13514
19	-1	6	4,238095
20	-2	5	3,864865
21	-3	4	-1,28571
22	-4	3	0,72973
23	-5	2	-6,80952
24	-6	1	-2,40541
25	**0,162162**	**-0,04762**	**0,238095**
26	0,238095	-0,05405	0,081081
27	84	-111	37
28	111	-84	-21
29	0,054054	-0,2381	-0,14286
30	0,047619	-0,16216	-0,13514
31	-1	6	4,238095
32	-2	5	3,864865
33	-3	4	-1,28571
34	-4	3	0,72973
35	-5	2	-6,80952
36	-6	1	-2,40541



Şekil 4.8. (3.2.4) Fark denklem sisteminin reel sayılar olan $x_{-5}=-1$, $x_{-4}=-2$, $x_{-3}=-3$, $x_{-2}=-4$, $x_{-1}=-5$, $x_0=-6$, $y_{-5}=6$, $y_{-4}=5$, $y_{-3}=4$, $y_{-2}=3$, $y_{-1}=2$, $y_0=1$ başlangıç şartları altındaki çözümünün grafiği

SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada; iki boyutlu

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-2}}{\mp 1 \mp y_{n-2}x_{n-1}y_n}, \; y_{n+1} = \frac{x_{n-2}}{\mp 1 \mp x_{n-2}y_{n-1}x_n}, n = 0,1,...,$$

rasyonel fark denklem sistemi ile üç boyutlu

$$x_{n+1} = \frac{y_{n-5}}{\mp 1 \mp y_{n-5}x_{n-3}y_{n-1}}, y_{n+1} = \frac{x_{n-5}}{\mp 1 \mp x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}}, z_{n+1} = \frac{x_{n-5} + y_{n-5}}{\mp 1 \mp x_{n-5}y_{n-3}x_{n-1}}, n = 0,1,...,$$

rasyonel fark denklem sisteminin çözümleri elde edilip çözümlerin periyodikliği incelenmiştir.

Bu tezde incelenen rasyonel fark denklem sistemlerine benzer tipte denklem sistemleri tanımlanıp çözümleri ve çözümlerin özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

Akgüneş, N., 2010. Bazı Fark Denklem Sistemlerinin Kararlılığı Üzerine Bir Çalışma. *Yüksek Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü,* Konya.

Amleh, A. M., Camouzis, E., Ladas, G. ve Radin, M. A., 2009. Patterns of Boundednes of a Rational System in the Plane. *Journal of Difference Equations and Applications.* Vol. 10, No:1, 1197-1236.

Bereketoğlu, H. ve Kutay, V., 2012. *Fark Denklemleri.* Gazi Kitabevi, 304 s, Ankara.

Brett, A. ve Kulenovic, M. R. S., 2014. Two Species Competitive Model with the Allee Effect. *Advances in Difference Equations,* 307.

Camouzis, E. ve Papaschinopoulos, G., 2004. Global Asymptotic Behavior of Positive Solutions on the System of Rational Difference Equations $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-m}}$, $y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}}$. *Applied Mathematics Letters, 17,* 733-737.

Camouzis, E., Drymonis, E., Ladas, G. ve Tikjha, W., 2010. Pattern of Boundedness of the Rational System $x_{n+1} = \frac{\alpha_1}{A_1 + B_1 x_n + C_1 y_n}$ and $y_{n+1} = \frac{\alpha_2 + \beta_2 x_n + \gamma_2 y_n}{A_2 + B_2 x_n + C_2 y_n}$. *Journal of Difference Equations and Applications.* Vol. 18, No:1, 89-110.

Cinar, C. ve Yalcınkaya, İ., 2004. On the Positive Solutions of Difference Equation System $x_{n+1} = \frac{1}{z_n}$, $y_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1} y_{n-1}}$, $z_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}$. *International Mathematical Journal*, 5(5) 517-519.

