BAZI GRUP VE MONOİD YAPILARI İÇİN KARAR VERME PROBLEMLERİ VE BÜYÜME SERİLERİ

Esra KIRMIZI ÇETİNALP

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Cebir ve Sayılar Teorisi Programı

Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ

Haziran-2016

T.C

KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI GRUP VE MONOİD YAPILARI İÇİN KARAR VERME PROBLEMLERİ VE BÜYÜME SERİLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Esra KIRMIZI ÇETİNALP

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı: CEBİR VE SAYILAR TEORİSİ

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ

KARAMAN- 2016

TEZ ONAYI

Esra KIRMIZI ÇETİNALP tarafından hazırlanan **"Bazı Grup ve Monoid Yapıları için Karar Verme Problemleri ve Büyüme Serileri"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy çokluğu ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ

Jüri Üyeleri	İmza
Ünvanı, Adı Soyadı: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK	
Ünvanı, Adı Soyadı: Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ	
Ünvanı, Adı Soyadı: Doç. Dr. Ahmet İPEK	

Tez Savunma Tarihi: 02/06/2016

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Ahmet İPEK

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

E. Çetinalp

Esra KIRMIZI ÇETİNALP

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI GRUP VE MONOİD YAPILARI İÇİN KARAR VERME PROBLEMLERİ VE BÜYÜME SERİLERİ

Esra KIRMIZI ÇETİNALP

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ

Haziran, 2016, 66 sayfa

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin içindeki temel konular ile ilgili genel bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, ilk olarak grup, monoid ve yarı grupların sunuşları ile ilgili hatırlatmalar yapılmış ve grup genişlemeleri üzerinde genel bilgiler kısaca verilmiştir. Daha sonra, karar verme problemleri ile ilgili bilgi verilip, kelime probleminin çözümünde önemli bir metot olan yeniden yazma sisteminden bahsedilmiştir. Son olarak ise, sonsuz cebirsel yapılar üzerinde önemli bir çalışma alanı olan büyüme serilerine yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, çapraz çarpım ve onun cebirsel özellikleri ile ilgili bilgiler verilmiştir. Bir sonraki aşamada ise, sonlu ve sonsuz grupların kombinasyonu ile oluşturulan dört grup sunuşunun monoid sunuşları düşünülerek çapraz çarpım için tam yeniden yazma sistemi elde edilip elemanlarının normal formunun yapısı belirlenmiştir. Daha sonra elde edilen normal formlar kullanılarak bu yapılar için büyüme serileri hesaplanmıştır.

Dördüncü bölümde, yeni bir çarpım, iki-yanlı çapraz çarpım, tanımlanmış ve bu çarpımın hangi koşullar altında grup tanımladığı belirtilmiştir. Ayrıca sonlu devirli gruplar üzerinde bu yeni çarpımın sunuşu düşünülerek yeniden yazma sistemi, normal formu ve büyüme serileri elde edilmiştir.

Son bölümde, önceki bölümlerde elde edilen sonuçların bir değerlendirmesi yapılmıştır.

Anahtar Sözcükler: Çapraz Çarpım, İki-Yanlı Çapraz Çarpım, Sunuş, Yeniden Yazma Sistemi, Normal Form, Kelime Problemi, Büyüme Serileri.

ABSTRACT

Ms Thesis

DECISION PROBLEMS AND GROWTH SERIES FOR SOME GROUP AND MONOID CONSTRUCTIONS

ESRA KIRMIZI ÇETİNALP

Karamanoğlu Mehmetbey University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ

June, 2016, 66 pages

This thesis consists of five main chapters. In the first chapter, it has been given general information about topics of this thesis. In the second chapter, firstly, it has been recalled group, monoid and semigroup presentations and then given some information on group extensions. Later, it has been given information on decision problems and discussed complete rewriting system which is one of the important method in solvability of the word problem. Finally, it has been informed about growth series which is one of the important work field on infinite algebraic structures.

In Chapter 3, it has been given some information about crossed product and its algebraic properties. Then, by considering monoid presentations of four group presentations which created with combination of finite and infinite groups, it has been obtained complete rewriting system and determined the structure of the normal form of its elements. Later, by using these obtained normal forms, it has been computed growth series of these products.

In Chapter 4, it has been defined a new product, called two-sided crossed product, and then given necessary and sufficient conditions for this new product to be a group. Moreover, by considering presentation of this new product of finite cyclic groups, it has been obtained complete rewriting system, normal form and growth series.

In the last chapter, the results which are obtained from previous chapters have been summarized.

Key Words: Crossed Product, Two-Sided Crossed Product, Presentation, Rewriting System, Normal Form, Word Problem, Growth Series.

ÖN SÖZ

Akademik hayata başladığımdan beri, ilgisi ve desteğiyle her zaman yanımda olduğunu bildiğim, disiplinler arası çalışmalar için beni cesaretlendiren, gerekli zemini oluşturan ve alanlarında uzman hocalar ile çalışma ortamı sağlayan, insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim, kelimelerin sevgimi anlatmada yetersiz kaldığı çok değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ'a bana her zaman güvendiği, moral ve motivasyonumu yüksek tuttuğu; daima önümde yeni ufuklar açtığı ve yol gösterdiği için sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Lisans, Yüksek Lisans eğitimim boyunca tüm çalışmalarımda kıymetli zamanını bana ayırarak bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım ve bundan sonraki akademik hayatım boyunca da her zaman örnek alacağım değerli hocam Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e içtenlikle teşekkür ederim.

113F294 nolu proje kapsamında Yüksek Lisans eğitimimin tez dönemi boyunca burs ve yurt dışı kongre katılım desteği sağladığı için TÜBİTAK'a teşekkür ederim.

Bugünlere gelmem de emekleri olan, bana güvenerek akademik hayata atılmamı sağlayan, her zaman maddi ve manevi olarak verdiği destekleriyle yanımda olan canım AİLEM'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tanıştığımız günden beri hayatımı değiştiren, iyi ve kötü günümde desteğini esirgemeyen, canımdan öte sevgili EŞİM'e özellikle kahrımı çektiği için teşekkürü bir borç bilirim.

Son olarak bedenimde can bulduğunu bildiğim günden beri bana mutluluk veren, dünyaya gelişini heyecanla beklediğimiz canım OĞLUM' a bana verdiği gizli destekten dolayı teşekkür ederim.

Esra KIRMIZI ÇETİNALP

Haziran, 2016

“Bu tez, Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) 08-YL-15 nolu proje tarafından desteklenmiştir.”

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\iota(w)$	w kelimesinin başlangıç harfi
$\tau(w)$	w kelimesinin bitiş harfi
1_w	Boş kelime
$l(w)$	w kelimesinin uzunluğu
$l_x(w)$	w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu
$\approx$	Serbest olarak iki kelimenin denkliği
$[w]$	w kelimesinin denklik sınıfı
$F(X)$	X kümesi üzerindeki serbest grup
$\wp = \langle X ; R \rangle$	Grup sunuşu
$w_1 \approx_{\wp} w_2$	w_1 ve w_2 kelimeleri $\wp$ sunuşuna bağlı olarak denktir
$[w]_{\wp}$	$\wp$ sunuşuna bağlı olarak w kelimesinin denklik sınıfları
$[1]_{\wp}$	$\wp$ sunuşuna bağlı grubun birimi
$G(\wp)$	$\wp$ sunuşunun temsil ettiği grup
$\wp_M$	M monoidin sunuşu
$\wp_S$	S yarı grubun sunuşu
A^+	A kümesindeki elemanlarla oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi
A^*	$A^+ \cup \{1\}$

$\mathrm{Im}(\alpha)$	α dönüşümünün görüntüsü
$\ker(\alpha)$	α dönüşümünün çekirdeği
$l \to r$	l kelimesinin r kelimesine indirgenmesi
$\to^{*}_{R}$	R tarafından üretilen bir indirgeme bağıntısı
$\leftrightarrow^{*}_{R}$	R tarafından üretilen Thue kongrüans
$[X\,;\,R]$	Monoid sunuşu
$C(u)$	u kelimesinin normal formu
$\lvert g\rvert$	g elemanının uzunluğu
$l_G(a)$	a elemanının G kümesi üzerinde uzunluğu
$\inf\{k\}$	k elemanının infimumu
$\beta(G,S;z)$	G grubunun S üreteci ile büyüme serisi
$G = G_1 *_{G_3} G_2$	G_1 ve G_2 grubunun G_3 grubu ile birleştirilmiş serbest çarpımı
$w(G,S)$	S kümesi ile üretilen G grubunun parçasal büyüme oranı
$Aut(N)$	N grubunun otomorfizması
$N \bowtie_{(\alpha,\beta)} H$	N ve H gruplarının knit çarpımı
$H \rtimes_{\theta} N$	N ve H gruplarının yarı direkt çarpımı
$H \#_{\alpha}^{f} G$	H grubunun G grubu ile çapraz çarpımı
$H \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} G$	H grubunun G grubu ile iki-yanlı çapraz çarpımı

1. GİRİŞ

Birleştirilmiş grup ve yarı grup teori, temel olarak sunuşlar üzerine kurulmuştur. Bu alanlarda çalışan cebirciler, genel olarak aşağıda verilen üç sorunun cevabı üzerine yoğunlaşmışlardır. Bunlardan ilki, verilen bir cebirsel yapının ya da elde edilen yeni yapıların sunuşunu bulmaktır. Elde edilen sunuşlar sayesinde sadece üzerinde çalıştığımız cebirsel yapı hakkında bilgi sahibi olmayıp aynı zamanda bu sunuşları kullanarak bu yapılar üzerinde tanımlanan bazı özel problemlerin çözümlerinde de geniş bir kullanım alanına sahip olunmaktadır. Böylece sunuşlar elde edilerek birçok açık probleme ışık tutulmaktadır. İkincisi verilen bir grup, monoid veya yarı gruptan yeni bir cebirsel yapı elde etmek, yani yeni çarpımlar tanımlayarak var olan yapıyı yeni yapılara genişletmektir. Son olarak, sunuşu bilinen cebirsel yapıların cebirsel özelliklerinin incelenmesidir. Tezimizde genel olarak birleştirilmiş grup teorideki problemlerin son ikisine, yani yeni bir cebirsel yapı elde edilmesi ve bu cebirsel yapının belli özelliklerinin incelenmesi üzerine yeni çalışmalar yapılmıştır.

Grup genişlemesinin temelini oluşturan direkt ve yarı-direkt çarpımın genellemesi olan çapraz çarpım gruplarda (monoid, yarıgrup), Lie (Rudkovskii, 1997), Hopf (Carbani ve ark., 2010) ve C^*-cebirlerinde (Grundling ve Neeb, 2014), halkalarda (Abuhlail, 2005), topolojik uzayda, vb… alanlarda önemli bir kullanım alanına sahiptir. Çapraz çarpımın bu kadar önemli olması, bu çarpım ile herhangi çarpımın birleştirilmesi sonucu oluşturulan yeni cebirsel yapının özellikleri nedir yada bu çarpımı kapsayan daha geniş cebirsel yapılar oluşturulabilir mi? sorularını gündeme getirmektedir. (Emin ve ark., 2013) daki çalışmada, yazarlar Schützenberger çarpım ile çapraz çarpımı birleştirerek, elde edilen cebirsel yapının monoid olduğunu göstermiş ve bu monoidin sunuşunu bularak cebirsel özelliklerini incelemişlerdir. İkinci soruya cevap olarak, tezde, çapraz çarpım ve birçok yeni çarpımı kapsayan yeni bir cebirsel yapı elde edilmiştir. Bu yeni çarpımın sunuşu bulunarak, cebirsel özellikleri incelenmiştir. Bu yeni çarpım direkt, yarı direkt, çapraz çarpım, knit çarpım, twisted çarpımı içeren geniş kapsamlı çarpım olduğundan, bu konuda çalışan cebircilere ışık tutması ve yapılan çalışmalara yeni bir bakış açısı kazandırılması planlanılmıştır.

Birleştirilmiş grup ve yarı grup teoride oldukça önemli bir çalışma alanı oluşturan karar verme problemlerinin, geometrik grup teorisi ve son yıllarda da teorik bilgisayar bilimi ve formal dil teorisi ile olan ilişkileri önem kazanan konular arasındadır. Tezimizin ana konularından biri olan kelime problemi, 1911 yılında Max Dehn tarafından ortaya atılan üç temel karar verme problemlerinden biridir. Bu problem, üzerinde çalıştığımız cebirsel yapının üreteç elemanlarıyla oluşturulan iki kelimenin birbirine eşit olup olmadığını araştıran bir algoritmanın varlığı problemidir. Bu problemlerin hangi grup, monoid ve yarı grup sınıfları için çözülebilir, hangileri için çözülemez olduğu yönündeki çalışmalar oldukça önemlidir. Tezimizde tanımlanan cebirsel yapıların kelime probleminin çözülebilir olduğunun gösterilmesi, bu grupların sınıflandırılması açısından önemlidir.

Sonsuz grupların yapısının çalışılması oldukça zor olduğundan, sonsuz grupların yapısını inceleyen uzun bir tarih vardır. Büyüme serileri de bunlardan biridir. Büyüme serisi, üreteç kümesi verildiğinde n uzunluklu elemanların sayısını hesaplayan ve bunu resmi (formal) güç serilerine dönüştüren yapıdır. Büyüme serilerinde uzunluk yerine, Cayley grafların ağırlıklarına göre elde edilen hesaplama ile de jeodezik büyüme işlemi oluşmuştur. Bridson ve ark. jeodezik (en kısa yol) büyümeye sahip grupların büyüme çeşidini incelemişlerdir. Bu çalışmalara ek olarak, büyüme serileri ve jeodezik büyüme serilerinin genelleştirilmesi olan tam büyüme serisi (n uzunluktaki elemanların toplamından oluşturularak elde edilen büyüme serisi) ve operatör büyüme serisi (elemanları operatörlerden alınarak elde edilen büyüme serisi) elde edilmiştir. Üzerinde çalışılan cebirsel yapıların büyüme serilerinin elde edilmesi bu yapıların sınıflandırılması açısından önemlidir. Takebayashi (Takebayashi, 2003, 2005, 2006) nolu çalışmalarda $A_1^{(1,1)}$, $A_1^{(1,1)*}$, $A_2^{(1,1)}$, $A_n^{(1,1)}$ Weyl gruplarının büyüme serisini hesaplamıştır. Yarı gruplar için (Grigorchuk, 1988; Shneerson ve Easdown, 1996), graflar için (Trofimov, 1985), otomata ve dil için (Rozenberg ve Salomaa, 1980; Grigorchuk, 1988), C^*-cebiri için (Kirchberg ve G. Vaillant, 1992), geometrik gruplar için (Grigorchuk ve Kurchanov, 1993) ve matematiğin diğer alanlarında da (Milnor, 1968) büyüme serileri ile ilgili yapılan çalışmalardan bazılarıdır. Tezimizin son ana konularından biri olan büyüme serileri, çapraz ve iki-yanlı çapraz çarpım için yeniden yazma sistemi metodu kullanılarak hesaplanmıştır. Böylece yapılan sınıflandırmalara bu yapıların büyüme serileri de eklenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Giriş

Bu bölüm, genel olarak, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan materyallerin daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan temel bilgilerden oluşmuştur. Bu materyaller ile ilgili daha detaylı bilgiler (Lyndon ve Schupp, 1977; Book, 1987; Rotman, 1988; Cohen, 1989; Johnson, 1990; Book ve Otto, 1993; Parkes ve Thomas, 2000; Karpuz 2006, 2009) gibi kaynaklardan elde edilebilir.

2. 2. Sunuşlar

Birleştirilmiş grup ve yarı grup teoride çok önemli bir yere sahip olan sunuşlar, cebirsel problemlerin çözümünde kolaylık sağlamaktadır. Sunuşlar, sadece üzerinde çalışılan cebirsel yapının elemanları hakkında bilgi sahibi olmak ve grubun genel bir karakterizasyonunu yapmak için değil, aynı zamanda bu yapılar üzerinde tanımlanan bazı özel problemlerin çözümlerinde kullanılması açısından da geniş bir kullanım alanına sahiptir. Tezin bu alt bölümünde diğer bölümlere hazırlık sağlaması açısından öncelikle grup ve monoid sunuşları daha sonra ise yarı grup sunuşu hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

2. 2. 1. Serbest Grup

X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme ile $x \leftrightarrow x^{-1}$ $(x \in X)$ eşleşmesinden yararlanarak X^{-1} kümesini tanımlayalım ve $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ olsun. $X^{\pm}$ kümesinin her bir elemanına *harf* denir. Burada, $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \tag{2.1}$$

ifadesine X üzerinde bir *kelime* denir ve w ile gösterilir. w kelimesinin başlangıç harfi $\iota(w)$ ile gösterilip, burada $\iota(w) = x_1^{\varepsilon_1}$ dir. Benzer şekilde bitiş harfi $\tau(w)$ ile gösterilip, (2.1) deki kelimenin bitiş harfi $\tau(w) = x_n^{\varepsilon_n}$ dir. Özel olarak $n = 0$ ise *boş kelime* elde edilir ve 1_w ile gösterilir. (2.1) deki gibi boş olmayan bir kelime ($n>0$) için, her $\varepsilon_i = +1$ oluyorsa w kelimesine *pozitif kelime* denir. Ayrıca (2.1) deki w kelimesinin tersi $x_n^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \cdots x_1^{-\varepsilon_1}$ kelimesi olarak tanımlanır ve w^{-1} olarak gösterilir.

(2.1) de verilen w kelimesinin uzunluğu, w içindeki harflerin sayısı olarak tanımlanır, ayrıca w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu da $\sum_{x_i=x}|\varepsilon_i|$ olarak hesaplanır ve bunlar sırasıyla $l(w)$ ve $l_x(w)$ ile gösterilir.

X kümesi üzerinde verilen iki kelime w ve u olsun. w ve u kelimelerinin çarpımını, w kelimesinin arkasına u kelimesini getirip yan yana yazarak elde ederiz ve bu çarpım wu ile ifade edilir. Verilen bu çarpım altında kelimeler üzerinde aşağıdaki şekilde işlemler tanımlanabilir.

(I) $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelime içinde $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ çiftleri varsa, bu çiftler silinir. Yapılan bu işleme *indirgeme işlemi* denir.

(I)$^{-1}$ $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelimeye $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ şeklindeki ters harf çiftleri eklenebilir. Bu işleme de kelime üzerinde *ekleme işlemi* denir.

X kümesi üzerindeki iki kelime w ve w' olsun. Eğer bu kelimelerden biri diğerine yukarıdaki (I) ve (I)$^{-1}$ işlemlerinin sonlu sayıdaki uygulamasıyla elde ediliyorsa, bu iki kelimeye *serbest olarak eşit* denir ve bu $w \approx w'$ ile gösterilir. Aslında $\approx$ olarak gösterilen serbest olarak eşitlik, bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla herhangi bir w kelimesini içeren serbest denklik sınıfı $[w]$ ile gösterilir. Eğer X kümesi üzerindeki tüm kelimelerin serbest denklik sınıflarının kümesini $F(X)$ ile gösterirsek, $F(X)$ üzerindeki çarpma işlemi

$$[w][u] = [wu]$$

olarak tanımlanır ve bu çarpma işlemi iyi tanımlıdır (Rotman, 1984). Bu çarpma işlemi altında $F(X)$ bir grup oluşturur ve oluşan bu gruba X kümesi üzerindeki *serbest grup* denir.

X kümesi üzerinde alınan u, v ve w kelimeleri için $w' = uwv$ eşitliği varsa bu durumda w kelimesine w' kelimesinin *alt kelimesi* denir. X kümesi üzerindeki bir kelime, $x_i^{\varepsilon_i} x_i^{-\varepsilon_i}$ $(x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1)$ harf çiftini içermiyorsa bu kelimeye *indirgenmiş kelime* denir. Buna ek olarak, (2.1) deki gibi bir kelime için $x_1^{\varepsilon_1} \neq x_n^{-\varepsilon_n}$ ise bu kelimeye *devirsel indirgenmiş kelime* denir.

Serbest grupların birçok özelliği mevcuttur. Bunlardan biri de sonsuz gruplarda geçerli olan Evrensel Dönüşüm Özelliği (U.M.P.) dir. Bu özelliğe göre, G herhangi bir grup olmak üzere, $\phi_0 : X \to G$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\phi : F(X) \to G$ biçiminde tek bir homomorfizma mevcuttur.

Aşağıdaki teorem, bir sonraki alt bölümde vereceğimiz grup sunuşlarının elde edilmesi açısından önemlidir.

2. 2. 1. Teorem (Normal Form Teoremi)(Cohen, 1989): Her bir denklik sınıfı tek bir indirgenmiş kelime içerir.

2. 2. 2. Grup Sunuşları

X üreteç kümesi ve R ise X kümesi üzerindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan boştan farklı bir küme (*bağıntı kelimelerinin kümesi*) olsun. Bu durumda

$$\wp = \langle X ; R \rangle$$

ikilisine bir *grup sunuşu* denir. X ve R kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp$ sunuşu *sonludur* denir.

X kümesindeki kelimeler üzerinde, yukarıdaki (I) ve $(\mathrm{I})^{-1}$ işlemlerine ek olarak aşağıdaki işlemleri kullanarak, $\wp$ sunuşu ile bir grup tanımlarız. Bunun için X kümesi üzerinde bir kelime w olsun.

(II) w kelimesi r^{ε} $(r \in R,\ \varepsilon = \pm 1)$ şeklinde bir alt kelime içeriyorsa bu alt kelimeyi sileriz.

$(\mathrm{II})^{-1}$ w kelimesi içinde herhangi bir yere r^{ε} $(r \in R,\ \varepsilon = \pm 1)$) alt kelimesini ekleriz.

X kümesi üzerinde iki kelime w_1 ve w_2 olsun. Eğer w_2 kelimesi w_1 kelimesinden sonlu sayıda $(\mathrm{I})^{\pm 1}$, $(\mathrm{II})^{\pm 1}$ işlemleri ile elde edilebiliyor ise, w_1 ve w_2 kelimelerine $\wp$ sunuşuna bağlı olarak *denk kelimeler* denir ve bu denklik $w_1 \approx_{\wp} w_2$ ile gösterilir.

Buradaki $\approx_{\wp}$ bağıntısı X üzerindeki bütün kelimelerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca w kelimesini içeren denklik sınıfı $[w]_{\wp}$ ile ifade edilirse, bu denklik sınıfı üzerindeki çarpma işlemi

$$[w_1]_{\wp}[w_2]_{\wp} = [w_1 w_2]_{\wp}$$

şeklinde tanımlanır ve bu çarpma işleminin iyi tanımlı olduğu kolayca gösterilebilir. Bu çarpma işlemi altında, tüm denklik sınıflarının kümesi bir grup oluşturur. Bu grup $G(\wp)$ ile gösterilip, $G(\wp)$ grubunun birim elemanı $[1]_{\wp}$ ile ifade edilir. Eğer $G \cong G(\wp)$ ise G grubu $\wp$ ile *sunuluyor* denir. Eğer $G \cong G(\wp)$ ise G grubu $\wp$ ile *sunuluyor* (ya da $\wp$ sunuşunun temsil ettiği grup G dir) denir. Şimdi N = $\{[r] : r \in R\}$ kümesini grubun normal kapanışı olarak tanımlarsak, aşağıdaki teorem elde edilir.

