T. C.

KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKSİMUM CEBİRİNDE BAZI ÖZEL MATRİSLERİN NORMLARI VE ŞART SAYILARI İÇİN SINIRLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Meltem DOĞU

Anabilim Dalı : Matematik

Programı : Cebir ve Sayılar Teorisi

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ahmet İPEK

KARAMAN – 2017

TEZ ONAYI

Meltem DOĞAN tarafından hazırlanan "**Maksimum Cebirinde Bazı Özel Matrislerin Normları ve Şart Sayıları İçin Sınırlar**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ahmet İPEK

Eş Danışman:

Juri Üyeleri	İmza:
Doç. Dr. Ahmet İPEK	
Doç. Dr. Kamil ARI	
Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN	

Tez Savunma Tarihi: 14 / 09 / 2017

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Kamil ARI
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyularak bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulmuştur. Tezin içerdiği yenilik ve sonuçlar başka bir yerden alınmamış olup kullanılan verilerde tahrifat yapılmamıştır. Tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Meltem DOĞU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MAKSİMUM CEBİRİNDE BAZI ÖZEL MATRİSLERİN NORMLARI VE ŞART SAYILARI İÇİN SINIRLAR

Meltem DOĞU

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet İPEK

Eylül, 2017, 48 sayfa

Tez, üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu üzerine literatür bilgisi, tezin amaç ve kapsamı verilmektedir. Bu bölümde ayrıca, maksimum toplam cebiri üzerine tez çalışmasında gerekli temel tanımlar, kavramlar ve teoremler sunulmaktadır. Tezin ikinci bölümünde, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, Fermat ve Mersenne sayıları ile oluşturulan devirli matrislerin bazı normları hesaplanmaktadır. Son bölümde, tezde elde edilen sonuçlar ifade edilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Maksimum toplam cebiri, Maksimum toplam matris cebiri, Matris normları, Sayı dizileri.

ABSTRACT

MASTER THESİS

BOUNDS FOR NORMS AND CONDITION NUMBERS OF SOME MATRICES IN THE MAX ALGEBRA

Meltem DOĞU

Karamanoğlu Mehmetbey University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr.Ahmet İPEK

September, 2017, 48 pages

This thesis consists of three sections. In the first section, the literature knowledge on the topic of thesis, the aim and scope of this thesis have been given. In this section, also the basic definitions, concepts and theorems required for this thesis on maximum plus algebra have been presented. In the second section of this thesis, some norms for circulant matrices with Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas, Fermat and Mersenne numbers have been computed. In the last section, the results obtained in this thesis have been expressed.

Keywords: Max plus algebra, Max plus matrix algebra, Matrix norms, Number sequences.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamın planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Doç. Dr. Ahmet İPEK' e, yüksek lisans eğitimim boyunca yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Kamil ARI, Doç. Dr. Eylem GÜZEL KARPUZ, Doç. Dr. Nihal YOKUŞ ve Doç. Dr. Ali GELİŞKEN hocalarıma, değerli arkadaşım Esra KIRMIZI ÇETİNALP' e ve hayattaki en büyük şansım olan sevgili aileme desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Meltem DOĞU

Eylül, 2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklamalar**
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{R}_{\max}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$
$\mathbb{R}_{\min}$	$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$S^{\oplus}$	$(w,-\infty)\ ; w \in \mathbb{R}$
$S^{\odot}$	$\{\odot w \mid w \in S^{\oplus}\}$
$S^{\bullet}$	$\{w^{\bullet} \mid w \in S^{\oplus}\}$
S^{V}	$S^{\oplus} \cup S^{\odot}$
ε	Maksimum Toplamsal Birim
$\overline{\oplus}$	Maksimum Toplam Operatörü
$\underline{\oplus}$	Minimum Toplam Operatörü
$\otimes$	Maksimum Çarpım Operatörü
$R_{A,b}$	İndirgenmiş Fark Matrisi
$D_{A,b}$	Fark Matrisi
$\lvert u \rvert_{\oplus}$	Mutlak Sınır
$(.)^{\bullet}$	Denge Operatörü
∇	Denklik Operatörü
$\mu(A)$	Maksimum Ortalama Devri
$\lVert \cdot \rVert_{\oplus}$	Maksimum Cebirsel Norm

1. GİRİŞ

$\overline{\mathbb{R}}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ olmak üzere $a, b \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}$ için $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$' de tanımlanan $a \oplus b = \max\{a, b\}$ ve $a \otimes b = a + b$ işlemlerine göre bir cebirsel yapı olan $(\overline{\mathbb{R}}_{\max}, \oplus, \otimes)$ yarı halka yapısı maksimum toplam cebiri olarak isimlendirilmektedir. $(\overline{\mathbb{R}}_{\max}, \oplus, \otimes)$ cebiri, matematiğin çoğu alanında yer alan idempotent yarı halkalardan biridir. Maksimum toplam cebiri işlemlerinin birleşmeli ve değişmeli olması ayrıca dağılma özelliklerini sağlaması ile alışılmış cebirdeki ilgiyi görmüş bir cebirdir.
$(\overline{\mathbb{R}}_{\max}, \oplus, \otimes)$ cebiri kombinatorik, optimizasyon, matematiksel fizik ve cebirsel geometri gibi bilimin bir çok alanında uygulama alanına sahiptir. Ayrıca bu cebir artık günümüzde kontrol teoride, makine programlamada, endüstriyel sistemlerde, telekominikasyon ağlarında, paralel işleme sistemlerinde ve trafik kontrolünde çok sık kullanım alanlarına sahiptir.

Adı geçen alanlarda uygulamalardan elde edilen bir çok denklem alışılmış cebirde lineer olmayan denklemler olarak karşımıza çıkarken aynı denklemler bu cebirde oluşturulduklarında lineer olmaktadır. Bu durum çoğu alanlarda bu cebirin tercihinin birincil sebebi olarak görülmektedir.

Klasik lineer cebirde kullanılan çoğu teorem ve teknikler, maksimum lineer cebirinde de aynı şekilde yer alabilmektedir. Bu da maksimum cebirinin tercihi için ikinci sebep olarak kabul edilmektedir.

Shutter (2000), Gaubert (1997) ve Litvinov vd. (2001) maksimum cebirinin kontrol teoride, makine programlamada, endüstriyel sistemlerde, telekominikasyon ağlarında, paralel işletme sistemlerinde ve trafik kontrolünde kullanımlarına değinmişlerdir.

Bu tez çalışmasında, maksimum toplam cebiri üzerine literatürde yer alan bazı temel tanımlar, teoremler, özellikler ve kavramlar verilmekte, literatürde yer alan bilgilerin bir derlemesi olarak, bu cebirde oluşturulan denklemler ve denklem sistemleri, çözümlerinin varlığı, tekliği ve sonsuz çoklukta olmaları yönünden irdelenmekte, maksimum toplam cebirinde bazı özel sayı dizilerinin elemanları ile oluşturulan devirli matrislerin bazı normları matematiksel işlemlerle hesaplanmaktadır.

1. 1. Maksimum Toplam Cebiri

Tezin bu bölümü, maksimum toplam cebiri üzerine tezde kullanılan temel tanımlar, kavramlar ve özelliklerin verildiği ve genellikle Cuninghame-Green (1979), Butkovic (1994) ve Andersen (2002) tarafından yazılan literatür kaynaklarından faydalanılarak oluşturulan bir derleme niteliği taşımaktadır.

Maximum toplam cebiri; $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ olmak üzere $x, y \in \mathbb{R}_{\max}$ için,

$$x \overline{\oplus} y = \max(x, y)$$

$$x \otimes y = x + y$$

şeklinde tanımlanan reel sayılardaki standart toplam ve çarpım operatörleri yerine sırasıyla maksimum ve standart toplama operatörlerinin kullanıldığı cebirsel bir yapıdır. $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes)$ cebirsel yapısına maksimum toplam cebiri denir (Andersen, 2002; Gürsoy, 2013).

Çalışmada, maksimum toplam cebiri M-T cebiri olarak isimlendirilecektir.

$z = -\infty$ olarak seçilirse, her $x \in \mathbb{R}_{\max}$ için $x \overline{\oplus} z = x$ olmaktadır. Böylece maksimum cebirinin toplamsal birimi $"-\infty"$ olarak belirlenmektedir. Maksimum olarak tanımlanan $\overline{\oplus}$ operatörü birleşmeli ve değişmelidir. Bundan dolayı $(\mathbb{R}_{\max}, \overline{\oplus})$ cebirsel yapısı değişmeli yarı gruptur. $x \in \mathbb{R}_{\max}$ için toplamsal ters yalnız ve ancak x elemanının $-\infty$ seçilmesiyle sağlandığından dolayı $(\mathbb{R}_{\max}, \overline{\oplus})$ cebirsel yapısı grup değildir (Andersen, 2002; Gürsoy 2013).

$a, b \in \mathbb{R}_{\max}$ için $a \overline{\oplus} x = b$ denklemini irdeleyelim. $a \overline{\oplus} x = b$'nin çözümü $x = b$ ise yalnız ve ancak $a \leq b$ için sağlanır. Eğer $a = b$ ise x çözümü b'ye eşit ya da daha küçüktür. Son olarak $a > b$ ise $a \overline{\oplus} x = b$ denkleminin çözümü yoktur (Andersen, 2002; Gürsoy 2013). $a \oplus x = b$ denkleminin çözümünün $x = -\infty$ 'a eşit olması için a elemanı yalnızca $"-\infty"$ olarak seçilebilir. Ayrıca $a \overline{\oplus} a = a$ özelliği her zaman sağlandığı için $\mathbb{R}_{\max}$ kümesinde $\overline{\oplus}$ operatörü altında bütün elemanlar idempotenttir.

$(\mathbb{R}_{\max}, \overline{\oplus})$ cebirsel yapısı değişmeli grup olmadığı için $(\mathbb{R}_{\max}, \overline{\oplus}, \otimes)$ değişmeli halka özelliği gösteremez. Ancak $(\mathbb{R}_{\max}, \overline{\oplus}, \otimes)$ değişmeli yarı halkadır (Gaubert, 1997).

Andersen (2002) tarafından sunulan tezde yer alan aşağıdaki teoremde $(\mathbb{R}_{\max}, \overline{\oplus}, \otimes)$ yapısının bazı temel cebirsel özellikleri sunulmaktadır.

Teorem 1. 1. 1. $(\mathbb{R}_{\max}, \overline{\oplus}, \otimes)$ yapısında aşağıdaki önermeler doğrudur. ,

i. $(\mathbb{R}_{\max}, \overline{\oplus})$ değişmeli yarı gruptur.

ii. $(\mathbb{R}_{\max}, \otimes)$ birleşmeli ve değişmelidir.

iii. $\mathbb{R}_{\max}$ yapısının çarpımsal birimi vardır.

iv. $x, y, z \in \mathbb{R}_{\max}$ için,

$$z \otimes (x \overline{\oplus} y) = (z \otimes x) \overline{\oplus} (z \otimes y) \text{ ve } (x \overline{\oplus} y) \otimes z = (x \otimes z) \overline{\oplus} (y \otimes z)$$

biçiminde $\mathbb{R}_{\max}$'da $\otimes$ işleminin $\overline{\oplus}$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

v. $x \in \mathbb{R}_{\max}$ için,

$$(-\infty) \otimes x = -\infty = x \otimes (-\infty)$$

biçiminde $\mathbb{R}_{\max}$'da toplama işleminin birim elemanı olan $-\infty$ çarpma işlemi altında yutan elemandır.

İspat $x, y, z \in \mathbb{R}_{\max}$ olsun**.**

i. $(\mathbb{R}_{\max}, \overline{\oplus})$ yapısının değişmeli yarı grup olduğu daha önce gösterildi.

ii. $\mathbb{R}_{\max}$' da çarpma işlemi tanımından

$$x \otimes (y \otimes z) = x + (y + z) = (x + y) + z = (x \otimes y) \otimes z$$

ve

$$x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$$

özelliklerine ulaşılır ki, $(\mathbb{R}_{\max}, \otimes)$ yapısının birleşmeli ve değişmeli olduğu sonucuna varılır.

iii. Her $x \in \mathbb{R}_{\max}$ için, $x \otimes 0 = x + 0 = 0 + x = 0 \otimes x$ olup 0 çarpımsal birimdir.

iv. $\mathbb{R}_{\max}$ ' da $\bar{\oplus}$ ve $\otimes$ işlemleri hatırlanırsa,

$$z \otimes (x \bar{\oplus} y) = z + \max(x, y) = \max(z + x, z + y) = (z \otimes x) \bar{\oplus} (z \otimes y)$$

ve

$$(x \bar{\oplus} y) \otimes z = \max(x, y) + z = \max(x + z, y + z) = (x \otimes z) \bar{\oplus} (y \otimes z)$$

elde edilir ki, $\mathbb{R}_{\max}$ ’da $\otimes$ işleminin $\bar{\oplus}$ işlemi üzerine dağılma özelliğinin olduğu sonucuna ulaşılır.

v. $\mathbb{R}_{\max}$ ' da $\otimes$ işleminden,

$$x \otimes (-\infty) = x + (-\infty) = -\infty$$

olarak elde edilir. Böylece, $\mathbb{R}_{\max}$ ’da toplama işleminin birim elemanı olan $-\infty$ çarpma işlemi altında yutan elemandır.

M-T cebirinde kuvvet alma işlemi, reel sayılardaki skalerle çarpma işlemine benzer ve aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 1. 1. 1 $a \in \mathbb{R}_{\max}$ ve $n \in \mathbb{Z}^{+}$ olsun. a elemanının *n*. kuvveti

$$a^{n} = \underbrace{a \otimes a \otimes a \otimes ... \otimes a}_{\text{n tane}} = \underbrace{a + a + a + ... + a}_{\text{n tane}} = n.a$$

olarak tanımlanır (Andersen, 2002).

Teorem 1. 1. 2 $x, y \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $a \in \mathbb{R}_{\max}$ için $(\mathbb{R}_{\max}, \bar{\oplus}, \otimes)$ yapısında,

$$a^{x} \otimes a^{y} = a^{x+y} \text{ ve } (a^{x})^{y} = a^{x.y}$$

şeklinde üstel özellikler vardır (Andersen, 2002).