Cinar, C. ve Yalcınkaya, İ., 2004. On the Positive Solutions of Difference Equation System $x_{n+1} = \frac{1}{z_n}$, $y_{n+1} = \frac{x_n}{x_{n-1}}$, $z_{n+1} = \frac{1}{x_{n-1}}$. *International Mathematical Journal*, 5(5) 517-519.

Cinar, C., 2004. On the Positive Solutions of The Difference Equation System $x_{n+1} = \frac{1}{y_n}$, $y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-1} y_{n-1}}$. *Applied Mathematics and Computation* 158, 303-305.

Clark, D. ve Kulenovic, M.R.S., 2002. A Coupled System of Rational Difference Equations. *Computers and Mathematics with Applications,* 43, 849-867.

Clark, D., Kulenovic, M. R. S. ve Selgrade, J. F., 2003. Global Asymptotic Behavior of a Two-Dimensional Equation Modelling Competition. *Nonlinear Analysis, 52* (7), 1765–1776.

Çalık, S., 2011. Rasyonel Fark Denklemleri ve Rasyonel Fark Denklemlerinin Bilgisayar Uygulamaları Üzerine Bir Çalışma. *Yüksak Lisans Tezi, Selçuk Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü,* Konya.

Elsayed, E. M., 2010. On the Solutions of Rational System of Difference Equations. *Fasciculi Mathematici, 45,* 26-36.

Elsayed, E. M., 2012. Solutions of Rational Difference Systems of Order Two $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{\pm 1 \pm x_{n-1} y_n}$, $y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{\pm 1 \pm y_{n-1} x_n}$. *Mathematical and ComputerModelling, 55,* 378-384.

Elsayed, E. M., El- Dessoky. M. M. ve Alotaibi, A., 2012. On the Solutions of a Genaral System of Difference Equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society,*Article ID 892571, 12.

Fotiades, N. ve Papaschinopoulos, G., 2013. On a System of Difference Equations with Maximum. *Applied Mathematics and Computation, 221,* 684-690.

Grove, E. A., Kent, C. M. ve Ladas, G., 1998. Boundedness and Persistence of the Nonautonomous Lyness and Max Equations. *Journal of Difference Equations and Applications,* 3, 241-258.

Grove, E. A., Ladas, G., McGrath J. C. ve Teixeira, C. T., 2001. Existence and Behavior of Solutions of a Rational System. *Commun. Appl. Nonlinear Anal. 3* (1), 1-25.

Iricanin, B. ve Stevivic, S., 2006. Some Systems of Nonlinear Difference Equations of Higher Order with Periodic Solutions. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A Mathematical Analysis,13,* 499–507.

Keying, L., Zhongjian, Z., Xiaorui, L. ve Peng, L., 2011. More on Three-Dimensional Systems of Rational Difference Equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society,* Article ID 178483, 9.

Keying, L., Zhiqiang, W., Peng, L. ve Weizhou, Z., 2012. On the Behavior of a System of Rational Difference Equations $x_{n+1} = \frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1} - 1}$, $y_{n+1} = \frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1} - 1}$, $z_{n+1} = \frac{1}{x_n z_{n-1}}$. *Discrete Dynamics in Nature and Society,* Article ID 105496, 9.

Kılıklı, G., 2011. Lineer Olmayan Fark Sisteminin Çözümleri ve Davranışları. *Yüksek Lisans Tezi,* Konya.

Kulenovic, M. R. S. ve Nurkanovic, M., 2003. Global Asymptotic Behavior of a Two-Dimensional System of Difference Equations Modeling Cooperation. Journal of *Difference Equations and Applications, 9* (1), 149 – 159.

Kulenovic, M. R. S. ve Nurkanovic, Z., 2005. Global Behavior of a Threedimensional Linear Fractional System of Difference Equations $x_{n+1}=\frac{a+x_n}{b+y_n}$, $y_{n+1}=\frac{c+y_n}{d+z_n}$, $z_{n+1}=\frac{e+z_n}{f+x_n}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 310,* 673-689.