2. 2. 2. Teorem:

$$G(\wp) \cong F(X)/N$$

dir.

İspat: $\wp$ sunuşunun temsil ettiği $G(\wp)$ grubu ve X kümesi için,

$$\psi_0 : X \to G(\wp)$$
$$x \mapsto [x]_{\wp}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Evrensel Dönüşüm Özelliği gereği, bu dönüşümün genişlemesi olan

$$\psi : F(X) \to G(\wp)$$
$$[w] \mapsto [w]_{\wp}$$

biçiminde bir tek homomorfizma vardır ve de $\psi_{|X} = \psi_0$ (ψ nin X üzerindeki kısıtlanışı) dır. Burada ψ homomorfizması örtendir. Ayrıca $Ker\psi$ = N dir. Dolayısıyla 1. İzomorfizma Teoremi gereği

$$G(\wp) \cong F(X)/N$$

bulunur. ■

2. 2. 3. Örnek: X kümesi üzerindeki serbest grubun sunuşu $\wp = \langle X\,;\ \rangle$ şeklindedir. Burada dikkat edilirse bağıntı kelimelerinin kümesi R boş kümedir.

2. 2. 3. Monoid Sunuşları

M bir monoid ve A da bu monoidin üreteç kümesi olmak üzere, A^{+} kümesi A üreteç kümesindeki elemanlarla oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi olarak tanımlanır. Bununla beraber monoidler için tanımlanan kelimeler ise $A^{*} = A^{+} \cup \{1\}$ kümesinden alınır.

2. 2. 4. Tanım: A boştan farklı bir küme (üreteç kümesi) ve $U \subseteq A^{*} \times A^{*}$ olacak şekilde U alt kümesi, bağıntı kelimelerinin bir kümesi olsun. Bu durumda,

$$\wp_M = [A\,;U]$$

ikilisine bir *monoid sunuşu* denir. Gruplarda olduğu gibi A ve U kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp_M$ sunuşu da sonludur.

2. 2. 5. Teorem: M bir monoid, A da M için bir üreteç kümesi ve ρ, A^{*} kümesi üzerinde U bağıntı kümesini içeren en küçük kongrüans olsun. Bu durumda

$$M \cong A^{*}/\rho$$

dir.

İspat: $\wp_M$ sunuşunun temsil ettiği M monoidi ve A üreteç kümesi için,

$$\begin{aligned} \phi &: A \to M \\ & x \mapsto [x]_{\wp} \quad (x \in A) \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm

$$\begin{aligned} \phi &: A^{*} \to M \\ & [w] \mapsto [w]_{\wp} \end{aligned}$$

şeklinde tek bir örten homomorfizmaya genişletilebilir. Ayrıca $Ker\phi = N$ dir. Dolayısıyla 1. İzomorfizma Teoremi gereği

$$M \cong A^* / \rho$$

bulunur. ■

2. 2. 6. Örnek : 3 -ranklı Çin monoidinin sunuşu aşağıda verilmiştir.

$$\wp_{M_3} = [x_1, x_2, x_3 \ ; \ x_3x_2x_1 = x_2x_3x_1,\ x_3x_1x_2 = x_2x_3x_1,\ x_2x_1x_1 = x_1x_2x_1,\ x_3x_2x_2 = x_2x_3x_2,$$
$$x_3x_1x_1 = x_1x_3x_1,\ x_2x_2x_1 = x_2x_1x_2,\ x_3x_3x_2 = x_3x_2x_3,\ \ x_3x_3x_1 = x_3x_1x_3]$$

2. 2. 4. Yarı Grup Sunuşları

Yarı grup ve yarı grup sunuşları, grup ve monoid cebirsel yapılarına göre çalışılması daha zor yapılardır. Yarı grup sunuşlarında genel olarak iki tip problem vardır. Bunlarda ilki, verilen bir yarı grubun sunuşunu bulmak, diğeri ise verilen bir sunuş tarafından temsil edilen yarı grubu elde etmektir. Bu yarı grubun belirlenmesinden sonra bu yarı grubun birçok cebirsel özelliğe sahip olup olmaması da yarı grup teoride çalışılan önemli bir konudur. Bu konu hakkında detaylı bilgilere (Clifford ve Preston, 1967; Ruškuc, 1996) kaynaklarından ulaşılabilir.

2. 2. 7. Tanım: A boştan farklı bir küme (*üreteç kümesi*) ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ kümesi, $u, v \in A^+$ için $(u,v) \in R$ (ki bu genellikle $u = v$ şeklinde gösterilir) elemanlarından oluşan bir *bağıntı kümesi* olsun. Bu durumda $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ ve $R = \{u_1 = v_1, ..., u_n = v_n\}$ için,

$$\wp_S = [A; R] = [a_1, ..., a_m \ ; \ u_1 = v_1, ..., u_n = v_n]$$

ikilisine bir *yarı grup sunuşu* denir. Eğer A kümesi sonlu ise $\wp_S$ sunuşunun temsil ettiği yarı gruba *sonlu üreteçlidir* denir. A ve R kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp_S$ sunuşunun temsil ettiği yarı gruba *sonlu sunumludur* denir.

2. 2. 8. Teorem: S bir yarı grup, A kümesi S için bir üreteç kümesi ve ρ, A^+ kümesi üzerinde R bağıntı kümesini içeren en küçük kongrüans olsun. Bu durumda

$$S \cong A^+/\rho$$

dir.

İspat: 2.2.2. ve 2.2.5. Teoremlerin ispatına benzer şekilde gösterilebilir.

2. 2. 9. Örnek:

1. [a ; $a^2 = a$] sunuşunun temsil ettiği yarı grup $\{a\}$ ile üretilen tekil yarı gruptur.

2. [a ; $a^{n+r} = a^r$] sunuşunun temsil ettiği yarı gruba n+r-1 mertebeli *devirli* (monojenik) *yarı grup* denir.

Not: Her yarı grup sunuşu aynı zamanda bir monoid sunuşu haline getirilebilir. Örneğin [A ; R] sunuşunun temsil ettiği yarı grup S olsun. Bu yarı gruba birim eleman eklenerek [A ; R] sunuşunun temsil ettiği bir monoid elde edilir. Eğer S yarı grubu $e \in A^+$ ile temsil edilen bir birim eleman içeriyorsa bu durumda [A ; R , $e = 1$] sunuşu S için bir monoid sunuşu olacaktır.

Şimdi [B ; Q] sunuşunun temsil ettiği monoidi M olarak alalım. O halde

$$[B, e\ ;\ Q',\ e^2 = e,\ eb = be = b\ (b \in B)]$$

sunuşu M için bir yarı grup sunuşudur. (Burada Q' bağıntı kümesi Q bağıntı kümesindeki $w = 1$ formundaki her bir bağıntının $w = e$ bağıntısıyla yer değiştirildiği bir kümedir).

Bununla birlikte $< A$; $R >$ sunuşunun temsil ettiği grup G iken,

$$[A, A^{-1}\ ;\ R,\ aa^{-1} = a^{-1}a = 1\ (a \in A)]$$

sunuşu G için bir monoid sunuşudur. (Burada $A^{-1} = \{a^{-1}; a \in A\}$ kümesi A dan farklı ama A nın elemanları ile bire-bir eşlemeli yeni bir kümedir).

2. 2. 10. Örnek: $\mathbb{Z}_2 = \langle x; x^2 = 1 \rangle$ ve $\mathbb{Z}_3 = \langle y; y^3 = 1 \rangle$ sunuşlarına sahip iki devirli grubu göz önüne alalım. $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ direkt çarpım grubunun sunuşu

$$\langle x, y \; ; \; x^2 = 1, \; y^3 = 1, \; xy = yx \rangle$$

biçimindedir. Bu grubun monoid sunuşu

$$\langle x, y, x^{-1}, y^{-1} \; ; \; x^2 = 1, \; y^3 = 1, \; xy = yx, \; xx^{-1} = x^{-1}x = 1, \; yy^{-1} = y^{-1}y = 1 \rangle$$

iken yarı grup sunuşu ise,

$$\langle x, y, x^{-1}, y^{-1}, e \; ; \; x^2 = e, \; y^3 = e, \; xy = yx, \; xx^{-1} = x^{-1}x = e, \; yy^{-1} = y^{-1}y = e, \; e^2 = e, \; xe = ex = x, \; ye = ey = y \rangle$$

biçimindedir.

2. 3. Grup Genişlemeleri

Cebirde, sonlu ve sonsuz grupların sınıflandırılması çoğu araştırmacının üzerinde çalıştığı bir konudur. Verilen gruplar kullanılarak yeni bir grup inşa edilmesi olayı da, sınıflandırma çalışmalarının bu yeni gruplar üzerinde uygulanması, araştırmacılara ek bir çalışma alanı oluşturmuştur. Grup genişleme teorisi O. Hölder ve O. Schreier tarafından geliştirilirken, bu teorinin homolojik uygulaması S. Eilenberg ve S. MacLane tarafından ilk olarak literatüre kazandırılmıştır. Genişleme teorisinin amaçlarından biri, normal alt grup ve bölüm grubu kullanılarak nasıl yeni bir grup elde edilebilir onu göstermektir. Genişleme teorisi çok kapsamlı ve geniş bir konudur. Fakat, burada sadece tezimizin diğer bölümlerinde gerekli olacak temel tanım ve sonuçlar verilecektir. Bu konu hakkında ek bilgilere (Magnus ve ark.,1976; Ateş ve Çevik, 2009; Ateş, 2009; Rudkovskii, 1997) kaynaklarından ulaşılabilir. Ayrıca, grup genişlemesi ile ilgili olarak bir diğer çalışmayada (Çevik, 2001) makalesi verilebilir. Bu çalışmada, grupların merkezi genişlemesine yer verilmiştir.

2. 3. 1. Tanım (Çevik, 2012): $N \trianglelefteq G$ ve $G/N \cong H$ şartlarını sağlayan N ve H grupları varsa, G 'ye N 'in H ile olan *grup genişlemesi* denir.

Verilen bu genişleme tanımı, gruplar arasındaki dönüşümler yardımıyla, aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir.

N, G ve H gruplar olmak üzere,

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} N \xrightarrow{\alpha_2} G \xrightarrow{\alpha_3} H \xrightarrow{\alpha_4} 1 \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan grup homomorfizmalarını göz önüne alalım. Her $1 \leq i \leq 4$ için $\mathrm{Im}(\alpha_i) = \ker(\alpha_{i+1})$ şartı sağlanıyor ise (2.2) ile verilen yapıya *kısa tam dizi* denir. Bu şekildeki bir kısa tam dizi için, $N \trianglelefteq G$ ve $G/N \cong H$ koşulları sağlanıyor ise, G grubuna N nin H grubuyla olan genişlemesi adı verilir. (2.2) deki kısa tam dizi kavramı, grupların sayısını artırarak tam diziler elde edilir.

Aşağıda knit, yarı direkt çarpım ve birleştirilmiş serbest çarpım hakkında kısaca bilgi verilmiştir.

2. 3. 2. Tanım (Ateş ve Çevik, 2009): N ve H herhangi iki grup ve $n \in N$, $h \in H$ için,

$$\begin{array}{ll} \beta : N \to Aut(H) & \alpha : H \to Aut(N) \\ n \mapsto \beta_n \quad \text{ve} & h \mapsto \alpha_h \end{array}$$

homomorfizma olsunlar. H grubunun N ile knit çarpımı, $G = N \bowtie_{(\alpha,\beta)} H$,

$$(n_1, h_1)(n_2, h_2) = (n_1 \alpha_{h_1}(n_2), \beta_{n_2}(h_1) h_2)$$

işlemi ile tanımlı $N \times H$ kümesidir. Bu çarpımın birimi $(1,1)$ elemanı ve (n,h) elemanının tersi ise $(n,h)^{-1} = (\alpha_{h^{-1}}(n^{-1}), \beta_{n^{-1}}(h^{-1}))$ dir.

2. 3. 3. Teorem (Ateş ve Çevik, 2009): N ve H grupları sırasıyla $\wp_N = \langle X; R \rangle$ ve $\wp_H = \langle Y; S \rangle$ sunuşları ile temsil edilsinler $(X \cap Y = \varnothing)$. Bu durumda K grubunun N grubu ile knit çarpımının sunuşu

$$\wp = \langle X, Y; R, S, T \rangle$$

biçimindedir. Burada T kümesi $(y,x) \in H \times N$ için $(yx, (y.x)(y^x))$ biçimindedir.

(Brin, 2005) çalışmasında, knit çarpım, Zappa-Szep adı altında monoid ve yarı gruplar için çalışılmıştır.

Bilindiği gibi yarı direkt çarpım grupları önemli bir genişleme türüdür. Herhangi iki grubun yarı direkt çarpımı, çarpanlardan en az birinin çarpım içerisinde normal olmasını gerektirir ve grupların direkt çarpımın bir genellemesidir.

2. 3. 4. Tanım: N ve H iki monoid ve her $n \in N$ için,

$$\theta : N \to End(H), \ \mathrm{n} \mapsto \theta_n (n \in N), 1 \mapsto id_{End(H)}$$

biçiminde tanımlı bir homomorfizma olsun. Buna göre $n \in N$ ve $h \in H$ olmak üzere, alınacak her (n,h) sıralı çifti için,

$$(n,h)(n^{'},h^{'}) = (nn^{'}, \theta_{n^{'}}(h)h^{'})$$

çarpımını tanımladığımızda, yukarıdaki işlemi sağlayan (n,h) şeklindeki sıralı ikili elemanların oluşturduğu G kümesine, H ‘nin N ile olan yarı direkt çarpımı denir ve $G = H \rtimes_\theta N$ şeklinde gösterilir.

2. 3. 5. Teorem (Çevik, 2003): H ve N monoidleri sırasıyla $\wp_H = \langle Y;S \rangle$ ve $\wp_N = \langle X,R \rangle$ sunuşları ile temsil edilsin. Bu durumda $G = H \rtimes_\theta N$ yarı direkt çarpımının sunuşu

$$\wp_G = \langle X,Y;\ R,S,\ yx = x\theta_x(y)\ (x \in X, y \in Y) \rangle$$

biçimindedir.

2. 3. 6. Tanım (Lyndon ve Schupp, 1977): $A = \langle a_1, a_2, ..., a_n;\ R_1, R_2, ..., R_k \rangle$ ve $B = \langle b_1, b_2, ..., b_m;\ S_1, S_2, ..., S_t \rangle$ sunuşları ile verilen A ve B gruplarını düşünelim. Ayrıca $H \subset A$ ve $K \subset B$ özalt gruplar ve $\theta : H \to K$ izomorfizma olsun. Buna göre,

$$A *_\theta B = \langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_m;\ R_1, ..., R_k, S_1, ..., S_t, H = \theta(H) \rangle$$

sunuşu ile verilen $G = A *_\theta B$ grubuna A ve B gruplarının H grubu K grubuna birleştirilerek elde edilen *birleştirilmiş serbest grubu* denir.

Şimdi büyüme serilerini hesaplanırken kullandığımız bazı tanımları aşağıda verelim.

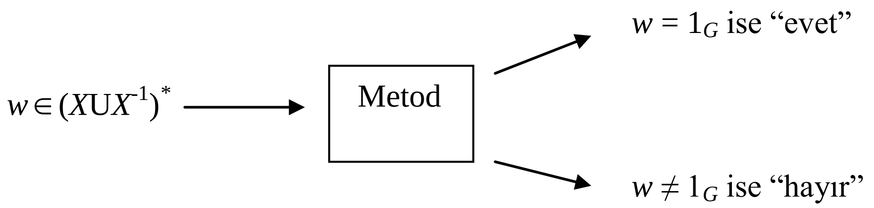
2. 3. 7. Tanım: Sırasıyla S_A ve S_G üreteç kümeleri ile üretilen A ve G grupları verilmiş olsun. Eğer $\alpha : A \rightarrow G$ dönüşümü için $\alpha(S_A) \subseteq S_G$ şartı sağlanıyor ise $\alpha : (A, S_A) \rightarrow (G, S_G)$ çiftlerin dönüşümü bir homomorfizmadır. Özel olarak, α monomorfizma alınırsa, α ’ya *içeren* denir.

Eğer $\forall a \in T$ ve $t \in T$ için, $l_G(\alpha(a)t) = l_A(a) + l_G(t)$ koşulunu sağlayan G ’nin $\mathrm{mod}(\alpha(A))$ ya göre sağ koset temsilci kümesi T varsa, içeren dönüşüm α ’ya kabul edilebilir denir.

2. 4. Karar Verme Problemleri

Karar verme problemleri, 1911 yılında Alman matematikçi Max Dehn tarafından literatüre kazandırılmıştır. Elemanlar ve gruplar hakkında çeşitli soruları cevaplayan bir algoritmanın (veya metodun) varlığı problemine *karar verme problemleri* denir. Eğer verilen bir problemi çözmek için bir algoritma (veya metot) varsa bu karar verme problemine *çözülebilir*, böyle bir algoritma yoksa o zaman da bu karar verme problemine *çözülemez* denir. Kelime, eşlenik ve izomorfizma problemi olmak üzere aşağıda tanımlanan üç temel karar verme problemi mevcuttur. Bu konu hakkında detaylı bilgilere (Miller, 1992) den ulaşılabilir.

Kelime Problemi: G sonlu sunuşlu bir grup olsun. G nin üreteçleri ile oluşturulan keyfi bir w kelimesinin bu grubun birimine eşit olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığının araştırılması problemidir (bkz. Şekil 2.1).



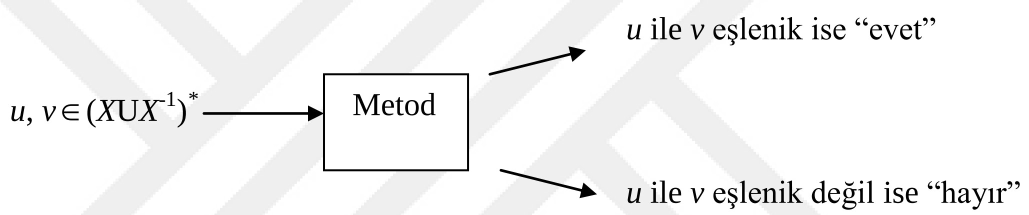
Şekil 2.1

Burada w sembolü ile X üreteç kümesindeki elemanlar ve bunların terslerinden de oluşan bir kelimeyi gösterelim. Eğer w kelimesi grubun birimini veriyorsa cevabımız “evet”, grubun birimini vermiyorsa cevabımız “hayır” dır. Bu şekilde bir metod veya algoritma bulunabilirse bu sonlu sunumlu G grubu için kelime problemi çözülebilirdir denir.

Aşağıda kelime problemi çözülebilir olan bazı grup örnekleri verilmiştir.

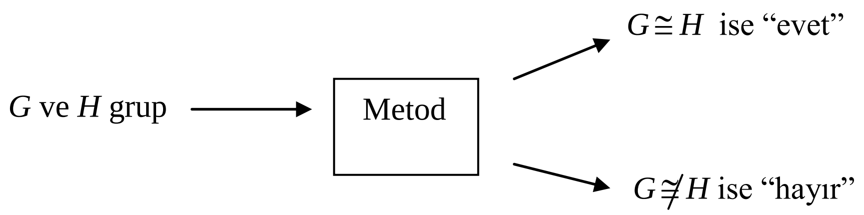
- Sonlu üretilen lineer gruplar,
- Sonlu üretilen metabelian gruplar,
- Sonlu üretilen nilpotent gruplar,
- Polycyclic gruplar,
- Aritmetik gruplar,
- Sonlu sunumlu Hopfian gruplar.

<u>Eşlenik Problemi</u>: G sonlu sunuşlu bir grup olsun. G grubunun üreteçleri ile oluşturulan keyfi u ve v kelimelerinin G nin eşlenik elemanları olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığının araştırılması problemidir (bkz. Şekil 2.2).



Şekil 2.2

<u>İzomorfizma Problemi</u>: Sonlu sunuşa sahip herhangi iki grubun birbirine izomorf olup olmadığına karar veren bir algoritmanın var olup olmaması problemidir (bkz. Şekil 2.3).



Şekil 2.3

Birleştirilmiş grup ve yarı grup teori konusunda çalışan birçok matematikçi, bu problemlerin her birisiyle ayrı ayrı ilgilenip bazılarının yeni uzantılarını (genelleştirilmiş kelime problemi veya üyelik problemi) elde etmişlerdir. Ayrıca gruplar üzerideki *kuvvet* ve *mertebe* problemleri de son yıllarda önem kazanan yapılar arasındadır. Bu problemlerin özellikle kelime ve eşlenik problemleriyle olan ilişkileri literatürde mevcuttur.

Sonlu sunuşlu herhangi bir grup için eşlenik probleminin çözülebilirliği kelime probleminin çözülebilirliğini gerektirmektedir. Ancak bu durumun tersi doğru değildir. Yani kelime problemi çözülebilen fakat eşlenik problemi çözülemeyen grup örnekleri mevcuttur.

2. 5. Pozitif Kelimeler için Yeniden Yazma Sistemi

Matematikte kullanılan eşitlikler kavramı, sembolik cebirde, yüksek program dillerinde, yapay zekada ve birçok alanda kullanılan önemli yapılardır. Yeniden yazma sistemi ise eşitliklerle uğraşmada kullanılan çok güçlü bir metottur. Yönlü eşitlik olarak da adlandırabileceğimiz yeniden yazma sistemi, eşitliklerin tek yönlü olarak, eşitlikler ile yer değiştirmesi sonucu oluşan kurallar bütünüdür. Yeniden yazma sisteminin,

- Pozitif kelime yeniden yazma sistemi
- Terim yeniden yazma sistemi
- Graf yeniden yazma sistemi
- Paralel yeniden yazma sistemi
- Sonsuz yeniden yazma sistemi
- Yüksek mertebe yeniden yazma sistemi

bazı alt dallarıdır. Tezimizin bu alt bölümünde, özellikle monoid ve yarı gruplardaki kelime problemleri için temel bir metot olan pozitif kelime yeniden yazma sistemini ayrıntılı olarak inceleyeceğiz. Bu durumu daha ayrıntılı incelemek için ilk olarak gerekli tanımları verelim. Bu konu hakkında detaylı bilgilere (Book, 1987; Book ve Otto, 1993; Sims, 1994) den ulaşılabilir.

Sonlu bir X alfabesi için, X^* bu alfabedeki harflerden oluşan bütün kelimelerin kümesi ve λ boş kelime olsun. X üzerindeki yeniden yazma kuralı aslında $(l,r)\in X^*\times X^*$ şeklindeki sıralı çiftlerdir. Bu kural $l\to r$ şeklinde gösterilir. Buradaki

l kelimesi sol yan, r kelimesi ise sağ yan diye adlandırılır. Yeniden yazma sistemi X üzerindeki yeniden yazma kurallarının bir kümesidir ve bu sistem R ile gösterilir. X^* kümesindeki kelimeler arasındaki bu bağıntı $(\to r)$ için aşağıdaki kural tanımlanır:

X üzerindeki u ve v *pozitif kelimeler* olmak üzere, $u \to_R v$ olması için gerek ve yeter koşul $x, y \in X^*$ ve $(l, r) \in R$ için $u = xly$ ve $v = xry$ olmasıdır.