İspat $x, y \in \mathbb{Z}^{+}$ ve $a \in \mathbb{R}_{\max}$ için,

$$a^{x} \otimes a^{y} = x.a + y.a = (x + y).a = a^{x+y} \text{ ve } (a^{x})^{y} = (x.a)^{y} = x.y.a = a^{x.y}$$

sonuçlarına ulaşılır.

1. 2. Maksimum Toplam Matris Cebiri

Bu bölümde, M-T matris cebirinde bazı temel tanım, kavram ve özellikler verilmektedir. Elemanları $\mathbb{R}_{\max}$ kümesinden olan $m\times n$ tipindeki matrisler kümesi için $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ gösterimi kullanılmaktadır.

İlk olarak, M-T matris cebirinde matrislerin toplamı ve bir skaler ile bir matrisin çarpımı tanımları verilmektedir.

Tanım 1. 2. 1. $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ ve $c\in\mathbb{R}_{\max}$ olmak üzere, A ve B matrislerinin toplamı,

$$A\bar{\oplus}B=\left[a_{ij}\oplus b_{ij}\right]=\left[\max(a_{ij},b_{ij})\right]$$

biçiminde ve c skaleri ile A matrisinin çarpımı,

$$c\otimes A=\left[c\otimes a_{ij}\right]=\left[c+a_{ij}\right]=\left[a_{ij}+c\right]=A\otimes c$$

biçiminde tanımlanır (Andersen, 2002; Butkovic ,2010).

Tanım 1. 2. 2. $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times p}$ ve $B=\left[b_{jk}\right]\in\mathbb{R}_{\max}^{p\times n}$ için, $A\otimes B=C=\left[c_{ij}\right]\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ çarpım matrisi, elemanları

$$c_{ij}=(a_{i1}\otimes b_{1j})\bar{\oplus}(a_{i2}\otimes b_{2j})\bar{\oplus}\ldots\bar{\oplus}(a_{in}\otimes b_{nj})=\max_{j}(a_{ik}+b_{kj})$$

biçiminde tanımlı $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ de bir matristir (Andersen, 2002; Butkovic, 2010).

Örnek 1. 2. 1. $A=\begin{bmatrix}9 & 7\\ 0 & 6\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ olsun. A ve B matrislerinin toplamı,

$$A\bar{\oplus}B=\begin{bmatrix}9\bar{\oplus}2 & 7\bar{\oplus}3\\ 0\bar{\oplus}5 & 6\bar{\oplus}1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\max(9,2) & \max(7,3)\\ \max(0,5) & \max(6,1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 7\\ 5 & 6\end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris, A ve B matrislerinin çarpımı

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}9 & 7\\ 0 & 6\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(9\otimes 2)\bar{\oplus}(7\otimes 5) & (9\otimes 3)\bar{\oplus}(7\otimes 1)\\ (0\otimes 2)\bar{\oplus}(6\otimes 5) & (0\otimes 3)\bar{\oplus}(6\otimes 1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12 & 12\\ 11 & 7\end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris ve *A* matrisinin *c=5* skaleri ile çarpımı,

$$5\otimes A=\begin{bmatrix}5\otimes 9 & 5\otimes 7\\ 5\otimes 0 & 5\otimes 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5+9 & 5+7\\ 5+0 & 5+6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14 & 12\\ 5 & 11\end{bmatrix}$$

şeklinde bir matris olur.

Teorem 1. 2. 1. $(\mathbb{R}_{\max},\bar{\oplus},\otimes)$ yarı halkası üzerinde matris çarpımının birleşme özelliği vardır (Andersen, 2002).

İspat 1. 2. 1. $A=\left[a_{ij}\right]\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, $B=\left[b_{jk}\right]\in\mathbb{R}_{\max}^{n\times p}$ ve $C=\left[c_{kl}\right]\in\mathbb{R}_{\max}^{p\times q}$ matrisleri için, M-T matris cebirinde matrislerin çarpma işleminin hatırlanması ile

$$(A\otimes B)\otimes C=\max_k\left(\left(\max_j(a_{ij}+b_{jk})\right)+c_{kl}\right)=\max_{kj}(a_{ij}+b_{jk}+c_{kl})$$

eşitliği ve benzer olarak

$$A\otimes(B\otimes C)=\max_j\left(a_{ij}+\left(\max_k(b_{jk}+c_{kl})\right)\right)=\max_{j,k}(a_{ij}+b_{jk}+c_{kl})$$

eşitliği elde edilir. Böylece,

$$A\otimes(B\otimes C)=(A\otimes B)\otimes C$$

sonucuna ulaşılır ki, M-T matris cebirinde matrislerde çarpma işleminin birleşme özelliğinin varlığı kanıtlanmış olur.

$(\mathbb{R}_{\max},\bar{\oplus},\otimes)$ yarı halkası üzerinde matris çarpımının değişme özelliği yoktur. Matrislerde çarpma işleminin değişme özelliğinin olmadığı aşağıdaki örnekte gösterilmektedir.

Örnek 1. 2. 2. $A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 5 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{2\times 2}$ matrisleri için,

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 5 & 4\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & 6\\ 9 & 5\end{bmatrix}$$

ve

$$B\otimes A=\begin{bmatrix}3 & 0\\ 5 & 0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3 & 6\\ 5 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 8 & 11\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Böylece $A \otimes B \neq B \otimes A$ olduğu görülür.

1. 3. Maksimum Toplam Matris Cebirinde Denklem Sistemlerinin Çözümü

Bu bölüm; Cuninghame-Green (1979), Butkovic (1994) ve Andersen (2002) tarafından yazılan kaynaklar kullanılarak, $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times 1}$ ve $b \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times 1}$ için, M-T matris cebirinde

$$A \otimes x = b$$

şeklindeki matris denkleminin çözümü üzerine bazı irdelemelerin yer aldığı derleme niteliğindedir ve M-T matris cebirinde lineer denklem sistemlerin çözümleri üzerine temel bilgiler içermektedir.

$A \otimes x = b$ sistemi için $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times 1}$ ve $b \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times 1}$ biçiminde tanımlanan matrisler açık olarak

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{nx1} \text{ ve } b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{nx1}$$

şeklinde yazılırlar ve buradan,

$$A \otimes x = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots a_{mn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ bn \end{pmatrix}$$

sistemi elde edilir. Sistem, denklemler olarak

$$\begin{cases} (a_{11} \otimes x_1) \overline{\oplus} (a_{12} \otimes x_2) \overline{\oplus} \ldots \overline{\oplus} (a_{1n} \otimes x_n) = b_1 \\ (a_{21} \otimes x_1) \overline{\oplus} (a_{22} \otimes x_2) \overline{\oplus} \ldots \overline{\oplus} (a_{2n} \otimes x_n) = b_2 \\ (a_{31} \otimes x_1) \overline{\oplus} (a_{32} \otimes x_2) \overline{\oplus} \ldots \overline{\oplus} (a_{3n} \otimes x_n) = b_3 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ (a_{m1} \otimes x_1) \overline{\oplus} (a_{m2} \otimes x_2) \overline{\oplus} \ldots \overline{\oplus} (a_{mn} \otimes x_n) = b_m \end{cases}$$

şeklinde yazılır ve bu denklem sisteminin çözümü .

$$\begin{cases} \max\{(a_{11}+x_1),(a_{12}+x_2),....,(a_{1n}+x_n)\}=b_1 \\ \max\{(a_{21}+x_1),(a_{22}+x_2),....,(a_{2n}+x_n)\}=b_2 \\ \max\{(a_{31}+x_1),(a_{32}+x_2),....,(a_{3n}+x_n)\}=b_3 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ \max\{(a_{m1}+x_1),(a_{m2}+x_2),....,(a_{mn}+x_n)\}=b_m \end{cases}$$

sistemin çözümüyle mümkündür. Bu sistemde b girdilerinden bazılarının -∞ olduğu durumları düşünelim. Genelliği kaybetmeden sonlu b girdilerini ilk başa yazarak denklemler aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \ldots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & a_{k+1,3} \ldots & a_{k+1,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{pmatrix}$$

şeklindeki standart denklem sisteminden,

$$\begin{cases} \max\left\{(a_{11}+x_1)\ ,(a_{12}+x_2)\ ,\ldots\ ,\ (a_{1n}+x_n)\right\}=b_1 \\ \max\left\{(a_{21}+x_1)\ ,\ (a_{22}+x_2)\ ,\ldots\ ,\ (a_{2n}+x_n)\right\}=b_2 \\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \max\left\{(a_{k1}+x_1)\ ,\ (a_{k2}+x_2)\ ,\ldots\ ,\ (a_{kn}+x_n)\right\}=b_k \\ \max\left\{(a_{k+1,1}+x_1),(a_{k+1,2}+x_2),\ldots,(a_{k+1,n}+x_n)\right\}=-\infty \\ \ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \max\left\{(a_{n1}+x_1)\ ,\ (a_{n2}+x_2)\ ,\ldots\ ,\ (a_{nn}+x_n)\right\}=-\infty \end{cases}$$

şeklinde denklemler üretilir. Burada $a_{k+1,j},\ldots,a_{m,j}=-\infty$ gibi olan değişkenleri yeniden gruplandırılırsa,

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} & A_1 & & A_2 & \\ - & - & - & - & - \\ -\infty & \ldots & -\infty & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & A_3 & \\ -\infty & \ldots & -\infty & & \end{array}\right) \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{pmatrix}$$

sistemi elde edilir. A_1 matrisinin mertebesi $k \times l$ olarak bulunur. Şimdi,

$$b' = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}, \quad x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix}$$

tanımlansın. Böylece, $A \otimes x = b$ denklem sisteminin çözümünün olması için gerek ve yeter koşul $A_1 \otimes x = b$ denklem sisteminin x' çözümünün olmasıdır. Sonuç olarak,

$$x = \begin{pmatrix} x' \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{pmatrix}$$

vektörü yazılır. Bu nedenle, $A \otimes x = b$ sisteminin çözülebilmesi için sonsuz b girdilerinin sistemdeki sonlu b' girdilerine indirgenmesiyle sağlanır. Eğer maksimum toplam denklem sistemlerinin çözümü varsa,

$$a_{i,j} + x_j \leq b_1$$

eşitsizliklerini sağlarlar. Sisteme bir çözüm aramak için x vektörünün her bileşeni ayrı ayrı düşünülür. Örneğin, x vektörünün birinci bileşeni x_1 dikkate alınırsa

$$a_{i,1} + x_1 \leq b_1 \;;\; i = \{1, 2, \cdots, m\}$$

şeklindeki eşitsizlikler yazılır. Böylece her bir i değeri için

$$x_1 \leq b_i - a_{i,1}$$

olup aşağıdaki sistem x_1 için bir üst sınır olur.

$$\begin{cases} x_1 \leq b_1 - a_{11} \\ x_1 \leq b_2 - a_{21} \\ \quad\vdots \\ x_1 \leq b_m - a_{m1} \end{cases}$$

Eğer bu eşitsizlik sisteminin bir çözümü varsa

$$x_1 \leq \min\{(b_1 - a_{11}), (b_2 - a_{21}), ..., (b_m - a_{m1})\}$$

eşitsizliğine ulaşılır. x_1 bilinmeyenini çözmek için verilen bu yönteme benzer olarak $x_2, x_3, ..., x_n$ bilinmeyenleri için de benzer çözüm yöntemi izlenir. Bu nedenle x vektörünün bileşenleri için

$$
\begin{aligned}
&x_1 \le \min\{(b_1-a_{11}),(b_2-a_{21}),\ldots,(b_m-a_{m1})\}\\
&x_2 \le \min\{b_1-a_{12}),(b_2-a_{22}),\ldots,(b_m-a_{m2})\}\\
&\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
&x_m \le \min\{b_1-a_{1n}),(b_2-a_{2n}),\ldots,(b_m-a_{mn})\}
\end{aligned}
$$

eşitsizlik sistemi yazılır. $A\otimes x=b$ sisteminin çözümü için bu sınırlar x' vektörünün bileşenleri ile tanımlanırsa,

$$
x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}
$$

olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&x_1' = \min\{(b_1-a_{11}),\ (b_2-a_{21}),\ \ldots,\ (b_m-a_{m1})\}\\
&x_2' = \min\{(b_1-a_{12}),\ (b_2-a_{22}),\ \ldots,\ (b_m-a_{m2})\}\\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots\\
&x_n' = \min\{(b_1-a_{1n}),\ (b_2-a_{2n}),\ \ldots,\ (b_m-a_{mn})\}
\end{aligned}
$$

sistemi elde edilir.

Şimdi bu tipteki denklem sistemlerinin çözümünü kolaylaştırmak için, aykırılık matrisi olarak isimlendirilen

$$
D_{A,b} = \begin{pmatrix}
b_1-a_{11} & b_1-a_{12} & \cdots & b_1-a_{1n}\\
b_2-a_{21} & b_2-a_{22} & \cdots & b_2-a_{2n}\\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\
b_m-a_{m1} & b_m-a_{m2} & \cdots & b_m-a_{mn}
\end{pmatrix}
$$

şeklinde $D_{A,b}$ matrisi tanımlanmaktadır. Burada dikkat edilmesi gereken durum, $D_{A,b}$ matrisi x_i vektörlerinin üst sınırları alınarak oluşturulmuş bir matristir. Ayrıca x_i' bileşenleri ise aykırılık matrisinin sütunlarının minimumu alınarak oluşturulmuşlardır (Andersen, 2002).

Örnek 1. 3. 1. $A=\begin{pmatrix}3&1&4\\4&7&7\\6&3&1\end{pmatrix}, x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix}5\\9\\6\end{pmatrix}$ şeklinde verilmek üzere $A\otimes x=b$ denklem sisteminin çözümünü bulalım.

Sistemin çözümü için öncelikle aykırılık matrisi olan $D_{A,b}$ matrisini oluşturalım.

$$\begin{array}{lll} b_1 - a_{11} = 5-3=2 & b_2 - a_{21} = 9-4=5 & b_3 - a_{13} = 6-6=0 \\ b_1 - a_{12} = 5-1=4 & b_2 - a_{22} = 9-7=2 & b_3 - a_{23} = 6-3=3 \\ b_1 - a_{13} = 5-4=1 & b_2 - a_{23} = 9-7=2 & b_3 - a_{33} = 6-1=5 \end{array}$$

olup,

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $D_{A,b}$ matrisinin sütun vektörlerinin minimumunu alınırsa, x_i' bileşenleri

$$\begin{aligned} x_1' &= \min(2,5,0) = 0 \\ x_2' &= \min(4,2,3) = 2 \\ x_3' &= \min(1,2,5) = 1 \end{aligned}$$

değerlerini alırlar. Buradan, $x' = (0,\ 2,\ 1)^T$ vektörüne ulaşılır. Gerçekten bu vektörün denklem sistemini sağlayıp sağlamadığı araştırılırsa,

$$A \otimes x = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 4 & 7 & 7 \\ 6 & 3 & 10 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(3,3,5) \\ \max(4,9,8) \\ \max(6,5,2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = b$$

eşitliği elde edilir ki, $x' = (0,2,1)^T$ denklem sisteminin tek çözümüdür.