Kurbanlı, A. S., 2011. On the Behavior of Solutions of the System of Rational Difference Equations $x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1}$, $y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1}$, $z_{n+1}=\frac{z_{n-1}}{y_n z_{n-1}-1}$. *Discrete Dynamics in Nature and Society,* Article ID 932362, 12.

Kurbanlı, A. S., Çinar, C. ve Şimşek, D., 2011. On the Periodicity of Soluations of the System of Rational Difference Equations $x_{n+1}=\frac{x_{n-1}+y_n}{y_n x_{n-1}-1}$, $y_{n+1}=\frac{y_{n-1}+x_n}{x_n y_{n-1}-1}$. *Applied Mathematics, 2,* 410-413.

Kurbanlı, A. S., Çinar, C. ve Erdoğan, M. E., 2011. On the Behavior of Solutions of the System of Rational Difference Equations $x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{y_n x_{n-1}-1}$, $y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{x_n y_{n-1}-1}$, $z_{n+1}=\frac{x_n}{y_n z_{n-1}}$. *Applied Mathematics, 2,* 1031-1038.

Kurbanlı, A. S., Çinar, C. ve Yalçınkaya, İ., 2011. On the Behavior of Positive Solutions of the System of Rational Difference Equations $x_{n+1}=\frac{x_{n-1}}{1+y_n x_{n-1}}$, $y_{n+1}=\frac{y_{n-1}}{1+x_n y_{n-1}}$. *Mathematical and Computer Modelling vol. 53,* no. 5-6, 1261-1267.

Kurbanlı, A. S. Yalçınkaya, İ. ve Gelişken A., 2013 On the Behavior of the Solutions of the System of Rational Difference Equations. *International Journal of Physical Sciences Vol. 8*(2), 51-56.

Mansour, M., El- Dessoky, M. M. ve Elsayed, E. M., 2012. The Form of the Solutions and Periodicity of Some Systems of Difference Equations. *Discrete Dynamics in Nature and Society,*Article ID 406821, 17.

Özban, A. Y., 2006. On the Positive Solutions of the System of Rational Difference Equations $x_{n+1} = 1 + \frac{x_n}{y_{n-k}}$, $y_{n+1} = 1 + \frac{y_n}{x_{n-m}y_{n-m-k}}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 323*, 26–32.

Özban, A. Y., 2006. On the Positive Solutions of the System of Rational Difference Equations $x_{n+1} = \frac{1}{y_{n-k}}, y_{n+1} = \frac{y_n}{x_{n-m}y_{n-m-k}}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 323*, 26–32.

Özban, A. Y., 2007. On the System of Rational Difference Equations $x_n = \frac{a}{y_{n-3}}$, $y_n = \frac{by_{n-3}}{x_{n-q}y_{n-q}}$. *Applied Mathematics and Computation, 188*, 833-837.

Özkan, O. ve Kurbanlı, A. S., 2013. On the System of Difference Equations. *Hindawi Publishing Corporation Discrete Dynamics in Nature and Society* Volume.7.

Papaschinopoulos, G. ve Schinas, C. J., 1998. On a System of Two Nonlinear Difference Equations *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 219, 415-426.

Papaschinopoulos, G. ve Schinas, C. J., 2002. On the System of Two Difference Equations $x_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{A_i}{y_{n-i}^{p_i}}$, $y_{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \frac{B_i}{x_{n-i}^{q_i}}$. Journal of *Mathematical Analysis and Applications*, 273, 294-309.

Papaschinopoulos, G., Schinas, J. ve Hatzifilippidis, V., 2003. Global Behavior of the Solutions of a Max- Equation. *Journal of Computational Analysis and Applications*, *5*(2), 237-247.