2. 5. 1. Tanım (Book ve Otto, 1993): Bir $u \in X^*$ kelimesi için $u \to_R v$ olacak şekilde bir $v \in X^*$ kelimesi varsa bu u kelimesine *indirgenir kelime* denir. Aksi durumda ise (yani $u \to_R v$ olacak biçimde bir v kelimesi yoksa) bu u kelimesine *indirgenemez kelime* denir.

2. 5. 2. Önerme (Book ve Otto, 1993): $\to_R$ bağıntısının yansımalı, geçişmeli kapanışı olan $\to^*_R$ kuralı, aslında R tarafından üretilen bir indirgeme bağıntısıdır.

2. 5. 3. Tanım (Book ve Otto, 1993): $u,v \in X^*$ için eğer $u \to^*_R v$ bağıntısı varsa ve v kelimesi indirgenemez ise, bu v kelimesine u kelimesinin *normal formu* denir.

2. 5. 4. Tanım (Book ve Otto, 1993): Bu $\to_R$ bağıntısının yansımalı, simetrik ve geçişmeli kapanışı, ki bunu $\leftrightarrow^*_R$ ile gösterelim, R tarafından üretilen bir *Thue kongrüans*tır. Bir $w \in X^*$ kelimesi için w nin kongrüans sınıfı $\{u \in X^* \mid u \leftrightarrow^*_R w\}$ olup, bu denklik sınıfı $[w]_R$ ile gösterilir. Ayrıca $X^* / \leftrightarrow^*_R$ bütün kongrüans sınıflarının kümesini gösterir. u ve v kelimelerinin kongrüans sınıflarının çarpımı

$$[u]_R [v]_R = [uv]_R$$

şeklindedir. Bu çarpma işlemi birleşme özelliğini sağlar ve $[\lambda]_R$ birim elemandır. Böylece $X^* / \leftrightarrow^*_R$ bir monoid ve $[X \,;\, R]$ çifti bir *monoid sunuşu*dur. Bu sunuştaki üreteç kümesi X sonlu ise bu monoide sonlu üreteçli monoid, hem X hem de R sonlu ise o zaman bu monoide *sonlu sunumlu monoid* denir.

Bir R yeniden yazma sistemi için kelime problemi, *verilen* u ve v *kelimeleri için* $u \leftrightarrow^*_R v$ *nin sağlanıp-sağlanmamasıdır*. Yani bu iki kelimenin, belli bir kural altında birbirine denk olup olmamasının incelenmesidir. Bunun için öncelikle bazı tanımları verelim.

R yeniden yazma sistemi olsun.

2. 5. 5. Tanım:

I) *R* sistemi için kelimeler arasında

$$u_1 \rightarrow_R u_2 \rightarrow_R u_3 \rightarrow_R \ldots$$

şeklinde sonsuz bir zincir yoksa, bu yeniden yazma sistemine *Noetherian* ya da *sona ermiş* denir.

II) *R* sisteminden alınacak bütün $u, v, w \in X^*$ kelimeleri için

$$u \rightarrow^*_R v \text{ ve } u \rightarrow^*_R w \text{ iken } v \rightarrow^*_R z \text{ ve } w \rightarrow^*_R z$$

olacak şekilde bir $z \in X^*$ kelimesi varsa, bu yeniden yazma sistemine *elmas kuralı* (*confluent*) denir.

2.5.5. Tanım'a ek olarak, verilen bir sistemden yeni özellikler de türetilebilir.

2. 5. 6. Tanım (Book ve Otto, 1993): Hem Noetherian hem de confluent özelliklerini sağlayan yeniden yazma sistemine *tam* (*complete* ya da *convergent*) denir.

2. 5. 7. Teorem (Book ve Otto, 1993): Eğer R yeniden yazma sistemi tam ise, bu sistem içindeki her bir kelime tek bir normal forma sahip olduğundan, bu R yeniden yazma sisteminin *çözülebilir kelime problemine* sahip olduğu belirtilmiştir.

2.5.7. Teorem'in ispatında düşünce tarzımız, verilen sistem tam olduğu için kelimelerin sonlu sayıda adımla başka kelimelere indirgendiği ve indirgenen bu kelimelerin de birbirine eşit olduğu şeklindedir. Eğer indirgenen bu kelimeler birbirine eşit olmasaydı, bu durumda bir kelime farklı iki şekilde ifade edilemeyeceğinden, bu sistem için kelime problemi çözülemez olurdu.

Bir [X ; R] sunuşunun yeniden yazma sisteminin tam olduğunu göstermek için aşağıdaki iki adım uygulanır.

1. Adım: Yeniden yazma sisteminin sona ermiş olduğunu göstermektir. Bunun için X^* daki kelimeler arasında bir takım indirgeme sıralaması olması gerekir (uzunluk, ağırlık, soldan sözlük sıralama, uzunluk ve soldan sözlük sıralaması gibi).

2. Adım: Yeniden yazma sisteminin confluent olduğunu göstermektir. Bunun için ise bütün *kritik çiftlerin* çözülebilmesi gerekir. Buradaki *kritik çift* ile anlatılmak istenen; u, v, w, p ve q kelimeleri X^* da olmak üzere $uv = p$ ve $vw = q$ (v boş kelimeden farklı) bağıntılarından elde edilen $\{pw, uq\}$ kelime çiftleridir. Bu $\{pw, uq\}$ *kritik çiftin çözülebilir olması* demek ise, $pw \rightarrow^*_R z$ ve $uq \rightarrow^*_R z$ olacak şekilde bir $z \in X^*$ kelimesinin elde edilebilir olması demektir.

2. 6. Büyüme Serileri

Herhangi bir alfabede 7 uzunlukludan az kaç tane kelime bulunabilir sorusunu düşünelim. Bu soruyu çok büyük kelimeler ve farklı alfabeler düşünerek kelimelerin uzunluklarının dağılımını geliştirmek mümkündür. Farklı dilleri düşünerek büyümeler karşılaştırılabilir ve kelimelerin dağılımı çalışılarak dil hakkında ne gibi özellikler keşfedilebilir çıkarılabilir. Bu soruyu sonsuz gruplar üzerinde düşündüğümüzde büyüme serileri olarak karşımıza çıkmaktadır. Büyüme serilerinin elde edilmesi üzerinde çalıştığımız yapıların sınıflandırılması açısından önemlidir.

Son yıllarda, birçok yazar tarafından bazı özel gruplar ve grup çarpımları (direkt çarpım, serbest çarpım, birleştirilmiş serbest çarpım, wreath çarpım) için büyüme serileri hesaplanmıştır. Bizim amacımız ise, tezin 3. ve 4. bölümlerinde çapraz ve iki-yanlı çapraz çarpımların büyüme serilerini hesaplamaktır. Bunu yapmak için, bu alt bölümde, büyüme serileri ile ilgili temel tanım ve sonuçları verelim. Bu konu hakkında detaylı bilgiler için (Edjvet ve Johnson, 1992; Harpe, 2000; Grigorchuk ve Harpe, 2001; Mann, 2011) kaynaklarına bakılabilir.

2. 6. 1. Tanım (Scott, 2007): G sonlu sunumlu grup ve $S = \{s_1^{\pm 1}, s_2^{\pm 1}, ..., s_m^{\pm 1}\}$ yarı grup üreteç kümesi olsun. Bir $g \in G$ için, $|g|$ ile g elemanının S üreteç kümesine göre uzunluğunu göstersin ve $|g| = \inf\{k \,|\, g = s_1 s_2 ... s_k,\ s_i \in S,\ i = 1, 2, ..., k\}$ olsun.

$$f(0)=a_0=1 \text{ ve } f(n)=a_n=\#\{g\in G \mid |g|=n,\ n\geq 1\}$$

biçiminde tanımlanan $f:\mathbb{N}\cup\{0\}\to\mathbb{N}$ fonksiyonuna G grubunun büyüme fonksiyonu ve $\beta(G,S;z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ serisine de G grubunun büyüme serisi denir. Burada a_n dizisinin $\beta(G,S;z)$ üreteç fonksiyonu, tam katsayılı formal kuvvet serilerinin $\mathbb{Z}[[z]]$ halkasının bir elemanıdır.

Aşağıda bazı özel gruplar için büyüme serileri verilmiştir. Diğer özel grupların büyüme serileri için (Harpe, 2000; Scott, 2007) kaynaklarından detaylı bilgiler bulunabilir.

- $S=\{1\}$ üreteçli n mertebeli devirli grubun büyüme serisi;

$n=2m$ çift ise; $\beta(\mathbb{Z}_n,S;z)=1+2z+2z^2+...+2z^{m-1}+z^m$

$n=2m+1$ tek ise; $\beta(\mathbb{Z}_n,S;z)=1+2z+2z^2+...+2z^{m-1}+2z^m$ biçimindedir.

- $S_1=\{1\}$ üreteç kümesi ile birlikte sonsuz mertebeli devirli grubun büyüme serisi;

$$\beta(\mathbb{Z},S_1;z)=1+2z+2z^2+...+2z^k+...=1+\sum_{k=1}^{\infty}2z^k=\frac{1+z}{1-z}$$

biçimindedir.

- $S_2=\{2,3\}$ üreteç kümesi ile birlikte sonsuz mertebeli devirli grubun büyüme serisi;

$$\beta(\mathbb{Z},S_2;z)=1+4z+8z^2+6(z^3+z^4+...)=\frac{1+3z+4z^2-2z^3}{1-z}$$

biçimindedir. Gerçekten, 1 uzunluklu 4 kelime, 2 uzunluklu 8 kelime, $k\geq 3$ için 6 ($\pm(3k-2),\ \pm(3k-1)$ ve $\pm 3k$ formunda) kelime vardır (Scott, 2007).

- $S=\{(1,2),(2,3),...,(n-1,n)\}$ üreteç kümesi ile birlikte S_n simetrik grubunun büyüme serisi;

$$\beta(S_n,S;z)=\prod_{i=1}^{n-1}(1+z+z^2+...+z^i)$$

biçimindedir.

- $S=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ve $T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ üreteç elemanları ile birlikte

$H=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\k&1&0\\m&l&1\end{pmatrix}\middle| k,l,m\in\mathbb{Z}\right\}$ Heisenberg grubun büyüme serisi;

$$\beta(H,S,z)=\frac{1+z+4z^2+11z^3+8z^4+21z^5+6z^6+9z^7+z^8}{(1-z)^4(1+z+z^2)(1+z^2)}$$

biçimindedir (Harpe, 2000).

Bunlara ek olarak, literatürde Coxeter grupların, yüzey grupların ve Fuchsian grupların (Floyd ve Plotnik, 1987), Heisenberg ve Nil grupların (Benson, 1983; Shapiro, 1989), hiperbolik grupların (Cannon, 1984; Grigorchuk ve Nagnibeda, 1997) gibi birçok özel grupların büyüme fonksiyonlarının ve büyüme serilerinin hesaplandığı çalışmalar bulunmaktadır.

2. 6. 1. Büyüme Fonksiyonunun Bazı Özellikleri

G grubu n üreteçli ve sonlu bir S kümesi tarafından üretilsin.

1) Uzunluk işlemi simetrik ve alt toplamsaldır:

$\forall\gamma_1,\gamma_2\in G$ için $l_s(\gamma^{-1})=l_s(\gamma)$ ve $l_s(\gamma_1\gamma_2)=l_s(\gamma_1)+l_s(\gamma_2)$.

2) Büyüme fonksiyonu alt çarpımsaldır:

$\beta(G,S;k_1+k_2)\leq\beta(G,S;k_1)+\beta(G,S;k_2)\quad(k_1,k_2\in\mathbb{N})$.

3) Büyüme fonksiyonu n-ranklı serbest grubun büyüme serisi ile üstten sınırlıdır:

$\beta(G,S;k)\leq 2n(2n-1)^{k-1},\quad(k\geq 1)$.

4) G sonsuz bir grup ise, büyüme serisi $\beta(G,S;k)$ kesinlikle artandır.

2. 6. 2. Grup Çarpımları Üzerinde Büyüme Serileri

Büyüme serilerini hesaplamak kimi cebirsel yapılar için kolay iken, kimisini hesaplamak çok fazla zaman kaybına neden olmaktadır ve belli bir algoritma ihtiyacı duyulmaktadır. Bu sebeple büyüme serileri üzerinde, grup çarpımları için kurallar bulunarak bu adımların kısa sürede yapılması ve kolaylaştırılması sağlanmıştır. Aşağıda direkt çarpım, serbest çarpım ve birleştirilmiş serbest çarpım için sonuçlar verilmiştir. Bu çarpımlara ek olarak, wreath (çelenk) çarpımın büyüme serisi için (Johnson, 1991), HNN-genişlemesinin büyüme serisi için (Chiswell, 1994) kaynaklardan detaylı bilgiler alınabilir.

Sırasıyla sonlu S_1 ve S_2 kümeleri tarafından üretilen G_1 ve G_2 gruplarını düşünelim.

I- Direkt Çarpım için Büyüme Serisi

2. 6. 2. Teorem (Scott, 2007): $S=(S_1\times\{1\})\cup(\{1\}\times S_2)$ üreteç kümesi ile üretilen $G=G_1\times G_2$ direkt çarpımın büyüme serisi; $\beta(G,S;z)=\beta(G_1,S_1;z)\,\beta(G_2,S_2;z)$ biçimindedir.

II- Serbest Çarpım için Büyüme Serisi

2. 6. 3. Teorem (Scott, 2007): $S=S_1\cup S_2$ üreteç kümesi ile üretilen $G=G_1*G_2$ serbest çarpımın büyüme serisi; $\beta(G,S;z)=\dfrac{\beta(G_1,S_1;z)\beta(G_2,S_2;z)}{1-(\beta(G_1,S_1;z)-1)(\beta(G_2,S_2;z)-1)}$

biçimindedir.

III- Birleştirilmiş Serbest Çarpım için Büyüme Serisi

2. 6. 4. Teorem (Scott, 2007): $(G_3,S_3)\subset(G_1,S_1)$ ve $(G_3,S_3)\subset(G_2,S_2)$ kabul edilebilir grup olsun. $S=S_1\cup S_2$ üreteç kümesi ile birlikte $G=G_1*_{G_3}G_2$ birleştirilmiş serbest çarpımın büyüme serisi; $\dfrac{1}{\beta(G,S;z)}=\dfrac{1}{\beta(G_1,S_1;z)}+\dfrac{1}{\beta(G_2,S_2;z)}-\dfrac{1}{\beta(G_3,S_3;z)}$

biçimindedir.

C_4 ve C_6 iki devirli grubu düşünerek grup çarpımlarının büyüme serilerini kısa yoldan hesaplayalım.

2. 6. 5. Örnek: $C_4 = \langle x;\ x^4 = 1 \rangle$ ve $C_6 = \langle y;\ y^6 = 1 \rangle$ iki devirli grubun büyüme serileri sırasıyla $\beta_{C_4}(z) = 1 + 3z$ ve $\beta_{C_6}(z) = 1 + 5z$ dir. O halde,

$C_4 \times C_6$ direkt çarpım $\beta_{C_4 \times C_6}(z) = \beta_{C_4}(z)\beta_{C_6}(z) = (1+3z)(1+5z)$,

$C_4 * C_6$ serbest çarpım $\beta_{C_4 * C_6}(z) = \dfrac{\beta_{C_4}(z)\beta_{C_6}(z)}{1-(\beta_{C_4}(z)-1)(\beta_{C_6}(z)-1)} = \dfrac{(1+3z)(1+5z)}{1-15z^2}$,

$C_4 *_{C_2} C_6$ birleştirilmiş serbest çarpım

$$\beta_{C_4 *_{C_2} C_6}(z) = \frac{1}{\beta_{C_4}(z)} + \frac{1}{\beta_{C_6}(z)} - \frac{1}{\beta_{C_2}(z)} = \frac{(1+3z)(1+5z)(1+z)}{1+2z-7z^2}$$

büyüme serilerine sahiptir.

2. 6. 3. Büyüme Serilerinde Denklik

Üzerinde çalışılan cebirsel yapıda üreteç kümelerinin değişmesi, büyüme serilerin de değişmesine sebep olmaktadır. Böylece, büyüme serilerinin üreteç kümesine göre değişiklik göstermesi, büyüme serilerde denklik bağıntıların oluşmasını sağlamıştır. Büyüme serilerinde denklik bağıntısının varlığı ise denklik sınıflarının varlığını düşündürmüştür. Böylece, elde edilen denklik sınıfları kullanılarak büyüme çeşitleri elde edilmiştir. Bu konu hakkında daha detaylı bilgilere (Harpe, 2000; Scott, 2007) kaynaklarından ulaşılabilir.

2. 6. 6. Tanım (Scott, 2007): Her $d \geq 1,\ c \geq 0$ sayıları için büyüme işlemleri arasında $\beta_1(k) \leq d\,\beta_2(ck)$ koşulu sağlanıyor ise β_2 büyüme işlemi β_1 büyüme işleminden daha baskındır denir. Ve $\beta_1 \prec \beta_2$ ile gösterilir. Eğer büyüme işlemleri arasında $\beta_1 \prec \beta_2$ ve $\beta_2 \prec \beta_1$ koşullarının her ikisi de sağlanıyor ise β_1 ve β_2 büyüme işlemleri birbirine denktir denir ve $\beta_1 \approx \beta_2$ ile gösterilir.

2. 6. 7. Önerme (Scott, 2007): G sonlu üreteçli bir grup olsun. Eğer G grubu, hem S hemde T kümeleri tarafından üretiliyor ise, bu üreteçler kümesi ile elde edilen büyüme işlemleri denktir. Yani; $\beta(G,S;k) \approx \beta(G,T;k)$ dir. Bu büyüme işlemlerinin denklik sınıfları ise $[\beta(G;k)]$ biçiminde gösterilip, bu denklik sınıfları üreteç kümesine değil gruba bağlıdır.

2. 6. 8. Tanım (Scott, 2007): Sonlu S kümesi ile üretilen G grubunun büyüme serisi $\beta(G,S;k)$ verilmiş olsun. $w(G,S) = \lim_{k\to\infty} \sup \sqrt[k]{\beta(G,S;k)}$ değerine (G,S)'nin *parçasal büyüme oranı* denir.

2. 6. 9. Tanım (Scott, 2007): Sonlu üreteçli sonsuz G grubunun büyüme işlemlerinin denklik sınıflarına G grubunun *büyüme çeşidi* denir. Bütün sonlu gruplar aynı büyüme çeşidine sahiptir. Her G grubu için büyüme çeşidi grubun herhangi bir üreteç kümesinden farklı ve bağımsızdır.

Parçasal, polinom ve orta seviyeli büyüme olmak üzere 3 farklı büyüme çeşidi vardır. Bu büyüme çeşitlerinin tanımları, büyüme serisi ve parçasal büyüme oranı kullanılarak aşağıda verildiği gibi iki farklı biçimde tanımlanabilir.

2. 6. 10. Tanım (Scott, 2007): Sonlu S kümesi tarafından üretilen G grubu ve büyüme işlemi $\beta(G,S;k)$ verilmiş olsun. G grubuna,

i) Eğer $w(G,S) > 1$ ise *parçasal (exponential) büyüme,*

ii) $w(G,S) = 1$ ise *alt-parçasal (subexponential) büyüme,*

iii) Her $d \geq 0$ için, $\beta(G,S;k) \prec k^d$ ise *polinom (polynomial) büyüme* denir.

iv) Alt-parçasal büyüme ve polinom büyüme değil ise *orta seviyeli (intermediate) büyüme* denir.

2. 6. 11. Tanım (Scott, 2007): Sonlu S kümesi tarafından üretilen G grubu ve büyüme işlemi $\beta(G,S;k)$ verilmiş olsun. Eğer $\beta(G,S;k)$ büyüme işlemi üzerinde,

i) $\exists\, c > 0$ ve $v > 1$ için $\beta(G,S;k) > cv^k$ şartı sağlanıyor ise G grubuna *parçasal (exponential) büyüme,*

ii) $\exists\, c > 0$ ve $d \geq 1$ için $\beta(G,S;k) \leq ck^d$ şartı sağlanıyor ise G grubuna *polinom (polynomial) büyüme,*

iii) G grubu parçasal ve polinom büyümeye sahip değilse, G grubuna *orta seviyeli (intermediate) büyüme* denir.

3. ÇAPRAZ (CROSSED) ÇARPIM

A. L. Agore, 2008 yılında G. Militaru ile, 2010 yılında D. Fratila ile birlikte çapraz çarpımı gruplar üzerinde çalışmış ve bu çarpımın grup olduğunu ispatlamışlardır. Ayrıca bileşenleri devirli gruplar alarak bu grupların çapraz çarpımlarının sunuşlarını elde etmişlerdir. Tezin bu bölümünde, devirli gruplar için elde edilen çapraz çarpımların sunuşları kullanılarak her bir yapının yeniden yazma sistemi oluşturulacaktır. Daha sonra bu yapıların, elemanlarının normal formunun yapısı belirlenip kelime probleminin çözülebilir olduğu gösterilecektir. Son olarak ise, elde edilen normal formlar kullanılarak her bir yapı için büyüme serileri hesaplanacaktır.

Bu bölümün 3.3. ve 3.4. Alt Bölümlerinde elde edilen sonuçlar (Karpuz ve Çetinalp, 2016) çalışmasında "Growth Series of Crossed and Two-Sided Crossed Products of Cyclic Groups" başlığı altında toplanmıştır.

3. 1. Normal Çapraz Çarpım

3. 1. 1. Tanım (Agore, 2008): H ve G iki grup olmak üzere, herhangi $g, g_1, g_{2,} g_3 \in G$ ve $h \in H$ için $\alpha : G \to Aut(H),\ g \mapsto g \triangleright_\alpha h$ ve $f : G \times G \to H$ dönüşümleri

$$g_1 \triangleright_\alpha (g_2 \triangleright_\alpha h) = f(g_1, g_2)(g_1 g_2 \triangleright_\alpha h) f(g_1, g_2)^{-1} \tag{3.1}$$

$$f(g_1, g_2) f(g_1 g_2, g_3) = (g_1 \triangleright_\alpha f(g_2, g_3)) f(g_1, g_2 g_3) \tag{3.2}$$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda H ve G gruplarının çapraz (crossed) sistemi (H, G, α, f) biçimindeki bir sıralı dörtlüdür.

Eğer $\forall g \in G$ için $f(1,1) = f(1, g) = f(g,1) = 1$ ise, (H, G, α, f) çapraz sistemi *normal (normalized) çapraz sistem* olarak adlandırılır. (H, G, α, f) çapraz sistemi ile birlikte H ve G 'nin çapraz çarpımı $H \#_\alpha^f G$ ile gösterilip

$$(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1.(g_1 \triangleright_\alpha h_2) f(g_1, g_2), g_1 g_2) \tag{3.3}$$

çarpımı ile tanımlanan $H \times G$ kümesidir.

Çapraz çarpımın cebirsel özellikleri ile ilgili önemli bir sonuç aşağıda verilmiştir. Bu sonucun detaylı ispatı (Agore, 2008) makalesinde bulunabilir.