Örnek 1. 3. 2. $A = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ olmak üzere $A \otimes x = b$ denklem sisteminin çözümünü araştıralım.

Sistemin çözümü için öncelikle aykırılık matrisi olan $D_{A,b}$ matrisini oluşturalım.

$$\begin{array}{lll} b_1 - a_{11} = 6 & b_2 - a_{21} = 0 & b_3 - a_{31} = 3 \\ b_1 - a_{12} = 3 & b_2 - a_{22} = 3 & b_3 - a_{32} = 2 \\ b_1 - a_{13} = 5 & b_2 - a_{23} = 2 & b_3 - a_{33} = 0 \end{array}$$

olup

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradan, $x' = (0,2,0)^T$ olur. Bu vektörün sistemin çözümü olup olmadığını araştırılırsa,

$$A \otimes x = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} \neq b$$

durumu ortaya çıkar. Böylece $x' = (0,2,0)^T$ vektörünün denklem sistemini sağlamadığı ve dolayısıyla sitem için bir çözüm olmadığı görülür.

Örnek 1. 3. 3. $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$ olmak üzere $A \otimes x = b$ denklem sisteminin çözümü araştıralım.

Verilere göre

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } x' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$A \otimes x = \begin{pmatrix} 9 & 2 & 8 \\ 4 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix} = b$$

bulunur ki, x' denklem sisteminin bir çözümü olur. Aynı zamanda bu denklem sistemi için farklı çözümler de mevcuttur. Herhangi bir $x = \left\{ x : x = (4,a,b)^T \ ; \ a \leq 2 \ ve \ b \leq 1 \right\}$ vektörü $A \otimes x = b$ denklem sisteminin bir çözümü olur. Yani denklem sisteminin sonsuz çözümü vardır.

$A \otimes x = b$ denklem sisteminde çözümlerin sayısını tahmin etmek için indirgenmiş fark matrisi olarak isimlendirilen

$$R_{A,b} = \begin{cases} r_{ij} = 1 \ ; \ d_{ij} = \min(d_{*j}) \\ r_{ij} = 0; \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde $R_{A,b}$ matrisi tanımlanmaktadır.

Bu tanımlamaya göre 1.3.1-3 örnekleri için aykırılık matrisleri ve indirgenmiş fark matrisleri aşağıdaki tabloda verilmektedir.

Örnek 1. 3. 1. Sistem tek çözüme sahiptir.	$D_{A,b}=\begin{pmatrix}2&4&1\\5&2&2\\0&3&5\end{pmatrix}$	$R_{A,b}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$
Örnek 1. 3. 2. Sistemin çözümü yoktur.	$D_{A,b}=\begin{pmatrix}6&3&5\\0&3&2\\3&2&0\end{pmatrix}$	$R_{A,b}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$
Örnek 1. 3. 3. Sistem sonsuz çözüme sahiptir.	$D_{A,b}=\begin{pmatrix}4&11&5\\4&2&6\\4&2&1\end{pmatrix}$	$R_{A,b}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

M-T cebirinde denklem sisteminin çözümü olması için $x_j \leq b_i - a_{ij}$ eşitsizlik sisteminin çözümü olması gerektiğini tekrar hatırlanırsa bu eşitsizlik sistemini eşitlikler sistemine çevirmek amacıyla $A \otimes x = b$ denklem sistemindeki her satır eşitsizliğinin eşitlik olması gerekir. Yani $D_{A,b}$ matrisinin her satırında en az bir adet minimum olmalıdır. Buradan $R_{A,b}$ indirgenmis fark matrisinin tanımı gereğince her satırında en az bir tane “1” girdisi olmalıdır. Bu düşünceye odaklanılırsa, Örnek 1. 3. 3.’ de “$R_{A,b}$ matrisinin sıfır satırı olup sistemin çözümü yoktur.” sonucu çıkarılır.

Andersen (2002) tarafından yazılan tezde yer alan aşağıdaki teorem, $R_{A,b}$ indirgenmiş fark matrisinden $A \otimes x = b$ sisteminin çözümünün olmaması veya çözümü üzerine yorumlar yapabilmeyi sağlamaktadır.

Teorem 1. 3. 1. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ herhangi bir matris ve $b \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times 1}$ elemanları sonlu girdiler olan bir vektör olmak üzere $(\mathbb{R}_{\max}, \bar{\oplus}, \otimes)$ yarı halkasında $A \otimes x = b$ sistemi için aşağıdaki önermeler doğrudur.

a. Eğer indirgenmiş fark matrisinin sıfır satırı varsa, sistemin çözümü yoktur.

b. Eğer indirgenmiş fark matrisinin her satırında en az bir tane minimum varsa, yani $R_{A,b}$ matrisinin her satırında "1" varsa, sistemin çözümü x' olur.

İspat. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ herhangi bir matris ve $b \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times 1}$ elemanları sonlu girdiler olan bir vektör olsun.

a. $R_{A,b}$ matrisinde "k" satırı sıfır satırı olarak tanımlansın. Farz edelim ki, $A\otimes x=b$ denklem sisteminin çözümü de $\tilde{x}$ olsun. Buradan

$$\tilde{x}_j \le \min_l(b_l - a_{lj}) < b_k - a_{kj}$$

olur. Böylece her j bileşeni için $\tilde{x}_j + a_{kj} < b_k$ olur. Buradan $\tilde{x}$, eşitsizlik sisteminin k-ıncı denklemi sağlanmaz. O halde $\tilde{x}$, $A\otimes x=b$ sisteminin çözümü olamaz.

b. Farz edelim ki, x' sistemin bir çözümü olmasın. Eğer x' çözüm olsaydı her j ve k bileşenleri için

$$x_j \le b_k - a_{kj}$$

eşitsizliği yazılır ve buradan da $\max_j(a_{kj}+x_j^{'}) \le b_{kj}$ eşitsizliğine ulaşılırdı. Ancak bu sistemde x' çözüm olmadığı için $\max_j(a_{kj}+x_j^{'}) < b_k$ şeklindedir. Buradan $x_j^{'} < \min(b_k - a_{kj})$ olur. Bu eşitsizlik ise, $R_{A,b}$ matrisinin k-ıncı satırında minimum bulunmaması yani bu satırda "1" girdisinin olmaması anlamına gelir. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle x', $A\otimes x=b$ denklem sisteminin bir çözümü olur.

$A\otimes x=b$ denklem sisteminin kaç tane çözüme sahip olduğunu bulmak için $R_{A,b}$ matrisindeki sabit girdiler tanımlanmaktadır.

Tanım 1. 3. 1. $R_{A,b}$'nin herhangi bir satırındaki 1; bulunduğu satırda başka bir 1 girdisi yoksa veya bulunduğu sütun 1 sütunu ise sabitlenmiş değişken girdisi olarak adlandırılır. Diğerleri ise sabitlenmemiş değişken girdisidir (Andersen, 2002).

1.3.1-3 örneklerinde verilen sistemlerin çözümleri, $R_{A,b}$ matrislerindeki sabitlenmiş değişken girdilerine göre aşağıda yorumlanmaktadır.

Örnek 1. 3. 1.	**Örnek 1. 3. 2.**	**Örnek 1. 3. 3**
$R_{A,b}=\begin{pmatrix}0&0&\boxed{1}\\0&\boxed{1}&0\\\boxed{1}&0&0\end{pmatrix}$	$R_{A,b}=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$	$R_{A,b}=\begin{pmatrix}\boxed{1}&0&0\\\boxed{1}&1&0\\\boxed{1}&1&1\end{pmatrix}$

Örnek 1. 3. 1.'de $R_{A,b}$ matrisine göre sıfır satırı olmayıp sistemin çözümü vardır ve ayrıca bu matrisin bütün "1" girdileri sabitlenmiş değişken girdisidir. Yani $A\otimes x=b$

denklem sisteminin çözümünde bütün x_1, x_2, x_3 bileşenleri sabit değerler olacaktır. Bu nedenle sistemin tek çözümü vardır.

Örnek 1. 3. 3.‘ de $R_{A,b}$ matrsinde birinci satır denkleminde x_1 bileşeni sabitlenmiş olup $x_1 = 4$ tür. Ancak ikinci satır denkleminde sistem çözümü için $x_1 = 4$ sabitlenmiş girdi olmasına rağmen $x_2 = 2$ sabitlenmemiş girdidir. Yani $x_1 = 4$ için $x_2 \leq 2$ olduğu sürece satır denklemlerinin çözümü mümkün olacaktır. Benzer şekilde üçüncü satır denklemi için $x_1 = 4$ ile sabitlenip $x_2 \leq 2$ ve $x_3 \leq 1$ değişkenleri parametreye bağlı olacağından $A \otimes x = b$ denklem sisteminin sonsuz çözümü olacaktır.

Andersen (2002) tarafından yazılan tezde yer alan aşağıdaki teorem, $R_{A,b}$ indirgenmiş fark matrisinden tespit edilen sabitlenmiş değişken girdilerine göre $A \otimes x = b$ sisteminin çözüm sayıları üzerine yorumlar yapabilmeyi sağlamaktadır.

Teorem 1. 3. 2. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ herhangi bir matris ve $b \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times 1}$ elemanları sonlu girdiler olan bir vektör olmak üzere $(\mathbb{R}_{\max}, \bar{\oplus}, \otimes)$ yarı halkasında $A \otimes x = b$ sistemi için aşağıdaki önermeler doğrudur.

a. $R_{A,b}$ indirgenmiş fark matrisinin her sütununda yalnızca bir tane sabitlenmiş girdi varsa, sistemin tek çözümü vardır.

b. $R_{A,b}$ indirgenmiş fark matrisinde sabitlenmemiş girdi varsa, sistemin sonsuz çözümü vardır.

İspat. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ herhangi bir matris ve $b \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times 1}$ sonlu girdili bir vektör olmak üzere $(\mathbb{R}_{\max}, \bar{\oplus}, \otimes)$ yarı halkasında $A \otimes x = b$ sistemi dikkate alınsın.

a. Eğer $R_{A,b}$ matrisinin her sütununda tek bir tane "1" girdisi varsa, bunlar sabitlenmiş değişken girdisidir ve hiçbir sütunda sabitlenmemiş girdi bulunmaz. Bu nedenle bütün x bileşenleri sabittir ve denklem sisteminin tek çözümü vardır.

b. $R_{A,b}$’ de $r_{i,j}$ sabitlenmemiş değişken girdisi olmak üzere, $\tilde{x}$, $A \otimes x = b$ denklem sisteminin çözümü olsun. Buradan $r_{i,j}$ sabitlenmemiş değişken girdisi olduğundan $R_{A,b}$ matrisinin j-inci sütununda sabitlenmiş girdi bulunmaz. Böylece $\tilde{x}_j$ bileşeni için satır denklemini bozmayacak şekilde parametreye bağlı sonsuz çözüm olacaktır.

1. 4. Maksimum Toplam Cebirinde Özdeğerler – Özvektörler

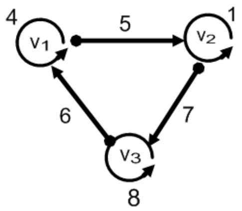
Bu bölümde, Karp (1978), Cuninghame-Green (1979), Butkovic (1994) ve Bapat ve ark. (1995) kaynaklarından faydalanılarak M-T cebirinde matrislerin özdeğerleri ve özvektörleri üzerine literatürde var olan temel tanım, kavram ve özellikler verilmektedir.

Tanım 1. 4. 1. Köşeler $1, 2, ..., n$ olmak üzere eğer $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ matrisinde $a_{ij} \neq -\infty$ ise *i'* den *j'* ye a_{ij} ağırlıklı yol vardır denir.

$i_1, i_2, ..., i_k$ farklı köşeler olmak üzere $j = 1, 2, ..., k-1$ için i_j' den i_{j+1}' e giden yaylar bir yol oluşturur. Bir yolun ağırlığı ise bu yayların ağırlıkları toplamı alınarak bulunur. Her köşeden başka bir köşeye yol varsa yönlendirilmiş D_A grafı güçlü bağlıdır. Eğer D_A güçlü bağlı ise *A* matrisi indirgenemezdir.

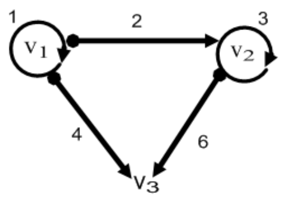
Örnek 1. 4. 1.

a. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -\infty \\ -\infty & 1 & 7 \\ 6 & -\infty & 8 \end{pmatrix}$ olsun. A matrisinin yönlendirilmiş grafı D_A



biçiminde oluşturulur. D_A yönlendirilmiş grafında her köşeden başka bir köşeye yol olduğu için bu graf güçlü bağlı olup *A* matrisi indirgenemezdir.

b. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -\infty & 3 & 6 \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$ matrisi için ise D_B grafı



şeklinde olup v_3 köşesinden başka bir köşeye yol olmadığı için bu yönlendirilmiş graf güçlü bağlı değildir. Dolayısıyla *A* matrisi indirgenebilir matristir.

Tanım 1. 4. 2. $i_1, i_2, ..., i_k$ farklı köşeler olmak üzere $i_1 \rightarrow i_2$, $i_2 \rightarrow i_3, ..., i_k \rightarrow i_1$ dizisi σ deviri olarak tanımlanır.

σ deviri bir köşeden başlar ve aynı köşede biter. Aynı anda birden fazla köşeden başlamaz.

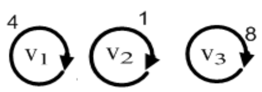
$\sigma : i \rightarrow j \rightarrow ... \rightarrow i$ bir döngü olmak üzere matrisler için de benzer bir devir belirtilmektedir. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ ve $a_{ij} \in A$ olmak üzere $\sigma : a_{ij}, a_{jk}, ..., a_{*i}$ *A* matrisinde bir devirdir.