Papaschinopoulos, G., Schinas, J. ve Hatzifilippidis, V., 2003. Global Behavior of the Solutions of a Max-equation and of a System of Two Max- Equation. *J. Math. Anal. and Appl*, 5, 1-10.

Papaschinopoulos, G., Schinas, C. J. ve Stefanidou, G., 2007. On a k-order System of Lyness-Type Difference Equations. *Advances in Difference Equation,* 13, 31272.

Papaschinopoulos, G., Ellina, G. ve Papadopoulos, K. B., 2014. Asymptotic Behavior of the Positive Solutions of an Exponential Type System of Difference Equations. *Applied Mathematics and Computation, 245,* 181-190.

Schinas, C. J., 1997. Invariant for Difference Equations and Systems of Difference Equations of Rational Form. *Journal of Mathematical Analysis and Applications,* 216, 164-179.

Stevic, S., 2011. On a System of Difference Equations $x_{n+1} = \dfrac{ax_{n-1}}{by_n x_{n-1} + c}$, $y_{n+1} = \dfrac{\alpha y_{n-1}}{\beta x_n y_{n-1} + \gamma}$. *Applied Mathematics and Computation, 218,* 3372-3378.

Stevic, S., 2012. On a Solvable Rational System of Difference Equations. *Applied Mathematics and Computation, 219,* 2896-2908.

Stevic, S., 2013. On a Solvable System of Difference Equations of Fourth Order. *Applied Mathematics and Computation, 219,* 5706-5716.

Stevic, S., 2013. On a System of Difference Equations $x_n = \dfrac{c_n y_{n-3}}{a_n + b_n y_{n-1} x_{n-2} y_{n-3}}$, $y_n = \dfrac{\gamma_n x_{n-3}}{\alpha_n + \beta_n x_{n-1} y_{n-2} x_{n-3}}$. *Applied Mathematics and Computation, 219,* 4755-4764.

Stevic, S., 2013. On the System of Difference Equations of Odd Order Solvable in Closed Form. *Applied Mathematics and Computation, 219,* 8222-8230.

Stevic, S., 2013. On the System of Difference Equations Which can be Solved in Closed Form. *Applied Mathematics and Computation, 219,* 9223-9228.

Sun, T. ve Xi, H., 2005. Global Behavior of the Nonlinear Difference Equation $x_{n+1} = f(x_{n-s}, x_{n-t})$. *J. Math. Anal. Appl., 311*, 760-765.

Sun, T. ve Xi, H., 2006. On the System of Rational Difference Equations $x_{n+1} = f(x_n, y_{n-k})$, $y_{n+1} = f(y_n, x_{n-k})$. *Advan. Differ. Equations, vol.* 2006, Article ID 16949, 7.

Sun, T. ve Xi, H., 2006. On the System of Rational Difference Equations $x_{n+1} = f(y_{n-q}, x_{n-s})$, $y_{n+1} = g(x_{n-t}, y_{n-p})$. *Advan. Differ. Equations, vol.* 2006, Article ID 51520, 1-8.

Şimşek, D., Demir, B. ve Çinar, C., 2009. On the Solutions of the System of the Difference Equation $x_{n+1}=\max\{\frac{A}{x_n},\frac{y_n}{x_n}\}$, $y_{n+1}=\max\{\frac{A}{y_n},\frac{x_n}{y_n}\}$. *Discrete Dynamics in Nature and Society,* Vol. 2009, Article ID 325296, 11.

Tollu, D. T., 2014. Bazı Rasyonel Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri Üzerine. *Doktora Tezi, Selçuk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Konya.

Toufak, N. ve Elsayed, E. M., 2012. On the Solutions of Systems of Rational Difference Equations $x_{n+1}=\frac{x_{n-3}}{\pm 1\pm x_{n-3}y_{n-1}}$, $y_{n+1}=\frac{y_{n-3}}{\pm 1\pm y_{n-3}x_{n-1}}$. *Mathematical and Computer Modelling, 55,* 1987-1997.