3. 1. 2. Teorem (Agore, 2008): (H, G, α, f) normal çapraz sistemi verilmiş olsun. $\forall h \in H$ ve $g \in G$ için (3.3) ile verilen çarpım altında $H \#_{\alpha}^{f} G$, birimi $(1,1)$ ve ters elemanı $(h, g)^{-1} = (f(g^{-1}, g)^{-1} g^{-1} \triangleleft_{\alpha} h^{-1}, g^{-1})$ olan bir grup oluşturur.

İki grubun çapraz çarpımının α ve f 'nin aldığı değerlere göre elde edilen sonuçlar aşağıda verilmiştir.

3. 1. 3. Sonuç (Agore, 2008): H ve G herhangi iki grup ve α ve f aşikar dönüşümler olsun. O halde çapraz çarpım $H \#_{\alpha}^{f} G$, H ile G 'nin direkt çarpımıdır.

3. 1. 4. Sonuç (Agore, 2008): H ve G herhangi iki grup ve f aşikar dönüşüm olsun. O halde çapraz çarpım $H \#_{\alpha}^{f} G$, H ile G 'nin yarı direkt çarpımıdır.

3. 1. 5. Sonuç (Agore, 2008): H ve G herhangi iki grup ve α aşikar dönüşüm olsun. Eğer herhangi $g_1, g_2, g_3 \in G$ için,

$$\operatorname{Im}(f) \subseteq Z(H) \text{ ve } f(g_1, g_2) f(g_1 g_2, g_3) = f(g_2, g_3) f(g_1, g_2 g_3)$$

koşulları sağlanıyor ise çapraz çarpım $H \#_{\alpha}^{f} G$, H ile G 'nin twisted çarpımıdır. $\forall h_1, h_2 \in H$ ve $g_1, g_2 \in G$ için twisted çarpım $(h_1, g_1)(h_2, g_2) = (h_1 h_2 f(g_1, g_2), g_1 g_2)$

çarpımı ile grup tanımlamaktadır.

3. 2. Devirli Grupların Çapraz Çarpımının Sunuşları

Tezin bu alt bölümünde, sonlu ve sonsuz devirli gruplar kullanılarak (Agore, 2010) çalışmasında bulunan $C_n \#_{\alpha}^{f} C_m$, $C_n \#_{\alpha}^{f} C_g$, $C_g \#_{\alpha}^{f} C_n$ ve $C_{g_1} \#_{\alpha}^{f} C_{g_2}$ çapraz çarpımlarının sunuşları verilecektir. Bu sunuşlar ile ilgili detaylı bilgi (Agore, 2008) ve (Agore, 2010) makalelerinde bulunabilir.

$C_n = \langle a\,;\, a^n = 1 \rangle$ ve $C_m = \langle b\,;\, b^m = 1 \rangle$ sonlu devirli grup sunuşları ve $C_g = \langle g\,;\ \rangle$ sonsuz devirli grup sunuşu olsun.

3. 2. 1. Teorem (Agore, 2010): $C_n \#_{\alpha}^{f} C_m$ tipindeki devirli iki grubun çapraz çarpımının sunuşu

$$C_n \#_{\alpha}^{f} C_m = \left\langle a, b\,;\, a^n = 1,\ b^m = a^i,\ b^{-1}ab = a^j \right\rangle \tag{3.4}$$

biçimindedir. Burada $i, j \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$, $i.(j-1) \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$ ve $j^m \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$ dir.

3. 1. 2. Teorem (Agore, 2010): $C_n \#_{\alpha}^{f} C_g$ tipindeki devirli iki grubun çapraz çarpımının sunuşu

$$C_n \#_{\alpha}^{f} C_g = \left\langle a, g\,;\, a^n = 1,\ g^{-1}ag = a^t \right\rangle \tag{3.5}$$

biçimindedir. Burada $(t, n) = 1$ ve $t \in \mathbb{Z}$ dir.

3. 1. 3. Teorem (Agore, 2010): $C_g \#_{\alpha}^{f} C_n$ tipindeki devirli iki grubun çapraz çarpımının sunuşu

$$C_g \#_{\alpha}^{f} C_n = \left\langle g, h\,;\, gh = hg,\ h^n = g^t \right\rangle \tag{3.6}$$

biçimindedir. Burada $t \in \mathbb{Z}$ dir.

3. 1. 4. Teorem (Agore, 2010): $C_{g_1} \#_{\alpha}^{f} C_{g_2}$ tipindeki devirli iki grubun çapraz çarpımının sunuşu

$$C_{g_1} \#_{\alpha}^{f} C_{g_2} = \left\langle g_1, g_2 ;\, g_1 g_2 = g_2 g_1 \right\rangle \tag{3.7}$$

biçimindedir.

3. 3. Devirli Grupların Çapraz Çarpımının Yeniden Yazma Sistemi

Verilen bir $[X; R]$ monoid sunuşunun kelime probleminin çözülebilir olması için yeniden yazma sisteminin tam olduğunun gösterilmesi gerekmektedir. Bunun için de iki adım uygulanır. Bunlardan ilki bu sistemin sona ermiş (Noetherian) olduğunu göstermektir. İkinci adım ise bu yeniden yazma sisteminin confluent olduğunu göstermektir. Bu iki adımı uygulayarak devirli grupların çapraz çarpımlarının monoid sunuşlarının tam olduğu gösterilecektir.

Bu alt bölümde, yeniden yazma kuralları elde edilirken kelimeler ilk önce uzunluklarına göre karşılaştırılsın. Yani, uzunluğu büyük olan kelime diğerinden daha büyüktür. Kelimelerin uzunluklarının eşit olması durumunda ise, grubun monoid sunuşunun üreteç elemanları arasında oluşturulan sıralama dikkate alınır. Ayrıca, (i) ve (j) yeniden yazma kurallarındaki bağıntıları göstermek üzere, bu bağıntıların kesişerek çakışan kelimeleri $(i)\cap(j)$ notasyonu ile, içererek çakışan kelimeleri ise $(i)\cup(j)$ notasyonu ile gösterilsin.

3. 3. 1. $C_n \#_\alpha^f C_m$ Tipindeki Devirli İki Grubun Çapraz Çarpımı

(3.4) sunuşu ile verilen $C_n \#_\alpha^f C_m$ tipindeki devirli iki grubun çapraz çarpımının monoid sunuşu

$$\left\langle a,b,a^{-1},b^{-1} \,;\, a^n=1,\ b^m=a^i,\ b^{-1}ab=a^j,\ aa^{-1}=1,\ a^{-1}a=1,\ bb^{-1}=1,\ b^{-1}b=1 \right\rangle \quad (3.8)$$

biçimindedir. Yeniden yazma kurallarını oluşturmak için üreteçler arasında $a > a^{-1} > b > b^{-1}$ biçiminde bir sıralama seçelim. Bu sıralama kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç elde edilir.

3. 3. 1. Teorem: $C_n \#_\alpha^f C_m$ tipindeki devirli iki grubun çapraz çarpımının (3.8) ile verilen monoid sunuşunun tam yeniden yazma sistemi aşağıdaki bağıntılardan oluşmaktadır.

1. Durum : $n \le m$ olsun.

- $j=1$ ve $0 \le i \le n-1$ için,

1) $a^n \to 1$, 2) $b^m \to a^i$, 3) $ab \to ba$, 4) $aa^{-1} \to 1$, 5) $a^{-1}a \to 1$, 6) $bb^{-1} \to 1$, 7) $b^{-1}b \to 1$.

- $2 \le j \le n-1$ ve $0 \le i \le n-1$ için,

1) $a^n \to 1$, 2) $b^m \to a^i$, 3) $ba^j \to ab$, 4) $aa^{-1} \to 1$, 5) $a^{-1}a \to 1$,
6) $bb^{-1} \to 1$, 7) $b^{-1}b \to 1$, 8) $a^ib \to ba^i$.

2. Durum : $m < n$ olsun.

- $j=1$ ve $0 \le i \le m-1$ için,

1) $a^n \to 1$, 2) $b^m \to a^i$, 3) $ab \to ba$, 4) $aa^{-1} \to 1$, 5) $a^{-1}a \to 1$, 6) $bb^{-1} \to 1$, 7) $b^{-1}b \to 1$.

- $j = 1$ ve $m \le i \le n-1$ için,

1) $a^n \to 1$, 2) $a^i \to b^m$, 3) $ab \to ba$, 4) $aa^{-1} \to 1$, 5) $a^{-1}a \to 1$, 6) $bb^{-1} \to 1$, 7) $b^{-1}b \to 1$.

- $2 \le j \le n-1$ ve $0 \le i \le m-1$ için,

1) $a^n \to 1$, 2) $b^m \to a^i$, 3) $ba^j \to ab$, 4) $aa^{-1} \to 1$, 5) $a^{-1}a \to 1$, 6) $bb^{-1} \to 1$, 7) $b^{-1}b \to 1$.

- $2 \le j \le n-1$ ve $m \le i \le n-1$ için,

1) $a^n \to 1$, 2) $a^i \to b^m$, 3) $ba^j \to ab$, 4) $aa^{-1} \to 1$, 5) $a^{-1}a \to 1$,
6) $bb^{-1} \to 1$, 7) $b^{-1}b \to 1$, 8) $ab^m \to b^m a$.

İspat: Yeniden yazma kurallarındaki üreteçler arasında $a > a^{-1} > b > b^{-1}$ biçiminde bir sıralama olduğundan, kelimelerin aynı indirgendiği kelimeleri sonlu sayıda adımla elde ederiz. Böylece, sistemin tam olması için ilk şart olan Noetherian özelliği her iki durum için sağlanmış olur. Şimdi confluent özelliğinin sağlandığını göstermek için yeniden yazma kurallarının sol yanlarına bakalım ve çakışan bütün kelimeleri ele alalım.

- 1. durumda $j = 1$ ve $0 \le i \le n-1$ ile 2. durumda $j = 1$ ve $0 \le i \le m-1$ için, yeniden yazma kurallarının bütün çakışan kelimeleri ve kritik çiftleri;

$(1) \cap (1):\ a^{n+1}, (a, a)$

$(1) \cap (3):\ a^n b, (a^{n-1}ba, b)$

$(1) \cap (4):\ a^n a^{-1}, (a^{n-1}, a^{-1})$

$(2) \cap (2):\ b^{m+1}, (a^i b, ba^i)$

$(2) \cap (6):\ b^m b^{-1}, (a^i b^{-1}, b^{m-1})$

$(3) \cap (2):\ ab^m, (bab^{m-1}, aa^i)$

$(3) \cap (6):\ abb^{-1}, (bab^{-1}, a)$

$(4) \cap (5):\ aa^{-1}a, (a, a)$

$(5) \cap (1):\ a^{-1}a^n, (a^{n-1}, a^{-1})$

$(5) \cap (3):\ a^{-1}ab, (a^{-1}ba, b)$

$(5) \cap (4):\ a^{-1}aa^{-1}, (a^{-1}, a^{-1})$

$(6) \cap (7):\ bb^{-1}b, (b, b)$

$(7) \cap (2):\ b^{-1}b^m, (b^{m-1}, b^{-1}a^i)$

$(7) \cap (6):\ b^{-1}bb^{-1}, (b^{-1}, b^{-1})$

biçimindedir. Yukarıdaki bütün kritik çiftler çakışan kelimeye bağlı olarak sonlu adımda aynı kelimeye indirgendiğinden çözülebilirdir. Bunlardan biri örnek olarak aşağıda gösterilmiştir.

$$(3)\cap(2):\ ab^m,\ (bab^{m-1}, aa^i)$$

$$ab^m \to \begin{cases} bab^{m-1} \to b^2ab^{m-2} \to b^m a \to a^i a \to a^{i+1} \\ aa^i \to a^{i+1} \end{cases}$$

- 1. durumda $2 \le j \le n-1$ ve $0 \le i \le n-1$ ile 2. durumda $2 \le j \le n-1$ ve $0 \le i \le m-1$ için, yeniden yazma kurallarının bütün çakışan kelimeleri ve kritik çiftleri;

$(1)\cap(1):\ a^{n+1}, (a,a)$

$(1)\cap(4):\ a^n a^{-1}, (a^{n-1}, a^{-1})$

$(1)\cap(8):\ a^n b, (a^{n-i}ba^i, b)$

$(2)\cap(2):\ b^{m+1}, (a^i b, ba^i)$

$(2)\cap(3):\ b^m a^j, (a^i a^j, b^{m-1}ab)$

$(2)\cap(6):\ b^m b^{-1}, (a^i b^{-1}, b^{m-1})$

$(3)\cap(1):\ ba^n, (aba^{n-j}, b)$

$(3)\cap(4):\ ba^j a^{-1}, (ba^{j-1}, aba^{-1})$

$(3)\cap(8):\ ba^j b, (ba^{j-i}ba^i, ab^2)\ \ (j \ge i)$

$(3)\cap(8):\ ba^i b, (aba^{i-j}b, b^2a^i)\ \ (i > j)$

$(4)\cap(5):\ aa^{-1}a, (a,a)$

$(5)\cap(1):\ a^{-1}a^n, (a^{n-1}, a^{-1})$

$(5)\cap(4):\ a^{-1}aa^{-1}, (a^{-1}, a^{-1})$

$(5)\cap(8):\ a^{-1}a^i b, (a^{i-1}b, a^{-1}ba^i)$

$(6)\cap(7):\ bb^{-1}b, (b,b)$

$(7)\cap(2):\ b^{-1}b^m, (b^{m-1}, b^{-1}a^i)$

$(7)\cap(3):\ b^{-1}ba^j, (a^j, b^{-1}ab)$

$(7)\cap(6):\ b^{-1}bb^{-1}, (b^{-1}, b^{-1})$

$(8)\cap(2):\ a^i b^m, (ba^i b^{m-1}, a^i a^i)$

$(8)\cap(3):\ a^i ba^j, (ba^i a^j, a^i ab)$

$(8)\cap(6):\ a^i bb^{-1}, (ba^i b^{-1}, a^i)$

biçimindedir. Yukarıdaki bütün kritik çiftler sonlu adımda çözülebilirdir. Bunlardan ikisi örnek olarak aşağıda gösterilmiştir.

$(3)\cap(8):\ ba^{j}b\,(j\geq i),\ (ba^{j-i}ba^{i}, ab^{2}),$

$$ba^{j}b\to\begin{cases} ba^{j-i}ba^{i}\to ba^{j}a^{-i}ba^{i}\to aba^{-i}ba^{i}\to a^{-i}ba^{i}\to ba^{i}\\ ab^{2}\to b\to a^{i}b\to ba^{i}\end{cases}$$

$(3)\cap(8):\ ba^{i}b\,(i>j),\ (aba^{i-j}b, b^{2}a^{i}),$

$$ba^{i}b\to\begin{cases} aba^{i-j}b\to aba^{i}a^{-j}b\to aba^{-j}a^{i}b\to aba^{-j}ba^{i}\to ab\\ b^{2}a^{i}\to ba^{j}\to ab\end{cases}$$

- 2. durumda $j=1$ ve $m\leq i\leq n-1$ için, yeniden yazma kurallarının bütün çakışan kelimeleri ve kritik çiftleri;

$(1)\cap(1):\ a^{n+1}, (a,a)$ $(1)\cap(2):\ a^{n}, (a^{n-i}b^{m},1)$

$(1)\cap(3):\ a^{n}b, (a^{n-1}ba,b)$ $(1)\cap(4):\ a^{n}a^{-1}, (a^{n-1},a^{-1})$

$(2)\cup(1):\ a^{n}, (b^{m}a^{n-i},1)$ $(2)\cap(2):\ a^{i+1}, (ab^{m},b^{m}a)$

$(2)\cap(3):\ a^{i}b, (b^{m}b,a^{i-1}ba)$ $(2)\cap(4):\ a^{i}a^{-1}, (a^{i-1},b^{m}a^{-1})$

$(3)\cap(6):\ abb^{-1}, (bab^{-1},a)$ $(4)\cap(5):\ aa^{-1}a, (a,a)$

$(5)\cap(1):\ a^{-1}a^{n}, (a^{n-1},a^{-1})$ $(5)\cap(2):\ a^{-1}a^{i}, (a^{i-1},a^{-1}b^{m})$

$(5)\cap(3):\ a^{-1}ab, (a^{-1}ba,b)$ $(5)\cap(4):\ a^{-1}aa^{-1}, (a^{-1},a^{-1})$

$(6)\cap(7):\ bb^{-1}b, (b,b)$ $(7)\cap(6):\ b^{-1}bb^{-1}, (b^{-1},b^{-1})$

biçimindedir. Yukarıdaki bütün kritik çiftler çakışan kelimeye bağlı olarak sonlu adımda aynı kelimeye indirgendiğinden çözülebilirdir.

- 2. durumda $2\leq j\leq n-1$ ve $m\leq \text{i}\leq \text{n-1}$ için, yeniden yazma kurallarının bütün çakışan kelimeleri ve kritik çiftleri;

$(1)\cap(1):\ a^{n+1}, (a,a)$ $(1)\cup(2):\ a^{n}, (a^{n-i}b^{m},1)$

$(1)\cap(4):\ a^{n}a^{-1}, (a^{n-1},a^{-1})$ $(1)\cap(8):\ a^{n}b^{m}, (a^{n-1}b^{m}a,b^{m})$

$(2)\cup(1):\ a^n, (b^m a^{n-i},1)$ $(2)\cap(2):\ a^{i+1}, (ab^m, b^m a)$

$(2)\cap(4):\ a^i a^{-1}, (a^{i-1}, b^m a^{-1})$ $(2)\cap(8):\ a^i b^m, (a^{i-1}b^m a, b^m b^m)$

$(3)\cap(1):\ ba^n, (aba^{n-j}, b)$ $(3)\cap(2):\ ba^j, (ba^{j-i}b^m, ab)\ (j>i)$

$(3)\cap(2):\ ba^i, (aba^{i-j}, bb^m)\ (i>j)$ $(3)\cap(4):\ ba^j a^{-1}, (aba^{-1}, ba^{j-1})$

$(3)\cap(8):\ ba^j b^m, (ba^{j-1}b^m a, abb^m)$ $(4)\cap(5):\ aa^{-1}a, (a,a)$

$(5)\cap(1):\ a^{-1}a^n, (a^{n-1}, a^{-1})$ $(5)\cap(2):\ a^{-1}a^i, (a^{i-1}, a^{-1}b^m)$

$(5)\cap(4):\ a^{-1}aa^{-1}, (a^{-1}, a^{-1})$ $(5)\cap(8):\ a^{-1}ab^m, (a^{-1}b^m a, b^m)$

$(6)\cap(7):\ bb^{-1}b, (b,b)$ $(7)\cap(3):\ b^{-1}ba^j, (b^{-1}ab, a^j)$

$(7)\cap(6):\ b^{-1}bb^{-1}, (b^{-1}, b^{-1})$ $(8)\cap(3):\ ab^m a^j, (b^m aa^j, ab^{m-1}ab)$

$(8)\cap(6):\ ab^m b^{-1}, (b^m ab^{-1}, ab^{m-1})$

biçimindedir. Yukarıdaki bütün kritik çiftler çakışan kelimeye bağlı olarak sonlu adımda aynı kelimeye indirgendiğinden çözülebilirdir. Bu çakışan kelimelerden biri örnek olarak aşağıda gösterilmiştir.

$$(8)\cap(3):\ ab^m a^j,\ (b^m aa^j, ab^{m-1}ab),$$
$$ab^m a^j \to \begin{cases} b^m aa^j \to b^m a^{j+1} \to a^{n-1}b^m a^{j+1} \to b^m a^{n-1}a^{j+1} \to b^{m-1}ab \\ ab^{m-1}ab \to a^{-1}ab^{m-1}ab \to b^{m-1}ab \end{cases}$$

$C_n \#_\alpha^f C_m$ tipindeki sonlu iki devirli grubun çapraz çarpımının yeniden yazma sistemi Noetherian ve confluent olduğundan tamdır. ■

3. 3. 1. Teorem'de belirtilen durum ve koşullar altında $C_n \#_\alpha^f C_m$ tipindeki sonlu iki devirli grubun çapraz çarpımının elemanlarının normal formu ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

3. 3. 2. Sonuç: $u \in C_n \#_\alpha^f C_m$ kelimesinin normal formu $C(u)$ aşağıdaki forma sahiptir.

1.Durum: $n \leq m$ olsun. Bu durumda

- $j=1$ ve $0 \leq i \leq n-1$ için, $C(u)=b^k a^l$ $(0 \leq k \leq m-1,\ 0 \leq l \leq n-1)$ dir.
- $2 \leq j \leq n-1$ ve $0 \leq i \leq \mathrm{n}-1$ için,

$C(u)=a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \ldots a^{k_s} b^{l_s}$ $(0 \leq k_\varepsilon \leq n-1\ (1 \leq \varepsilon \leq s),\ 0 \leq l_\delta \leq m-1 (1 \leq \delta \leq s),\ s \in \mathbb{N})$ dir.

2. Durum: $m < n$ olsun. Bu durumda

- $j=1$ ve $0 \leq i \leq m-1$ için, $C(u)=b^k a^l$ $(0 \leq k \leq m-1,\ 0 \leq l \leq n-1)$ dir.
- $j=1$ ve $m \leq i \leq n-1$ için, $C(u)=b^k a^l$ $(k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq l \leq i-1)$ dir.
- $2 \leq j \leq n-1$ ve $0 \leq i \leq m-1$ için,

$C(u)=a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \ldots a^{k_s} b^{l_s}$ $(0 \leq k_\varepsilon \leq n-1 (1 \leq \varepsilon \leq s),\ 0 \leq l_\delta \leq m-1 (1 \leq \delta \leq s),\ s \in \mathbb{N})$ dir.

- $2 \leq j \leq n-1$ ve $m \leq i \leq n-1$ için, $C(u)=b^{k_1} a^{l_1} b^{k_2} a^{l_2} \ldots b^{k_s} a^{l_s}$

$(k_1 \in \mathbb{Z},\ 0 \leq k_\varepsilon \leq m-1(\ 2 \leq \varepsilon \leq s),\ 0 \leq l_\delta \leq j-1\ (1 \leq \delta \leq s),\ s \in \mathbb{N})$ dir.

3. 3. 2. $C_n \#_\alpha^f C_g$ Tipindeki Devirli İki Grubun Çapraz Çarpımı

(3.5) ile verilen $C_n \#_\alpha^f C_g$ tipindeki devirli iki grubun çapraz çarpımının monoid sunuşu

$$\left\langle a, g, a^{-1}, g^{-1}\ ;\ a^n=1,\ g^{-1} a g=a^t,\ a a^{-1}=1,\ a^{-1} a=1,\ g g^{-1}=1,\ g^{-1} g=1\right\rangle \tag{3.9}$$

biçimindedir. Yeniden yazma kurallarındaki üreteçler arasında $g > g^{-1} > a > a^{-1}$ biçiminde bir sıralama seçelim. Bu sıralama kullanılarak bu bölümün aşağıdaki bir diğer önemli sonucu elde edilir.

3. 3. 3. Teorem: $C_n \#_\alpha^f C_g$ tipindeki devirli iki grubun çapraz çarpımının (3.9) ile verilen monoid sunuşunun tam yeniden yazma sistemi

1) $a^n \rightarrow 1$, 2) $g a^t \rightarrow a g$, 3) $a a^{-1} \rightarrow 1$, 4) $a^{-1} a \rightarrow 1$, 5) $g g^{-1} \rightarrow 1$, 6) $g^{-1} g \rightarrow 1$

bağıntılarından oluşmaktadır. Burada $(t, n)=1$ ve $t \in \mathbb{Z}$ dir.