Tanım 1. 4. 3. Bir devirdeki yayların sayısı o devrin uzunluğu olarak adlandırılır ve l_σ ile gösterilir.

Her σ devri için $l_\sigma \leq n$ şeklindedir. Güçlü bağlı graflarda ise her köşede en az bir devir oluşur. Örnek 1. 4. 1.' de v_3 köşesi için $v_3 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3$ bir devir olup bu devir 3 uzunlukludur.

Tanım 1. 4. 4. D_A yönlendirilmiş grafında uzunluğu 1 olan devirler düğüm olarak adlandırılır.

Örnek 1. 4. 1.' de,



olup v_1, v_2, v_3 devirleri düğümlerdir.

Tanım 1. 4. 5. σ deviri için yay uzunluğu ağırlıklarının toplamı ortalama olarak adlandırılır ve $M(\sigma)$ ile gösterilir.

Tanım 1. 4. 6. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{nxn}$ matrisi için $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ devirleri farklı devirler olsun. $\mu(A) = \max_j M(\sigma)$ ifadesine maksimum ortalama deviri denir. Maksimum ortalama devirine eşit olan devire sahip grafa kritik graf denir.

Tanım 1. 4. 7. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ olsun. $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ için, $A \otimes x = \lambda \otimes x$ maksimum toplam matris denkleminin çözümü olan (λ, x) çiftine ise *A* matrisinin öz çifti denir.

Teorem 1. 4. 1. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ matrisinin öz çifti (λ, x) ve $c \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $(\lambda, c \otimes x)$ 'de *A* matrisinin öz çiftidir.

İspat 1. 4. 1. Kabul edelim ki $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ matrisi, öz çifti (λ, x) olan indirgenemez bir matris olsun. Bu durumda $A \otimes x = \lambda \otimes x$ olur. Değişme ve birleşme özelliklerinden

$$\begin{aligned} c\otimes(A\otimes x) &= c\otimes(\lambda\otimes x)\\ (A\otimes x)\otimes c &= (\lambda\otimes x)\otimes c\\ A\otimes(x\otimes c) &= \lambda\otimes(x\otimes c)\\ A\otimes(c\otimes x) &= \lambda\otimes(c\otimes x) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazabiliriz. Buradan görüleceği üzere $(\lambda, c\otimes x)$ çifti, A matrisinin öz çifti olur.

Teorem 1. 4. 2. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ en az bir devire sahip olan bir matris ve $k, m \in \mathbb{R}_{\max}$ olsun. Bu durumda,

a. A matrisinin k sonlu özdeğerine sahip olması için gerek ve yeter koşul $-k\otimes A$ matrisinin özdeğerinin *0* olmasıdır.

b. $\mu(A) = m$ olması için gerek ve yeter koşul $\mu(-m\otimes A) = 0$ olmasıdır.

önermeleri doğrudur.

İspat 1. 4. 2. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, $x \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times 1}$ ve $k, m \in \mathbb{R}_{\max}$ olmak üzere,

a. $-k\otimes A$ matrisinin öz çifti $(0, x)$ olsun. Buradan,

$$(-k\otimes A)\otimes x = 0\otimes x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-k & \cdots & a_{1n}-k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}-k & \cdots & a_{nn}-k \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0\otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max\ (a_{11}-k+x_1,\ a_{12}-k+x_2,\ \cdots,\ a_{1n}-k+x_n) = x_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \max\ (a_{n1}-k+x_1,\ a_{n2}-k+x_2,\ \cdots,\ a_{nn}-k+x_n) = x_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -k\otimes\max\ (a_{11}+x_1,\ a_{12}+x_2,\ \cdots,\ a_{1n}+x_n) = x_1 \\ \vdots \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ -k\otimes\max\ (a_{n1}+x_1,\ a_{n2}+x_2,\cdots,\ a_{nn}+x_n) = x_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max\ (a_{11}+x_1,\ a_{12}+x_2,\ \cdots,\ a_{1n}+x_n) = k\otimes x_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \max\ (a_{n1}+x_1,\ a_{n2}+x_2,\ \cdots,\ a_{nn}+x_n) = k\otimes x_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow A\otimes x = k\otimes x$$

olarak bulunur.

b. $\mu(A) = m$ ve $B = -m\otimes A$ olsun. D_B grafının tanımı gereğince bu graftaki bir yayın ağırlığı D_A grafındaki yay ağırlığından m kadar azaltılma yapılarak oluşturulmuştur.

Yani $b_{ij} = a_{ij} - m$ olur. *A* matrisi üzerinde tanımlı $\sigma_A : a_{ij}, a_{jk}, \cdots, a_{*i}$ deviri *l* uzunluklu bir devir olmak üzere , D_A grafındaki maksimum devirli ortalama,

$$\mu(A) = \frac{a_{ij} + a_{jk} + \cdots + a_{*i}}{l} = m$$

şeklindedir. Buradan hareketle,

$$\sigma_B = b_{ij}, b_{jk}, \cdots, b_{*i}$$

olmak üzere *B* matrisi üzerinde benzer bir döngü,

$$\mu(B) = \frac{b_{ij} + b_{jk} + \cdots + b_{*i}}{l} = \frac{(a_{ij} - m) + (a_{jk} - m) + \cdots + (a_{*i} - m)}{l}$$

$$\mu(B) = \frac{a_{ij} + a_{jk} + \cdots + a_{*i}}{l} - \frac{m.l}{l}$$

$$\mu(B) = \mu(A) - m = 0$$

olarak bulunur.

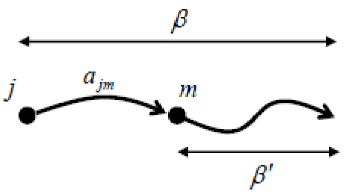
Teorem 1. 4. 3. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ en az bir devire sahip olsun. *A*'nın (λ, x) özçifti için λ sonludur.

İspat 1. 4. 3. Genelliği bozmadan Teorem 1. 4. 2. gereğince *A'* nın maksimum devirli ortalaması 0 olsun. Bu durum *A*'nın özdeğerinin 0 olması için yeterli bir durumdur. D_A, *A*'nın yönlendirilmiş grafı, *x* ise *i*. inci girişi D_A' da en büyük ağırlıklı yolun başlangıç noktası olan bir vektör olsun. Eğer D_A' da *i* ile başlayan yol yok ise bu durumda $x_i = -\infty$ olur. $A \otimes x$ matrisi,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(a_{11} + x_1, a_{12} + x_2, \cdots, a_{1n} + x_n \\ \vdots \\ \max(a_{n1} + x_1, a_{n2} + x_2, \cdots, a_{nn} + x_n \end{pmatrix}$$

biçiminde olup bu matrisin herhangi bir *j* bileşeni, $\max_k(a_{jk} + x_k)$ formundadır. Şimdi ise $a_{jk} + x_k$ toplamı için bazı durumları ele alalım. Eğer $a_{jk} = -\infty$ ise $a_{jk} + x_k = -\infty \leq x_j$ olur. $a_{jk} \neq -\infty$ ise yani *j*' den *k*' ya yol varsa bu durumda x_k bileşeni için *k*' dan başlayan yol φ olsun.

$\varphi' = j \to k$ olmak üzere *j*' den başlayan bir yola ve döngüye sahiptir. Her devir pozitif olmayan ortalamaya sahip olduğundan φ', x_j için en büyük ağırlıklıdır. Böylece $a_{jk} + x_k \leq x_j$ olur. Buradan $\max_k (a_{jk} + x_k) \leq x_j$ olduğu gösterilmiş olur. Şimdi x_j bileşeni için D_A daki *j* 'den başlayan en büyük ağırlıklı yolu β olarak seçelim. β; $j \to m$ ise β', *m* köşesinden başlar.



Bu durumda β 'nın ağırlığı $x_j = a_{jm} + \beta' \leq a_{jm} + x_m \leq \max_k (a_{jk} + x_k)$ olur. Böylece *A*'nın özvektörü olan *x* 'e karşılık gelen özdeğer 0 olarak bulunur. İndirgenemez bir matrisin her köşesi devir köşesi olduğundan ve en az bir devire sahip olan matrisin özdeğerleri sonlu olacağından indirgenemez bir matriste bütün özdeğerler sonludur.

Teorem 1. 4. 4. $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ indirgenemez bir matris olsun. *A* matrisinin özdeğeri tek ve sonlu olup $\lambda = \mu(A)$ dır.

İspat 1. 4. 4 . $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ indirgenemez matris ve D_A *A*'nın yönlendirilmiş grafı olsun. λ sonlu olmak üzere (λ, x) *A* matrisinin öz çifti ise bu durumda $A \otimes x = \lambda \otimes x$ öz denklemini sağlar. İlk olarak *x* vektörünün sonlu olduğunu gösterelim.

Farz edelim ki *x*'in bazı girdileri $-\infty$ olsun. Bu durumda *x* vektörünü $x_1, x_2, \cdots, x_k$ sonlu ve diğer *l* tane girdi $-\infty$ olacak şekilde yeniden düzenlersek,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \hline -\infty \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{pmatrix}$$

elde edilir. O halde, $n - k = l$ olur. Ayrıca $A \otimes x = \lambda \otimes x$ denkleminin sağlanması için

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \hline -\infty & \cdots & -\infty & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ -\infty & \cdots & -\infty & & & \end{array}\right)$$

formunda olması gerekmektedir. $-\infty$ bloğu ise $l \times k$ tipindedir. Eğer A matrisi bu formda olmazsa x vektöründe $-\infty$ bileşenleri olamaz. A indirgenemez bir matris olduğu için herhangi bir j köşesinden başka bir i köşesine yol olmak zorundadır. Ancak yukarıdaki A matrisini göz önüne alırsak k'dan daha büyük indislere sahip olan köşeleri düşündüğümüzde bu köşelerden k' dan küçük indislere sahip köşelere yol yoktur. Bu da A matrisinin indirgenemez olması ile çelişir. Bu çelişki x vektörünün bazı bileşenlerinin $-\infty$ olmasından kaynaklanmıştır. Dolayısıyla x sonlu olmak zorundadır. Şimdi A matrisinin $A \otimes x = \lambda \otimes x$ özdenklemini çözümleyelim. Öz denklemden,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \max(a_{11} + x_1, a_{12} + x_2, \cdots, a_{1n} + x_n) = \lambda + x_1 \\ \max(a_{21} + x_1, a_{22} + x_2, \cdots, a_{2n} + x_n) = \lambda + x_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \max(a_{n1} + x_1, a_{n2} + x_2, \cdots, a_{nn} + x_n) = \lambda + x_n \end{cases}$$

sistemi elde edilir. D_A üzerinde $l \leq n$ uzunluğundaki herhangi bir döngüyü dikkate alalım. Genelliği bozmadan köşeler yeniden numaralandırılsın. Devir

$$\sigma : v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_k \to v_1 \text{ veya } \sigma : a_{12} \to a_{23} \to \cdots \to a_{k1}$$

şeklinde olsun. Şimdi bu döngüyü kullanarak,

$$\begin{cases} a_{12} + x_2 \leq \lambda + x_1 \\ a_{23} + x_3 \leq \lambda + x_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{k1} + x_1 \leq \lambda + x_n \end{cases}$$

eşitsizlik sistemini ele alalım. Eğer bu eşitsizlikleri alt alta toplarsak,

$$a_{12} + \cancel{x_2} + a_{23} + \cancel{x_3} + \cdots + a_{k1} + \cancel{x_1} \leq \lambda + \cancel{x_1} + \lambda + \cancel{x_2} + \cdots + \lambda + \cancel{x_n}$$

$$a_{12} + a_{23} + \cdots + a_{k1} \leq \underbrace{\lambda + \lambda + \lambda + \cdots + \lambda}_{l \text{ tane(döngü uzunluğu kadar)}} = l \cdot \lambda$$

$$\frac{a_{12} + a_{23} + \cdots + a_{k1}}{l} \leq \lambda$$

$$M(\sigma) \leq \lambda$$

olarak bulunur. A matrisinden seçtiğimiz keyfi bir döngü için yukarıdaki eşitsizliği yazabildiğimizden $\mu(A) \leq \lambda$ olur. $A \otimes x = \lambda \otimes x$ denkleminde herhangi bir satır denklemi

$$\max(a_{i1} + x_1, a_{i2} + x_2, \cdots, a_{in} + x_n) = \lambda + x_i$$

şeklindedir. Yani herhangi bir j bileşeni için

$$a_{ij} + x_j = \lambda + x_i$$

olur. A matrisi güçlü bağlı olduğundan (indirgenemez matris) her köşeden başka bir köşeye yol vardır. Bu nedenle her köşe bir döngüye sahiptir. Buradan,

$$\begin{aligned} a_{ij} + x_j &= \lambda + x_i \\ a_{jk} + x_k &= \lambda + x_j \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{*i} + x_i &= \lambda + x_* \end{aligned}$$

eşitlikler yazılır ki, bu eşitlikler toplanırsa,

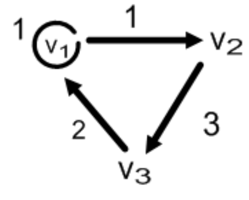
$$a_{ij} + a_{jk} + \cdots + a_{*i} = l_\sigma . \lambda$$

$$\lambda = \frac{a_{ij} + a_{jk} + \cdots + a_{*i}}{l_\sigma} = M(\sigma) \leq \mu(A)$$

elde edilir. Böylece $\lambda = \mu(A)$ olarak bulunur.

Aşağıdaki örnekte bir indirgenemez matrisinin özdeğer ve özvektörü bulunacaktır.