Tütüncü, M., 2012. Bazı Fark Denklem Sistemlerinin Çözümleri Üzerine Bir Çalışma. *Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü,* Konya.

Valicenti, S., 1999. Periodicity and Global Attractivity of Some Difference Equations. *Doktora Tezi*, University of Rhode Island.

Yalçınkaya, İ., Çinar, C. ve Şimşek, D., 2008. Global Asymptotic of a System of Difference Equations. *Applicable Analysis, vol. 87*(no. 6), 677–687.

Yalçınkaya, İ., Çinar, C. ve Şimşek, D., 2008. On the Global Asymptotic Stability of a System of Difference Equations $z_{n+1}=\frac{z_n t_{n-1}+a}{z_n+t_{n-1}}$, $t_{n+1}=\frac{t_n z_{n-1}+a}{t_n+z_{n-1}}$. *Applicable Analysis, 87* (6), 677–687.

Yalçınkaya, İ. ve Çinar, C., 2010. Global Asymptotic Stability of a System of Two Nonlinear Difference Equations $z_{n+1}=\frac{t_n+z_{n-1}}{t_n z_{n-1}+a}$, $t_{n+1}=\frac{z_n+t_{n-1}}{z_n t_{n-1}+a}$. *Fasciculi Mathematici, 43*, 171-180.

Yang, X., 2005. On the System of Rational Difference Equations $x_n=A+\frac{y_{n-1}}{x_{n-p}y_{n-q}}$, $y_n=A+\frac{x_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}$. *Journal of Mathematical Analysis and Applicatios, 307,* 305-311.

Yang, X., Liu, Y. ve Bai, S., 2005. On The System of High Order Rational Difference Equations $x_n=\frac{a}{y_{n-p}}$, $y_n=\frac{by_{n-p}}{x_{n-q}+y_{n-q}}$. *Applied Mathematics and Computation*, *171,* 853-856.

Yazlık, Y., Tollu, D.T. ve Taşkara, N., 2013. On the Solutions of Difference Equation Systems with Padovan Numbers. *Applied Mathematics,* 4, 15-20.

Zhang, Y., Yang, X., Megson, M. G. ve Evans, J. D., 2006. On The System of Rational Difference Equations $x_n = A + \frac{1}{y_{n-p}}$, $y_n = A + \frac{y_{n-1}}{x_{n-r}y_{n-s}}$. *Applied Mathematics and Computation*, *176,* 403-408.

Zhang, Y., Yang, X., Evans, J. D. ve Zhu, C., 2007. On the Nonlinear Difference Equation System $x_{n+1} = A + \frac{y_{n-m}}{x_n}$, $y_{n+1} = A + \frac{x_{n-m}}{y_n}$. *Computers and Mathematics with Applications, 53,* 1516-1566.

Zhang, D., Li, X., Wang, L. ve Cui, S., 2014. On a Max- Type Difference System. *Applied Mathematics,* 5, 2959-2967.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Merve KARA

Doğum Tarihi ve Yer : 01/05/1990 - Karaman

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

e-mail : mervekara571@hotmail.com, mervekara@aksaray.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Karamaoğlu Mehmetbey Üniversitesi	-
Yüksek Lisans	Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi	2014
Lisans	Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi	2012
Lise	Karaman Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2015- …	Aksaray Üniversitesi Ortaköy Meslek Yüksekokulu	Öğretim Görevlisi
2014-2015	Karaman Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Öğretmen (Sözleşmeli)
2012-2014	TÜBİTAK	Yüksek Lisans Bursiyeri
2010-2011	Konya Necmettin Erbakan Üniversitesi	Öğrenci Asistanı

Yayınlar

1. Gelişken, A. Kara, M., 2015. Some General Systems Of Rational Difference Equations. *Journal of Difference Equations*, 7, 396757.