İspat: Yeniden yazma kurallarındaki üreteçler arasında $g > g^{-1} > a > a^{-1}$ biçiminde bir sıralama olduğundan, çakışan kelimelerin indirgendiği kelimeleri sonlu sayıda adımla elde ederiz. Böylece, yeniden yazma sistemi Noetherian özelliğini sağlamış olur. Yeniden yazma kurallarının bütün çakışan kelimeleri ve kritik çiftleri;

$(1)\cap(1):\ a^{n+1},(a,a)$ $(1)\cap(3):\ a^{n}a^{-1},(a^{n-1},a^{-1})$

$(2)\cap(1):\ ga^{n},(aga^{n-t},g)$ $(2)\cap(3):\ ga^{t}a^{-1},(aga^{-1},ga^{t-1})$

$(3)\cap(4):\ aa^{-1}a,(a,a)$ $(4)\cap(1):\ a^{-1}a^{n},(a^{n-1},a^{-1})$

$(4)\cap(3):\ a^{-1}aa^{-1},(a^{-1},a^{-1})$ $(5)\cap(6):\ gg^{-1}g,(g,g)$

$(6)\cap(2):\ g^{-1}ga^{t},(g^{-1}ag,a^{t})$ $(6)\cap(5):\ g^{-1}gg^{-1},(g^{-1},g^{-1})$

biçimindedir. Bütün kritik çiftler çakışan kelimeye bağlı olarak sonlu adımda aynı kelimeye indirgendiğinden confluent özelliği sağlanmaktadır. Dolayısıyla $C_n \#_{\alpha}^{f} C_g$ tipindeki iki devirli grubun çapraz çarpımının yeniden yazma sistemi Noetherian ve confluent olduğundan tamdır.■

3. 3. 3. Teorem'de belirtilen koşullar altında $C_n \#_{\alpha}^{f} C_g$ tipindeki iki devirli grubun çapraz çarpımının elemanlarının normal formu ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

3. 3. 4. Sonuç: $u \in C_n \#_{\alpha}^{f} C_g$ kelimesinin normal formu $C(u)$

$$C(u) = a^{k_1} g^{l_1} a^{k_2} g^{l_2} \dots a^{k_s} g^{l_s}$$

biçimindedir. Burada $0 \le k_1 \le n-1,\ 0 \le k_{\varepsilon} \le t-1 (2 \le \varepsilon \le s),\ l_{\delta} \in \mathbb{Z} (1 \le \delta \le s)$ dir.

3. 3. 3. $C_g \#_{\alpha}^{f} C_n$ Tipindeki İki Devirli Grubun Çapraz Çarpımı

(3.6) ile verilen $C_g \#_{\alpha}^{f} C_n$ tipindeki devirli iki grubun çapraz çarpımının monoid sunuşu

$$\left\langle g,h,g^{-1},h^{-1} ; gh = hg,\ h^{n} = g^{t},\ gg^{-1} = 1,\ g^{-1}g = 1,\ hh^{-1} = 1,\ h^{-1}h = 1 \right\rangle \qquad (3.10)$$

biçimindedir. Yeniden yazma kurallarındaki üreteçler arasında $g > g^{-1} > h > h^{-1}$ biçiminde bir sıralama seçelim. Bu sıralama kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç elde edilir.

3. 3. 5. Teorem: $C_g \#_{\alpha}^{f} C_n$ tipindeki devirli iki grubun çapraz çarpımının (3.10) ile verilen monoid sunuşunun tam yeniden yazma sistemi aşağıdaki bağıntılardan oluşmaktadır.

- $1 \le t < n$ için,

1) $gh \to hg$, 2) $h^n \to g^t$, 3) $gg^{-1} \to 1$, 4) $g^{-1}g \to 1$, 5) $hh^{-1} \to 1$, 6) $h^{-1}h \to 1$.

- $t \ge n$ için,

1) $gh \to hg$, 2) $g^t \to h^n$, 3) $gg^{-1} \to 1$, 4) $g^{-1}g \to 1$, 5) $hh^{-1} \to 1$, 6) $h^{-1}h \to 1$.

İspat: Yeniden yazma kurallarındaki üreteçler arasında $g > g^{-1} > h > h^{-1}$ biçiminde bir sıralama olduğundan, çakışan kelimelerin indirgendiği kelimeleri sonlu sayıda adımla elde ederiz. Böylece, yeniden yazma sistemi Noetherian özelliğini sağlamış olur. Sistemin confluent özelliğini sağladığını göstermek için t ile n sayısının değerlerine göre çakışan bütün kelimeleri ele alalım.

- $1 \le t < n$ için yeniden yazma kurallarının bütün çakışan kelimeleri ve kritik çiftleri;

$(1)\cap(2)$: $gh^n, (hgh^{n-1}, gg^t)$

$(1)\cap(5)$: $ghh^{-1}, (hgh^{-1}, g)$

$(2)\cap(2)$: $h^{n+1}, (g^t h, hg^t)$

$(2)\cap(5)$: $h^n h^{-1}, (g^t h^{-1}, h^{n-1})$

$(3)\cap(4)$: $gg^{-1}g, (g, g)$

$(4)\cap(1)$: $g^{-1}gh, (g^{-1}hg, h)$

$(4)\cap(3)$: $g^{-1}gg^{-1}, (g^{-1}, g^{-1})$

$(5)\cap(6)$: $hh^{-1}h, (h, h)$

$(6)\cap(2)$: $h^{-1}h^n, (h^{n-1}, h^{-1}g^t)$

$(6)\cap(5)$: $h^{-1}hh^{-1}, (h^{-1}, h^{-1})$

- $t \ge n$ için yeniden yazma kurallarının bütün çakışan kelimeleri ve kritik çiftleri;

$(1)\cap(5)$: $ghh^{-1}, (hgh^{-1}, g)$

$(2)\cap(1)$: $g^t h, (g^{t-1}hg, h^n h)$

$(2)\cap(2)$: $g^{t+1}, (h^n g, gh^n)$

$(2)\cap(3)$: $g^t g^{-1}, (g^{t-1}, h^n g^{-1})$

$(3)\cap(4)$: $gg^{-1}g, (g, g)$

$(4)\cap(1)$: $g^{-1}gh, (g^{-1}hg, h)$

$(4)\cap(2)$: $g^{-1}g^t, (g^{t-1}, g^{-1}h^n)$

$(4)\cap(3)$: $g^{-1}gg^{-1}, (g^{-1}, g^{-1})$

$(5)\cap(6)$: $hh^{-1}h, (h, h)$

$(6)\cap(5)$: $h^{-1}hh^{-1}, (h^{-1}, h^{-1})$

biçimindedir. Bütün kritik çiftler çakışan kelimeye bağlı olarak sonlu adımda aynı kelimeye indirgendiğinden confluent özelliği sağlanmaktadır. Böylece $C_g \#_\alpha^f C_n$ tipindeki iki devirli grubun çapraz çarpımın yeniden yazma sistemi tamdır. ■

3. 3. 5. Teorem'de belirtilen koşullar altında $C_g \#_\alpha^f C_n$ tipindeki iki devirli grubun çapraz çarpımının elemanlarının normal formu ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

3. 3. 6. Sonuç: $u \in C_g \#_\alpha^f C_n \ (1 \le t < n)$ ile $u^{'} \in C_g \#_\alpha^f C_n \ (t \ge n)$ kelimelerinin normal formu sırasıyla $C(u)$ ile $C(u^{'})$ aşağıdaki forma sahiptir.

$$C(u) = h^k g^t \quad (0 \le k \le n-1,\ t \in \mathbb{Z}).$$

$$C(u^{'}) = h^k g^t \quad (0 \le t \le n-1,\ k \in \mathbb{Z}).$$

3. 3. 4. $C_{g_1} \#_\alpha^f C_{g_2}$ Tipindeki İki Devirli Grubun Çapraz Çarpımı

(3.7) ile verilen $C_{g_1} \#_\alpha^f C_{g_2}$ tipindeki iki devirli grubun çapraz çarpımının monoid sunuşu

$$\left\langle g_1, g_2, g_1^{-1}, g_2^{-1};\ g_1g_2 = g_2g_1,\ g_1g_1^{-1} = 1,\ g_1^{-1}g_1 = 1,\ g_2g_2^{-1} = 1,\ g_2^{-1}g_2 = 1 \right\rangle \tag{3.11}$$

biçimindedir. Yeniden yazma kurallarındaki üreteçler arasında $g_1 > g_1^{-1} > g_2 > g_2^{-1}$ biçiminde bir sıralama seçelim. Bu sıralama kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç elde edilir.

3. 3. 7. Teorem: $C_{g_1} \#_\alpha^f C_{g_2}$ tipindeki devirli iki grubun çapraz çarpımının (3.11) ile verilen monoid sunuşunun tam yeniden yazma sistemi aşağıdaki bağıntılardan oluşmaktadır.

$$1)\ g_1g_2 \to g_2g_1^{-1}, \quad 2)\ g_1g_1^{-1} \to 1, \quad 3)\ g_1^{-1}g_1 \to 1, \quad 4)\ g_2g_2^{-1} \to 1, \quad 5)\ g_2^{-1}g_2 \to 1$$

İspat: Yeniden yazma kurallarındaki üreteçler arasında $g_1 > g_1^{-1} > g_2 > g_2^{-1}$ biçiminde bir sıralama olduğundan, çakışan kelimelerin indirgendiği kelimeleri sonlu sayıda adımla elde ederiz. Böylece, yeniden yazma sistemi Noetherian özelliğini sağlamış olur. Çakışan bütün kelimeler ve kritik çiftler ise;

$(1)\cap(4):\ g_1g_2g_2^{-1},(g_2g_1^{-1}g_2^{-1},g_1)$ $(2)\cap(3):\ g_1g_1^{-1}g_1,(g_1,g_1)$

$(3)\cap(1):\ g_1^{-1}g_1g_2,(g_1^{-1}g_2g_1^{-1},g_2)$ $(3)\cap(2):\ g_1^{-1}g_1g_1^{-1},(g_1^{-1},g_1^{-1})$

$(4)\cap(5):\ g_2g_2^{-1}g_2,(g_2,g_2)$ $(5)\cap(4):\ g_2^{-1}g_2g_2^{-1},(g_2^{-1},g_2^{-1})$

biçimindedir. Bütün kritik çiftler çakışan kelimeye bağlı olarak sonlu adımda aynı kelimeye indirgendiğinden confluent özelliği sağlanır. Böylece $C_{g_1}\#_\alpha^f C_{g_2}$ tipindeki iki devirli grubun çapraz çarpımının yeniden yazma sistemi tamdır.■

3. 3. 7. Teorem'de verilen $C_{g_1}\#_\alpha^f C_{g_2}$ tipindeki iki devirli grubun çapraz çarpımının elemanlarının normal formu ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

3. 3. 8. Sonuç: $u\in C_{g_1}\#_\alpha^f C_{g_2}$ kelimesinin normal formu $C(u)$ aşağıdaki forma sahiptir

$$C(u)=g_2^{\,k}g_1^{\,l}\quad (k,l\in\mathbb{Z}).$$

3. 3. 2., 3. 3. 4., 3. 3. 6. ve 3. 3. 8. Sonuçlarda verilen normal form yapıları kullanılarak $C_n\#_\alpha^f C_m$, $C_n\#_\alpha^f C_g$, $C_g\#_\alpha^f C_n$ ve $C_{g_1}\#_\alpha^f C_{g_2}$ tipindeki devirli gruplar için kelime probleminin çözülebilirliği ile ilgili aşağıdaki sonuç verilmiştir.

3. 3. 9. Sonuç: $C_n\#_\alpha^f C_m$, $C_n\#_\alpha^f C_g$, $C_g\#_\alpha^f C_n$ ve $C_{g_1}\#_\alpha^f C_{g_2}$ tipindeki devirli gruplar için kelime problemi çözülebilirdir.

3. 4. Devirli Grupların Çapraz Çarpımının Büyüme Serileri

Bu alt bölümde sırasıyla $C_n\#_\alpha^f C_m$, $C_n\#_\alpha^f C_g$, $C_g\#_\alpha^f C_n$ ve $C_{g_1}\#_\alpha^f C_{g_2}$ tipindeki devirli grupların 3. 3. alt bölümde elde edilen normal form yapıları kullanılarak büyüme serileri hesaplanmıştır. Büyüme serisi, seçilen üreteç kümesine göre farklılık gösterdiğinden burada n ve m mertebeli sonlu grubun büyüme serileri sırasıyla $1+(n-1)z$ ve $1+(m-1)z$ olarak alınacaktır.

3. 3. 2. Sonuçta verilen normal form yapısı kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

3. 4. 1. Teorem: $C(u)$ normal formuna sahip $C_n\#_\alpha^f C_m$ tipindeki çapraz çarpımın büyüme serisi $\beta(z)$ aşağıdaki forma sahiptir.

1. Durum: $n \le m$ olsun.

- $j=1$ ve $0 \le i \le n-1$ için, $\beta(z) = 1+(m+n-2)z+(mn-m-n+1)z^2$.
- $2 \le j \le n-1$ ve $0 \le i \le n-1$ için, $\beta(z) = \dfrac{1}{(2-m-n)z+(m+n-mn-1)z^2}$.

2. Durum: $m < n$ olsun.

- $j=1$ ve $0 \le i \le m-1$ için, $\beta(z) = 1+(m+n-2)z+(mn-m-n+1)z^2$.
- $j=1$ ve $m \le i \le n-1$ için, $\beta(z) = \dfrac{1+iz+(i-1)z^2}{1-z}$.
- $2 \le j \le n-1$ ve $0 \le i \le m-1$ için, $\beta(z) = \dfrac{1}{(2-m-n)z+(m+n-mn-1)z^2}$.
- $2 \le j \le n-1$ ve $m \le i \le n-1$ için,

$$\beta(z) = \frac{1+jz+(j-1)z^2}{(2-j-m)z+(2j-2m-jm-3)z^2-(j+m-jm-1)z^3}.$$

İspat: Her bir durum için büyüme serilerini ayrı ayrı hesaplayalım.

- 1. durumda $j=1$, $0 \le i \le n-1$ ve 2. durumda $j=1$, $0 \le i \le m-1$ için,

3. 3. 2. Sonuçta verildiği gibi $C(u) = b^k a^l$ $(0 \le k \le m-1,\ 0 \le l \le n-1)$ formu biçimindedir. Bu normal formun $\beta(z)$ büyüme serisi her bir kelimenin büyüme serilerinin ayrı ayrı çarpımı olarak hesaplanabilir (Scott, 2007). Yani, $\beta(z)$, $b^k\,(0 \le k \le m-1)$ ve $a^l\,(0 \le l \le n-1)$ formundaki kelimelerin büyüme serilerinin çarpımına eşittir. Sırasıyla, $S_1 = \{b, b^2, ..., b^m\}$ ve $S_2 = \{a, a^2, ..., a^n\}$ üreteç kümeleri ile birlikte $b^k\,(0 \le k \le m-1)$ ve $a^l\,(0 \le l \le n-1)$ formundaki kelimelerin büyüme serileri $1+(m-1)z$ ve $1+(n-1)z$ dir. Buradan, $S_1 \cup S_2$ üreteç kümesi ile birlikte, $\beta(z)$ büyüme serisi

$$\beta(z) = (1+(m-1)z)(1+(n-1)z) = 1+(m+n-2)z+(mn-m-n+1)z^2$$

elde edilir.

• 1. durumda $2 \le j \le n-1,\ 0 \le i \le n-1$ ve 2. durumda $2 \le j \le n-1,\ 0 \le i \le m-1$ için, 3. 3. 2. Sonuçta verildiği gibi $C(u) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \ldots a^{k_s} b^{l_s}$ formu biçimindedir. Burada, $0 \le k_\varepsilon \le n-1\ (1 \le \varepsilon \le s)$ ve $0 \le l_\delta \le m-1 (1 \le \delta \le s)$ dır. Bu normal formun büyüme serisi

$$\beta(z) = \sum_{t \ge 0} [(1+(m-1)z)(1+(n-1)z)]^t = \frac{1}{1-[(1+(m-1)z)(1+(n-1)z)]}$$

$$= \frac{1}{(2-m-n)z + (m+n-mn-1)z^2}$$

dir.

• 2. durumda $j = 1$ ve $m \le i \le n-1$ için, 3. 3. 2. Sonuçta verildiği gibi normal form $C(u) = b^k a^l \quad (k \in \mathbb{Z},\ 0 \le l \le i-1)$ formu biçimindedir. Sırası ile, $b^k\ (k \in \mathbb{Z})$ ve $a^l\ (0 \le l \le i-1)$ formundaki kelimelerin büyüme serileri $\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\right)$ ve $1+(i-1)z$ dir. Öyleyse,

$$\beta(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)\left(1+(i-1)z\right) = \frac{1+iz+(i-1)z^2}{1-z}$$

biçimindedir.

• 2. durumda $2 \le j \le n-1$ ve $m \le i \le n-1$ için 3. 3. 2. Sonuçta verildiği gibi normal form $C(u) = b^{k_1} a^{l_1} b^{k_2} a^{l_2} \ldots b^{k_s} a^{l_s}$ biçimindedir. Burada, $k_1 \in \mathbb{Z},\ 0 \le k_\varepsilon \le m-1 (\ 2 \le \varepsilon \le s)$ ve $0 \le l_\delta \le j-1\ (1 \le \delta \le s)$ dır. Sırasıyla, $b^{k_1}\ (k_1 \in \mathbb{Z})$, $a^{l_1} b^{k_2} a^{l_2} \ldots b^{k_s}$ $(0 \le k_\varepsilon \le m-1$ $(2 \le \varepsilon \le s),\ 0 \le l_\delta \le j-1 (1 \le \delta \le s-1))$ ve $a^{l_s}\ (0 \le l_s \le j-1)$ formundaki kelimelerin büyüme serileri $\left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k\right), \sum_{t \ge 0} [(1+(j-1)z)(1+(m-1)z)]^t$ ve $1+(j-1)z$ dir. Böylece

$$\beta(z) = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} 2z^k\right)\left(\sum_{k \ge 0} [(1+(j-1)z)(1+(m-1)z)]^k (1+(j-1)z)\right)$$

$$= \left(\frac{1+z}{1-z}\right) \frac{(1+(j-1)z)}{1-[(1+(j-1)z)(1+(m-1)z)]}$$

$$= \frac{1+jz+(j-1)z^2}{(2-j-m)z + (2j-2m-jm-3)z^2 - (j+m-jm-1)z^3}$$

elde edilir.■

3. 3. 4. Sonuçta verilen normal form yapısı kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

3. 4. 2. Teorem: $C(u)$ normal formuna sahip $C_n \#_\alpha^f C_g$ tipindeki çapraz çarpımın büyüme serisi $\beta(z)=\dfrac{1+nz+(n-1)z^2}{-2z-(t-1)z^2}$ biçimindedir.

İspat: 3. 3. 4. Sonuçta verildiği gibi $u \in C_n \#_\alpha^f C_g$ kelimesinin normal formu

$C(u)=a^{k_1}g^{l_1}a^{k_2}g^{l_2}...a^{k_s}g^{l_s}\left(0\le k_1\le n-1,\ \ 0\le k_\varepsilon\le t-1(2\le\varepsilon\le s),\ \ l_\delta\in\mathbb{Z}(1\le\delta\le s)\right)$

formu biçimindedir. Bu normal formun $\beta(z)$ büyüme serisi her bir kelimenin büyüme serilerinin ayrı ayrı çarpımı olarak hesaplanabilir (Scott, 2007). Yani, $\beta(z)$, $a^{k_1}\,(0\le k_1\le n-1)$, $g^{l_1}a^{k_2}g^{l_2}...a^{k_s}\left(0\le k_\varepsilon\le t-1(2\le\varepsilon\le s),\ \ l_\delta\in\mathbb{Z}(1\le\delta\le s-1)\right)$ ve $g^{l_s}\,(l_\delta\in\mathbb{Z})$ formundaki kelimelerin büyüme serilerinin ayrı ayrı çarpımına eşittir. Sırasıyla, $a^{k_1}\,(0\le k_1\le n-1)$, $g^{l_1}a^{k_2}g^{l_2}...a^{k_s}\left(0\le k_\varepsilon\le t-1(2\le\varepsilon\le s), l_\delta\in\mathbb{Z}(1\le\delta\le s-1)\right)$ ve $g^{l_s}\,(l_\delta\in\mathbb{Z})$ formundaki kelimelerin büyüme serileri, $1+(n-1)z$, $\sum_{t\ge0}\left[(1+(t-1)z)(\frac{1+z}{1-z})\right]^t$ ve $\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}2^k\right)$ dir. Böylece, $\beta(z)$ büyüme serisi

$$\beta(z)=\left(1+(n-1)z\right)\left(\frac{1}{1-\left[(1+(t-1)z)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\right]}\right)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{1+nz+(n-1)z^2}{-2z-(t-1)z^2}$$

elde edilir.■

3. 3. 6. Sonuçta verilen normal form yapısı kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

3. 4. 3. Teorem: $C(u)$ ve $C(u^{'})$ normal formlarına sahip $C_g \#_\alpha^f C_n$ tipindeki çapraz çarpım için büyüme serileri sırasıyla $\beta(z)$ ve $\beta^{'}(z)$ aşağıdaki forma sahiptir.

$$\beta(z)=\beta^{'}(z)=\frac{1+nz+(n-1)z^2}{1-z}.$$

İspat: 3. 3. 6. Sonuçta verildiği gibi $u\in C_g \#_\alpha^f C_n$ $(1\le t<n)$ ile $u^{'}\in C_g \#_\alpha^f C_n$ $(t\ge n)$ kelimelerinin normal formu sırasıyla $C(u)=h^k g^t$ $(0\le k\le n-1,\ \ t\in\mathbb{Z})$ ve

$C(u^{'}) = h^k g^t \;\; (0 \le t \le n-1,\; k \in \mathbb{Z})$ formu biçimindedir. İlk olarak $C(u)$ formu için büyüme serisini hesaplayalım. Bu normal formun $\beta(z)$ büyüme serisi bu formdaki her bir kelimenin büyüme serilerinin ayrı ayrı çarpımı alınarak hesaplanabilir (Scott, 2007). Yani, $\beta(z)$, $h^k\,(0 \le k \le n-1)$ ve $g^t\,(t \in \mathbb{Z})$ formundaki kelimelerin büyüme serilerinin ayrı ayrı çarpımına eşittir. Sırasıyla, $h^k\,(0 \le k \le n-1)$ ve $g^t\,(t \in \mathbb{Z})$ formundaki kelimelerin büyüme serileri, $1+(n-1)z$ ve $\left(1+\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\right)$ biçimindedir. Böylece, $\beta(z)$ büyüme serisi

$$\beta(z) = \big(1+(n-1)z\big)\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$

elde edilir. Son olarak $C^{'}(u)$ formu için büyüme serisini hesaplayalım. Bu normal formun $\beta^{'}(z)$ büyüme serisi de, $h^k\,(k \in \mathbb{Z})$ ve $g^t\,(0 \le t \le n-1)$ formundaki kelimelerin büyüme serilerinin çarpımına eşittir. Sırasıyla, $h^k\,(k \in \mathbb{Z})$ ve $g^t\,(0 \le t \le n-1)$ formundaki kelimelerin büyüme serileri $\left(1+\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\right)$ ve $1+(n-1)z$ biçiminde olacağı için, $\beta^{'}(z)$ büyüme serisi

$$\beta^{'}(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)\big(1+(n-1)z\big)$$

şeklinde elde edilir.■

3. 3. 8. Sonuçta verilen normal form yapısı kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

3. 4. 4. Teorem: $C(u)$ normal formuna sahip $C_{g_1} \#_{\alpha}^{f} C_{g_2}$ tipindeki çapraz çarpımın büyüme serisi $\beta(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ biçimindedir.