Örnek 1. 4. 2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 3 \\ 2 & -\infty & -\infty \end{pmatrix}$ şeklinde indirgenemez A matrisinin özdeğer ve özvektörünü bulalım. A'nın yönlendirilmiş grafı,



biçiminde olup, buradan,

$$\sigma_1 = a_{11} = 1$$

$$\sigma_2 = a_{12}a_{23}a_{31} = \frac{1+3+2}{3} = 2$$

olmak üzere $\lambda = \mu(A) = 2$ olarak bulunur. Şimdi A matrisinin $\lambda = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektörünü bulalım. Böylece,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 3 \\ 2 & -\infty & -\infty \end{pmatrix} \otimes x = 2 \otimes x$$

denkleminden

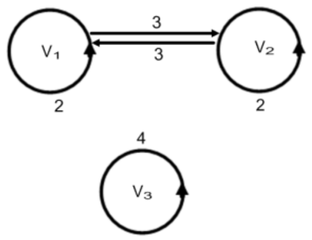
$$\begin{cases} \max(1+x_1, 1+x_2, -\infty + x_3) = 2 + x_1 \\ \max(-\infty + x_1, -\infty + x_2, 3 + x_3) = 2 + x_2 \\ \max(2 + x_1, -\infty + x_2, -\infty + x_3) = 2 + x_3 \end{cases}$$

olup bu eşitliklerde $x_1 = 0$ kabul edilsin. O halde $x_2 = 1$ ve $x_3 = 0$ olarak bulunur. Yani A matrisinin özvektörü $c \in \mathbb{R}_{\max}$ için $x = c \otimes (0,1,0)^T$ biçimindedir.

Örnek 1. 4. 3. Birden fazla özdeğere sahip olan

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -\infty \\ 3 & 2 & -\infty \\ -\infty & -\infty & 4 \end{pmatrix}$$

matrisin özvektörünü bulalım. B matrisinin yönlendirilmiş grafı D_B aşağıdaki gibidir.



D_B yönlendirilmiş grafına göre σ döngüleri,

$$\sigma_1 = a_{11} = 2$$

$$\sigma_2 = a_{22} = 2$$

$$\sigma_3 = a_{12}a_{21} = \frac{3+3}{2} = 3$$

$$\sigma_4 = a_{33} = 4$$

şeklinde olup buradan A matrisinin $\lambda = 4$ için özvektörü $(-\infty, -\infty, 0)^T$ olur. $\lambda = 3$ özdeğeri için ise özvektör $x = (1,1,-\infty)^T$ biçimindedir.

1. 5. Maksimum Toplam Cebirinde Simetrikleştirme

Konveksiyonel cebir ve maksimum toplam cebiri arasındaki önemli farklardan birisi $\mathbb{R}_\varepsilon$ ’de $\oplus$ işlemine göre ters eleman özelliğinin olmamasıdır. $x, y_x \in \mathbb{R}_\varepsilon$ olmak üzere, ters eleman tanımı gereğince

$$x \oplus y_x = \varepsilon \Leftrightarrow x^{-1} = y_x$$

olmalıdır. Burada $y_x = \varepsilon$ seçilirse ve $x \oplus y_x = \max(x, y_x)$ eşitliğini kullanarak

$$x \oplus \varepsilon = \max(x, \varepsilon) \neq \varepsilon$$

olur ki, $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı olan ε ’nun ters eleman özelliğini sağlamadığı görülür. Buradan genel olarak $x \oplus y_x = \varepsilon = y_x \oplus x$ olacak şekilde bir y_x elemanı olmadığını söyleyebiliriz. Ters eleman özelliği sağlanmadığı için $\mathbb{R}_\varepsilon$ cebirsel yapısı grup değildir. Bu nedenle maksimum toplam cebirinde simetrikleştirme çesidi olan $S_{\max}$ kümesini tanımlanmıştır (F. Bacelli ve ark. , 1992).

$\mathbb{R}_{\max}$ temel toplama ve çarpma operatörleri altında negatif olmayan reel fonksiyonların bir kümesiydi. Benzer şekilde $S_{\max}$ aynı operatörler altında reel fonksiyonların bir kümesidir. Bu genişletme yardımıyla $\mathbb{N}$ ’den $\mathbb{Z}$ ’ ye tanımlı bir fonksiyonu karşılaştırılabilir (Schutter, 1996).

$\oplus$ operatörü idempotenttir ve $a \in \mathbb{R}_{\max}$ için,

$$a \oplus a = a$$

özelliği sağlandığı için ve bütün idempotent gruplar trivial gruba indirgenebildiğinden konveksiyonel simetrikleştirme tekniklerini kullanamayız. Ancak ters elemanlar yerine $\mathbb{Z}$ ’ den $\mathbb{N}$ ’ye tanımlı bir yapının elemanları olan denge elemanlarının kullanıldığı bir metod ile simetrikleştirme mümkündür (Baccelli ve ark. ; Gaubert, 1992).

Tanım 1. 5. 1. $\oplus$ ve $\otimes$ operatörleri altında $P_\varepsilon = \mathbb{R}_\varepsilon \times \mathbb{R}_\varepsilon$ şeklinde tanımlı bir yapı olsun. Bu takdirde, (x,y) ve $(w,z) \in P_\varepsilon$ olmak üzere,

$$(x,y) \oplus (w,z) = (x \oplus w, y \oplus z)$$
$$(x,y) \otimes (w,z) = (x \otimes w \oplus y \otimes z, x \otimes z \oplus y \otimes w)$$

şeklindedir (Schutter, 1996).

Buradan P_ε'de, $\oplus$ operatörünün değişmeli, birleşmeli ve idempotent olduğu açıktır. Çünkü bu kümenin elemanları $\mathbb{R}_\varepsilon$' den alınmıştır ve $\mathbb{R}_\varepsilon$' de $\oplus$ operatörü altında elemanların bu özellikleri sağladığı biliniyor. Ayrıca P_ε' de $\oplus$ işleminin etkisiz elemanı $(\varepsilon,\varepsilon)$'dir.

Yukarıdaki tanım gereğince P_ε' de $\otimes$ operatörü değişme, birleşme ve $\oplus$ operatörü üzerine dağılma özelliğini sağlar. Ayrıca $\otimes$ işleminin birim elemanı $(0,\varepsilon)$ ve yutan elemanı ise $(\varepsilon,\varepsilon)$ elemanıdır. Böylece $(P_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ cebirsel yapısı kapalılık, birleşme, birim eleman özelliklerini sağladığından ve elemanları ikililer olduğundan bu yapı dioidtir. Aynı zamanda bu yapı ikililer cebiri olarak bilinmektedir (Schutter, 1996).

Tanım 1. 5. 2. $u = (x,y) \in P_\varepsilon$ olsun. u 'nun maksimum mutlak sınırı $|u|_\oplus$ olmak üzere

$$|u|_\oplus = x \oplus y$$

şeklindedir (Schutter, 1996).

Tanım 1. 5. 3. P_ε kümesi üzerinde,

$$\odot_u = (y,x) \text{ ve } u^\bullet = u \oplus (\odot u) = (x,y) \oplus (y,x) = (|u|_\oplus, |u|_\oplus)$$

olmak üzere, $\odot$ operatörüne maksimum cebirsel minimum operatörü ve $(.)^\bullet$ operatörüne ise denge operatörü denir (Schutter, 1996).

Önerme 1. 5. 1. $u, v \in P_\varepsilon$ için,

i. $u^\bullet = (\odot u)^\bullet = (u^\bullet)^\bullet$,

ii. $u \otimes v^\bullet = (u \otimes v)^\bullet$,

iii. $\odot(\odot u) = u$,

iv. $\odot(u \oplus v) = (\odot u) \oplus (\odot v)$,

v. $\odot(u \otimes v) = (\odot u) \otimes v$,

özellikleri doğrudur (Schutter, 1996).

Son üç özellik gereğince ;

$$u \odot v = u \oplus (\odot v)$$

eşitliği yazılabilir. Buradan $\odot$ operatörünün özelliklerinin konveksiyonel cebirdeki ‘’-‘’ operatörünün özelliklerine benzediği söylenebilir.

Maksimum cebirsel operatörleri arasında işlem önceliği sıralaması yapılacak olursa maksimum cebirsel toplam operatörü maksimum cebirsel minimum operatöründen önce gelir.

Konveksiyonel cebirde $x \in \mathbb{R}$ için $x - x = 0$ ifadesi her zaman geçerlidir. Ancak ikililer cebirinde $u \in P_\varepsilon$ için $u \odot u = u^\bullet \neq (\varepsilon, \varepsilon)$ şeklindedir. $u = (\varepsilon, \varepsilon)$ olmadıkça bu ifade yutan elemana eşit olamaz (Schutter, 1996).

Tanım 1. 5. 4. $u = (x, y)$ ve $v = (w, z)$ olmak üzere $u, v \in P_\varepsilon$ olsun. Eğer,

$$x \oplus z = y \oplus w$$

ise *u* denktir *v* denir ve $u \nabla v$ şeklinde ifade edilir.

Ayrıca,

$$(u \odot u) = u^\bullet = (|u|_\oplus, |u|_\oplus) \nabla (\varepsilon, \varepsilon)$$

şeklindedir.

Denge bağıntısı ∇ ; dönüşlü ve simetriktir ancak geçişli değildir (Schutter, 1996).

Örnek 1. 5. 1. $u = (3,2)$, $v = (3,3)$ ve $z = (2,3)$ için,

$3 \oplus 2 = 2 \oplus 3$ eşitliğinden $u \nabla u$,

$3 \oplus 3 = 2 \oplus 3$ eşitliğinden $u \nabla v$,

$3 \oplus 2 = 3 \oplus 3$ eşitliğinden $v \nabla u$,

$3 \oplus 3 = 3 \oplus 2$ eşitliğinden $v \nabla z$,

sonuçlarına ulaşılır. Ancak

$3 \oplus 3 \neq 2 \oplus 2$ eşitliğinden $u \not\nabla z$

olur. Buradan $u \nabla v$ iken $v \nabla u$ sağlanır. Yani simetriklik özelliği vardır. Ancak $u \nabla v$ ve $v \nabla z$ iken $u \not\nabla z$ olduğundan geçişme özelliği sağlanmaz. Geçişme özelliği her zaman sağlanmadığı için denge bağıntısına denklik bağıntısı diyemeyiz.

Tanım 1. 5. 5. $(x, y), (w, z) \in P_\varepsilon$ olmak üzere,

$$(x, y)\beta(w, z) \Leftrightarrow \begin{cases} (x, y)\nabla(w, z); \; x \neq y, w \neq z \\ (x, y) = (w, z) \; diğer \end{cases}$$

bağıntısına β bağıntısı denir (Schutter, 1996).

β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. β tarafından oluşturulan üç çeşit deklik sınıfı,

i. Maksimum Pozitif Sınıfı: $\overline{(w, -\infty)} = \{(w, x) \in P_\varepsilon \mid x < w\}$,

ii. Maksimum Negatif Sınıfı: $\overline{(-\infty, w)} = \{(x, w) \in P_\varepsilon \mid x < w\}$,

iii. Denk Sınıf: $\overline{(w, w)} = \{(w, w) \in P_\varepsilon\}$,

biçiminde tanımlanır. $(\varepsilon, \varepsilon)$ ise maksimum sıfır sınıfı olarak adlandırılır. Şimdi bu bağıntı üzerinden bölüm kümesi olan $S = P_\varepsilon \big|_\beta$ kümesinden bahsedelim.

$S_{\max} = (S, \oplus, \otimes)$ cebirsel yapısının değişmeli dioid olduğundan bahsetmiştik. Bu yapıya maksimum cebirinde simetrikleştirilmiş dioid veya simetrikleştirilmiş maksimum toplam cebiri denir (Schutter, 1996).

Tanım 1. 5. 6. $w \in \mathbb{R}_\varepsilon$ olmak üzere, $S^{\oplus}$ ile gösterilen $\overline{(w,-\infty)}$ ile ilişkili kümeye maksimum pozitif kümesi, $S^{\odot}$ ile gösterilen $\left\{\odot w \middle| w \in S^{\oplus}\right\}$ ile ilişkili kümeye maksimum negatif kümesi ve $S^{\bullet} = \left\{w^{\bullet} \middle| w \in S^{\oplus}\right\}$ kümesine ise denklik kümesi denir. $S^{V} = S^{\oplus} \cup S^{\odot}$ kümesine ise iz kümesi denir. Ayrıca $\varepsilon = \overline{(\varepsilon,\varepsilon)}$ sınıfına maksimum sıfır sınıfı denir (Schutter, 1996).

1. 6. Maksimum Toplam Matris Cebirinde Matris Normları

Bu bölümde, Horn ve Johnson (1985) ve Golub ve Van Loan (1989) tarafından yazılan kaynaklardan faydalanılarak M-T cebirinde matris normları üzerine literatürde var olan temel tanım, kavram ve özellikler verilmektedir.

Tanım 1. 6. 1. $a \in S^{n}$ için maksimum cebirsel norm,

$$\|a\|_{\oplus} = \bigoplus_{i=1}^{n} |a_i|_{\oplus}$$

ve $A \in S^{m\times n}$ için maksimum cebirsel norm,

$$\|A\|_{\oplus} = \bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n} |a_{ij}|_{\oplus}$$

şeklindedir.

Önerme 1. 6. 1. $\alpha \in S$, $a \in S^{n}$ ve $A \in S^{m\times n}$ olmak üzere,

$$\|\alpha \otimes a\|_{\oplus} = |\alpha|_{\oplus} \otimes \|a\|_{\oplus}$$

ve

$$\|\alpha \otimes A\|_{\oplus} = |\alpha|_{\oplus} \otimes \|A\|_{\oplus}$$

eşitlikleri doğrudur.

Tanım 1. 6. 2. $a \in S^{n}$ olmak üzere maksimum toplam matris cebirinde *p*-norm,

$$\|a\|_{\oplus}=\left(\bigoplus_{i=1}^{n}|a|_{\oplus}^{\otimes p}\right)^{\otimes\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1. 6. 3. $A\in S^{m\times n}$ olmak üzere maksimum toplam matris cebirinde Frobenius normu,

$$\|A\|_{\oplus}=\left(\bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}|a_{ij}|_{\oplus}^{\otimes 2}\right)^{\otimes\frac{1}{2}}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1. 6. 4. $A\in S^{m\times n}$ olmak üzere maksimum toplam matris cebirinde p-normu,

$$\|A\|_{\oplus}=\left(\bigoplus_{i=1}^{m}\bigoplus_{j=1}^{n}|a_{ij}|_{\oplus}^{\otimes p}\right)^{\otimes\frac{1}{p}}$$

şeklinde tanımlanır.

2. MAKSİMUM CEBİRİNDE BAZI ÖZEL MATRİSLERİN NORMLARI VE ŞART SAYILARI İÇİN SINIRLAR

Bu bölümde, literatürde yer alan bazı özel sayı dizilerinin tanımları verilmekte, M-T matris cebirinde bu sayı dizileri ile oluşturulan devirli (sirkulant) matrislerin bazı normları hesaplanmaktadır.

Tanım 2. 1. $s>0$ ve $t\neq 0$ tamsayıları için başlangıç koşulları $F_0=0$, $F_1=1$ ve yineleme ilişkisi

$$F_{n+2}=s\cdot F_{n+1}+t\cdot F_n \qquad *$$

biçiminde olan $\{F_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine genelleştirilmiş Fibonacci sayı dizisi denir.

(s,t) ikilisinin farklı değerleri için $\{F_n\}_{n\geq 0}$ dizisinden elde edilen bazı önemli sayı dizileri tablo ile,

(s,t)	F_n	Genel Gösterim
(1,1)	Fibonacci Sayı Dizisi	$\{f_n\}_{n\geq 0}$
(2,1)	Pell Sayı Dizisi	$\{p_n\}_{n\geq 0}$
(1,2)	Jacobsthal Sayı Dizisi	$\{j_n\}_{n\geq 0}$
(3,−2)	Mersenne Sayı Dizisi	$\{m_n\}_{n\geq 0}$

şeklinde verilir.

Tanım 2. 2. $s>0$ ve $t\neq 0$ tamsayıları için başlangıç koşulları $L_0=0$, $L_1=s$ ve yineleme ilişkisi

$$L_{n+2}=s\cdot L_{n+1}+t\cdot L_n$$

biçiminde olan $\{L_n\}_{n\geq 0}$ sayı dizisine genelleştirilmiş Lucas sayı dizisi denir.

(s,t) ikilisinin farklı değerleri için $\{L_n\}_{n\geq 0}$ dizisinden elde edilen bazı önemli sayı dizileri tablo ile,

(s,t)	L_n	Genel Gösterim
$(1,1)$	Lucas Sayı Dizisi	$\{l_n\}_{n\geq 0}$
$(2,1)$	Pell –Lucas Sayı Dizisi	$\{P_n\}_{n\geq 0}$
$(1,2)$	Jacobsthal-Lucas Sayı Dizisi	$\{J_n\}_{n\geq 0}$
$(3,-2)$	Fermat Sayı Dizisi	$\{F_n\}_{n\geq 0}$

şeklinde verilir.

2. 1. Fibonacci Matrisinin Maksimum Cebirsel Matris Normları

Shen ve Cen (2010) klasik lineer cebirde Fibonacci sayıları ile oluşturulan devirli (sirkulant) matrislerin normlarını araştırmışlardır. Bu bölümde ise benzer olarak, Maksimum toplam cebirinde Fibonacci sayıları ile oluşturulan devirli (sirkulant) matrislerin normları hesaplanmaktadır.

$\{f_n\}_{n\geq 0}$ klasik Fibonacci sayı dizisinin n-inci terimi f_n olmak üzere $f=(f_0, f_1,..., f_{n-1})\in S^n$ için f vektörünün maksimum cebirsel vektör normu

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} |f_i|_{\oplus} \\
&= |f_0|_{\oplus} \oplus |f_1|_{\oplus} \oplus \cdots \oplus |f_{n-1}|_{\oplus} \\
&= f_0 \oplus f_1 \oplus \cdots \oplus f_{n-1} \\
&= \max\{f_0, f_1, \cdots, f_{n-1}\} \\
&= f_{n-1}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $f_{ij}=f_{(\text{mod}(j-i,n))}$, $1\leq i,j\leq n$, olmak üzere

$$F=(f_{ij})_{i,j=1}^{n}=\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \cdots & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_0 & \cdots & f_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_0 \end{pmatrix}\in S^{n\times n}$$

şeklinde tanımlanan F Fibonacci devirli matrisinin maksimum cebirsel matris normu

$$\begin{aligned}
\|F\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n}\left|\mathrm{f}_{\mathrm{ij}}\right|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}(\mathrm{f}_{i1}\oplus \mathrm{f}_{i2}\oplus\cdots\oplus \mathrm{f}_{in}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\max(\mathrm{f}_{\mathrm{i1}},\mathrm{f}_{\mathrm{i2}},\cdots,\mathrm{f}_{\mathrm{in}}) \\
&= \max(\mathrm{f}_{11},\mathrm{f}_{12},\mathrm{f}_{13},\cdots,\mathrm{f}_{1\mathrm{n}})\oplus\max(\mathrm{f}_{21},\mathrm{f}_{22},\mathrm{f}_{23},\cdots,\mathrm{f}_{2\mathrm{n}})\oplus\cdots\oplus\max(\mathrm{f}_{\mathrm{n1}},\mathrm{f}_{\mathrm{n2}},\mathrm{f}_{\mathrm{n3}},\cdots,\mathrm{f}_{\mathrm{nn}}) \\
&= f_{n-1}\oplus f_{n-1}\oplus\cdots\oplus f_{n-1} = \max(f_{n-1},f_{n-1},\cdots,f_{n-1}) \\
&= f_{n-1}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $f_n + l_n = 2.f_{n-1}$ özdeşliği dikkate alınarak F matrisinin maksimum cebirsel Frobenius (Euclidean) normu,

$$\begin{aligned}
\|F\|_{\oplus E}^{\otimes^2} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n}\left|\mathrm{f}_{ij}\right|_{\oplus}^{\otimes^2}\right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\left(\left|\mathrm{f}_{\mathrm{i1}}\right|^{\otimes^2}\oplus\left|\mathrm{f}_{\mathrm{i2}}\right|^{\otimes^2}\oplus\cdots\oplus\left|\mathrm{f}_{\mathrm{in}}\right|^{\otimes^2}\right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\max(\mathrm{f}_{i1}^{\otimes^2},\mathrm{f}_{i2}^{\otimes^2},\cdots,\mathrm{f}_{in}^{\otimes^2}) \\
&= \max(\mathrm{f}_{11}^{\otimes^2},\mathrm{f}_{12}^{\otimes^2},\cdots,\mathrm{f}_{1n}^{\otimes^2})\oplus\max(\mathrm{f}_{21}^{\otimes^2},\mathrm{f}_{22}^{\otimes^2},\cdots,\mathrm{f}_{2n}^{\otimes^2})\oplus\cdots\oplus\max(\mathrm{f}_{n1}^{\otimes^2},\mathrm{f}_{n2}^{\otimes^2},\cdots,\mathrm{f}_{nn}^{\otimes^2}) \\
&= \max\left(f_0\otimes f_0, f_1\otimes f_1,\cdots,f_{n-1}\otimes f_{n-1}\right)\oplus\cdots\oplus\max\left(f_1\otimes f_1, f_2\otimes f_2,\cdots,f_0\otimes f_0\right) \\
&= \max(2.f_{n-1},2.f_{n-1},\cdots,2.f_{n-1}) = 2.f_{n-1} \\
&= f_n + l_n
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\|F\|_{\oplus}^{\otimes^p}$ Fibonacci matrisinin p-normu,

$$\begin{aligned}
\|F\|_{\oplus}^{\otimes^p} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n}\left|f_{ij}\right|_{\oplus}^{\otimes^p}\right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n}\left|f_{ij}\right|_{\oplus}^{\otimes^p}\right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\left(f_{i1}^{\otimes^p}\oplus f_{i2}^{\otimes^p}\oplus\cdots\oplus f_{in}^{\otimes^p}\right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\max(p.f_{i1},p.f_{i2},\cdots,p.f_{in}) \\
&= \max(p.F_{n-1},p.F_{n-1},\cdots,p.F_{n-1}) \\
&= p.F_{n-1}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

2. 2. Lucas Matrisinin Maksimum Cebirsel Matris Normları

Shen ve Cen (2010) klasik lineer cebirde Lucas sayıları ile oluşturulan devirli (sirkulant) matrislerin normlarını araştırmışlardır. Bu bölümde ise benzer olarak, Maksimum toplam cebirinde Lucas sayıları ile oluşturulan devirli (sirkulant) matrislerin normları hesaplanmaktadır.

$\{l_n\}_{n\geq 0}$ Lucas sayı dizisinin n-inci terimi l_n olmak üzere $l=(l_0,l_1,...,l_{n-1})\in S^n$ için l vektörünün maksimum cebirsel normu,

$$\begin{aligned}\|l\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} |l_i|_{\oplus} \\ &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} |l_i|_{\oplus} \\ &= |l_0|_{\oplus} \oplus |l_1|_{\oplus} \oplus \cdots \oplus |l_{n-1}|_{\oplus} \\ &= l_0 \oplus l_1 \oplus \cdots \oplus l_{n-1} \\ &= \max\{l_0,l_1,\cdots,l_{n-1}\} \\ &= l_{n-1}\end{aligned}$$

olarak bulunur. $L=(l_{ij})_{i,j=1}^{n}=\begin{pmatrix} l_0 & l_1 & \cdots & l_{n-1} \\ l_{n-1} & l_0 & \cdots & l_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_0 \end{pmatrix}\in S^{n\times n}$ olmak üzere L Lucas devirli matrisinin maksimum cebirsel matris normu,

$$\begin{aligned}\|L\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n} |l_{ij}|_{\oplus} \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n} |l_{ij}|_{\oplus} \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} (l_{i1} \oplus l_{i2} \oplus \cdots \oplus l_{in}) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(l_{i1},l_{i2},\cdots,l_{in}) \\ &= \max(l_0,l_1,\cdots,l_{n-1}) \oplus \max(l_{n-1},l_0,\cdots,l_{n-2}) \oplus \cdots \oplus \max(l_1,l_2,\cdots,l_0) \\ &= \max(l_{n-1},l_{n-1},\cdots,l_{n-1}) \\ &= l_{n-1}\end{aligned}$$

olarak bulunur. L matrisinin maksimum cebirsel Frobenius (Euclidean) normu ise,

$$
\begin{aligned}
\|L\|_{\oplus E}^{\otimes^2} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |l_{ij}|_{\oplus}^{\otimes^2} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |l_{ij}|_{\oplus}^{\otimes^2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(|l_{i1}|^{\otimes^2} \oplus |l_{i2}|^{\otimes^2} \oplus \cdots \oplus |l_{in}|^{\otimes^2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(l_{i1}^{\otimes^2}, l_{i2}^{\otimes^2}, \cdots, l_{in}^{\otimes^2}) \\
&= \max(l_{11}^{\otimes^2}, l_{12}^{\otimes^2}, \cdots, l_{1n}^{\otimes^2}) \oplus \max(l_{21}^{\otimes^2}, l_{22}^{\otimes^2}, \cdots, l_{2n}^{\otimes^2}) \oplus \cdots \oplus \max(l_{n1}^{\otimes^2}, l_{n2}^{\otimes^2}, \cdots, l_{nn}^{\otimes^2}) \\
&= \max\left(l_0 \otimes l_0, l_1 \otimes l_1, \cdots, l_{n-1} \otimes l_{n-1}\right) \oplus \cdots \oplus \max\left(l_1 \otimes l_1, l_2 \otimes l_2, \cdots, l_0 \otimes l_0\right) \\
&= \max(2.l_0, 2.l_1, \cdots, 2.l_{n-1}) \oplus \cdots \oplus \max(2.l_1, 2.l_2, \cdots, 2.l_0) \\
&= \max(2.l_{n-1}, 2.l_{n-1}, \cdots, 2.l_{n-1}) \\
&= 2.l_{n-1}
\end{aligned}
$$

biçiminde hesaplanır. Lucas matrisinin $\|L\|_{\oplus}^{\otimes^p}$ p-normu,

$$
\begin{aligned}
\|L\|_{\oplus}^{\otimes^p} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |l_{ij}|_{\oplus}^{\otimes^p} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |l_{ij}|_{\oplus}^{\otimes^p} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(l_{i1}^{\otimes^p} \oplus l_{i2}^{\otimes^p} \oplus \cdots \oplus l_{in}^{\otimes^p} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(\underbrace{l_{i1} + l_{i1} + \cdots + l_{i1}}_{p \text{ tane}}, \cdots, \underbrace{l_{in} + l_{in} + \cdots + l_{in}}_{p \text{ tane}}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(p.l_{i1}, p.l_{i2}, \cdots, p.l_{in}) \\
&= \max(p.l_{11}, p.l_{12}, \cdots, p.l_{in}) \oplus \cdots \oplus \max(p.l_{n1}, p.l_{n2}, \cdots, p.l_{nn}) \\
&= \max(p.l_{n-1}, p.l_{n-1}, \cdots, p.l_{n-1}) \\
&= p.l_{n-1}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.

2. 3. Pell Matrisinin Maksimum Cebirsel Matris Normları

Bueno ve Taganap (2014) klasik lineer cebirde Pell sayıları ile oluşturulan devirli (sirkulant) matrislerin normlarını araştırmışlardır. Bu bölümde ise benzer olarak, Maksimum toplam cebirinde Pell sayıları ile oluşturulan devirli (sirkulant) matrislerin normları hesaplanmaktadır.