İspat: 3. 3. 8. Sonuçta verildiği gibi $u \in C_{g_1} \#_{\alpha}^{f} C_{g_2}$ kelimesinin normal formu $C(u) = {g_2}^k g_1^{\,l} \;\; (k, l \in \mathbb{Z})$ biçimindedir. Bu normal formun $\beta(z)$ büyüme serisi normal formdaki her bir kelimenin büyüme serilerinin ayrı ayrı çarpımı alınarak elde edilir

(Scott, 2007). $g_2^k \; (k \in \mathbb{Z})$ ve $g_1^l \; (l \in \mathbb{Z})$ formundaki kelimelerin büyüme serileri $\left(1+\sum_{k=0}^{\infty} 2^k\right)$ biçiminde olduğundan, $\beta(z)$ büyüme serisi de

$$\beta(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

şeklinde elde edilir. ■

4. İKİ-YANLI ÇAPRAZ (TWO-SIDED CROSSED) ÇARPIM

Bu bölümde; direkt, yarı direkt, knit ve çapraz çarpımın genellemesi olan ve birçok çarpımı içeren yeni bir çarpım, iki-yanlı çapraz çarpım, tanımlanacaktır. Bu yeni çarpımın hangi koşullar altında grup olduğu incelecek ve grup olabilmesi için belli koşullar verilecektir. Daha sonra, devirli gruplar için iki-yanlı çapraz çarpımın sunuşu elde edilecektir. Elde edilen bu sunuş kullanılarak yeniden yazma sistemi oluşturulacak ve elemanların normal formunun yapısı belirlenecektir. Son olarak ise, iki-yanlı çapraz çarpımın elemanlarının normal formu kullanılarak büyüme serileri hesaplanacaktır.

Bu bölümün 4.1., 4.2. ve 4.3. Alt Bölümlerinde elde edilen sonuçlar (Çetinalp ve ark., 2016) çalışmasında "Two-Sided Crossed Products of Groups" başlığı altında toplanmıştır. 4.4. Alt Bölümünde elde edilen sonuçlar ise (Karpuz ve Çetinalp, 2016) "Growth Series of Crossed and Two-Sided Crossed Products of Cyclic Groups" çalışmasında yer almaktadır.

4. 1. Normal İki-Yanlı Çapraz Çarpım

Çapraz çarpımın iki yönlü düşünülmesi ile elde edilen yeni çarpımın (iki-yanlı çapraz çarpımın) tanımı aşağıda verilmiştir.

4. 1. 1 Tanım: H ve G iki grup olmak üzere, herhangi $h_1, h_2, h_3 \in H$ ve $g \in G$ için

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha : G \to Aut(H), & \alpha' : H \to Aut(G) \\ f : G\times G \to H, & f' : H\times H \to G \end{array}\right\} \tag{4.1}$$

dönüşümleri (3.1) ve (3.2) koşullarına ek olarak ;

$$h_1 \triangleright_{\alpha'} (h_2 \triangleright_{\alpha'} g) = f'(h_1,h_2)(h_1h_2 \triangleright_{\alpha'} g) f'(h_1,h_2)^{-1} \tag{4.2}$$

$$f'(h_1,h_2) f'(h_1h_2,h_3) = (h_1 \triangleright_{\alpha'} f'(h_2,h_3)) f'(h_1,h_2h_3) \tag{4.3}$$

koşullarını sağlıyorsa, H ve G gruplarının *iki-yanlı çapraz (crossed) çarpımı* denir. Bu çarpım $H \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} G$ ile gösterilip,

$$(h_1,g_1)(h_2,g_2)=(h_1.(g_1 \triangleright_{\alpha} h_2)\, f(g_1,g_2),\, g_1.(h_1 \triangleright_{\alpha'} g_2)\, f'(h_1,h_2))$$

çarpımı ile tanımlanan $H \times G$ kümesidir. Burada, eğer

$$f(e_G,g)=f(g,e_G)=f(e_G,e_G)=e_H \qquad \text{ve} \qquad f'(e_H,h)=f'(h,e_H)=f'(e_H,e_H)=e_G$$

ise bu çarpıma *iki-yanlı normal çapraz çarpım* denir. İki–yanlı normal çapraz çarpım, normal çapraz çarpım gibi her zaman grup olmayabilir. Bu çarpımın grup tanımlayabilmesi için aşağıdaki sonuç verilmiştir.

4. 1. 2. Teorem: H ve G iki grup olmak üzere herhangi $h_1,h_2,h \in H$ ve $g_1,g_2,g \in G$ için (4.1)'de verilen dönüşümler,

$$g^{-1}.(h_1 \triangleright_{\alpha'} g)\, f'(h_1,h_2) \in Ker\alpha \tag{4.4}$$

$$h^{-1}(g_1 \triangleright_{\alpha} h)\, f(g_1,g_2) \in Ker\alpha' \tag{4.5}$$

koşullarını sağlıyor ise iki-yanlı normal çapraz çarpım $H \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} G$ bir gruptur.

İspat : (4.4) ve (4.5) koşulları altında grup özelliklerinin sağlandığını gösterelim.

• $\forall\, h_1,h_2,h \in H$ ve $\forall\, g_1,g_2,g \in G$ için keyfi $(h_1,g_1),(h_2,g_2),(h_3,g_3) \in H \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} G$ alalım. Sol çarpım

$$[(h_1,g_1)\,(h_2,g_2)]\,(h_3,g_3)=(h_1.(g_1 \triangleright_{\alpha} h_2)\, f(g_1,g_2),\, g_1.(h_1 \triangleright_{\alpha'} g_2)\, f'(h_1,h_2))(h_3,g_3)$$

$$\begin{aligned}
&=((h_1.(g_1 \triangleright_{\alpha} h_2)\, f(g_1,g_2))((g_1.(h_1 \triangleright_{\alpha'} g_2)\, f'(h_1,h_2)) \triangleright_{\alpha} h_3)\, f(g_1.(h_1 \triangleright_{\alpha'} g_2)\, f'(h_1,h_2),g_3)\,,\\
&\quad (g_1.(h_1 \triangleright_{\alpha'} g_2)\, f'(h_1,h_2))((h_1.(g_1 \triangleright_{\alpha} h_2)\, f(g_1,g_2)) \triangleright_{\alpha'} g_3)\, f'(h_1.(g_1 \triangleright_{\alpha} h_2)\, f(g_1,g_2),h_3))\\
&=((h_1h_2)(g_1g_2 \triangleright_{\alpha} h_3)\, f(g_1g_2,g_3),(g_1g_2)(h_1h_2 \triangleright_{\alpha'} g_3)\, f'(h_1h_2,h_3)) \qquad ((4.4) \text{ ve } (4.5) \text{ den})
\end{aligned}$$

ve sağ çarpım

$$(h_1,g_1)\,[(h_2,g_2)(h_3,g_3)]=(h_1,g_1)(h_2(g_2 \triangleright_{\alpha} h_3)\, f(g_2,g_3),\, g_2(h_2 \triangleright_{\alpha'} g_3)\, f'(h_2,h_3))$$

$$
\begin{aligned}
&= (h_1(g_1 \rhd_\alpha (h_2(g_2 \rhd_\alpha h_3) f(g_2,g_3)) f(g_1, g_2(h_2 \rhd_{\alpha'} g_3) f'(h_2,h_3)),\\
&\quad g_1(h_1 \rhd_{\alpha'} (g_2(h_2 \rhd_{\alpha'} g_3) f'(h_2,h_3)) f'(h_1, h_2(g_2 \rhd_\alpha h_3) f(g_2,g_3)))\\
&= (h_1(g_1 \rhd_\alpha h_2)(g_1 \rhd_\alpha (g_2 \rhd_\alpha h_3))(g_1 \rhd_\alpha f(g_2,g_3)) f(g_1, g_2(h_2 \rhd_{\alpha'} g_3) f'(h_2,h_3)),\\
&\quad g_1(h_1 \rhd_{\alpha'} g_2)(h_1 \rhd_{\alpha'} (h_2 \rhd_{\alpha'} g_3))(h_1 \rhd_{\alpha'} f'(h_2,h_3)) f'(h_1, h_2(g_2 \rhd_\alpha h_3) f(g_2,g_3)))\\
&= (h_1(g_1 \rhd_\alpha h_2) f(g_1,g_2)(g_1g_2 \rhd_\alpha h_3) f(g_1,g_2)^{-1}(g_1 \rhd_\alpha f(g_2,g_3)) f(g_1, g_2(h_2 \rhd_{\alpha'} g_3) f'(h_2,h_3)),\\
&\quad g_1(h_1 \rhd_{\alpha'} g_2) f'(h_1,h_2)(h_1h_2 \rhd_{\alpha'} g_3) f'(h_1,h_2)^{-1}(h_1 \rhd_{\alpha'} f'(h_2,h_3)) f'(h_1, h_2(g_2 \rhd_\alpha h_3) f(g_2,g_3)))\\
&= (h_1h_2(g_1g_2 \rhd_\alpha h_3) f(g_1,g_2)^{-1}(g_1 \rhd_\alpha f(g_2,g_3)) f(g_1, g_2g_3), \qquad \text{((4.4) ve (4.5) den)}\\
&\quad g_1g_2(h_1h_2 \rhd_{\alpha'} g_3) f'(h_1,h_2)^{-1}(h_1 \rhd_{\alpha'} f'(h_2,h_3)) f'(h_1, h_2h_3))\\
&= ((h_1h_2)(g_1g_2 \rhd_\alpha h_3) f(g_1g_2, g_3), (g_1g_2)(h_1h_2 \rhd_{\alpha'} g_3) f'(h_1h_2, h_3)) \qquad \text{((3.2) ve (4.3) den)}
\end{aligned}
$$

biçimindedir. Her iki eşitlikten birleşme özelliğinin sağlandığı gözükmektedir.

• e_H ve e_G sırasıyla H ve G gruplarının birim elemanları ve $(h,g) \in H \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} G$ olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
(h,g)(e_H,e_G) &= (h(g \rhd_\alpha e_H) f(g,e_G), g(h \rhd_{\alpha'} e_G) f'(h,e_H))\\
&= (h\, e_H, g\, e_G) = (h,g)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(e_H,e_G)(h,g) &= (e_H(e_G \rhd_\alpha h) f(e_G,g), e_G(e_H \rhd_{\alpha'} g) f'(e_H,h))\\
&= (e_H h, e_G g) = (h,g)
\end{aligned}
$$

dir. O halde; (e_H,e_G) iki-yanlı çapraz çarpımın sağ ve sol birim elemanıdır.

• Son olarak $(h,g) \in H \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} G$ elemanının tersini bulalım. Öyleyse, $(h,g)^{-1} = (h',g')$ için

$$
\begin{aligned}
(h,g)(h',g') &= (e_H,e_G) \Rightarrow (h(g \rhd_\alpha h') f(g,g'), g(h \rhd_{\alpha'} g') f'(h,h')) = (e_H,e_G)\\
&\Rightarrow h(g \rhd_\alpha h') f(g,g') = e_H \quad ve \quad g(h \rhd_{\alpha'} g') f'(h,h') = e_G\\
&\quad g' = h^{-1} \rhd_{\alpha'} g^{-1} f'(h,h^{-1}) \quad ve \quad h' = g^{-1} \rhd_\alpha h^{-1} f(g,g^{-1})
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece birleşme, birim ve ters eleman özellikleri sağlandığından dolayı iki-yanlı normal çapraz çarpım bir grup tanımlar. ■

Çapraz çarpım grup genişlemesinin çalışılması ile ortaya çıkmıştır. Aşağıda verilen sonuç ile iki taraftan çapraz çarpımın genişleme ile olan ilişkisi verilmiştir.

4. 1. 3. Sonuç: H ve G herhangi iki grup ve (H, G, α, f) ve $(G, H, \alpha^{'}, f^{'})$ iki çapraz sistem olsun. Öyleyse;

$$1 \to H \xrightarrow{i_H} H \#_{\alpha}^{f} G \xrightarrow{\pi_G} G \to 1 \quad \text{ve} \quad 1 \to G \xrightarrow{i_G} G \#_{\alpha^{'}}^{f^{'}} H \xrightarrow{\pi_H} H \to 1$$

bir tam dizidir. Burada $\forall\, h \in H,\, g \in G$ için $i_H(h) = (h,1)$, $i_G(g) = (g,1)$, $\pi_G(h,g) = g$ ve $\pi_H(g,h) = h$ dir. $(H \#_{\alpha}^{f} G,\ i_H,\ \pi_G)$ ve $(G \#_{\alpha^{'}}^{f^{'}} H,\ i_G,\ \pi_H)$ çapraz sistemleri sırasıyla H 'nin G ile ve G 'nin H ile olan genişlemeleridir.

4. 1. 2. Teoremin sonuçları $\alpha, \alpha^{'}, f$ ve $f^{'}$ dönüşümlerinin aldığı değerlere göre aşağıda verilmiştir.

4. 1. 4. Sonuç: (H, G, α, f) ve $(G, H, \alpha^{'}, f^{'})$ iki çapraz sistem olsun. Bu durumda,

i) $\alpha, \alpha^{'}, f$ ve $f^{'}$ aşikar dönüşümler olsun. O halde iki-yanlı çapraz çarpım $H \#_{\alpha,\alpha^{'}}^{f,f^{'}} G$, H ile G 'nin direkt çarpımıdır.

ii) f ve $f^{'}$ aşikar dönüşümler olsun. O halde iki-yanlı çapraz çarpım $H \#_{\alpha,\alpha^{'}}^{f,f^{'}} G$, H ile G 'nin knit çarpımıdır.

4. 1. 5. Sonuç: (H, G, α, f) ve $(G, H, \alpha^{'}, f^{'})$ iki çapraz sistem olsun. Bu durumda,

i) $\alpha^{'}(\alpha), f$ *ve* $f^{'}$ aşikar dönüşümler olsun. O halde iki-yanlı çapraz çarpım $H \#_{\alpha,\alpha^{'}}^{f,f^{'}} G$, H 'nin G ile (G 'nin H ile) yarı-direkt çarpımıdır.

ii) $\alpha^{'}(\alpha)$ *ve* $f^{'}(f)$ aşikar dönüşümler olsun. O halde iki-yanlı çapraz çarpım $H \#_{\alpha,\alpha^{'}}^{f,f^{'}} G$, H 'nin G ile (G 'nin H ile) çapraz çarpımıdır.

iii) $f^{'}(f)$ aşikar dönüşüm olsun. O halde iki-yanlı çapraz çarpım $H \#_{\alpha,\alpha^{'}}^{f,f^{'}} G$, H 'nin G ile (G 'nin H ile) yarı-direkt ile çapraz çarpımın birleşimidir. Bu yeni cebirsel yapı $\forall h_1, h_2 \in H$ ve $g_1, g_2 \in G$ için 4. 1. 2. Teorem'de verilen koşullar altında

$$(h_1,g_1)(h_2,g_2)=(h_1.(g_1 \triangleright_{\alpha} h_2)f(g_1,g_2),\, g_1.(h_1 \triangleright_{\alpha'} g_2))$$
$$(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1.(h_1 \triangleright_{\alpha'} g_2)f'(h_1,h_2),\, h_1.(g_1 \triangleright_{\alpha} h_2))$$

çarpımları ile bir grup tanımlar.

4. 1. 6. Sonuç: $\forall h_1,h_2,h_3 \in H$ ve $g_1,g_2,g_3 \in G$ için (H,G,α,f) ve (G,H,α',f') iki çapraz sistem

$$\mathrm{Im}(f) \subseteq Z(H), \quad f(g_1,g_2)f(g_1g_2,g_3)=f(g_2,g_3)f(g_1,g_2g_3)$$

$$\mathrm{Im}(f') \subseteq Z(G), \quad f'(h_1,h_2)f'(h_1h_2,h_3)=f'(h_2,h_3)f'(h_1,h_2h_3)$$

koşullarını sağlıyor olsun. Bu durumda,

i) α, α' *ve* $f'(f)$ aşikar dönüşümler olsun. O halde iki-yanlı çapraz çarpım $H \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} G$, H'nin G ile (G'nin H ile) twisted çarpımıdır.

ii) α ve α' aşikar dönüşümler olsun. O halde iki-yanlı çapraz çarpım $H \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} G$, H ve G'nin iki-yanlı twisted çarpımıdır. Bu yeni çarpım $H \times^{f} G$ ile $G \times^{f'} H$ twisted çarpımların birleşimidir. İki-yanlı twisted çarpım, $\forall h_1,h_2 \in H$ ve $\forall g_1,g_2 \in G$ için 4. 1. 2. Teorem'de verilen koşullar altında

$$(h_1,g_1)(h_2,g_2)=(h_1h_2f(g_1,g_2),\, g_1g_2f'(h_1,h_2))$$
$$(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1g_2f'(h_1,h_2),\, h_1h_2f(g_1,g_2))$$

çarpımları ile bir grup tanımlar.

iii) α' (α) aşikar dönüşüm olsun. O halde iki-yanlı çapraz çarpım $H \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} G$, H'nin G ile (G'nin H ile) twisted ile çapraz çarpımın birleşimidir. Bu yeni cebirsel yapı $\forall h_1,h_2 \in H$ ve $\forall g_1,g_2 \in G$ için 4. 1. 2. Teorem'de verilen koşullar altında,

$$(h_1,g_1)(h_2,g_2)=(h_1.(g_1 \triangleright_{\alpha} h_2)f(g_1,g_2),\, g_1g_2f'(h_1,h_2))$$
$$(g_1,h_1)(g_2,h_2)=(g_1.(h_1 \triangleright_{\alpha'} g_2)f'(h_1,h_2),\, h_1h_2f(g_1,g_2))$$

çarpımları ile bir grup tanımlar.

4. 2. Devirli Gruplar için İki-Yanlı Çapraz Çarpım

Bu alt bölümde, iki devirli grubun iki-yanlı çapraz çarpımının sunuşu elde edilecektir. Bu sunuş elde edilirken temel olarak aşağıdaki sonuçtan faydalanılmıştır.

4. 2. 1. Teorem (Agore, 2008): Herhangi bir E grubu için $H \trianglelefteq E$ normal alt grubu ve $G = E/H$ bölüm grubu olsun. Öyleyse $\alpha : G \to Aut(H)$ ve $f : G \times G \to H$ dönüşümleri için, (H, G, α, f) normal çapraz sistemdir ve $E \cong H \#_{\alpha}^{f} G$ dır.

Bu alt bölüm ve bundan sonraki alt bölümlerde, C_n ve C_m sırasıyla a ve b tarafından üretilen n ve m mertebeli devirli gruplar olarak alınacaktır.

4. 2. 2. Teorem: Sonlu bir E grubunun, iki-yanlı normal çapraz çarpım $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ grubuna izomorf olması için gerekli ve yeterli koşul, E grubunun a ve b tarafından üretilmesi ve

$$a^n = b^{i_2},\ b^m = a^{i_1},\ ba = a^{j_1} b^{j_2} \tag{4.5}$$

bağıntılarına sahip olmasıdır. Burada

$$1 \le |j_1| < n, \quad i_1(j_1 - 1) \equiv 0 (\operatorname{mod} n), \quad j_1^m \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$$

$$1 \le |j_2| < m, \quad i_2(j_2 - 1) \equiv 0 (\operatorname{mod} m), \quad j_2^n \equiv 1 (\operatorname{mod} m)$$

dir.

İspat: Varsayalım ki E_1 ve E_2 grupları sırasıyla $C_n \#_{\alpha}^{f} C_m$ ve $C_m \#_{\alpha'}^{f'} C_n$ çapraz çarpımlarına izomorf olsun. O halde, $C_n \trianglelefteq E_1$ ve $E_1 / C_n \cong C_m$ dir. $C_n = \langle a;\ a^n = 1 \rangle \trianglelefteq E_1$ olduğundan $E_1 / C_n = \{C_n, bC_n, \ldots, b^{m-1} C_n\}$ ve $b^m \in C_n$ olacak biçimde en az bir $b \in E_1$ vardır. Yani, $0 \le i_1 \le n-1$ için,

$$b^m = a^{i_1} \tag{4.6}$$

dir. Ayrıca, $C_n \trianglelefteq E_1$ olduğundan, $b^{-1}ab \in C_n$ dir. Yani, $0 \le j_1 \le n-1$ için,

$$b^{-1}ab = a^{j_1} \tag{4.7}$$

eşitliği elde edilir.

Benzer adım uygulanarak, $C_m \trianglelefteq E_2$ ve $E_2 / C_m \cong C_n$ olduğundan, $0 \le i_2, j_2 \le m-1$ için, $a^n = b^{i_2}$ ve $a^{-1}ba = b^{j_2}$ elde edilir. (4.6) ve (4.7)'deki bağıntılar kullanılarak,

$b^{-1}a^{i_1}b = b^{-1}b^m b = b^m = a^{i_1}$ ve $b^{-1}a^{i_1}b = a^{i_1 j_1} \Rightarrow a^{i_1(j_1-1)} = 1$ ve $i_1(j_1-1) \equiv 0 \pmod n$

elde edilir. Bu da bize, $b^{-m}ab^m = a^{-i_1}aa^{i_1} = a$ ve $a^{j_1^2} = (b^{-1}ab)^{j_1} = b^{-1}a^{j_1}b = b^{-2}ab^2$ eşitliğini verir. Tümevarım uygulayarak, $b^{-m}ab^m = a^{j_1^m} \Rightarrow a = a^{j_1^m} \Rightarrow j_1^m \equiv 0 \pmod n$ elde edilir. Benzer adım diğer çarpım için de yapılırsa, $i_2(j_2-1) \equiv 0 \pmod m$ ve $j_2^n \equiv 0 \pmod m$ elde edilir.

δ_{j_1} $(1 \le |j_1| \le n-1)$ ve φ_{j_2} $(1 \le |j_2| \le m-1)$ sırasıyla C_n ve C_m devirli gruplarının otomorfizmaları olsun. Burada, $a^{j_1^m} = a$ ve $b^{j_2^n} = b$ olduğu için $b \mapsto Aut(C_n)$ ve $a \mapsto Aut(C_m)$ dönüşümleri vardır. $\alpha : C_m \to Aut(C_n),\ b \mapsto \delta_{j_1}^m$ ve $\alpha' : C_n \to Aut(C_m),$ $a \mapsto \varphi_{j_2}^n$ biçiminde tanımlanan dönüşümlerin homomorfizma olması için gerek ve yeter şartlar $\delta_{j_1}^m = 1_{C_n}$ ve $\varphi_{j_2}^n = 1_{C_m}$ olmasıdır. Bu ise bize, a üreteci ile birlikte, $\delta_{j_1}^m$ ve 1_{C_n} dönüşümlerinin eşit olması için gerek ve yeter koşulun $\delta_{j_1}^m[a] = [a]$ olmasını verir. Benzer şekilde, b üreteci ile birlikte, $\varphi_{j_2}^n$ ve 1_{C_m} dönüşümlerinin eşit olması için gerek ve yeter koşul $\varphi_{j_2}^n[b] = [b]$ dir. Bu sonuçlar düşünülerek, $ba = a^{j_1}b^{j_2}$ eşitliği elde edilir.

Tersine, varsayalım ki (4.5) ile verilen bağıntılar sağlanmış olsun. $C_n \trianglelefteq E_1$ ve $C_m \trianglelefteq E_2$ olduğunu yani, her $x \in E_1,\ 0 \le t \le n-1$ ve $y \in E_2,\ 0 \le l \le m-1$ için $xa^t x^{-1} \in C_n$ ve $yb^l y^{-1} \in C_m$ olduğunu gösterdiğimizde ispatı tamamlamış oluruz. $x \in E_1$ ve $y \in E_2$ olduğundan $x = x_1x_2...x_{k_1}$ ve $y = y_1y_2...y_{k_2}$ biçiminde seçebiliriz. Burada, $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, $x_{s_1} \in \{a, a^{-1}, b^{i_2}, b^{-i_2}\}$ $(0 \le s_1 \le k_1,\ 0 \le i_2 \le m-1)$ ve $x_{s_2} \in \{b, b^{-1}, a^{i_1}, a^{-i_1}\}$ $(0 \le s_2 \le k_2,\ 0 \le i_1 \le n-1)$ dir. Buradan, $xa^t x^{-1} = x_1x_2...x_{k_1}a^t x_{k_1}^{-1}...x_2^{-1}x_1^{-1}$ ve

$yb^l y^{-1} = y_1 y_2 ... y_{k_2} b^l y_{k_2}^{-1} ... y_2^{-1} y_1^{-1}$ elde edilir. Direkt hesaplamalarla $xa^t x^{-1} \in C_n$ ve $yb^l y^{-1} \in C_m$ den $C_n \trianglelefteq E_1$ ve $C_m \trianglelefteq E_2$ durumları elde edilir.

Benzer şekilde, E_1 ve E_2 grupların her elemanı sırasıyla $a^{p_1} b^{q_1}$ ve $b^{p_2} a^{q_2}$ $(p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{Z})$ biçiminde yazılır. Bu da bize, $|E_1| = |E_2| = mn$ ve $|E_2 / C_m| = n,$ $|E_1 / C_n| = m$ olduğunu verir. Böylece, $E_1 / C_n = \{C_n, bC_n, ..., b^{m-1} C_n\}$ ve $E_2 / C_m = \{C_m, aC_m, ..., a^{n-1} C_m\}$ dir. Yani, E_1 ve E_2 grupları sırasıyla C_n ve C_m normal alt gruplarına sahiptir. Sonuç olarak, 4. 2. 1. Teoremden (C_n, C_m, α, f) ve (C_m, C_n, α', f') çapraz sistemleri vardır öyleki, $E_1 \cong C_n \#_{\alpha}^{f} C_m$ ve $E_2 \cong C_m \#_{\alpha'}^{f'} C_n$ dir.■

4. 2. 2. Teoremin sonuçları, i_1, i_2, j_1 ve j_2 'nin aldığı değerlere göre aşağıda verilmiştir.

4. 2. 3. Sonuç: İki-yanlı çapraz çarpımın $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ sunuşu $\langle a, b \; ; \; a^n = b^{i_2}, \; b^m = a^{i_1}, \; ba = a^{j_1} b^{j_2} \rangle$ verilmiş olsun. $i_1 = i_2 = 0$ olduğunu kabul edelim.

1) Eğer $j_1 = j_2 = 1$ ise, $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ çapraz çarpım C_n ve C_m devirli grupların direkt çarpımıdır.
2) Eğer $j_1 = 1$ ve $j_2 > 0$ ise, $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ çapraz çarpım C_m 'in C_n ile yarı direkt çarpımıdır.
3) Eğer $j_2 = 1$ ve $j_1 > 0$ ise, $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ çapraz çarpım C_n 'in C_m ile yarı direkt çarpımıdır.
4) Eğer $|j_1|, |j_2| > 0$ ise, $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ çapraz çarpım C_n ve C_m devirli gruplarının knit çarpımıdır.

4. 2. 4. Sonuç: İki-yanlı çapraz çarpımın $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ sunuşu $\langle a, b \; ; \; a^n = b^{i_2}, \; b^m = a^{i_1}, \; ba = a^{j_1} b^{j_2} \rangle$ verilmiş olsun. $i_1 = 0$ olduğunu kabul edelim.

1) Eğer $j_1 = j_2 = 1$ ise, $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ çapraz çarpım C_m 'in C_n ile twisted çarpımıdır.

2) Eğer $j_1 = 1$ ve $j_2 > 1$ ise, $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ çapraz çarpım C_m 'in C_n ile çapraz çarpımıdır.

3) Eğer $i_2 > 0$ ise, $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ çapraz çarpım C_m 'in C_n ile yarı direkt çapraz çarpımıdır.

4. 2. 5. Sonuç: İki-yanlı çapraz çarpımın $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ sunuşu $\left\langle a,b\ ;\ \ a^n = b^{i_2},\ b^m = a^{i_1},\ ba = a^{j_1}b^{j_2} \right\rangle$ verilmiş olsun.

1) Eğer $j_1 = j_2 = 1$ ise, $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ çapraz çarpım C_n ve C_m 'nin iki-yanlı twisted çarpımıdır.

2) Eğer $j_1 = 1$ ise, $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ çapraz çarpım C_m 'in C_n ile twisted çapraz çarpımıdır.

3) Eğer $j_2 = 1$ ise, $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ çapraz çarpım C_n 'in C_m ile twisted çapraz çarpımıdır.

4. 3. Devirli Gruplar için İki-Yanlı Çapraz Çarpımlarda Yeniden Yazma Sistemi

Bu alt bölümde, devirli gruplar için iki-yanlı çapraz çarpımın monoid sunuşu kullanılarak yeniden yazma sistemi elde edilecektir. Daha sonra, bu çarpımın elemanlarının normal formu oluşturulup kelime probleminin çözülebilir olduğu gösterilecektir.

Devirli gruplar için $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ iki-yanlı çapraz çarpımının monoid sunuşu

$$\left\langle\ a,b,a^{-1},b^{-1};\ \ a^n = b^{i_2},\ b^m = a^{i_1},\ ba = a^{j_1}b^{j_2},\ aa^{-1} = a^{-1}a = 1,\ bb^{-1} = b^{-1}b = 1 \right\rangle \tag{4.8}$$

biçimindedir. Burada $1 \le |j_1| < n$, $1 \le |j_2| < m$, $i_1(j_1 - 1) \equiv 0 (\operatorname{mod} n)$, $j_1^m \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$, $i_2(j_2 - 1) \equiv 0 (\operatorname{mod} m)$ ve $j_2^n \equiv 1 (\operatorname{mod} m)$ dir. Yeniden yazma kurallarını oluştururken (4.8) sunuşunda verilen üreteçler arasında $a > a^{-1} > b > b^{-1}$ biçiminde bir sıralama seçelim. Bu sıralama kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç elde edilir.

4. 3. 1. Teorem: $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ iki-yanlı çapraz çarpımının (4.8) ile verilen monoid sunuşunun tam yeniden yazma sistemi aşağıdaki bağıntılardan oluşmaktadır.

1. Durum: $n \geq m$ olsun.

- $0 \leq i_1 < m < n$ için,

1) $a^n \to b^{i_2}$, 2) $b^m \to a^{i_1}$, 3) $a^{j_1}b^{j_2} \to ba$, 4) $ab^{i_2} \to b^{i_2}a$, 5) $a^{i_1}b \to ba^{i_1}$,
6) $aa^{-1} \to 1$, 7) $a^{-1}a \to 1$, 8) $bb^{-1} \to 1$, 9) $b^{-1}b \to 1$.

- $m \leq i_1 < n$ için,

1) $a^n \to b^{i_2}$, 2) $a^{i_1} \to b^m$, 3) $a^{j_1}b^{j_2} \to ba$, 4) $ab^{i_2} \to b^{i_2}a$, 5) $ab^m \to b^m a$,
6) $aa^{-1} \to 1$, 7) $a^{-1}a \to 1$, 8) $bb^{-1} \to 1$, 9) $b^{-1}b \to 1$.

2. Durum: $m > n$ olsun.

- $0 \leq i_2 \leq n < m$ için,

1) $a^n \to b^{i_2}$, 2) $b^m \to a^{i_1}$, 3) $a^{j_1}b^{j_2} \to ba$, 4) $ab^{i_2} \to b^{i_2}a$, 5) $a^{i_1}b \to ba^{i_1}$,
6) $aa^{-1} \to 1$, 7) $a^{-1}a \to 1$, 8) $bb^{-1} \to 1$, 9) $b^{-1}b \to 1$.

- $n < i_2 < m$ için,

1) $b^{i_2} \to a^n$, 2) $b^m \to a^{i_1}$, 3) $a^{j_1}b^{j_2} \to ba$, 4) $a^n b \to ba^n$, 5) $a^{i_1}b \to ba^{i_1}$,
6) $aa^{-1} \to 1$, 7) $a^{-1}a \to 1$, 8) $bb^{-1} \to 1$, 9) $b^{-1}b \to 1$.

İspat: Yeniden yazma kurallarındaki üreteçler arasında $a > a^{-1} > b > b^{-1}$ biçiminde bir sıralama olduğundan, çakışan kelimelerin indirgendiği kelimeleri sonlu sayıda adımla elde ederiz. Böylece, yeniden yazma sistemi Noetherian'dır. Şimdi sistemin confluent özelliğini sağladığını göstermek için yeniden yazma kurallarının sol yanlarına bakalım ve bütün çakışan kelimeleri ele alalım.

- 1. durumda $0 \leq i_1 < m < n$ ile 2. durumda $0 \leq i_2 \leq n < m$ için, yeniden yazma kurallarının bütün çakışan kelimeleri ve kritik çiftleri;

$(1) \cap (1):\ a^{n+1}, (ab^{i_2}, b^{i_2}a)$

$(1) \cap (3):\ a^n b^{j_2}, (a^{n-j_1}ba, b^{i_2}b^{j_2})$

$(1) \cap (4):\ a^n b^{i_2}, (a^{n-1}b^{i_2}a, b^{i_2}b^{i_2})$

$(1) \cap (5):\ a^n b, (a^{n-i_1}ba^{i_1}, b^{i_2}b)$

$(1) \cap (6):\ a^n a^{-1}, (a^{n-1}, b^{i_2}a^{-1})$

$(2) \cap (2):\ b^{m+1}, (a^{i_1}b, ba^{i_1})$

$(2) \cap (8):\ b^m b^{-1}, (a^{i_1}b^{-1}, b^{m-1})$

$(3) \cap (2):\ a^{j_1}b^m, (bab^{m-j_2}, a^{j_1}a^{i_1})$

$(3)\cap(4):\ a^{j_1}b^{i_2},\ (bab^{i_2-j_2}, a^{j_1-1}b^{i_2}a)$ $\qquad$ $(3)\cup(4):\ a^{j_1}b^{j_2},\ (a^{j_1-1}b^{i_2}ab^{j_2-i_2}, ba)$

$(3)\cup(5):\ a^{j_1}b^{j_2},\ (a^{j_1-i_1}ba^{i_1}b^{j_2-1}, ba)$ $\qquad$ $(3)\cap(8):\ a^{j_1}b^{i_2}b^{-1},\ (bab^{-1}, a^{j_1}b^{j_2-1})$

ve

$(4)\cap(2):\ ab^{m},\ (b^{i_2}ab^{m-i_2}, aa^{i_1})$ $\qquad$ $(4)\cap(8):\ ab^{i_2}b^{-1},\ (b^{i_2}ab^{-1}, ab^{i_2-1})$

$(5)\cap(2):\ a^{i_1}b^{m},\ (ba^{i_1}b^{m-1}, a^{i_1}a^{i_1})$ $\qquad$ $(5)\cap(3):\ a^{i_1}b^{j_2},\ (ba^{i_1}b^{j_2-1}, a^{i_1-j_1}ba)$

$(5)\cap(4):\ a^{i_1}b^{i_2},\ (ba^{i_1}b^{i_2-1}, a^{i_1-1}b^{i_2}a)$ $\qquad$ $(5)\cap(8):\ a^{i_1}bb^{-1},\ (ba^{i_1}b^{-1}, a^{i_1}b^{i_2}a)$

$(6)\cap(7):\ aa^{-1}a,\ (a, a)$ $\qquad$ $(7)\cap(1):\ a^{-1}a^{n},\ (a^{n-1}, a^{-1}b^{i_2})$

$(7)\cap(3):\ a^{-1}a^{j_1}b^{j_2},\ (a^{j_1-1}b^{j_2}, a^{-1}ba)$ $\qquad$ $(7)\cap(5):\ a^{-1}a^{i_1}b,\ (a^{i_1-1}b, a^{-1}ba^{i_1})$

$(7)\cap(6):\ a^{-1}aa^{-1},\ (a^{-1}, a^{-1})$ $\qquad$ $(8)\cap(9):\ bb^{-1}b,\ (b, b)$

$(9)\cap(2):\ b^{-1}b^{m},\ (b^{m-1}, b^{-1}a^{i_1})$ $\qquad$ $(9)\cap(8):\ b^{-1}bb^{-1},\ (b^{-1}, b^{-1})$

biçimindedir. Sonlu adımda yukarıdaki bütün kritik çiftler çözülebilirdir. Bunlardan bazıları aşağıda gösterilmiştir.

$(1)\cap(3):a^{n}b^{j_2},\ (a^{n-j_1}ba, b^{i_2}b^{j_2}),$

$$a^{n}b^{j_2}\rightarrow\begin{cases} a^{n-j_1}ba\rightarrow b^{i_2}a^{-j_1}ba\rightarrow a^{-j_1}ba\rightarrow ba\\ b^{i_2}b^{j_2}\rightarrow b^{j_2}\rightarrow a^{j_1}b^{j_2}\rightarrow ba\end{cases}$$

$(3)\cup(5):\ a^{j_1}b^{j_2},\ (a^{j_1-i_1}ba^{i_1}b^{j_2-1}, ba),$

$$a^{j_1}b^{j_2}\rightarrow\begin{cases} a^{j_1-i_1}ba^{i_1}b^{j_2-1}\rightarrow a^{j_1}ba^{i_1}b^{j_2}\rightarrow a^{j_1}b^{j_2}ba^{i_1}\rightarrow baba^{i_1}\\ ba\rightarrow a^{i_1}bab\rightarrow baba^{i_1}\end{cases}$$

$(5)\cap(2):\ a^{i_1}b^{m},\ (ba^{i_1}b^{m-1}, a^{i_1}a^{i_1}),$

$$a^{i_1}b^{m}\rightarrow\begin{cases} ba^{i_1}b^{m-1}\rightarrow ba^{i_1}a^{i_1}\\ a^{i_1}a^{i_1}\rightarrow a^{i_1}a^{i_1}b\rightarrow a^{i_1}ba^{i_1}\rightarrow ba^{i_1}a^{i_1}\end{cases}$$

• 1. durumda $m\le i_1<n$ için, yeniden yazma kurallarının bütün çakışan kelimeleri ve kritik çiftleri;

$(1)\cap(1):\ a^{n+1},\ (ab^{i_2},b^{i_2}a)$ $\quad$ $(1)\cap(2):\ a^{n},\ (a^{n-i_1}b^{m},b^{i_2})$

$(1)\cap(3):\ a^{n}b^{j_2},\ (a^{n-j_1}ba,b^{i_2}b^{j_2})$ $\quad$ $(1)\cap(4):\ a^{n}b^{i_2},\ (a^{n-1}b^{i_2}a,b^{i_2}b^{i_2})$

$(1)\cap(5):\ a^{n}b^{m},\ (a^{n-1}b^{m}a,b^{i_2}b^{m})$ $\quad$ $(1)\cap(6):\ a^{n}a^{-1},\ (a^{n-1},b^{i_2}a^{-1})$

$(2)\cap(1):\ a^{n},\ (b^{m}a^{n-i_1},b^{i_2})$ $\quad$ $(2)\cap(2):\ a^{i_1+1},\ (ab^{m},b^{m}a)$

$(2)\cap(3):\ a^{i_1}b^{j_2},\ (a^{i_1-j_1}ba,b^{m}b^{j_2})$ $\quad$ $(2)\cap(4):\ a^{i_1}b^{i_2},\ (a^{i_1-1}b^{i_2}a,b^{m}b^{i_2})$

$(2)\cap(5):\ a^{i_1}b^{m},\ (a^{i_1-1}b^{m}a,b^{m}b^{m})$ $\quad$ $(2)\cap(6):\ a^{i_1}a^{-1},\ (b^{m}a,a^{i_1-1})$

$(3)\cup(2):\ a^{j_1}b^{j_2},\ (b^{m}a^{j_1-i_1}b^{j_2},ba)$ $\quad$ $(3)\cap(4):\ a^{j_1}b^{i_2},\ (bab^{i_2-j_2},a^{j_1-1}b^{i_2}a)$

$(3)\cup(4):\ a^{j_1}b^{j_2},\ (a^{j_1-1}b^{i_2}ab^{j_2-i_2},ba)$ $\quad$ $(3)\cap(5):\ a^{j_1}b^{m},\ (a^{j_1-1}b^{m}a,bab^{m-j_2})$

$(3)\cap(8):\ a^{j_1}b^{i_2}b^{-1},\ (bab^{-1},a^{j_1}b^{j_2-1})$ $\quad$ $(4)\cap(8):\ ab^{i_2}b^{-1},\ (b^{i_2}ab^{-1},ab^{i_2-1})$

ve

$(5)\cup(4):\ ab^{m},\ (b^{i_2}ab^{m-i_2},b^{m}a)$ $\quad$ $(5)\cap(8):\ ab^{m}b^{-1},\ (b^{m}ab^{-1},ab^{m-1})$

$(6)\cap(7):\ aa^{-1}a,\ (a,a)$ $\quad$ $(7)\cap(1):\ a^{-1}a^{n},\ (a^{n-1},a^{-1}b^{i_2})$

$(7)\cap(2):\ a^{-1}a^{i_1},\ (a^{i_1-1},a^{-1}b^{m})$ $\quad$ $(7)\cap(3):\ a^{-1}a^{j_1}b^{j_2},\ (a^{j_1-1}b^{j_2},a^{-1}ba)$

$(7)\cap(4):\ a^{-1}a^{n}b,\ (a^{n-1}b,a^{-1}ba^{n})$ $\quad$ $(7)\cap(5):\ a^{-1}a^{i_1}b,\ (a^{i_1-1}b,a^{-1}ba^{i_1})$

$(7)\cap(6):\ a^{-1}aa^{-1},\ (a^{-1},a^{-1})$ $\quad$ $(8)\cap(9):\ bb^{-1}b,\ (b,b)$

$(9)\cap(8):\ b^{-1}bb^{-1},\ (b^{-1},b^{-1})$

biçimindedir. Sonlu adımda yukarıdaki bütün kritik çiftler çözülebilirdir.

$\bullet$ 2. durumda $n < i_2 < m$ için, yeniden yazma kurallarının bütün çakışan kelimeleri ve kritik çiftleri;

$(1)\cap(1):\ b^{i_2+1},(a^n b, ba^n)$ $\qquad$ $(1)\cap(2):\ b^m,(a^n b^{m-i_2}, a^{i_1})$

$(1)\cap(8):\ b^{i_2}b^{-1},(a^n b^{-1}, b^{i_2-1})$ $\qquad$ $(2)\cap(1):\ b^m,(b^{m-i_2}a^n, a^{i_1})$

$(2)\cap(2):\ b^{m+1},(a^{i_1}b, ba^{i_1})$ $\qquad$ $(2)\cap(8):\ b^m b^{-1},(a^{i_1}b^{-1}, b^{m-1})$

$(3)\cup(1):\ a^{j_1}b^{j_2},(a^{j_1}b^{j_2-i_2}a^n, ba)$ $\qquad$ $(3)\cap(1):\ a^{j_1}b^{i_2},(a^{j_1}a^n, bab^{i_2-j_2})$

$(3)\cap(2):\ a^{j_1}b^m,(bab^{m-j_2}, a^{j_1}a^{i_1})$ $\qquad$ $(3)\cup(5):\ a^{j_1}b^{j_2},(a^{j_1-i_1}ba^{i_1}b^{j_2-1}, ba)$

$(3)\cap(8):\ a^{j_1}b^{i_2}b^{-1},(bab^{-1}, a^{j_1}b^{j_2-1})$ $\qquad$ $(4)\cap(1):\ a^n b^{i_2},(ba^n b^{i_2-1}, a^n a^n)$

$(4)\cap(2):\ a^n b^m,(ba^n b^{m-1}, a^n a^{i_1})$ $\qquad$ $(4)\cap(3):\ a^n b^{j_2},(ba^n b^{j_2-1}, a^{n-j_1}ba)$

$(4)\cup(5):\ a^n b,(a^{n-i_1}ba^{i_1}, ba^n)$ $\qquad$ $(4)\cap(8):\ a^n bb^{-1},(ba^n b^{-1}, a^n)$

ve

$(5)\cap(1):\ a^{i_1}b^{i_2},(ba^{i_1}b^{i_2-1}, a^{i_1}a^n)$ $\qquad$ $(5)\cap(2):\ a^{i_1}b^m,(ba^{i_1}b^{m-1}, a^{i_1}a^{i_1})$

$(5)\cap(3):\ a^{i_1}b^{j_2},(ba^{i_1}b^{j_2-1}, a^{i_1-j_1}ba)$ $\qquad$ $(5)\cap(8):\ a^{i_1}bb^{-1},(ba^{i_1}b^{-1}, a^{i_1})$

$(6)\cap(7):\ aa^{-1}a,(a,a)$ $\qquad$ $(7)\cap(3):\ a^{-1}a^{j_1}b^{j_2},(a^{j_1-1}b^{j_2}, a^{-1}ba)$

$(7)\cap(4):\ a^{-1}a^n b,(a^{n-1}b, a^{-1}ba^n)$ $\qquad$ $(7)\cap(5):\ a^{-1}a^{i_1}b,(a^{i_1-1}b, a^{-1}ba^{i_1})$

$(7)\cap(6):\ a^{-1}aa^{-1},(a^{-1}, a^{-1})$ $\qquad$ $(8)\cap(9):\ bb^{-1}b,(b,b)$

$(9)\cap(1):\ b^{-1}b^{i_2},(b^{i_2-1}, b^{-1}a^n)$ $\qquad$ $(9)\cap(2):\ b^{-1}b^m,(b^{m-1}, b^{-1}a^{i_1})$

$(9)\cap(8):\ b^{-1}bb^{-1},(b^{-1}, b^{-1})$

biçimindedir. Sonlu adımda yukarıdaki bütün kritik çiftler çözülebilirdir. İki-yanlı çapraz çarpımın $C_n\,\#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'}\,C_m$ yeniden yazma sistemi Noetherian ve confluent olduğundan tamdır. ■

4. 3. 1. Teorem'de belirtilen koşullar altında iki-yanlı çapraz çarpımın $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ elemanlarının normal formu ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

4. 3. 2. Sonuç: Sırasıyla, $0 \le i_1 < m < n,\quad m \le i_1 < n,\quad 0 \le i_2 \le n < m$ ve $n < i_2 < m$ aralıklarına karşılık gelen $u_1, u_2, u_3, u_4 \in C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ kelimelerinin normal formları $C(u_1),\ C(u_2),\ C(u_3),\ C(u_4)$ aşağıdaki formlara sahiptir.

- $C(u_1) = b^{k_1}a^{l_1}b^{k_2}a^{l_2}...b^{k_s}a^{l_s}\ \left(0 \le k_1 \le m-1, 0 \le l_\delta \le i_1 - 1(1 \le \delta \le s), 0 \le k_\varepsilon \le i_2 - 1(2 \le \varepsilon \le s)\right).$
- $C(u_2) = b^{k_1}a^{l_1}b^{k_2}a^{l_2}...b^{k_s}a^{l_s}\ (0 \le l_\delta \le j_1 - 1(1 \le \delta \le s), 0 \le k_\varepsilon \le i_2 - 1(1 \le \varepsilon \le s)).$
- $C(u_3) = b^{k_1}a^{l_1}b^{k_2}a^{l_2}...b^{k_s}a^{l_s}\ (0 \le k_1 \le m-1, 0 \le l_\delta \le i_1 - 1(1 \le \delta \le s), 0 \le k_\varepsilon \le i_2 - 1(2 \le \varepsilon \le s)).$
- $C(u_4) = b^{k_1}a^{l_1}b^{k_2}a^{l_2}...b^{k_s}a^{l_s}\ (0 \le l_\delta \le i_1 - 1(1 \le \delta \le s-1), 0 \le k_\varepsilon \le i_2 - 1(1 \le \varepsilon \le s), l_s \in \mathbb{Z}).$

4. 3. 1. Teorem ve 4. 3. 2. Sonuç'tan faydalanarak bir diğer önemli sonuç aşağıda verilmiştir.

4. 3. 3. Sonuç: İki-yanlı çapraz çarpım $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ için kelime problemi çözülebilirdir.

4. 4. Devirli Gruplar için İki-Yanlı Çapraz Çarpımlarda Büyüme Serileri

Bu alt bölümde, 4. 3 alt bölümde elde edilen iki-yanlı çapraz çarpımın normal formları kullanılarak büyüme serileri hesaplanacaktır.

4. 3. 2. Sonuçta verilen normal form yapısı kullanılarak aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

4. 4. 1. Teorem: İki-yanlı çapraz çarpımın $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ büyüme serileri aşağıda verilmiştir.

- $C(u_1)$ için, $\beta_1(z) = \dfrac{(1+(m-1)z)(1+(i_1-1)z)}{1-\left[(1+(i_1-1)z)(1+(i_2-1)z)\right]}$ dir.

- $C(u_2)$ için, $\beta_2(z) = \dfrac{1}{1-\left[(1+(i_2-1)z)(1+(j_1-1)z)\right]}$ dir.

- $C(u_3)$ için, $\beta_3(z) = \dfrac{(1+(m-1)z)(1+(i_1-1)z)}{1-\left[(1+(i_1-1)z)(1+(i_2-1)z)\right]}$ dir.

$\bullet C(u_4)$ için, $\beta_4(z) = \dfrac{(1+(i_2-1)z)(1+z)}{(z-1)\left[(i_1+i_2-2)z+(i_1-1)(i_2-1)z^2\right]}$ dir.

İspat: $0 \le i_1 < m < n$, $m \le i_1 < n$, $0 \le i_2 \le n < m$ ve $n < \mathrm{i}_2 < m$ aralıklarına karşılık gelen normal formları sırasıyla $C(u_1)$, $C(u_2)$, $C(u_3)$ ve $C(u_4)$ olan iki-yanlı çapraz çarpımın $C_n \#_{\alpha,\alpha'}^{f,f'} C_m$ büyüme serilerini ayrı ayrı hesaplayalım.

- İlk olarak, $0 \le i_1 < m < n$ ve $0 \le i_2 \le n < m$ aralıklarını düşünelim. 4. 3. 2. Sonuçta verildiği gibi bu aralıklar altında normal form $C(u_1) = C(u_3) = b^{k_1}a^{l_1}b^{k_2}a^{l_2}...b^{k_s}a^{l_s}$ yapısındadır. Burada, $0 \le k_1 \le m-1$, $0 \le l_\delta \le i_1 - 1$ $(1 \le \delta \le s)$ ve $0 \le k_\varepsilon \le i_2 - 1$ $(2 \le \varepsilon \le s)$ dir. Bu normal formun büyüme serisi $\beta_1(z) = \beta_3(z)$, normal formadaki her kelimenin büyüme serilerinin ayrı ayrı çarpımı alınarak hesaplanabilir (Scott, 2007). Yani, $\beta_1(z) = \beta_3(z)$ büyüme serisi b^{k_1} $(0 \le k_1 \le m-1)$, $a^{l_1}b^{k_2}a^{l_2}...b^{k_s}$ $(0 \le l_\delta \le i_1 - 1$ $(1 \le \delta \le s-1)$, $0 \le k_\varepsilon \le i_2 - 1$ $(2 \le \varepsilon \le s))$ ve a^{l_s} $(0 \le l_s \le i_1 - 1)$ kelime formlarının büyüme serilerinin ayrı ayrı çarpımına eşittir. b^{k_1} $(0 \le k_1 \le m-1)$ ve a^{l_s} $(0 \le l_s \le i_1 - 1)$ formundaki kelimelerin büyüme serisi sırasıyla $1+(m-1)z$ ve $1+(i_1-1)z$ biçimindedir. Diğer taraftan, $a^{l_1}b^{k_2}a^{l_2}...b^{k_s}$ $(0 \le l_\delta \le i_1 - 1$ $(1 \le \delta \le s-1)$, $0 \le k_\varepsilon \le i_2 - 1$ $(2 \le \varepsilon \le s))$ formundaki kelimenin büyüme serisi ise, $\sum_{t \ge 0}\left[(1+(i_1-1)z)(1+(i_2-1)z)\right]^t$ dir. Böylece, büyüme serisi $\beta_1(z) = \beta_3(z)$,

$$\begin{aligned}\beta_1(z) = \beta_3(z) &= (1+(m-1)z)\sum_{t \ge 0}\left[(1+(i_1-1)z)(1+(i_2-1)z)\right]^t(1+(i_1-1)z) \\ &= \frac{(1+(m-1)z)(1+(i_1-1)z)}{1-\left[(1+(i_1-1)z)(1+(i_2-1)z)\right]}\end{aligned}$$

biçimindedir.

- Şimdi, $m \le i_1 < n$ aralığına karşılık gelen 4. 3. 2. Sonuçta verilen $C(u_2) = b^{k_1}a^{l_1}b^{k_2}a^{l_2}...b^{k_s}a^{l_s}$ normal formunu düşünerek büyüme serisini hesaplayalım. Burada, $0 \le l_\delta \le j_1 - 1$ $(1 \le \delta \le s)$ ve $0 \le k_\varepsilon \le i_2 - 1$ $(1 \le \varepsilon \le s)$ dir. Bu normal formun büyüme serisi

$$\beta_2(z)=\sum_{t\geq 0}\left[(1+(i_2-1)z)(1+(j_1-1)z)\right]^t=\frac{1}{1-\left[(1+(i_2-1)z)(1+(j_1-1)z)\right]}$$

biçimindedir.

- Son olarak, $n<i_2<m$ aralığına karşılık gelen 4. 3. 2. Sonuçta verilen $C(u_4)=b^{k_1}a^{l_1}b^{k_2}a^{l_2}...b^{k_s}a^{l_s}$ normal formunu düşünerek büyüme serisini hesaplayalım. Burada, $0\leq l_\delta\leq i_1-1\ (1\leq\delta\leq s-1)$, $0\leq k_\varepsilon\leq i_2-1\ (1\leq\varepsilon\leq s)$ ve $l_s\in\mathbb{Z}$ dir. $b^{k_1}\ (0\leq k_1\leq i_2-1)$ ve $a^{l_s}\ (l_s\in\mathbb{Z})$ formundaki kelimelerin büyüme serisi sırasıyla $1+(i_2-1)z$ ve $\left(1+\sum_{k=0}^{\infty}2^k\right)$ biçimindedir. Diğer taraftan, $a^{l_1}b^{k_2}a^{l_2}...b^{k_s}$ $(0\leq l_\delta\leq i_1-1\ (1\leq\delta\leq s-1),\ 0\leq k_\varepsilon\leq i_2-1\ \ (2\leq\varepsilon\leq s))$ formundaki kelimenin büyüme serisi ise, $\sum_{t\geq 0}\left[(1+(i_1-1)z)(1+(i_2-1)z)\right]^t$ dir. Böylece, $\beta_4(z)$ büyüme serisi

$$\begin{aligned}\beta_4(z)&=(1+(i_2-1)z)\sum_{t\geq 0}\left[(1+(i_1-1)z)(1+(i_2-1)z)\right]^t\left(\frac{1+z}{1-z}\right)\\&=\frac{(1+(i_2-1)z)(1+z)}{(z-1)\left[(i_1+i_2-2)z+(i_1-1)(i_2-1)z^2\right]}\end{aligned}$$

biçimindedir. ■

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tezde elde edilen yeni sonuçlar 3. Bölümün 3. 3. ve 3. 4 Alt Bölümleri ile 4. Bölümde bulunmaktadır. Bu sonuçlar aşağıda verilmiştir.

3. 3. Alt Bölümde, sonlu ve sonsuz devirli gruplar kullanılarak elde edilen çapraz çarpımların, tam yeniden yazma sistemi oluşturulup, bu çarpımların her birinin elemanlarının normal formu elde edilmiştir. Böylece, bu çapraz çarpımlar için kelime probleminin çözülebilir olduğu gösterilmiştir. 3. 4. alt bölümde ise, elde ettiğimiz çapraz çarpımların normal formlarından faydalanarak, bu çarpımlar için büyüme serileri hesaplanmıştır.

4. Bölümde; direkt, yarı direkt, çapraz çarpımı kapsayan yeni bir çarpım, iki-yanlı çapraz çarpım, tanımlanmış ve bu çarpımın hangi koşullar altında grup özelliğini sağladığı incelenmiştir. Daha sonra, sonlu devirli gruplar düşünülerek, bu yeni çarpımın sunuşu elde edilmiştir. Bu sunuş kullanılarak bu yeni çarpım için tam yeniden yazma sistemi elde edilmiş ve bu çarpımın elemanlarının normal formunun yapısı belirlenmiştir. Böylece kelime probleminin çözülebilirliği elde edilmiştir. Bu bölümde yapılan çalışmalar, SCIE kapsamındaki bir dergi olan *Filomat*'ta "Two-Sided Crossed Products of Groups" başlığı ile 2016 yılında basılmıştır. 4. Bölümde ayrıca bu yeni çarpımın normal formu kullanılarak büyüme serileri hesaplanmıştır. Bu büyüme serileri ile 3. 3 ve 3. 4 alt bölümlerde elde edilen yeni sonuçlar ise, SCIE kapsamındaki bir dergiye "Growth Series of Crossed and Two-Sided Crossed Products of Cyclic Groups" başlığı ile sunulmuştur.

6. KAYNAKLAR

Abuhlail, J. Y.,2005. Duality Theorems for Crossed Products over Rings. *Journal of Alg.*, 288 (1), 212-240.

Agore, A. L. ve Militaru, G., 2008. Crossed Product of Groups, Applications. *Arab. J. Sci. Eng.* 33, 1-17.

Agore, A. L. ve Fratila, D., 2010. Crossed Product of Cyclic Groups. *Czechoslov. Math. J.* 60(135), 889-901.

Bridson, M. R., Burillo J. ve Elder, M., 2012. On Groups Whose Geodesic Growth is Polynomial. *Inter. J. of Alg. and Comp*, 22(5).

Ateş, F. ve Çevik, A. S., 2009. Knit Products of Some Groups and Their Applications. *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 2, 1-12.

Ateş, F., 2009. Some New Monoid and Group Constructions Under Semidirect Products. *Ars Combinatoria*, 91, 203-218.

Benson, M.,1987. *On the Rational Growth of Virtually Nilpotent Groups in Combinatorial Group Theory and Topology*. Princeton University Press, 185-196.

Book, R. V., 1987. Thue Systems as Rewriting Systems. *J. Symbolic Computation*, 3(1-2) 39-68.

Book, R. V. ve Otto, F., 1993. *String Rewriting Systems*. Springer-Verlag, New York.

Brin, M. G., 2005. On the Zappa-Szep Product. *Comm. Algebra*, 33, 393-424.

Cannon, J., 1984. The Combinatorial Structure of Compact Discrete Hyperbolic Groups. *Geometriae Dedicata*, 16, 123-148.

Carbani,G., Guccione, J. A. ve Guccione, J. J.,2010. Cyclic Homology of Hopf Crossed Products. *Adv. in Math.*, 223(3), 840-872.

Chiswell, I. M., 1994. The Growth Series of HNN Extensions. *Comm. Algebra*, 22(8), 2969-2981.

Clifford, A. H. ve Preston, G. B.,1967. *The Algebraic Theory of Semigroups*. Amer. Math. Soci., Volume I, II.

Cohen, D. E., 1989. *Combinatorial Group Theory: Topological Approach*. Cambridge University Press.

Çetinalp, E. K., Karpuz, E. G. , Ateş, F. ve Çevik, A. S.,2016. Two-Sided Crossed Products of Groups. *Filomat*, 30 (4), 1005-1012.

Çevik, A. S., 2001. The P-Cockcroft Property of Central Extensions of Groups. *Comm. Algebra*, 29(3),1085-1094.

Çevik, A. S., 2003. The P-Cockcroft Property of Semi-Direct Products of Monoids. *Int. J. of Alg. and Comp.*, 13(1), 1-16.

Çevik, A. S., 2012. *Soyut Cebir Özel Konular*, Nobel Akademik Yayıncılık.

Edjvet, M. ve Johnson, D. L., 1992. The Growth of Certain Amalgamated Free Products and HNN-Extensions. *J. Austral. Math. Soc.(Series A),* 52, 285-298.

Emin, A., Ateş, F., İkikardeş, S. ve Cangül, İ. N., 2013. A New Monoid Construction under Crossed Products. *Journal of Inequalities and Applications*, 244.

Floyd, W. ve Plotnik, S., 1987. Growth Functions on Fuchsian Groups and the Euler Characteristic, *Inv. Math.,* 88, 1-29.

Grigorchuk, R. I., 1988. Semigroups with Cancellation of the Power Degree Growth. *Mat. Zametki*, 43 (3-4), 175-183.

Grigorchuk, R. I., 1988. Growth Function, Rewriting System, Euler Characteristic. *Mat. Zametki*, 43(5), 653-668.

Grigorchuk, R. I. ve Kurchanov, P. F., 1993. Some Questions of Group Theory Related to Geometry in Algebra VII. *A. N. Parshin and I. R. Shafarevich, Eds., Springer*, 167-232.

Grigorchuk, R. I. ve Nagnibeda, T., 1997. Complete Growth Functions of Hyperbolic Groups. *Inv. Math*. 130, 159-188.

Grigorchuk, R. I. ve Harpe, P. de la, 2001. On-Relator Groups of Exponential Growth have Uniformly Exponential Growth. *Maths. Notes* 69, no. 3-4, 575-577.

Grundling, H. ve Neeb, K. H.,2014. Crossed Products of C^*-Algebras for Singular Actions. *Journal of Func. Analysis*, 266 (8), 5199-5269.

Harpe, P. de la, 2000. *Topics in Geometric Group Theory*, Chicago Lectures in Mathematics.

Johnson, D. L., 1990. *Presentations of Groups*. L. M. S. Lecture Note Series, Cambridge University Press, 15.

Johnson, D. L., 1991. *Rational Growth of Wreath Products*. L. M. S. Lecture Note Series, Cambridge University Press 160, 309-315.

Karpuz, E. G., 2006. Grup ve Monoid Cebirsel Yapısında Karar Verme Problemleri. *Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Balıkesir.

Karpuz, E. G., 2009. Geometrik Metotlar Altında Kelime Problemi ve Sonuçları. *Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Balıkesir.

Karpuz, E. G. ve Çetinalp, E. K., 2016. Growth Series of Crossed and Two-Sided Crossed Products of Cyclic Groups (SCIE kapsamındaki bir dergiye gönderildi).

Kirchberg, E. ve Vaillant, G., 1992. On C^*-Algebras having Linear, Polynomial and Subexponential Growth. *Inv. Math.*, 108, 635-652.

Lyndon, C. R. ve Schupp, E. P., 1977. *Combinatorial Group Theory*. Springer-Verlag, Berlin Heildberg, New York.

Magnus, N., Karrass, A. ve Solitar. D., 1976. *Combinatorial Group Theory*. Dover Publications, Inc, New York.

Mann, A., 2011. The Growth of Free Products. *Journal of Algebra*, 326, 208-217.

Miller, F. C., 1992. *Decision Problems For Groups-Survey and Reflections in Algorithms and Classification in Combinatorial Group Theory*. MSRI Publications, Springer-Verlag, 23, 1-59.

Milnor, J., 1968. A Note on Curvature and Fundamental Group. *J. Differ. Geom.*, 2,1-7.

Parkes, D. W. ve Thomas, R. M., 2000. Syntactic Monoids and Word Problems. *Arab. J. Sci. Eng.*, 25, 81.

Rudkovskii, M. A., 1997. Twisted Product of Lie Groups. *Siberian Math. Journal*, 38, 1120- 1129.

Ruškuc, N., 1996. Semigroup Presentations. *Ph. D. Thesis, University of St Andrews,* St Andrews.

Rotman, J. J.,1984. *An Introduction to the Theory of Groups*. Wm. C. Brown Publishers, Dubuque, United States of America.

Rozenberg, G. ve Salomaa, A., 1980. *The Mathematical Theory of L Systems.* Academic Press.

Scott, N., 2007. Growth of Finitely Generated Groups. *Honours Thesis, The University of Melbourne,* Avusturalya.

Shapiro, M., 1989. A Geometric Approach to Growth and Almost Convexity in Some Nilpotent Groups. *Mathematische Annalen,* 285, 601-624.

Shneerson, L. M. ve Easdown, D., 1996. Growth and Existence of Identities in a Class of Finitely Presented Inverse Semigroup with Zero. *Inter. J. of Alg. and Comp* 6, 105-120.

Sims, C. C., 1994. *Computation with Finitely Presented Group.* Cambridge University Press.

Takebayashi, T., 2003. Poincare series of the Weyl Groups of the Elliptic Root Systems $A_1^{(1,1)}$, $A_1^{(1,1)*}$ and $A_2^{(1,1)}$. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 17(3), 211.

Takebayashi, T., 2005. The Growth Series of the n-Extended Affine Weyl Group of Type A_1. *Proc. Japan Acad*., 81 , Ser. A , 51-56.

Takebayashi, T., 2006. The Growth Series of the 2-Extended Affine Weyl Group of Type $A_2^{(1,1)}$. *Journal of Algebra*, 305, 1071-1083.

Trofimov, V. I. , 1985. Graphs with Polynomial Growth. *Math. USSR Sb.*, 51, 405-407.

ÖZ GEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	: Esra KIRMIZI ÇETİNALP
Doğum Tarihi ve Yer	: 20.07.1989 / Küçükçekmece
Medeni Hali	: Evli
Yabancı Dili	: İngilizce
Telefon	: 0338 226 2151/ 3797
e-mail	: esrakirmizi@kmu.edu.tr

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi	2016
Lisans	Balıkesir Üniversitesi	2011
Lise	Kadriye Moroğlu Lisesi	2007

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2013-Devam ediyor	Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Kamil Özdağ Fen Fakültesi Matematik Bölümü	Araştırma Görevlisi

Uluslararası Hakemli Dergilerde Yayımlanan Makaleler (SCI, SCI-E):

1. Ateş, F., Cangül, İ. N**., Çetinalp, E. K.,** Çevik, A. S., Karpuz, E. G., "On Commutator and Power Subgroups of Some Coxeter Groups", *Applied Math. and Information Sciences,* (AMIS), **10**(2) (2016), 1-7.

2. Çetinalp, E. K., Karpuz, E. G., Ateş, F., Çevik, A. S., "Two-Sided Crossed Product of Groups", *Filomat*, **30**(4) (2016), 1005-1012.

3. Karpuz, E. G., **Çetinalp, E. K**., "Growth Series of Crossed and Two-Sided Crossed Products of Cyclic Groups", (dergiye gönderildi).

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitaplarında Basılan Bildiriler

1. Çetinalp, E. K., **"***Scheier Method",* International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal, June 23-26, 2014, Bursa, TURKEY (konuşmacı.)

2. Çetinalp, E. K., Karpuz, E. G., "*Rewriting System and Complete Growth Series of Some Group Structures",* ICRAPAM 2015, June 3-6, 2015, İstanbul, TURKEY (konuşmacı).

3. Karpuz, E. G**., Çetinalp, E. K.,** "*Two-Sided Crossed Product of Groups",* ICJMS 2015, May 15-19, 2015, Antalya, TURKEY (konuşmacı).

4. Çetinalp, E. K., "*Growth Series and Rewriting System* for *Two-Sided Crossed Product of Cyclic Groups",* 91th Workshop on General Algebra, February 5-7, 2016, Brno, CZECH REPUBLIC (konuşmacı).

5. Çetinalp, E. K., "*Rewriting Systems for Crossed and Two-Sided Crossed Product of Groups*", Ischia Group Theory, 29 March-2 April, 2016, Napoli, ITALY (Poster).

6. Çetinalp, E. K., *"Growth Series for Crossed and Two-Sided Crossed Product of Groups",* 4th Cemal Koç ALgebra Days, 22-24 April, 2016, ODTÜ, Ankara, TURKEY (Poster).

Projeler

1) "*Bazı Weyl Grupların Gröbner-Shirshov Tabanları, Yeniden Yazma Sistemleri ve Büyüme Serileri*", Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeler Birimi, **Proje No: 16-M-13**, Yardımcı Araştırmacı (Haziran 2013-Ocak 2015).
2) *"Gröbner-Shirshov Taban Teorisi, Kelime ve Eşlenik Problemleri*", **TÜBİTAK**, 3501 Ulusal Genç Araştırmacı Kariyer Geliştirme Programı **Proje No: 113F294** (Nisan 2014-Nisan 2016), Bursiyer.
3) *"Bazı Grup ve Monoid Yapıları için Karar Verme problemleri ve Büyüme Serileri",* Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeler Birimi, **Proje No: 08-YL-15**, Yardımcı Araştırmacı (Nisan 2015-Nisan 2016).
4) *"Grupların Çapraz Çarpımı ve Cebirsel Özellikleri",* Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeler Birimi, **Proje No: 17-M-16**, Yardımcı Araştırmacı (Nisan 2016-Haziran 2017).