$\{p_n\}_{n\geq 0}$ Pell sayı dizisinin n-inci terimi p_n olmak üzere $p=(p_0,p_1,...,p_{n-1})\in S^n$ vektörünün maksimum cebirsel vektör normu,

$$\begin{aligned}
\|p\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} |p_i|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n-1} |p_i|_{\oplus} = |p_0|_{\oplus} \oplus |p_1|_{\oplus} \oplus \cdots \oplus |p_{n-1}|_{\oplus} \\
&= p_0 \oplus p_1 \oplus \cdots \oplus p_{n-1} \\
&= \max\{p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}\} \\
&= p_{n-1}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. $P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & \cdots & p_{n-1} \\ p_{n-1} & p_0 & \cdots & p_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_0 \end{pmatrix}\in S^{n\times n}$ Pell matrisinin maksimum cebirsel matris normu

$$\begin{aligned}
\|P\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n} |p_{ij}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n} |p_{ij}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} (p_{i1} \oplus p_{i2} \oplus \cdots \oplus p_{in}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{in}) \\
&= \max(p_{11}, p_{12}, \cdots p_{1n}) \oplus \max(p_{21}, p_{22}, \cdots, p_{2n}) \oplus \cdots \oplus \max(p_{n1}, p_{n2}, \cdots, p_{nn}) \\
&= \max(p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}) \oplus \max(p_{n-1}, p_0, \cdots, p_{n-2}) \oplus \cdots \oplus \max(p_1, p_2, \cdots, p_0) \\
&= \max(p_{n-1}, p_{n-1}, \cdots, p_{n-1}) \\
&= p_{n-1}
\end{aligned}$$

biminde hesaplanır. P matrisinin maksimum cebirsel Frobenius (Euclidean) normu ise,

$$
\begin{aligned}
\|P\|_{\oplus E}^{\otimes^2} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left| p_{ij} \right|_{\oplus}^{\otimes^2} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left| p_{ij} \right|_{\oplus}^{\otimes^2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\left| p_{i1} \right|^{\otimes^2} \oplus \left| p_{i2} \right|^{\otimes^2} \oplus \cdots \oplus \left| p_{in} \right|^{\otimes^2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max \left(\underbrace{p_{i1} + p_{i1}}_{2 \text{ tane}}, \cdots, \underbrace{p_{in} + p_{in}}_{2 \text{ tane}} \right) \\
&= \max(2.p_{11}, 2.p_{12}, \cdots, 2.p_{in}) \oplus \cdots \oplus \max(2.p_{n1}, 2.p_{n2}, \cdots, 2.p_{nn}) \\
&= \max(2.p_0, 2.p_1, \cdots, 2.p_{n-1}) \oplus \cdots \oplus \max(2.p_1, 2.p_2, \cdots, 2.p_0) \\
&= \max(2.p_{n-1}, 2.p_{n-1}, \cdots, 2.p_{n-1}) \\
&= 2.p_{n-1}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Pell matrisinin $\|P\|_{\oplus}^{\otimes^p}$ p-normu,

$$
\begin{aligned}
\|P\|_{\oplus}^{\otimes^p} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left| p_{ij} \right|_{\oplus}^{\otimes^p} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left| p_{ij} \right|_{\oplus}^{\otimes^p} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(p_{i1}^{\otimes^p} \oplus p_{i2}^{\otimes^p} \oplus \cdots \oplus p_{in}^{\otimes^p} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(\underbrace{p_{i1} + p_{i1} + \cdots + p_{i1}}_{p \text{ tane}}, \cdots, \underbrace{p_{in} + p_{in} + \cdots + p_{in}}_{p \text{ tane}}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(p.p_{i1}, p.p_{i2}, \cdots, p.p_{in}) \\
&= \max(p.p_{11}, p.p_{12}, \cdots, p.p_{in}) \oplus \max(p.p_{21}, p.p_{22}, \cdots, p.p_{2n}) \oplus \cdots \oplus \max(p.p_{n1}, p.p_{n2}, \cdots, p.p_{nn}) \\
&= \max(p.p_{n-1}, p.p_{n-1}, \cdots, p.p_{n-1}) \\
&= p.P_{n-1}
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır.

2. 4. Pell-Lucas Matrisinin Maksimum Cebirsel Matris Normları

Bueno ve Taganap (2014) klasik lineer cebirde Pell-Lucas sayıları ile oluşturulan devirli (sirkulant) matrislerin normlarını araştırmışlardır. Bu bölümde ise benzer olarak, Maksimum toplam cebirinde Pell-Lucas sayıları ile oluşturulan devirli (sirkulant) matrislerin normları hesaplanmaktadır.

$\{P_n\}_{n\geq 0}$ Pell-Lucas sayı dizisinin n-inci terimi P_n olmak üzere $P=(P_0,P_1,...,P_{n-1})\in S^n$ vektörünün maksimum cebirsel vektör normu,

$$\begin{aligned}
\|P\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} |P_i|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n} |P_{ij}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} (P_{i1}\oplus P_{i2}\oplus\cdots\oplus P_{in}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{in}) \\
&= \max(P_{11},P_{12},\cdots,P_{1n})\oplus\max(P_{21},P_{22},\cdots,P_{2n})\oplus\cdots\oplus\max(P_{n1},P_{n2},\cdots,P_{nn}) \\
&= \max(P_0,P_1,\cdots,P_{n-1})\oplus\max(P_{n-1},P_0,\cdots,P_{n-2})\oplus\cdots\oplus\max(P_1,P_2,\cdots,P_0) \\
&= \max(P_{n-1},P_{n-1},\cdots,P_{n-1}) \\
&= P_{n-1}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. $\mathscr{P}=\begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_{n-1} \\ P_{n-1} & P_0 & \cdots & P_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_1 & P_2 & \cdots & P_0 \end{pmatrix}\in S^{n\times n}$ Pell-Lucas matrisinin matrisin maksimum cebirsel matris normu,

$$\begin{aligned}
\|P\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n} |P_{ij}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n} |P_{ij}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} (P_{i1}\oplus P_{i2}\oplus\cdots\oplus P_{in}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(P_{i1},P_{i2},\cdots,P_{in}) \\
&= \max(P_{11},P_{12},\cdots,P_{1n})\oplus\max(P_{21},P_{22},\cdots,P_{2n})\oplus\cdots\oplus\max(P_{n1},P_{n2},\cdots,P_{nn}) \\
&= \max(P_0,P_1,\cdots,P_{n-1})\oplus\max(P_{n-1},P_0,\cdots,P_{n-2})\oplus\cdots\oplus\max(P_1,P_2,\cdots,P_0) \\
&= \max(P_{n-1},P_{n-1},\cdots,P_{n-1}) \\
&= P_{n-1}
\end{aligned}$$

biçiminde hesaplanır. Pell-Lucas matrisinin maksimum cebirsel Frobenius (Euclidean) normu,

$$\begin{aligned}
\|P\|_{\oplus E}^{\otimes^2} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left| P_{ij} \right|_{\oplus}^{\otimes^2} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} P_{\oplus}^{\otimes^2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\left| P_{i1} \right|^{\otimes^2} \oplus \left| P_{i2} \right|^{\otimes^2} \oplus \cdots \oplus \left| P_{in} \right|^{\otimes^2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max \left(\underbrace{P_{i1} + P_{i1}}_{2 \tan e}, \cdots, \underbrace{P_{in} + P_{in}}_{2 \tan e} \right) \\
&= \max(2.P_{11}, 2.P_{12}, \cdots, 2.P_{in}) \oplus \cdots \oplus \max(2.P_{n1}, 2.P_{n2}, \cdots, 2.P_{nn}) \\
&= \max(2.P_{0}, 2.P_{1}, \cdots, 2.P_{n-1}) \oplus \cdots \oplus \max(2.P_{1}, 2.P_{2}, \cdots, 2.P_{0}) \\
&= \max(2.P_{n-1}, 2.P_{n-1}, \cdots, 2.P_{n-1}) \\
&= 2.P_{n-1}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır . Pell-Lucas matrisinin maksimum p- normu,

$$\begin{aligned}
\|P\|_{\oplus}^{\otimes^p} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left| P_{ij} \right|_{\oplus}^{\otimes^p} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left| P_{ij} \right|_{\oplus}^{\otimes^p} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(P_{i1}^{\otimes^p} \oplus P_{i2}^{\otimes^p} \oplus \cdots \oplus P_{in}^{\otimes^p} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(\underbrace{P_{i1} + P_{i1} + \cdots + P_{i1}}_{p \tan e}, \cdots, \underbrace{P_{in} + P_{in} + \cdots + P_{in}}_{p \tan e}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(p.P_{i1}, p.P_{i2}, \cdots, p.P_{in}) \\
&= \max(p.P_{11}, p.P_{12}, \cdots, p.P_{in}) \oplus \cdots \oplus \max(p.P_{n1}, p.P_{n2}, \cdots, p.P_{nn}) \\
&= \max(p.P_{n-1}, p.P_{n-1}, \cdots, p.Pp_{n-1}) \\
&= p.P_{n-1}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

2. 5. Jacobsthal Matrisin Maksimum Cebirsel Matris Normları

Koçer (2007) klasik lineer cebirde Jacobsthal sayıları ile oluşturulan bazı devirli (sirkulant) matrislerin normlarını araştırmıştır. Bu bölümde ise benzer olarak, maksimum toplam cebirinde Jacobsthal sayıları ile oluşturulan devirli (sirkulant) matrislerin normları hesaplanmaktadır.

$\{j_n\}_{n\geq 0}$ Jakobsthal sayı dizisinin n-inci terimi j_n olmak üzere $j=(j_0, j_1, ..., j_{n-1})\in S^n$ vektörünün maksimum cebirsel vektör normu,

$$
\begin{aligned}
\|j\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} |j_i|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n-1} |j_i|_{\oplus} \\
&= |j_0|_{\oplus} \oplus |j_1|_{\oplus} \oplus \cdots \oplus |j_{n-1}|_{\oplus} \\
&= j_0 \oplus j_1 \oplus \cdots \oplus j_{n-1} \\
&= \max\{j_0, j_1, \cdots, j_{n-1}\} \\
&= j_{n-1}
\end{aligned}
$$

biçiminde hesaplanır. $J=\begin{pmatrix} j_0 & j_1 & \cdots & j_{n-1} \\ j_{n-1} & j_0 & \cdots & j_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_0 \end{pmatrix}\in S^{n\times n}$ Jakobsthal matrisinin maksimum cebirsel matris normu,

$$
\begin{aligned}
\|J\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n} |j_{ij}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n} |j_{ij}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} (j_{i1} \oplus j_{i2} \oplus \cdots \oplus j_{in}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(j_{i1}, j_{i2}, \cdots, j_{in}) \\
&= \max(j_{11}, j_{12}, \cdots, j_{1n}) \oplus \max(j_{21}, j_{22}, \cdots, j_{2n}) \oplus \cdots \oplus \max(j_{n1}, j_{n2}, \cdots, j_{nn}) \\
&= \max(j_0, j_1, \cdots, j_{n-1}) \oplus \max(j_{n-1}, j_0, \cdots, j_{n-2}) \oplus \cdots \oplus \max(j_1, j_2, \cdots, j_0) \\
&= \max(j_{n-1}, j_{n-1}, \cdots, j_{n-1}) \\
&= j_{n-1}
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır. olarak bulunur. J matrisinin maksimum cebirsel Frobenius (Euclidean) normu,

$$\begin{aligned}
\|J\|_{\oplus E}^{\otimes 2} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |j_{ij}|_{\oplus}^{\otimes 2} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |j_{ij}|_{\oplus}^{\otimes 2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(|j_{i1}|^{\otimes 2} \oplus |j_{i2}|^{\otimes 2} \oplus \cdots \oplus |j_{in}|^{\otimes 2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max \left(\underbrace{j_{i1} + j_{i1}}_{2 \tan e}, \cdots, \underbrace{j_{in} + j_{in}}_{2 \tan e} \right) \\
&= \max(2.j_{11}, 2.j_{12}, \cdots, 2.j_{in}) \oplus \cdots \oplus \max(2.j_{n1}, 2.j_{n2}, \cdots, 2.j_{nn}) \\
&= \max(2.j_{0}, 2.j_{1}, \cdots, 2.j_{n-1}) \oplus \cdots \oplus \max(2.j_{1}, 2.j_{2}, \cdots, 2.j_{0}) \\
&= \max(2.j_{n-1}, 2.j_{n-1}, \cdots, 2.j_{n-1}) \\
&= 2.j_{n-1}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. J matrisinin maksimum cebirsel p- normu,

$$\begin{aligned}
\|J\|_{\oplus}^{\otimes p} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |j_{ij}|_{\oplus}^{\otimes p} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |j_{ij}|_{\oplus}^{\otimes p} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(j_{i1}^{\otimes p} \oplus j_{i2}^{\otimes p} \oplus \cdots \oplus j_{in}^{\otimes p} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(\underbrace{j_{i1} + j_{i1} + \cdots + j_{i1}}_{p \tan e}, \cdots, \underbrace{j_{in} + j_{in} + \cdots + j_{in}}_{p \tan e}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(p.j_{i1}, p.j_{i2}, \cdots, p.j_{in}) \\
&= \max(p.j_{11}, p.j_{12}, \cdots, p.j_{in}) \oplus \cdots \oplus \max(p.j_{n1}, p.j_{n2}, \cdots, p.j_{nn}) \\
&= \max(p.j_{n-1}, p.j_{n-1}, \cdots, p.j_{n-1}) \\
&= p.j_{n-1}
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir.

2. 6. Jacobsthal-Lucas Matrisinin Maksimum Cebirsel Matris Normları

Koçer (2007) klasik lineer cebirde Jacobsthal-Lucas sayıları ile oluşturulan bazı devirli (sirkulant) matrislerin normlarını araştırmıştır. Bu bölümde ise benzer olarak, maksimum toplam cebirinde Jacobsthal-Lucas sayıları ile oluşturulan devirli (sirkulant) matrislerin normları hesaplanmaktadır.

$\{J_n\}_{n\geq 0}$ Jacobsthal sayı dizisinin n-inci terimi J_n olmak üzere $J=(J_0,J_1,...,J_{n-1})\in S^n$ vektörünün cebirsel vektör normu,

$$\begin{aligned}
\|J\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} |J_i|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=0}^{n-1} |J_i|_{\oplus} \\
&= |J_0|_{\oplus} \oplus |J_1|_{\oplus} \oplus \cdots \oplus |J_{n-1}|_{\oplus} \\
&= J_0 \oplus J_1 \oplus \cdots \oplus J_{n-1} \\
&= \max\{J_0, J_1, \cdots, J_{n-1}\} \\
&= J_{n-1}
\end{aligned}$$

şeklindedir. $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} J_0 & J_1 & \cdots & J_{n-1} \\ J_{n-1} & J_0 & \cdots & J_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_1 & J_2 & \cdots & J_0 \end{pmatrix} \in S^{n\times n}$ şeklindeki Jacobsthal-Lucas devirli matrisinin maksimum cebirsel matris normu,

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{J}\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |J_{ij}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |J_{ij}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} (J_{i1} \oplus J_{i2} \oplus \cdots \oplus J_{in}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(J_{i1}, J_{i2}, \cdots, J_{in}) \\
&= \max(J_{11}, J_{12}, \cdots, J_{1n}) \oplus \max(J_{21}, J_{22}, \cdots, J_{2n}) \oplus \cdots \oplus \max(J_{n1}, J_{n2}, \cdots, J_{nn}) \\
&= \max(J_0, J_1, \cdots, J_{n-1}) \oplus \max(J_{n-1}, J_0, \cdots, J_{n-2}) \oplus \cdots \oplus \max(J_1, J_2, \cdots, J_0) \\
&= \max(J_{n-1}, J_{n-1}, \cdots, J_{n-1}) \\
&= J_{n-1}
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Jakobsthal-Lucas matrisinin maksimum cebirsel Frobenius (Euclidean) normu,

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{J}\|_{\oplus E}^{\otimes^2} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left| J_{ij} \right|_{\oplus}^{\otimes^2} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left| J_{ij} \right|_{\oplus}^{\otimes^2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\left| J_{i1} \right|^{\otimes^2} \oplus \left| J_{i2} \right|^{\otimes^2} \oplus \cdots \oplus \left| J_{in} \right|^{\otimes^2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max \left(\underbrace{J_{i1} + J_{i1}}_{2 \tan e}, \cdots, \underbrace{J_{in} + J_{in}}_{2 \tan e} \right) \\
&= \max(2.J_{11}, 2.J_{12}, \cdots, 2.J_{in}) \oplus \cdots \oplus \max(2.J_{n1}, 2.J_{n2}, \cdots, 2.J_{nn}) \\
&= \max(2.J_0, 2.J_1, \cdots, 2.J_{n-1}) \oplus \cdots \oplus \max(2.J_1, 2.J_2, \cdots, 2.J_0) \\
&= \max(2.J_{n-1}, 2.J_{n-1}, \cdots, 2.J_{n-1}) \\
&= 2.J_{n-1}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Jacobsthal-Lucas devirli matrisinin maksimum cebirsel $p-$normu,

$$
\begin{aligned}
\|\boldsymbol{J}\|_{\oplus}^{\otimes^p} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left| J_{ij} \right|_{\oplus}^{\otimes^p} \right) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} \left| J_{ij} \right|_{\oplus}^{\otimes^p} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(J_{i1}^{\otimes^p} \oplus J_{i2}^{\otimes^p} \oplus \cdots \oplus J_{in}^{\otimes^p} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(\underbrace{J_{i1} + J_{i1} + \cdots + J_{i1}}_{p \tan e}, \cdots, \underbrace{J_{in} + J_{in} + \cdots + J_{in}}_{p \tan e}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(p.J_{i1}, p.J_{i2}, \cdots, p.J_{in}) \\
&= \max(p.J_{11}, p.J_{12}, \cdots, p.J_{in}) \oplus \cdots \oplus \max(p.J_{n1}, p.J_{n2}, \cdots, p.J_{nn}) \\
&= \max(p.J_{n-1}, p.J_{n-1}, \cdots, p.J_{n-1}) \\
&= p.J_{n-1}
\end{aligned}
$$

şeklinde hesaplanır.

2. 7. Fermat Matrisinin Maksimum Cebirsel Matris Normları

$\{F_n\}_{n\geq 0}$ Fermat sayı dizisinin n-inci terimi F_n olmak üzere $F = (F_0, F_1, ..., F_{n-1}) \in S^n$ vektörünün maksimum cebirsel vektör normu,

$$
\begin{aligned}
\|F\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=0}^{n-1} |F_i|_{\oplus} \\
&= |F_0|_{\oplus} \oplus |F_1|_{\oplus} \oplus \cdots \oplus |F_{n-1}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(F_{i1}, F_{i2}, \cdots, F_{in}) \\
&= \max(F_{11}, F_{12}, \cdots, F_{1n}) \oplus \max(F_{21}, F_{22}, \cdots, F_{2n}) \oplus \cdots \oplus \max(F_{n1}, F_{n2}, \cdots, F_{nn}) \\
&= \max(F_0, F_1, \cdots, F_{n-1}) \oplus \max(F_{n-1}, F_0, \cdots, F_{n-2}) \oplus \cdots \oplus \max(F_1, F_2, \cdots, F_0) \\
&= \max(F_{n-1}, F_{n-1}, \cdots, F_{n-1}) \\
&= F_{n-1}
\end{aligned}
$$

şeklindedir. $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 & \cdots & F_{n-1} \\ F_{n-1} & F_0 & \cdots & F_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_1 & F_2 & \cdots & F_0 \end{pmatrix} \in S^{n\times n}$ Fermat devirli matrisinin maksimum cebirsel matris normu,

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{F}\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |F_{ij}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} (F_{i1} \oplus F_{i2} \oplus \cdots \oplus F_{in}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max(F_{i1}, F_{i2}, \cdots, F_{in}) \\
&= \max(F_{11}, F_{12}, \cdots, F_{1n}) \oplus \max(F_{21}, F_{22}, \cdots, F_{2n}) \oplus \cdots \oplus \max(F_{n1}, F_{n2}, \cdots, F_{nn}) \\
&= \max(F_0, F_1, \cdots, F_{n-1}) \oplus \max(F_{n-1}, F_0, \cdots, F_{n-2}) \oplus \cdots \oplus \max(F_1, F_2, \cdots, F_0) \\
&= \max(F_{n-1}, F_{n-1}, \cdots, F_{n-1}) \\
&= F_{n-1}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. **F** matrisinin maksimum cebirsel Frobenius (Euclidean) normu,

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{F}\|_{\oplus E}^{\otimes^2} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bigoplus_{j=1}^{n} |F_{ij}|_{\oplus}^{\otimes^2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \left(|F_{i1}|^{\otimes^2} \oplus |F_{i2}|^{\otimes^2} \oplus \cdots \oplus |F_{in}|^{\otimes^2} \right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n} \max\left(\underbrace{F_{i1} + F_{i1}}_{2\ \text{tane}}, \cdots, \underbrace{F_{in} + F_{in}}_{2\ \text{tane}} \right) \\
&= \max(2.F_0, 2.F_1, \cdots, 2.F_{n-1}) \oplus \cdots \oplus \max(2.F_1, 2.F_2, \cdots, 2.F_0) \\
&= \max(2.F_{n-1}, 2.F_{n-1}, \cdots, 2.F_{n-1}) \\
&= 2.F_{n-1}
\end{aligned}
$$

biçiminde elde edilir. **F** matrisinin maksimum cebirsel *p*- normu,

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{F}\|_{\oplus}^{\otimes^p} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n}|F_{ij}|_{\oplus}^{\otimes^p}\right)\\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\left(F_{i1}^{\otimes^p}\oplus F_{i2}^{\otimes^p}\oplus\cdots\oplus F_{in}^{\otimes^p}\right)\\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\max(\underbrace{F_{i1}+F_{i1}+\cdots+F_{i1}}_{p\ \text{tane}},\cdots,\underbrace{F_{in}+F_{in}+\cdots+F_{in}}_{p\ \text{tane}})\\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\max(p.F_{i1},p.F_{i2},\cdots,p.F_{in})\\
&= \max(p.F_{11},p.F_{12},\cdots,p.F_{in})\oplus\cdots\oplus\max(p.F_{n1},p.F_{n2},\cdots,p.F_{nn})\\
&= \max(p.F_{n-1},p.F_{n-1},\cdots,p.F_{n-1})\\
&= p.F_{n-1}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

2. 8. Mersenne Matrisinin Maksimum Cebirsel Matris Normları

$\{m_n\}_{n\geq 0}$ Mersenne sayı dizisinin *n*-inci terimi m_n olmak üzere $m=(m_0,m_1,...,m_{n-1})\in S^n$ vektörünün maksimum cebirsel vektör normu,

$$\begin{aligned}
\|m\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=0}^{n-1}|m_i|_{\oplus}\\
&= |m_0|_{\oplus}\oplus|m_1|_{\oplus}\oplus\cdots\oplus|m_{n-1}|_{\oplus}\\
&= \max(m_0,m_1,\cdots,m_{n-1})\\
&= m_{n-1}
\end{aligned}$$

şeklindedir.

$M=\begin{pmatrix} m_0 & m_1 & \cdots & m_{n-1}\\ m_{n-1} & m_0 & \cdots & m_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ m_1 & m_2 & \cdots & m_0\end{pmatrix}\in S^{n\times n}$ Mersenne devirli matrisinin maksimum cebirsel matris normu,

$$
\begin{aligned}
\|M\|_{\oplus} &= \bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n}|m_{ij}|_{\oplus} \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}(m_{i1}\oplus m_{i2}\oplus\cdots\oplus m_{in}) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\max(m_{i1},m_{i2},\cdots,m_{in}) \\
&= \max(m_{11},m_{12},\cdots,m_{1n})\oplus\max(m_{21},m_{22},\cdots,m_{2n})\oplus\cdots\oplus\max(m_{n1},m_{n2},\cdots,m_{nn}) \\
&= \max(m_{0},m_{1},\cdots,m_{n-1})\oplus\max(m_{n-1},m_{0},\cdots,m_{n-2})\oplus\cdots\oplus\max(m_{1},m_{2},\cdots,m_{0}) \\
&= \max(m_{n-1},m_{n-1},\cdots,m_{n-1}) \\
&= m_{n-1}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. M matrisinin maksimum cebirsel Frobenius (Euclidean) normu,

$$
\begin{aligned}
\|M\|_{\oplus E}^{\otimes^2} &= \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\bigoplus_{j=1}^{n}|m_{ij}|_{\oplus}^{\otimes^2}\right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\left(|m_{i1}|^{\otimes^2}\oplus|m_{i2}|^{\otimes^2}\oplus\cdots\oplus|m_{in}|^{\otimes^2}\right) \\
&= \bigoplus_{i=1}^{n}\max\left(\underbrace{m_{i1}+m_{i1}}_{2\ \tan e},\cdots,\underbrace{m_{in}+m_{in}}_{2\ \tan e}\right) \\
&= \max(2.m_{11},2.m_{12},\cdots,2.m_{in})\oplus\cdots\oplus\max(2.m_{n1},2.m_{n2},\cdots,2.m_{nn}) \\
&= \max(2.m_{0},2.m_{1},\cdots,2.m_{n-1})\oplus\cdots\oplus\max(2.m_{1},2.m_{2},\cdots,2.m_{0}) \\
&= \max(2.m_{n-1},2.m_{n-1},\cdots,2.m_{n-1}) \\
&= 2.m_{n-1}
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. M matrisinin maksimum cebirsel p- normu,

$$
\begin{aligned}
\|M\|_{\oplus}^{\otimes^p} &= \bigoplus_{i=1}^{n}\max(\underbrace{m_{i1}+m_{i1}+\cdots+m_{i1}}_{p\ \tan e},\cdots,\underbrace{m_{in}+m_{in}+\cdots+m_{in}}_{p\ \tan e}) \\
&= \max(p.m_{n-1},p.m_{n-1},\cdots,p.m_{n-1}) = p.m_{n-1}
\end{aligned}
$$

şeklindedir.

3. SONUÇ VE TARTIŞMA

Tezde, maksimum toplam cebiri üzerine literatürde yer alan bazı temel tanımlar, teoremler, özellikler ve kavramlar verildi. Daha sonra literatürde yer alan bilgilerin bir derlemesi olarak, bu cebirde oluşturulan denklemler ve denklem sistemleri, çözümlerinin varlığı, tekliği ve sonsuz çoklukta olmaları yönünden irdelendi.

Klasik lineer cebirde bazı özel sayı dizilerinin elemanları ile oluşturulan devirli matrislerin bazı normlarının hesaplanmaları ile ilgili literatürde oldukça fazla bilimsel çalışma yer almaktadır. Benzer düşünceler ile, maksimum toplam cebirinde bazı özel sayı dizilerinin elemanları ile oluşturulan devirli matrislerin bazı normları elemanter matematiksel işlemlerle hesaplandı.

Maksimum toplam cebirinde bazı özel sayı dizilerinin elemanları ile oluşturulan Toeplitz, Hankel, Vandermonde gibi matrislerin bazı normlarının hesaplanmaları üzerine çalışmalar ayrıca yapılabilir.

KAYNAKLAR

Andersen, M.H., 2002. Max-Plus Algebra Properties and Applications, *Master Of Science*, Laramie -WY.

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.J. ve Quadrat, J.P., 1992. Synchronization and Linearity. *New York: John Wiley & Sons.*

Bapat, R.B., Stanford, D. ve Driessche, P., 1995. Pattern properties and spectral inequalities in max algebra. *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, 16(3), 964-976.

Bueno, A. C. F. ve Taganap, E. C., 2014. Note on right circulant matrices with Pell and Pell-Lucas sequences. Scientia Magna, 10(1), 11.

Butkovic, P., 1994. Strong regularity of matrices – a survey of results. *Discrete Applied Mathematics*, 48,45-68.

Butkovic, P., 2010. Notation, Definitions and Basic Properties, *Max Linear Systems: Theory and Algorithms,* Springer London Dordrecht Heidelberg New York, UK, 1-8.

Cuninghame-Green, R.A. , 1979. Lecture notes in Economics and Mathematical Systems.*Minimax Algebra*, 166.

Gaubert, S., 1997. Methods and Applications of (max,+) Linear Algebra, STACS 1997, Lecture Notes in Computer Science 500, Springer – Verlag, Berlin, pp. 261-282.

Gürsoy, B., 2013. Stability and Spectral Properties in the Max Algebra with Applications in Ranking Schemes, *Ph.D. Diss*, *Hamilton Institute,* Ireland.

Halburd, R.G. ve Southall, N.J., 2007. Tropical Nevanlinna Theory And Ultra-Discetete Equations, Loughborough University.

Heidergot, B., Olsder, G.J. ve Woude, J., 2006. Max Plus at Work, Priceton University Press, New Jersey.

Karp, R.M., 1978. A characterization of the minimum cycle mean in a digraph. *Discrete Math* 23, 309-311.

Kleene, S.C., 1956. Representation of Events in Nerve Sets and Finite Automata Studies, Annals of Mathematical Studies, 34, 3-41.

Kocer, E. G., 2007. Circulant, negacyclic and semicirculant matrices with the modified Pell, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 36(2).

Shen, S. ve Cen, J., 2010. On the bounds for the norms of r-circulant matrices with the Fibonacci and Lucas numbers. Applied Mathematics and Computation, 216(10), 2891-2897.

Schutter, B., 1996. Max Algebraic System Theory For Discrete Event Systems, *Katholieke Universiteit Leuven, Ph.D. Diss* , Heverlee.

Schutter, B., 2000. On the Ultimate Behavior of the Sequence of Consecutive Powers of a Matrix in the Max-Plus Algebra and it Applications. 30, 103-117.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Meltem DOĞU

Doğum Tarihi ve Yer : 05. 09. 1990, Erdemli

Medeni Hali : Evli

Yabancı Dili : İngilizce

Telefon : 05349226445

e-mail : meltem3303@outlook.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi	2017
Lisans	Mustafa Kemal Üniversitesi	2012
Lise	Erdemli Anadolu Lisesi	2008

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2013-2016	Karaman Özel Başarı Eğitim Kurumları	Matematik Öğretmeni
2016-	Karaman Nefise Sultan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni