BAZI KUATERNİYON SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Hanifi ÇELİKTEN

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Yüksek Lisans Programı

Doç. Dr. Ahmet İPEK

2017

T.C
KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI KUATERNİYON SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
Hanifi ÇELİKTEN

Anabilim Dalı: Matematik

Programı: Cebir ve Sayılar Teorisi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet İPEK

KARAMAN-2017

TEZ ONAYI

Hanifi ÇELİKTEN tarafından hazırlanan "**Bazı Kuaterniyon Sayı Dizileri ve Özellikleri**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman:
Doç. Dr. Ahmet İPEK

Eş Danışman:

Juri Üyeleri

İmza:

Ünvanı, Adı ve Soyadı
Doç. Dr. Ahmet İPEK

Ünvanı, Adı ve Soyadı
Doç. Dr. Nihal YOKUŞ

Ünvanı, Adı ve Soyadı
Yrd. Doç. Dr. Nihat AKGÜNEŞ

Tez Savunma Tarihi: 15 / 09 / 2017

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Kâmil ARI

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Hanifi ÇELİKTEN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BAZI KUATERNİYON SAYI DİZİLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Hanifi ÇELİKTEN

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet İPEK

Eylül, 2017, 49 sayfa

Tez, üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tez konusu üzerine literatür bilgisi, tezin amaç ve kapsamı verilmektedir. İkinci bölümde, kuaterniyonlar üzerine tez çalışmasında gerekli temel tanımlar, kavramlar ve teoremler sunulmaktadır. Tezin son bölümünde, Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonlarının bazı cebirsel özellikleri ve bu kuaterniyonlar için bazı özdeşlikler verilmektedir.

Anahtar Kelimeler: Fibonacci kuaterniyonları, Lucas kuaterniyonları, Pell kuaterniyonları, Pell-Lucas kuaterniyonları, Jacobsthal kuaterniyonları, Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları.

ABSTRACT

Ms Thesis

SOME QUATERNION NUMBERS SEQUENCES AND THEIR PROPERTIES

Hanifi ÇELİKTEN

Karamanoğlu Mehmetbey University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ahmet İPEK

September, 2017, 49 pages

This thesis consists of three sections. In the first section, the literature knowledge on the topic of thesis, the aim and scope of this thesis have been given. In the second section, the basic definitions, concepts and theorems required for this thesis on quaternions have been presented. In the last section of this thesis, some algebraic properties of Fibonacci, Lucas, Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas quaternions have been given. Also, in this last section, some identites for these quaternions have been presented.

Keywords: Fibonacci quaternions, Lucas quaternions, Pell quaternions, Pell-Lucas quaternions, Jacobsthal quaternions, Jacobsthal-Lucas quaternions.

ÖN SÖZ

Bu çalışma konusunu belirleme sürecinde bana yardımcı olan ve araştırmalarım ile tezimin tamamlanmasının her aşamasında yakın ilgi ve önerileriyle beni yönlendirip hatalarımı düzeltmem hususunda yardımlarını esirgemeyen danışman hocam,Sayın Ahmet İPEK (Karamanoğlu Mehmet Bey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü)' e, çalışmalarım sırasında bana her türlü desteği vermekle kalmayıp bu çalışmanın her anında bana azim ve cesaret veren sevgili eşim Emine ÇELİKTEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hanifi ÇELİKTEN

Eylül, 2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{H}$	Kuaterniyonlar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
S_q	Kuaterniyonun reel kısmı
$\vec{V}_q$	Kuaterniyonun vektörel kısmı
0_H	Toplamsal birim kuaterniyon
1_H	Çarpımsal birim kuaterniyon
$\lvert\ \rvert$	Kuaterniyon normu
$(\mathbb{H},+,.)$	Reel kuaterniyon cebiri
F_n	n. Fibonacci sayısı
L_n	n. Lucas sayısı
Q_n	Fibonacci kuaterniyon
K_n	Lucas kuaterniyon
$G(x,t)$	Fibonacci kuaterniyonun üreteç fonksiyonu
$K(x,t)$	Lucas kuaterniyonun üreteç fonksiyonu
QP_n	Pell kuaterniyonları
QPL_n	Pell-Lucas kuaterniyonları
$P(x,t)$	Pell kuaterniyonun üreteç fonksiyonu
$L(x,t)$	Pell-Lucas kuaterniyon üreteç fonksiyonu
JQ_n	Jakobstal kuaterniyonları
JLQ_n	Jakobstal-Lucas kuaterniyonları

1. GİRİŞ

Karmaşık sayıların üç boyutlu uzaya genişlemesi olan kuterniyonlar ilk defa İrlanda'lı matematikçi Sir William Rowan Hamilton (1805-1865) tarafından tanımlanmıştır. 20. yy a kadar üzerine yapılan çalışmalar çok sınırlı iken bugünlerde kuaterniyonlar üzerinde cebir, geometri, kuantum fiziği, jeositatik ve analiz problemlerine olan ilgi artmıştır.
Kuaterniyonlar teorisi Hamilton'dan sonra geliştirilmiş, dual ve split kuaterniyonlar türetilmiş ve bunlarla ilgili de birçok çalışma yapılmıştır (Nurkan ve Güven, 2014; Halıcı, 2015; Akyiğit, Kösal ve Tosun, 2013; Flaut ve Shpakivskyi, 2013; Özdemir, 2009; Kula, 2007).
Yine son yıllarda yapılan birçok çalışmada Fibonacci, Lucas ve Pell sayı dizileri kullanılarak tanımlanan kuaterniyonlar ile ilgili yeni özellikler ve sonuçlar elde edilmiştir (Iyer, 1969; Çimen ve İpek, 2015; Halıcı, 2012; Liana ve Wloch, 2015).
Halici (2012), Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için bazı özellikleri ve Binet formülünü vermiş ayrıca kuaterniyonlar için bazı toplam formülleri elde etmiştir.
Horadam, (1974), Sawmy, (1973), Iakin; (1977), Flaut ve Shpakivsky, (2013) genelleştirilmiş Fibonacci kuaterniyon ve bazı özelliklerine değinmişlerdir.
Iyer (1969), Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları ile bunlar arasındaki ilişkiyi vermiş ve genelleştirilmiş Fibonacci sayılarının bazı özelliklerini elde etmiştir.
Polatlı ve Kesim (2015), Binet formülü kullanarak genelleştirilmiş Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için yeni toplam formülleri elde etmişlerdir.
Çimen ve İpek (2015), Pell ve Pell-Lucas sayılarına benzer yapıda olan yeni Pell ve Pell-Lucas kuaterniyon sayı dizisi için sistematik bir inceleme yapmışlardır. Toplam ve Binet formüllerini içeren çeşitli sonuçlar elde emişlerdir.
Bu tezde kuaterniyonların genel özellikleri verilmekte Fibonacci, Lucas, Pell dizileri ile tanımlanan bazı kuaterniyon sayı dizileri tanımlanmakta ve bu kuaterniyon sayıları için bazı özdeşlikler ve formüller verilmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde kuaterniyonlar tanımlanmakta, $1, i, j, k$ birimleri için çarpım kuralları ve çarpım tablosu sunulmakta, kuaterniyonun modülü, eşleniği ve tersi, kuaterniyonların eşitliği, toplamı ve çarpımı gibi kuaterniyonlar üzerine tez için gerekli olan ve literatürde yer alan temel tanımlar, kavramlar ve özellikler verilmektedir.

Tanım 2.1:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \text{ ve } ij = -ji = k,\ \ jk = -kj = i,\ \ ki = -ik = j \tag{2.1}$$

koşulunu sağlayan $1, i, j, k$ birimleri ve $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ skalerleri için;

$$q = a + bi + cj + dk \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlı sayılara reel kuaterniyon veya kısaca kuaterniyon denir. Bu sayılardan oluşan küme $\mathbb{H}$ ile gösterilir ve kuaterniyonlar kümesi olarak isimlendirilir (Hamilton, 1843).

$\{1,\ i,\ j,\ k\}$ birimleri için çarpım kuralı İngiliz matematikçi Arthur Cayley tarafından inşa edilmiş olan aşağıdaki tablo ile ifade edilebilir.

*	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

Çizelge 2.1. $\{1,\ i,\ j,\ k\}$ birimleri için Cayley çarpım tablosu

Çarpım tablosundan,

$$ij = k,\ \ jk = i,\ \ ki = j \text{ ve } ji = -k,\ \ kj = -i,\ \ ik = -j$$

eşitlikleri yazılır ki, kuaterniyonlardaki bu çarpma işlemi üzerinde değişme özelliğinin olmadığı görülür.

$q = a + bi + cj + dk$ kuaterniyonu, reel kısmı $S_q = a$ ve vektörel kısmı $\vec{V}_q = bi + cj + dk$ olacak şekilde iki kısma ayrılır ve q kuaterniyonu için $q = S_q + \vec{V}_q$ yazılır. Bir kuaterniyon sadece vektörel kısımdan oluşuyorsa saf kuaterniyon olarak adlandırılır.

Örnek 2.1: $q = 3 + 4i - 2j + k$ kuaterniyonunun reel kısmı $S_q = 3$ ve vektörel kısmı $\vec{V}_q = 4i - 2j + k$ şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.2: $p = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ ve $q = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ kuaterniyonları için $p = q$ eşitliği $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ ve $d_1 = d_2$ ile tanımlanır (Horadam, 1963).

Tanım 2.2' de $p = q$ ise $S_p = S_q$ ve $\vec{V}_p = \vec{V}_q$ şeklinde olacağı açıktır.

Tanım 2.3: Toplamsal ve çarpımsal birim kuaterniyonlar sırasıyla,

$$0 + 0i + 0j + 0k = 0_{\mathbb{H}} \text{ ve } 1 + 0i + 0j + 0k = 1_{\mathbb{H}} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanırlar.

Tanım 2.4: $p = a_1 + b_i i + c_1 j + d_1 k$ ve $q = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ reel kuaterniyonlarının toplamı ve farkı;

$$p \mp q = \left(S_p \mp S_q\right) + \left(V_p \mp V_q\right) \tag{2.4}$$

şeklinde ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere λp çarpımı,

$$\lambda p = \left(\lambda a_1\right) + \left(\lambda b_1\right) i + \left(\lambda c_1\right) j + \left(\lambda d_1\right) k \tag{2.5}$$

şeklinde tanımlanır (Morais J.P., Georgiev S. ve Wolfgang S, 2010).

Tanım 2.5: $p = a_1 + b_i i + c_1 j + d_1 k$ ve $q = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ reel kuaterniyonlarının çarpımı;

$$\begin{aligned} pq = {} & a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + b_1 a_2 i - b_1 b_2 + b_1 c_2 k - b_1 d_2 j \\ & + c_1 a_2 j - c_1 b_2 k - c_1 c_2 + c_1 d_2 i + d_1 a_2 k + d_1 b_2 j - d_1 c_2 i - d_1 d_2 \end{aligned} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır.

pq çarpımı için (2.6) ile verilen sonuca,

$$\begin{aligned} pq &= \left(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k\right)\left(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k\right) \\ &= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_1 c_2 j + a_1 d_2 k + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2 + b_1 c_2 ij + b_1 d_2 ik \\ &\quad + c_1 a_2 j + c_1 b_2 ji + c_1 c_2 j^2 + c_1 d_2 jk + d_1 a_2 k + d_1 b_2 ki + d_1 c_2 kj + d_1 d_2 k^2 \end{aligned}$$

şeklindeki dağılma özelliğinden ve Cayley çarpım tablosundan faydalanılarak ulaşılabilir.

Teorem 2.1: $p, q \in \mathbb{H}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

i. $\overline{p \mp q} = \overline{p} \mp \overline{q}$, **(2.7)**

ii. $\overline{\overline{p}} = p$, **(2.8)**

iii. $\overline{\lambda p} = \lambda \overline{p}$, **(2.9)**

iv. $\overline{qp} = \overline{p}\overline{q}$, **(2.10)**

v. $p \in \mathbb{R} \Leftrightarrow p = \overline{p}$, **(2.11)**

vi. p saf kuaterniyon $\Leftrightarrow\ p=-\overline{p}$ **(2.12)**

şeklindeki özellikler doğrudur (Morais J.P., Georgiev S. ve Wolfgang S, 2010).

Bir kompleks sayının eşleniği tanımına benzer olarak, $q=a+bi+cj+dk$ kuaterniyonu-nun eşleniği olan kuaterniyon $\overline{q}=a-bi-cj-dk$ şeklinde ifade edilir.

$p=a+bi+cj+dk$ kuaterniyonu ve bu kuaterniyonun eşleniği olan $\overline{p}$ nin toplamı, farkı ve çarpımı;

$$p+\overline{p}=\left(a+bi+cj+dk\right)+\left(a-bi-cj-dk\right)=2a\,, \tag{2.13}$$

$$p-\overline{p}=\left(a+bi+cj+dk\right)-\left(a-bi-cj-dk\right)=2bi+2cj+2dk\,, \tag{2.14}$$

$$p\overline{p}=\left(a+bi+cj+dk\right)\left(a-bi-cj-dk\right)=a^2+b^2+c^2+d^2 \tag{2.15}$$

şeklinde elde edilir.

Her $p,\ q,\ r\in\mathbb{H}$ için, $p+q=q+p$ eşitliği vardır ve buradan toplama işleminin değişmeli olduğu, $p+(q+r)=\left(p+q\right)+r$ eşitliği vardır ve buradan toplama işleminin birleşmeli olduğu sonuçlarına varılır. Ayrıca, $p(q+r)=pq+pr$ ile $(p+q)r=pq+qr$ şeklinde çarpma işleminin toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özellikleri de mevcuttur.

Tanım 2.6: $q=a+bi+cj+dk$ kuaterniyonunun modülü, $\left|q\right|=\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ şeklin-de tanımlanır ve $\left|p\right|=1$ ise p ye birim kuaterniyon denir (Morais J.P., Georgiev S. ve Wolfgang S, 2010).

$q\overline{q}=\left|q\right|^2$ olduğu bilgisinden $q^{-1}q\overline{q}=q^{-1}\left|q\right|^2$ elde edilir ve buradan q kuaterniyonunun modülü ve eşleniği kullanılarak q'nun tersi $\dfrac{\overline{q}}{\left|q\right|^2}=q^{-1}$ biçiminde elde edilmiş olur.

q'nun tersi için diğer bir yol ise, kuaterniyon ile tersinin çarpımının $pp^{-1}=p^{-1}p=1_H$ olmasından faydalanmaktır.

Teorem 2.2: $p,\ q$ kuaterniyonları için,

i. $p\overline{p}=\overline{p}p=\left|p\right|^2,$ **(2.16)**

ii. $\left|pq\right|=\left|p\right|\left|q\right|,$ **(2.17)**

iii. $p\neq 0_H$ için $p^{-1}=\dfrac{\overline{p}}{\left|p\right|^2},$ **(2.18)**

iv. $\left|\overline{p}\right| = \left|-p\right| = \left|p\right|,$ **(2.19)**

v. $p, q \neq 0_H$ için $\left(pq\right)^{-1} = q^{-1}p^{-1}$ **(2.20)**

özellikleri vardır (Morais J.P., Georgiev S. ve Wolfgang S, 2010).

3. BAZI KUATERNİYON SAYI DİZİLERİ

3.1. Fibonacci ve Lucas Kuaterniyonları

Tanım 3.1.1: $F_0 = 0, F_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 1$ için,

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlı sayılara Fibonacci sayıları denir (Koshy, 2001).

Tanım 3.1.2: $L_0 = 2, L_1 = 1$ olmak üzere $n > 1$ için,

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{3.1.2}$$

şeklinde tanımlı sayılara Lucas sayıları denir (Koshy, 2001).

Aşağıdaki tablo bazı n değerlerine göre F_n ve L_n sayılarını vermektedir.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	…
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	…

Çizelge 3.1.1. İlk 10 Fibonacci ve Lucas sayısını veren tablo

(3.1.1) ve (3.1.2) ile verilen yineleme ilişlerinin karekteristik denklemleri:

$$x^2 = x + 1 \tag{3.1.3}$$

ile verilir. Bu karekteristik denklemin kökleri, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olarak elde edilir. Burada, $\alpha + \beta = 1$, $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ ve $\alpha\beta = -1$ eşitlikleri vardır (Koshy, 2001).

Tezin kalan kısmında α ve β sembolleri bu değerler için kullanılacaktır.

Teorem 3.1.1: $n \geq 1$ iken F_n ve L_n için,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \; L_n = \alpha^n + \beta^n \tag{3.1.4}$$

şeklindeki formüller doğrudur. 3.1.4 formülleri Binet formülleri olarak isimlendirilir (Koshy, 2001).

Örnek 3.1.1: $F_2 = 1$ ve $L_3 = 4$ olduğu bilinmektedir.

Böylece,

$$F_2 = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)}{\alpha - \beta} = \alpha + \beta = 1$$

ve

$$L_3 = \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)\left(\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta\right) = (\alpha + \beta)\left((\alpha + \beta)^2 - 3\alpha\beta\right) = 4$$

eşitlikleri ile 3.1.4'deki Binet formülleri F_2 ve L_3 için doğrulanır.

Tanım 3.1.3: Sırasıyla F_n ve L_n sırasıyla $n.$ Fibonacci ve Lucas sayıları olmak üzere, $n.$ Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları sırasıyla,

$$Q_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3} \qquad \text{(Horadam, 1963)} \qquad \textbf{(3.1.5)}$$

ve

$$K_n = L_n + iL_{n+1} + jL_{n+2} + kL_{n+3} \qquad \text{(Iyer, 1969)} \qquad \textbf{(3.1.6)}$$

şeklilde tanımlanır.

Tanım 3.1.4: Q_n ve K_n sırasıyla $n.$ Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlar olmak üzere bu kuaterniyonların eşleniği olan $\overline{Q_n}$ ve $\overline{K_n}$ kuaterniyonları;

$$\begin{aligned} \overline{Q_n} &= F_n - iF_{n+1} - jF_{n+2} - kF_{n+3}, \\ \overline{K_n} &= L_n - iL_{n+1} - jL_{n+2} - kL_{n+3} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.1.7)}$$

şeklinde tanımlanır (Horadam, 1963).   .

Tanım 3.1.5: Q_n ve K_n, n. Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlar olmak üzere bu kuaterniyonların normları;

$$\begin{aligned} |Q_n| &= \sqrt{F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2} \\ |K_n| &= \sqrt{L_n^2 + L_{n+1}^2 + L_{n+2}^2 + L_{n+3}^2} \end{aligned} \qquad \textbf{(3.1.8)}$$

şeklindedir (Horadam, 1963).

Önerme 3.1.1: $n,\ m,\ p \in \mathbb{N}$ olmak üzere F_n ve L_n sayıları aşağıdaki özellikleri sağlar (Koshy, 2001).

i. $F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1},$ **(3.1.9)**

ii. $F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n},$ **(3.1.10)**

iii. $L_n^2 - F_n^2 = 4F_{n-1}F_{n+1},$ **(3.1.11)**

iv. $L_n^2 + L_{n+1}^2 = 5F_{2n+1},$ **(3.1.12)**

v. $L_n^{\,2} = L_{2n} + 2\left(-1\right)^n$, **(3.1.13)**

vi. $F_{n+1} + F_{n-1} = L_n$, **(3.1.14)**

vii. $L_n + L_{n+2} = 5F_{n+1}$, **(3.1.15)**

viii. $F_n + F_{n+4} = 3F_{n+2}$, **(3.1.16)**

ix. $F_m L_{m+p} = F_{2m+p} + \left(-1\right)^{m+1} F_p$, **(3.1.17)**

x. $F_{m+p} L_m = F_{2m+p} + \left(-1\right)^m F_p$, **(3.1.18)**

xi. $F_m F_{m+p} = \dfrac{1}{5}\left(L_{2m+p} + \left(-1\right)^{m+1} L_p\right)$. **(3.1.19)**

Lemma 3.1.1:
Fibonacci kuaterniyonlar için aşağıdaki yeni eşitlikler elde edilmiştir (Halıcı, 2012).

i. $Q_n + \overline{Q_n} = 2F_n$, **(3.1.20)**

ii. $Q_n^{\,2} = 2F_n Q_n - Q_n \overline{Q_n}$, **(3.1.21)**

iii. $Q_n \overline{Q_n} = \sum_{i=0}^{3} F_{n+1}^2 = 3F_{2n+3}$. **(3.1.22)**

İspat:

i. $Q_n = F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}$

ve

$$\overline{Q_n} = F_n - iF_{n+1} - jF_{n+2} - kF_{n+3}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned} Q_n + \overline{Q_n} &= \left(F_n + \cancel{iF_{n+1}} + \cancel{jF_{n+2}} + \cancel{kF_{n+3}}\right) + \left(F_n - \cancel{iF_{n+1}} - \cancel{jF_{n+2}} - \cancel{kF_{n+3}}\right) \\ &= 2F_n \end{aligned}$$

sonucuna varılır.

ii. $Q_n = 2F_n - \overline{Q_n}$ özdeşliği kullanılarak,

$$Q_n^{\,2} = Q_n Q_n = Q_n (2F_n - \overline{Q_n}) = 2F_n Q_n - Q_n \overline{Q_n}$$

elde edilir.

iii. Önerme 3.1.1 den,

$$F_n^{\,2} + F_{n+1}^2 = F_{2n+1},$$

ve

$$F_n + F_{n+4} = 3F_{n+2},$$

olduğu dikkate alınırsa;

$$Q_n\overline{Q_n} = \sum_{i=0}^{3} F_{n+i}^2 = F_n^{\ 2} + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 = F_{2n+1} + F_{2(n+2)+1}$$
$$= 3F_{2n+3}$$

özdeşliği elde edilir.

Iwana ve Wloch, (2016) tarafından Teorem 3.1 de Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için bazı formüller sunulmuştur. Benzer şekilde aşağıdaki teoremde Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için verilen formüller bu tez çalışmasında elde edilmiştir.

Teorem 3.1.2: $n \geq 0$ için, aşağıdaki formüller doğrudur.

I. $$|Q_n|^2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left(15+6\sqrt{5}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left(15-6\sqrt{5}\right)}{5}, \qquad \textbf{(3.1.23)}$$

II. $$|K_n|^2 = 5|Q_n|^2. \qquad \textbf{(3.1.24)}$$

İspat: $x^2 - x - 1 = 0$ karekteristik denkleminin kökleri olan α ve β için; $\alpha+\beta=1$, $\alpha-\beta=\sqrt{5}$ ve $\alpha\beta=-1$ ve F_n, Fibonacci sayısı ve L_n, Lucas sayısı için Binet formülü:

$F_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, $L_n = \alpha^n + \beta^n$ olduğu hatırlansın.

I. $$|Q_n|^2 = F_n^{\ 2} + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2$$

$$= \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\alpha-\beta}\right)^2 + \left(\frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{\alpha-\beta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}}{\sqrt{5}}\right)^2$$

$$=\frac{1}{5}\Bigg\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}$$
$$+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}$$
$$+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+4}-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+4}$$
$$+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+6}-2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+6}\Bigg\}$$

$$=\frac{1}{5}\Bigg\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left[1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{4}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{6}\right]$$
$$-2\left[(-1)^{n}+(-1)^{n+1}+(-1)^{n+2}+(-1)^{n+3}\right]$$
$$+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left[1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{4}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{6}\right]$$

$$=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left(15+6\sqrt{5}\right)+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left(15-6\sqrt{5}\right)}{5}$$

formülü elde edilir.

II. $|K_n|^2=L_n^{\ 2}+L_{n+1}^2+L_{n+2}^2+L_{n+3}^2$

$$=\left(\alpha^n+\beta^n\right)^2+\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)^2+\left(\alpha^{n+2}+\beta^{n+2}\right)^2+\left(\alpha^{n+3}+\beta^{n+3}\right)^2$$
$$=\alpha^{2n}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}+\alpha^{2(n+1)}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2(n+1)}$$
$$+\alpha^{2(n+2)}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2(n+2)}+\alpha^{2(n+3)}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2(n+3)}$$

$$=5\Bigg(\frac{\alpha^{2n}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2n}}{5}+\frac{\alpha^{2(n+1)}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2(n+1)}}{5}$$
$$+\frac{\alpha^{2(n+2)}-2\alpha^n\beta^n+\beta^{2(n+2)}}{5}+\frac{\alpha^{2(n+3)}+2\alpha^n\beta^n+\beta^{2(n+3)}}{5}\Bigg)$$

$$=5\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{\alpha^{n+2}-\beta^{n+2}}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{\alpha^{n+3}-\beta^{n+3}}{\sqrt{5}}\right)^2$$
$$=5|Q_n|^2$$

olduğu elde edilir.

Teorem 3.1.3: $\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$ ve $\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$ olmak üzere $n \geq 0$ iken $n.$ Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için Binet formülü:

i. $Q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n\right),$ **(3.1.25)**

ii. $K_n = \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n.$ **(3.1.26)**

şeklinde verilir (Halıcı, 2010).

İspat: $n \geq 0$ olsun. Bu durumda,

i. $\alpha Q_n + Q_{n-1} = \alpha\left(F_n + iF_{n+1} + jF_{n+2} + kF_{n+3}\right) + F_{n-1} + iF_n + jF_{n+1} + kF_{n+2}$

ve

$$\alpha^n = \alpha F_n + F_{n-1}$$

olduğundan;

$$\alpha Q_n + Q_{n-1} = \alpha^n \underline{\alpha} \tag{3.1.27}$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde;

$$\beta Q_n + Q_{n-1} = \beta^n \underline{\beta} \tag{3.1.28}$$

olduğu görülür. Burada (3.1.27) ve (3.1.28) taraf tarafa çıkarılırsa;

$$Q_n(\alpha - \beta) = \alpha^n \underline{\alpha} - \beta^n \underline{\beta}$$

eşitliğinden,

$$Q_n = \frac{\alpha^n \underline{\alpha} - \beta^n \underline{\beta}}{\alpha - \beta}$$

elde edilir. Daha sonra $\alpha - \beta = \sqrt{5}$ olduğu dikkate alınırsa $n.$ Fibonacci kuaterniyonu için,

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n\right)$$

eşitliği elde edilir.

ii. K_n için Binet formülü;

$$\alpha^n \underline{\alpha} + \beta^n \underline{\beta} = (\alpha + \beta)Q_n + 2Q_{n-1} = Q_n + 2Q_{n-1} = K_n$$

şeklinde elde edilir.

Halıcı (2010) tarafından Fibonacci kuaterniyon için Cassini özdeşliği Fibonacci kuaterniyon matriste tümevarım kullanılarak elde edilmiştir. Bu tezde Binet formülü kullanılarak verilen aşağıdaki teorem ile Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlar için Cassini özdeşliği sunulmaktadır.

Teorem 3.1.4: (Cassini Özdeşliği) $\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$ ve $\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$ olmak üzere Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için,

i) $Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^{\,2} = \dfrac{(-1)^n}{5}\left[\left(a^2+1\right)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \left(\beta^2+1\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right],$ **(3.1.29)**

ii) $K_{n+1}K_{n-1} - K_n^{\,2} = (-1)^{n-1}\left[\left(a^2+1\right)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \left(\beta^2+1\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right].$ **(3.1.30)**

özdeşlikleri doğrudur.

İspat: $n \geq 0$ için,

i.
$$\begin{aligned}
Q_{n+1}Q_{n-1} - Q_n^{\,2} &= \left(\frac{\alpha^{n+1}\underline{\alpha} - \beta^{n+1}\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n-1}\underline{\alpha} - \beta^{n-1}\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right) - \left(\frac{\alpha^{n}\underline{\alpha} - \beta^{n}\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)^2 \\
&= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\Big[\alpha^{2n}\underline{\alpha}^2 - \alpha^{n+1}\beta^{n-1}\underline{\alpha}\underline{\beta} - \beta^{n+1}\alpha^{n-1}\underline{\beta}\underline{\alpha} + \beta^{2n}\underline{\beta}^2 \\
&\quad -\alpha^{2n}\underline{\alpha}^2 + \alpha^n\beta^n\underline{\alpha}\underline{\beta} + \alpha^n\beta^n\underline{\beta}\underline{\alpha} - \beta^{2n}\underline{\beta}^2\Big] \\
&= \frac{1}{5}\left[-\alpha^{n+1}\beta^{n-1}\underline{\alpha}\underline{\beta} - \beta^{n+1}\alpha^{n-1}\underline{\beta}\underline{\alpha} + \alpha^n\beta^n\underline{\alpha}\underline{\beta} + \alpha^n\beta^n\underline{\beta}\underline{\alpha}\right] \\
&= \frac{(\alpha\beta)^{n-1}}{5}\left[-\left(\alpha^2+1\right)\underline{\alpha}\underline{\beta} - \left(\beta^2+1\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{5}\left[\left(\alpha^2+1\right)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \left(\beta^2+1\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned}
K_{n+1}K_{n-1} - K_n^{\,2} &= \left(\alpha^{n+1}\underline{\alpha} + \beta^{n+1}\underline{\beta}\right)\left(\alpha^{n-1}\underline{\alpha} + \beta^{n-1}\underline{\beta}\right) - \left(\alpha^{n}\underline{\alpha} + \beta^{n}\underline{\beta}\right)^2 \\
&= \left[\alpha^{n+1}\beta^{n-1}\underline{\alpha}\underline{\beta} + \alpha^{n-1}\beta^{n+1}\underline{\beta}\underline{\alpha} - \alpha^n\beta^n\underline{\alpha}\underline{\beta} - \alpha^n\beta^n\underline{\beta}\underline{\alpha}\right] \\
&= (\alpha\beta)^{n-1}\left[\alpha^2\underline{\alpha}\underline{\beta} + \beta^2\underline{\beta}\underline{\alpha} - \alpha\beta\underline{\alpha}\underline{\beta} - \alpha\beta\underline{\beta}\underline{\alpha}\right] \\
&= (-1)^{n-1}\left[\alpha^2\underline{\alpha}\underline{\beta} + \beta^2\underline{\beta}\underline{\alpha} + \underline{\alpha}\underline{\beta} + \underline{\beta}\underline{\alpha}\right] \\
&= (-1)^{n-1}\left[\left(1+\alpha^2\right)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \left(1+\beta^2\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right].
\end{aligned}$$

Aşağıdaki teorem ile Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlar için Catalan özdeşliği sunulmaktadır.

Teorem 3.1.5: (Catalan Özdeşliği) Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i) $Q_n^{\,2} - Q_{n-r}Q_{n+r} = \dfrac{(-1)^{n-r}}{5}\left[\left(\beta^{2r} + (-1)^r\right)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \left(\alpha^{2r} + (-1)^r\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right],$ **(3.1.31)**

ii) $K_n^{\,2} - K_{n+r}K_{n-r} = (-1)^{n-r+1}\left[\left(a^{2r} - (-1)^r\right)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \left(\beta^{2r} - (-1)^r\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right].$ **(3.1.32)**

İspat:

$$\text{i)}\ Q_n^{\,2} - Q_{n-r}Q_{n+r} = \left(\frac{\alpha^n\underline{\alpha} - \beta^n\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha^{n-r}\underline{\alpha} - \beta^{n-r}\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+r}\underline{\alpha} - \beta^{n+r}\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\Big[\left(\alpha^{2n}\underline{\alpha}^2 + \alpha^n\beta^n\underline{\alpha}\underline{\beta} + \alpha^n\beta^n\underline{\beta}\underline{\alpha} + \beta^{2n}\underline{\beta}^2\right)$$

$$-\left(\alpha^{2n}\underline{\alpha}^2 - \alpha^{n-r}\beta^{n+r}\underline{\alpha}\underline{\beta} - \beta^{n-r}\alpha^{n+r}\underline{\beta}\underline{\alpha} + \beta^{2n}\underline{\beta}^2\right)\Big]$$

$$= \frac{1}{5}\left[\alpha^n\beta^n\underline{\beta}\underline{\alpha} + \alpha^n\beta^n\underline{\alpha}\underline{\beta} + \alpha^{n-r}\beta^{n+r}\underline{\alpha}\underline{\beta} + \beta^{n-r}\alpha^{n+r}\underline{\beta}\underline{\alpha}\right]$$

$$= \frac{(\alpha\beta)^{n-r}}{5}\left[\alpha^r\beta^r\underline{\beta}\underline{\alpha} + \alpha^r\beta^r\underline{\alpha}\underline{\beta} + \beta^{2r}\underline{\alpha}\underline{\beta} + \alpha^{2r}\underline{\beta}\underline{\alpha}\right]$$

$$= \frac{(-1)^{n-r}}{5}\left[\left(\beta^{2r} + (-1)^r\right)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \left(\alpha^{2r} + (-1)^r\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right].$$

$$\text{ii)}\ K_n^{\,2} - K_{n+r}K_{n-r} = \left(\alpha^n\underline{\alpha} + \beta^n\underline{\beta}\right)^2 - \left(\alpha^{n+r}\underline{\alpha} + \beta^{n+r}\underline{\beta}\right)\left(\alpha^{n-r}\underline{\alpha} + \beta^{n-r}\underline{\beta}\right)$$

$$= \left[\alpha^n\beta^n\underline{\alpha}\underline{\beta} + \alpha^n\beta^n\underline{\beta}\underline{\alpha} - \alpha^{n+r}\beta^{n-r}\underline{\alpha}\underline{\beta} + \alpha^{n-r}\beta^{n+r}\underline{\beta}\underline{\alpha}\right]$$

$$= (-1)^{n-r}\left[\alpha^r\beta^r\underline{\alpha}\underline{\beta} + \alpha^r\beta^r\underline{\beta}\underline{\alpha} - \alpha^{2r}\underline{\alpha}\underline{\beta} + \beta^{2r}\underline{\beta}\underline{\alpha}\right]$$

$$= (-1)^{n-r+1}\left[\left(\alpha^{2r} - (-1)^r\right)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \left(\beta^{2r} - (-1)^r\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right].$$

Aşağıdaki teorem ile Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlar için Vajda özdeşliği sunulmaktadır.

Teorem 3.1.6: (Vajda Özdeşliği) Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i) $Q_{n+i}Q_{n+j} - Q_nQ_{n+i+j} = (-1)^n\left[\dfrac{\left(\beta^{i+j} - \alpha^i\beta^j\right)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \left(\alpha^{i+j} - \alpha^j\beta^i\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}}{5}\right],$ **(3.1.33)**

ii) $K_{n+i}K_{n+j} - K_nK_{n+i+j} = (-1)^n\left[\left(a^i\beta^j - \beta^{i+j}\right)\underline{\alpha}\underline{\beta} + \left(\alpha^j\beta^i - \alpha^{i+j}\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right].$ **(3.1.34)**

İspat:

$$\textbf{i)}\ Q_{n+i}Q_{n+j} - Q_nQ_{n+i+j} = \left(\frac{\alpha^{n+i}\underline{\alpha} - \beta^{n+i}\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+j}\underline{\alpha} - \beta^{n+j}\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$-\left(\frac{\alpha^n\underline{\alpha} - \beta^n\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)\left(\frac{\alpha^{n+i+j}\underline{\alpha} - \beta^{n+i+j}\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\Big[\Big(\alpha^{2n+i+j}\underline{\alpha}^2-\alpha^{n+i}\beta^{n+j}\underline{\alpha}\underline{\beta}-\alpha^{n+j}\beta^{n+i}\underline{\beta}\underline{\alpha}+\beta^{2n+i+j}\underline{\beta}^2\Big)$$

$$-\Big(\alpha^{2n+i+j}\underline{\alpha}^2-\alpha^{n}\beta^{n+i+j}\underline{\alpha}\underline{\beta}-\alpha^{n+i+j}\beta^{n}\underline{\beta}\underline{\alpha}+\beta^{2n+i+j}\underline{\beta}^2\Big)\Big]$$

$$=\frac{1}{5}\Big[-\alpha^{n+i}\beta^{n+j}\underline{\alpha}\underline{\beta}-\alpha^{n+j}\beta^{n+i}\underline{\beta}\underline{\alpha}+\alpha^{n}\beta^{n+i+j}\underline{\alpha}\underline{\beta}+\alpha^{n+i+j}\beta^{n}\underline{\beta}\underline{\alpha}\Big]$$

$$=\frac{1}{5}\Big[\underline{\alpha}\underline{\beta}\Big(-\alpha^{n+i}\beta^{n+j}+\alpha^{n}\beta^{n+i+j}\Big)+\underline{\beta}\underline{\alpha}\Big(-\alpha^{n+j}\beta^{n+i}+\alpha^{n+i+j}\beta^{n}\Big)\Big]$$

$$=\frac{(\alpha\beta)^n}{5}\Big[\underline{\alpha}\underline{\beta}\Big(\beta^{i+j}-\alpha^{i}\beta^{j}\Big)+\underline{\beta}\underline{\alpha}\Big(\alpha^{i+j}-\alpha^{j}\beta^{i}\Big)\Big]$$

$$=\frac{(-1)^n}{5}\Big[\Big(\beta^{i+j}-\alpha^{i}\beta^{j}\Big)\underline{\alpha}\underline{\beta}+\Big(\alpha^{i+j}-\alpha^{j}\beta^{i}\Big)\underline{\beta}\underline{\alpha}\Big].$$

ii) $K_{n+i}K_{n+j}-K_nK_{n+i+j}=\Big(\alpha^{n+i}\underline{\alpha}+\beta^{n+i}\underline{\beta}\Big)\Big(\alpha^{n+j}\underline{\alpha}+\beta^{n+j}\underline{\beta}\Big)$

$$-\Big(\alpha^{n}\underline{\alpha}+\beta^{n}\underline{\beta}\Big)\Big(\alpha^{n+i+j}\underline{\alpha}+\beta^{n+i+j}\underline{\beta}\Big)$$

$$=\Big[a^{n+i}\beta^{n+j}\underline{\alpha}\underline{\beta}+\alpha^{n+j}\beta^{n+i}\underline{\beta}\underline{\alpha}-\alpha^{n}\beta^{n+i+j}\underline{\alpha}\underline{\beta}-\alpha^{n+i+j}\beta^{n}\underline{\beta}\underline{\alpha}\Big]$$

$$=(\alpha\beta)^n\Big[\Big(a^{i}\beta^{j}-\beta^{i+j}\Big)\underline{\alpha}\underline{\beta}+\Big(\alpha^{j}\beta^{i}-\alpha^{i+j}\Big)\underline{\beta}\underline{\alpha}\Big]$$

$$=(-1)^n\Big[\Big(a^{i}\beta^{j}-\beta^{i+j}\Big)\underline{\alpha}\underline{\beta}+\Big(\alpha^{j}\beta^{i}-\alpha^{i+j}\Big)\underline{\beta}\underline{\alpha}\Big].$$

Aşağıdaki teorem ile Fibonacci ve Lucas kuaterniyonlar için D'Ocagne özdeşliği sunulmaktadır.

Teorem 3.1.7: (D'Ocagne Özdeşliği) Fibonacci ve Lucas kuaterniyonları için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i) $Q_mQ_{n+1}-Q_nQ_{m+1}=\dfrac{(-1)^n}{5}\Big[\Big(\beta^{m-n+1}+\alpha^{m-n-1}\Big)\underline{\alpha}\underline{\beta}+\Big(\alpha^{m-n+1}+\beta^{m-n-1}\Big)\underline{\beta}\underline{\alpha}\Big].$ **(3.1.35)**

ii) $K_mK_{n+1}-K_nK_{m+1}=(-1)^{n+1}\Big[\Big(\beta^{m-n+1}+\alpha^{m-n-1}\Big)\underline{\alpha}\underline{\beta}+\Big(\alpha^{m-n+1}+\beta^{m-n-1}\Big)\underline{\beta}\underline{\alpha}\Big].$ **(3.1.36)**

İspat:

i. $Q_mQ_{n+1}-Q_nQ_{m+1}=\left(\dfrac{\alpha^m\underline{\alpha}-\beta^m\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)\left(\dfrac{\alpha^{n+1}\underline{\alpha}-\beta^{n+1}\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)-\left(\dfrac{\alpha^n\underline{\alpha}-\beta^n\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)\left(\dfrac{\alpha^{m+1}\underline{\alpha}-\beta^{m+1}\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\right)$

$$=\frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\Big[\Big(\alpha^{m+n+1}\underline{\alpha}^2-\alpha^{m}\beta^{n+1}\underline{\alpha}\underline{\beta}-\alpha^{n+1}\beta^{m}\underline{\beta}\underline{\alpha}+\beta^{m+n+1}\underline{\beta}^2\Big)$$

$$-\Big(\alpha^{m+n+1}\underline{\alpha}^2-\alpha^{n}\beta^{m+1}\underline{\alpha}\underline{\beta}-\alpha^{m+1}\beta^{n}\underline{\beta}\underline{\alpha}+\beta^{m+n+1}\underline{\beta}^2\Big)\Big]$$

$$=\frac{1}{5}\left[-\alpha^m\beta^{n+1}\underline{\alpha}\underline{\beta}-\alpha^{n+1}\beta^m\underline{\beta}\underline{\alpha}+\alpha^n\beta^{m+1}\underline{\alpha}\underline{\beta}+\alpha^{m+1}\beta^n\underline{\beta}\underline{\alpha}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left[\underline{\alpha}\underline{\beta}\left(-\alpha^m\beta^{n+1}+\alpha^n\beta^{m+1}\right)+\underline{\beta}\underline{\alpha}\left(-\alpha^{n+1}\beta^m+\alpha^{m+1}\beta^n\right)\right]$$

$$=\frac{(\alpha\beta)^n}{5}\left[\left(\beta^{m-n+1}-\alpha^{m-n}\beta\right)\underline{\alpha}\underline{\beta}+\left(\alpha^{m-n+1}-\beta^{m-n}\alpha\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right]$$

$$=\frac{(-1)^n}{5}\left[\left(\beta^{m-n+1}+\alpha^{m-n-1}\right)\underline{\alpha}\underline{\beta}+\left(\alpha^{m-n+1}+\beta^{m-n-1}\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right].$$

ii. $K_mK_{n+1}-K_nK_{m+1}=\left(\alpha^m\underline{\alpha}+\beta^m\underline{\beta}\right)\left(\alpha^{n+1}\underline{\alpha}+\beta^{n+1}\underline{\beta}\right)-\left(\alpha^n\underline{\alpha}+\beta^n\underline{\beta}\right)\left(\alpha^{m+1}\underline{\alpha}+\beta^{m+1}\underline{\beta}\right)$

$$=\left[a^m\beta^{n+1}\underline{\alpha}\underline{\beta}+\alpha^{n+1}\beta^m\underline{\beta}\underline{\alpha}-\alpha^n\beta^{m+1}\underline{\alpha}\underline{\beta}-\alpha^{m+1}\beta^n\underline{\beta}\underline{\alpha}\right]$$

$$=(-1)^{n+1}\left[\left(\beta^{m-n+1}+\alpha^{m-n-1}\right)\underline{\alpha}\underline{\beta}+\left(\alpha^{m-n+1}+\beta^{m-n-1}\right)\underline{\beta}\underline{\alpha}\right].$$

Aşağıdaki teoremde Q_n fibonacci kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu sunulmaktadır.

Teorem 3.1.8: Q_n Fibonacci kuaterniyonunun $G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)t^n$ üreteç fonksiyonu;

$$G(x,t)=\frac{t+i+j(t+1)+k(t+2)}{1-t-t^2} \qquad \textbf{(3.1.37)}$$

şeklinde ifade edilir (Halıcı, 2010).

İspat: Q_n Fibonacci kuaterniyonunun

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)t^n \qquad \textbf{(3.1.38)}$$

üreteç fonksiyonunu dikkate alalım. Halıcı (2010) tarafından $tG(x,t)$ ve $t^2G(x,t)$ eşitliklerini kullanarak üreteç fonksiyonu elde etmiştir. Bu tezde özgün çözüm için Q_n için Binet formülü kullanılarak,

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^n-\underline{\beta}\beta^n}{\alpha-\beta}\right)t^n$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\underline{\alpha}}{1-\alpha t}-\frac{\underline{\beta}}{1-\beta t}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\underline{\alpha}(1-\beta t)-\underline{\beta}(1-\alpha t)}{1-t-t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\underline{\alpha}-\underline{\beta}+\left[-\underline{\alpha}(\alpha+\beta)+\underline{\beta}(\alpha+\beta)\right]t+\left(\underline{\alpha}\alpha-\underline{\beta}\beta\right)t}{1-t-t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\underline{\alpha}-\underline{\beta}+\left[\left(\underline{\alpha}\alpha-\underline{\beta}\beta\right)-\left(\underline{\alpha}-\underline{\beta}\right)\right]t}{1-t-t^2}\right)$$

$$=\frac{Q_0+\left(Q_1-Q_0\right)t}{1-t-t^2}$$

eşitliğine ulaşılmıştır. Burada;

$$\begin{aligned} Q_0 &= F_0+F_1 i+F_2 j+F_3 k = i+j+2k \\ Q_1 &= F_1+F_2 i+F_3 j+F_4 k = 1+i+2j+3k \end{aligned} \tag{3.1.39}$$

olduğundan,

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)t^n=\frac{Q_0+\left(Q_1-Q_0\right)t}{1-t-t^2}=\frac{t+i+j(t+1)+k(t+2)}{1-t-t^2}$$

üreteç fonksiyonu elde edilir.

Fibonacci kuaterniyon için üreteç fonksiyon Halıcı (2010) tarafından verilmiştir. Benzer şekilde aşağıdaki teoremde K_n Lucas kuaterniyon için üreteç fonksiyon sunulmaktadır.

Teorem 3.1.9: K_n Lucas kuaterniyonunun $K(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)t^n$ üreteç fonksiyonu;

$$K(x,t)=\frac{2+t+\left(1+2t\right)i+j(3+t)+k(4+3t)}{1-t-t^2} \tag{3.1.40}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: K_n Lucas kuaterniyonunun,

$$K(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)t^n \tag{3.1.41}$$

üreteç fonksiyonunu dikkate alalım. K_n için Binet formülü kullanılarak;

$$K(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} K_n(x)t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\underline{\alpha}\alpha^n+\underline{\beta}\beta^n\right)t^n$$

$$=\left(\frac{\underline{\alpha}}{1-\alpha t}+\frac{\underline{\beta}}{1-\beta t}\right)$$

$$=\left(\frac{\underline{\alpha}\left(1-\beta t\right)+\underline{\beta}\left(1-\alpha t\right)}{1-t-t^2}\right)$$

$$=\left(\frac{\underline{\alpha}+\underline{\beta}+\left[\left(\underline{\alpha}\alpha+\underline{\beta}\beta\right)-\left(\underline{\alpha}+\underline{\beta}\right)\left(\alpha+\beta\right)\right]t}{1-t-t^2}\right)$$

$$=\frac{K_0+\left(K_1+K_0\right)t}{1-t-t^2}$$

eşitliğine ulaşılır. Burada;

$$\begin{aligned} K_0 &= L_0+L_1i+L_2j+L_3k=2+i+3j+4k \\ K_1 &= L_1+L_2i+L_3j+L_4k=1+3i+4j+7k \end{aligned} \qquad \textbf{(3.1.42)}$$

olduğundan,

$$K(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}K_n(x)t^n=\frac{K_0+\left(K_1+K_0\right)t}{1-t-t^2}=\frac{2+t+\left(1+2t\right)i+j(3+t)+k(4+3t)}{1-t-t^2}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teoremde Q_{m+n} fibonacci kuaterniyonu için üreteç fonksiyonu sunulmaktadır.

Teorem 3.1.10: $m,n\in\mathbb{Z}$ için Q_{m+n} Fibonacci kuaterniyonunun $G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_{m+n}(x)x^n$ üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty}Q_{m+n}x^n=\frac{Q_m+Q_{m-1}x}{1-x-x^2} \qquad \textbf{(3.1.43)}$$

şeklinde verilir (Halıcı, 2010).

İspat: Q_{m+n} Fibonacci kuaterniyonunun,

$$G(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_{m+n}(x)x^n \qquad \textbf{(3.1.44)}$$

üreteç fonksiyonunu dikkate alalım. Q_{m+n} için Binet formülünü kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}Q_{m+n}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^{m+n}-\underline{\beta}\beta^{m+n}}{\alpha-\beta}\right)x^n \\ &=\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\underline{\alpha}\alpha^m\left(\alpha x\right)^n-\underline{\beta}\beta^m\left(\beta x\right)^n\right) \\ &=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^m}{1-\alpha x}-\frac{\underline{\beta}\beta^m}{1-\beta x}\right) \\ &=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^m\left(1-\beta x\right)-\underline{\beta}\beta^m\left(1-\alpha x\right)}{\left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right)}\right) \\ &=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^m-\underline{\alpha}\alpha^m\beta x-\underline{\beta}\beta^m+\underline{\beta}\beta^m\alpha x}{1-\left(\alpha+\beta\right)x+\alpha\beta x^2}\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^{m}-\underline{\beta}\beta^{m}-\left(\underline{\alpha}\alpha^{m-1}-\underline{\beta}\beta^{m-1}\right)\alpha\beta x}{1-\left(\alpha+\beta\right)x+\alpha\beta x^{2}}\right)$$

Burada, $t^2-t-1=0$ karekteristik denkleminin kökleri olan α ve β için,

$$\sum_{n=0}^{\infty}Q_{m+n}x^{n}= \quad =\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^{m}-\underline{\beta}\beta^{m}+\left(\underline{\alpha}\alpha^{m-1}-\underline{\beta}\beta^{m-1}\right)x}{1-x-x^{2}}\right)$$

$$=\frac{Q_m+Q_{m-1}x}{1-x-x^{2}}$$

elde edilir.

Aşağıdaki teoremde K_{m+n} Lucas kuaterniyon için üreteç fonksiyon sunulmaktadır.

Teorem 3.1.11: $m,n\in\mathbb{Z}$ için K_{m+n} Lucas kuaterniyonunun $K(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}K_{m+n}(x)x^{n}$ üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty}K_{m+n}x^{n}=\frac{K_m+K_{m-1}x}{1-x-x^{2}} \tag{3.1.45}$$

şeklinde elde edilir.

İspat: K_{m+n} Fibonacci kuaterniyonunun,

$$K(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}K_{m+n}(x)x^{n}$$

üreteç fonksiyonunu dikkate alalım. K_{m+n} için Binet formülünü kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\sum_{n=0}^{\infty}K_{m+n}x^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\underline{\alpha}\alpha^{m+n}+\underline{\beta}\beta^{m+n}\right)x^{n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\underline{\alpha}\alpha^{m}\left(\alpha x\right)^{n}+\underline{\beta}\beta^{m}\left(\beta x\right)^{n}\right)$$

$$=\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^{m}}{1-\alpha x}+\frac{\underline{\beta}\beta^{m}}{1-\beta x}\right)$$

$$=\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^{m}\left(1-\beta x\right)+\underline{\beta}\beta^{m}\left(1-\alpha x\right)}{\left(1-\alpha x\right)\left(1-\beta x\right)}\right)$$

$$=\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^{m}-\underline{\alpha}\alpha^{m}\beta x+\underline{\beta}\beta^{m}-\underline{\beta}\beta^{m}\alpha x}{1-\left(\alpha+\beta\right)x+\alpha\beta x^{2}}\right)$$

$$=\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^{m}+\underline{\beta}\beta^{m}-\left(\underline{\alpha}\alpha^{m-1}+\underline{\beta}\beta^{m-1}\right)\alpha\beta x}{1-\left(\alpha+\beta\right)x+\alpha\beta x^{2}}\right)$$

$$=\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^{m}+\underline{\beta}\beta^{m}-\left(\underline{\alpha}\alpha^{m-1}+\underline{\beta}\beta^{m-1}\right)x}{1-x-x^{2}}\right)$$

$$=\quad\frac{K_{m}+K_{m-1}x}{1-x-x^{2}}$$

Teorem 3.1.12: $n\geq 0$ için aşağıdaki toplam formülleri doğrudur (Halıcı, 2010).

i) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Q_{i}=Q_{2n} \tag{3.1.46}$$

ii) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Q_{i}\left(-1\right)^{i}=\left(-1\right)^{n}Q_{-n} \tag{3.1.47}$$

İspat:

i) $n\geq 0$ için,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Q_{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^{i}-\underline{\beta}\beta^{i}}{\alpha-\beta}\right)$$

$$=\frac{\underline{\alpha}}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{i}-\frac{\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^{i}$$

$$=\frac{\underline{\alpha}}{\alpha-\beta}\left[\left(1+\alpha\right)^{n}\right]-\frac{\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\left[\left(1+\beta\right)^{n}\right]$$

α ve β, $t^{2}-t-1=0$ karakteristik denkleminin kökleri olduğundan $\alpha^{2}=\alpha+1$ ve $\beta^{2}=\beta+1$ olup buradan,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Q_{i}=\frac{\underline{\alpha}}{\alpha-\beta}\left[\left(1+\alpha\right)^{n}\right]-\frac{\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\left[\left(1+\beta\right)^{n}\right]$$

$$=\frac{\underline{\alpha}}{\alpha-\beta}\alpha^{2n}-\frac{\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\beta^{2n}$$

$$=Q_{2n}$$

sonucuna ulaşılır.

ii) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}Q_{i}\left(-1\right)^{i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\frac{\underline{\alpha}\alpha^{i}-\underline{\beta}\beta^{i}}{\alpha-\beta}\right)\left(-1\right)^{i}$$

$$=\frac{\underline{\alpha}}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^{i}\left(-1\right)^{i}-\frac{\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^{i}\left(-1\right)^{i}$$

$$=\frac{\underline{\alpha}}{\alpha-\beta}\left[\left(1-\alpha\right)^{n}\right]-\frac{\underline{\beta}}{\alpha-\beta}\left[\left(1-\beta\right)^{n}\right]$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left[(-1)^n(\alpha-1)^n\right] - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\left[(-1)^n(\beta-1)^n\right]$$

eşitliğinde $\alpha^2 - \alpha = 1$ eşitliğinden $\alpha - 1 = \alpha^{-1}$ ve $\beta^2 - \beta = 1$ eşitliğinden $\beta - 1 = \beta^{-1}$ elde edilir. Buradan,

$$\frac{\alpha}{\alpha-\beta}\left[(-1)^n\alpha^{-n}\right] - \frac{\beta}{\alpha-\beta}\left[(-1)^n\beta^{-n}\right] = (-1)^n\left[\frac{\underline{\alpha}\alpha^{-n}}{\alpha-\beta} - \frac{\underline{\beta}\beta^{-n}}{\alpha-\beta}\right] = (-1)^n Q_{-n}$$

sonucuna ulaşılır.

Halıcı (2010) tarafından verilen Fibonacci kuaterniyonun toplam formüllerine benzer şekilde aşağıdaki teoremde Lucas kuaterniyon için aşağıdaki toplam formüleri elde edilmiştir.

Teorem 3.1.13: $n \geq 0$ için K_n Lucas kuaterniyonu için,

i) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}K_i = K_{2n},$ **(3.1.48)**

ii) $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}K_i(-1)^i = (-1)^n K_{-n}$ **(3.1.49)**

toplam formülleri verilir.

İspat:

i) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}K_i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\underline{\alpha}\alpha^i + \underline{\beta}\beta^i\right)$$

$$= \underline{\alpha}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^i + \underline{\beta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^i$$

$$= \underline{\alpha}(1+\alpha)^n + \underline{\beta}(1+\beta)^n$$

eşitliğinde $\alpha^2 = \alpha + 1$ ve $\beta^2 = \beta + 1$ olarak alınırsa,

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}K_i = \underline{\alpha}(1+\alpha)^n + \underline{\beta}(1+\beta)^n = \underline{\alpha}\alpha^{2n} + \underline{\beta}\beta^{2n} = K_{2n}$$

özdeşliği elde edilir.

ii) $$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}K_i(-1)^i = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\left(\underline{\alpha}\alpha^i + \underline{\beta}\beta^i\right)(-1)^i$$

$$= \underline{\alpha}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\alpha^i(-1)^i + \underline{\beta}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\beta^i(-1)^i$$

$$= \underline{\alpha}\left[(1-\alpha)^n\right] + \underline{\beta}\left[(1-\beta)^n\right]$$

$$=\underline{\alpha}\left[(-1)^n(\alpha-1)^n\right]+\underline{\beta}\left[(-1)^n(\beta-1)^n\right]$$

$\alpha^2-\alpha=1$ eşitliğinden $\alpha-1=\alpha^{-1}$ ve $\beta^2-\beta=1$ eşitliğinden $\beta-1=\beta^{-1}$ ifadeleri son denklemde yazılırsa,

$$\underline{\alpha}\left[(-1)^n\alpha^{-n}\right]+\underline{\beta}\left[(-1)^n\beta^{-n}\right]=(-1)^n\left(\underline{\alpha}\alpha^{-n}+\underline{\beta}\beta^{-n}\right)=(-1)^n K_{-n}$$

sonucu elde edilir.

Tanım 3.1.6:

$$Q=Q_1=\begin{pmatrix} Q_2 & Q_1 \\ Q_1 & Q_0 \end{pmatrix}, Q^2=Q_2=\begin{pmatrix} Q_3 & Q_2 \\ Q_2 & Q_1 \end{pmatrix}......, Q^n=Q_n=\begin{pmatrix} Q_{n+1} & Q_n \\ Q_n & Q_{n-1} \end{pmatrix} \quad \textbf{(3.1.50)}$$

şeklinde tanımlanan matrise Fibonacci kuaterniyon matrisi denir (Halıcı, 2010).

Teorem 3.1.15: Q_n kuaterniyonu için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur (Halıcı, 2010).

i) $Q^{-n}=Q_{-n}=(-1)^n\left(-F_n+iF_{n+1}-jF_{n+2}+kF_{n+3}\right)$ **(3.1.51)**

ii) $Q^{-n}+\overline{Q^{-n}}=2(-1)^{n+1}F_n$ **(3.1.52)**

iii) $\frac{1}{2}\left(Q^n+Q^{-n}\right)=\begin{cases} F_n+jF_{n+2}; & n \ tek \\ iF_{n+1}+kF_{n+3}; & n \ çift \end{cases}$ **(3.1.53)**

İspat:

i) $n=1$ için,

$$Q_{-1}=\begin{pmatrix} Q_0 & Q_{-1} \\ Q_{-1} & Q_{-2} \end{pmatrix} \Rightarrow Q_{-1}=Q_{-2}Q_0-(Q_{-1})^2$$

$$=\left(F_{-2}+F_{-1}i+F_0j+F_1k\right)\left(F_0+F_1i+F_2j+F_3k\right)-\left(F_{-1}+F_0i+F_1j+F_2k\right)^2$$

$$=(-1+i+k)(i+j+2k)-(1+j+k)^2$$

$$=(1-i+2j-3k)$$

$$=\left(F_1-F_2i+F_3j-F_4k\right)$$

elde edilen önerme $n=1$ için doğrudur. $n=k$ için doğru olmak üzere $n=k+1$ için doğru olduğunu gösterelim:

$$Q_{-k-1}=\begin{pmatrix} Q_{-k} & Q_{-k-1} \\ Q_{-k-1} & Q_{-k-2} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} Q_{-k+2}-Q_{-k+1} & Q_{-k+1}-Q_{-k} \\ Q_{-k+1}-Q_{-k} & Q_{-k}-Q_{-k-1} \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&=\begin{pmatrix} Q_{-k+2} & Q_{-k+1} \\ Q_{-k+1} & Q_{-k} \end{pmatrix} \\
&=(-1)^{k-1}\left(-F_{n-1}+iF_n-jF_{n+1}+kF_{n+2}\right)-(-1)^k\left(-F_n+iF_{n+1}-jF_{n+2}+kF_{n+3}\right) \\
&=(-1)^{k+1}\left[-\left(F_{n-1}+F_n\right)+i\left(F_n+F_{n+1}\right)-j\left(F_{n+1}+F_{n+2}\right)+k\left(F_{n+2}+F_{n+3}\right)\right] \\
&=(-1)^{k+1}\left(-F_{n+1}+iF_{n+2}-jF_{n+3}+kF_{n+4}\right)-\begin{pmatrix} Q_{-k+1} & Q_{-k} \\ Q_{-k} & Q_{-k-1} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

olduğu elde edilir.

ii) $Q^{-n}=(-1)^n\left(-F_n+iF_{n+1}-jF_{n+2}+kF_{n+3}\right)$

olup buradan,

$$\overline{Q^{-n}}=(-1)^n\left(-F_n-iF_{n+1}+jF_{n+2}-kF_{n+3}\right)$$

olmak üzere taraf tarafa toplama ile;

$$
\begin{aligned}
Q^{-n}+\overline{Q^{-n}}&=(-1)^n\left(-F_n+iF_{n+1}-jF_{n+2}+kF_{n+3}\right)+(-1)^n\left(-F_n-iF_{n+1}+jF_{n+2}-kF_{n+3}\right) \\
&=2(-1)^{n+1}F_n
\end{aligned}
$$

özdeşliğine ulaşılır.

iii) $Q^{-n}=(-1)^n\left(-F_n+iF_{n+1}-jF_{n+2}+kF_{n+3}\right)$

$$Q^n=\left(F_n+iF_{n+1}+jF_{n+2}+kF_{n+3}\right)$$

kuaterniyonları için, n tek ise;

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(Q^n+Q^{-n}\right)&=\frac{1}{2}\left(F_n+iF_{n+1}+jF_{n+2}+kF_{n+3}\right)-\left(-F_n+iF_{n+1}-jF_{n+2}+kF_{n+3}\right) \\
&=\frac{1}{2}\left(2F_n+2jF_{n+2}\right)=F_n+jF_{n+2}
\end{aligned}
$$

ve n çift ise,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(Q^n+Q^{-n}\right)&=\frac{1}{2}\left(F_n+iF_{n+1}+jF_{n+2}+kF_{n+3}\right)+\left(-F_n+iF_{n+1}-jF_{n+2}+kF_{n+3}\right) \\
&=\frac{1}{2}\left(2F_n+2kF_{n+2}\right)=iF_{n+1}+kF_{n+3}
\end{aligned}
$$

özdeşlikleri elde edilir.

3.2 Pell ve Pell-Lucas Kuaterniyonları

Tanım 3.2.1: $p_1 = 1, p_2 = 2$ olmak üzere $n \geq 3$ için,

$$p_n = 2p_{n-1} + p_{n-2} \tag{3.2.1}$$

şeklinde tanımlı sayılara Pell sayıları denir (Horadam, 1971).

Tanım 3.2.2: $q_1 = 1, q_2 = 3$ olmak üzere $n \geq 3$ için,

$$q_n = 2q_{n-1} + q_{n-2} \tag{3.2.2}$$

şeklinde tanımlı sayılara Pell-Lucas sayıları denir (Horadam, 1971).

Aşağıdaki tabloda bazı n değerleri için Pell ve Pell-Lucas sayıları verilmektedir.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p_n	1	2	5	1	2	7	1	4	98	23
q_n	1	3	7	1	4	9	2	5	13	33

Çizelge 3.2.1. İlk 10 Pell ve Pell-Lucas sayılarını veren tablo

(3.2.1) ve (3.2.2) ile verilen yineleme ilişkilerinin karekteristik denklemleri:

$$x^2 = 2x + 1 \tag{3.2.3}$$

ile verilir. Bu karekteristik denklemin kökleri, $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ ve $\delta = 1 - \sqrt{2}$ olarak elde edilir. Burada, $\gamma + \delta = 2$, $\gamma - \delta = 2\sqrt{2}$ ve $\gamma\delta = -1$ olduğu açıktır (İpek ve Çimen, 2015). Tezin kalan kısmında γ ve δ sembolleri bu değerler için kullanılacaktır.

Tanım 3.2.3: $n \geq 1$ iken p_n ve q_n için Binet formülü:

$$p_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}, \quad q_n = \frac{\gamma^n + \delta^n}{2} \tag{3.2.4}$$

şeklindedir (Horadam, 1971).

Örnek 3.2.1: $p_4 = 12$ ve $q_3 = 7$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} p_4 = \frac{\gamma^4 - \delta^4}{\gamma - \delta} &= \frac{(\gamma^2 - \delta^2)(\gamma^2 + \delta^2)}{\gamma - \delta} \\ &= (\gamma + \delta)\left[(\gamma + \delta)^2 - 2\gamma\delta\right] \\ &= 2(2^2 + 2) = 12 \end{aligned}$$

ve

$$q_3=\frac{\gamma^3+\delta^3}{2}=\frac{(\gamma+\delta)(\gamma^2+\delta^2-\gamma\delta)}{2}$$
$$=\frac{(\gamma+\delta)\left[(\gamma+\delta)^2-3\gamma\delta\right]}{2}$$
$$=2^2+3=7$$

eşitlikleri ile (3.2.4)'de sunulan Binet formüllerinin doğruluğu bir örnekle gösterilmiş olur.

Önerme 3.2.1: p_n ve q_n sayıları için,

i) $p_n+p_{n-1}=q_n$, **(3.2.5)**

ii) $q_n+q_{n-1}=2p_n$, **(3.2.6)**

iii) $p_n+q_n=p_{n+1}$, **(3.2.7)**

iv) $p_n+q_n=p_{n+1}$, **(3.2.8)**

v) $p_{n+1}-p_{n-1}=2p_n$, **(3.2.9)**

vi) $q_{n+1}-q_{n-1}=2q_n$, **(3.2.10)**

vii) $p_{n+1}{}^2+p_{n-1}{}^2=p_{2n+1}$, **(3.2.11)**

viii) $q_{n+1}{}^2+q_n{}^2=2p_{2n+1}$, **(3.2.12)**

ix) $p_{n+2}+p_{n-2}=6p_n$, **(3.2.13)**

x) $q_{n+2}+q_{n-2}=6q_n$, **(3.2.14)**

xi) $p_n{}^2+p_{n+3}{}^2=5p_{2n+3}$, **(3.2.15)**

xii) $p_{n+1}+p_{n-1}=2q_n$, **(3.2.16)**

xiii) $2p_n+q_n=q_{n+1}$, **(3.2.17)**

özdeşlikleri doğrudur (Koshy, 2001).

Tanım 3.2.4: p_n, $n.$ Lucas sayısı ve q_n, $n.$ Pell-Lucas sayısı olmak üzere sırasıyla,

$$QP_n=p_n+p_{n+1}i+p_{n+2}j+p_{n+3}k \quad \textbf{(3.2.18)}$$

$$QPL_n=q_n+q_{n+1}i+q_{n+2}j+q_{n+3}k \quad \textbf{(3.2.19)}$$

şeklinde tanımlı kuaterniyonlara Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları denir. (İpek ve Çimen, 2016)

Kuaterniyonların eşleniği tanımından QP_n ve QPL_n kuaterniyonlarının eşleniği sırasıyla,

$$\overline{QP_n}=p_n-p_{n+1}i-p_{n+2}j-p_{n+3}k \quad \textbf{(3.2.20)}$$

ve

$$\overline{QPL_n} = q_n - q_{n+1}i - q_{n+2}j - q_{n+3}k \qquad \textbf{(3.2.21)}$$

şeklinde yazılır. Kuaterniyonların normları tanımı ile QP_n ve QPL_n kuaterniyonlarının normları sırasıyla,

$$|QP_n| = \sqrt{p_n^{\ 2} + p_{n+1}^2 + p_{n+2}^2 + p_{n+3}^2} \qquad \textbf{(3.2.22)}$$

ve

$$|QPL_n| = \sqrt{q_n^{\ 2} + q_{n+1}^2 + q_{n+2}^2 + q_{n+3}^2} \qquad \textbf{(3.2.23)}$$

şeklinde elde edilir (İpek ve Çimen, 2016).

Teorem 3.2.1: $n \geq 2$ için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur (İpek ve Çimen, 2016).

i. $QP_n + \overline{QP_n} = 2p_n$ **(3.2.24)**

ii. $QPL_n + \overline{QPL_n} = 2q_n$ **(3.2.25)**

iii. $QP_n^{\ 2} = 2p_n.QP_n - QP_n.\overline{QP_n}$ **(3.2.26)**

iv. $QPL_n^{\ 2} = 2q_n.QPL_n - QPL_n.\overline{QPL_n}$ **(3.2.27)**

v. $QP_n.\overline{QP_n} = 6p_{2n+3}$ **(3.2.28)**

vi. $QPL_n.\overline{QPL_n} = 12p_{2n+3}$ **(3.2.29)**

İspat:

i. $$QP_n + \overline{QP_n} = (p_n + p_{n+1}i + p_{n+2}j + p_{n+3}k) + (p_n - p_{n+1}i - p_{n+2}j - p_{n+3}k)$$
$$= 2P_n$$

ii. $$QPL_n + \overline{QPL_n} = (q_n + q_{n+1}i + q_{n+2}j + q_{n+3}k) + (q_n - q_{n+1}i - q_{n+2}j - q_{n+3}k)$$
$$= 2q_n$$

iii. $$QP_n^{\ 2} = QP_n.QP_n = QP_n.\left(2p_n - \overline{QP_n}\right) = 2p_n.QP_n - QP_n.\overline{QP_n}$$

iv. $$QPL_n^{\ 2} = QPL_n.QPL_n = QPL_n.\left(2q_n - \overline{QPL_n}\right) = 2q_n.QPL_n - QPL_n.\overline{QPL_n}$$

v. $QP_n.\overline{QP_n} = \sum_{s=0}^{n} p_{n+s}^2$ ve önerme 3.2.1 den;

$$p_{n+1}^2 + p_{n-1}^2 = p_{2n+1}$$

ve

$$p_{n+2} + p_{n-2} = 6p_n$$

özdeşlikleri hatırlanırsa,

$$QP_n.\overline{QP_n} = \sum_{s=0}^{n} p^2{}_{n+s} = p_n{}^2 + p_{n+1}^2 + p_{n+2}^2 + p_{n+3}^2$$
$$= p_{2n+1} + p_{2n+5} = 6p_{2n+3}$$

özdeşliği elde edilir.

vi. $$QPL_n.\overline{QPL_n} = \sum_{s=0}^{n} q_{n+s}^2$$

ve önerme 3.2.1 den,

$q_{n+1}^2 + q_n{}^2 = 2p_{2n+1}$

olduğu hatırlanırsa,

$$QPL_n.\overline{QPL_n} = \sum_{s=0}^{n} q_{n+s}^2 = 2\left(p_{2n+1} + p_{2n+5}\right) = 12p_{2n+3}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2: $n \geq 2$ için, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur (İpek ve Çimen, 2016).

i) $QP_n + 2QP_{n+1} = QP_{n+2}$, **(3.2.30)**

ii) $QP_n - QP_{n+1}i - QP_{n+2}j - QP_{n+3}k = 12q_{n+3}$, **(3.2.31)**

İspat:

i) $QP_n + 2QP_{n+1} = \left(p_n + p_{n+1}i + p_{n+2}j + p_{n+3}k\right) + 2\left(p_{n+1} + p_{n+2}i + p_{n+3}j + p_{n+4}k\right)$

ve önerme 3.2.1 den, $p_n + p_{n-1} = q_n$ ve $p_n + q_n = p_{n+1}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} QP_n + 2QP_{n+1} &= \left(p_n + p_{n+1}i + p_{n+2}j + p_{n+3}k\right) + 2\left(p_{n+1} + p_{n+2}i + p_{n+3}j + p_{n+4}k\right) \\ &= \left(q_{n+1} + q_{n+2}i + q_{n+3}j + q_{n+4}k\right) + \left(p_{n+1} + p_{n+2}i + p_{n+3}j + p_{n+4}k\right) \\ &= p_{n+2} + p_{n+3}i + p_{n+4}j + p_{n+5}k = QP_{n+2} \end{aligned}$$

sonuçları elde edilir.

ii)

$$\begin{aligned} QP_n &= p_n + p_{n+1}i + p_{n+2}j + p_{n+3}k \\ QP_{n+1}i &= p_{n+1}i - p_{n+2} - p_{n+3}k + p_{n+4}j \\ QP_{n+2}j &= p_{n+2}j + p_{n+3}k - p_{n+4} - p_{n+5}i \\ QP_{n+3}k &= p_{n+3}k - p_{n+4}j + p_{n+5}i - p_{n+6} \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$QP_n - QP_{n+1}i - QP_{n+2}j - QP_{n+3}k = p_n + p_{n+2} + p_{n+4} + p_{n+6}$$

ve önerme 3.2.1 den, $p_{n+2} + p_{n-2} = 6p_n$ ve $p_{n+1} + p_{n-1} = 2q_n$ olduğundan,

$$\begin{aligned} QP_n - QP_{n+1}i - QP_{n+2}j - QP_{n+3}k &= p_n + p_{n+4} + p_{n+2} + p_{n+6} \\ &= 6p_{n+2} + 6p_{n+4} = 12q_{n+3} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.3: $n \geq 2$ için, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur (İpek ve Çimen, 2016).

i) $QP_n + QP_{n+1} = QPL_{n+1}$, **(3.2.32)**

ii) $QP_{n+1} - QP_n = QPL_n$, **(3.2.33)**

iii) $2QP_n + QPL_n = QPL_{n+1}$. **(3.2.34)**

İspat:

i) $QP_n = p_n + p_{n+1}i + p_{n+2}j + p_{n+3}k$

$$QP_{n+1} = p_{n+1} + p_{n+2}i + p_{n+3}j + p_{n+4}k$$

ve önerme 3.2.1 den $p_n + p_{n-1} = q_n$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} QP_n + QP_{n+1} &= \left(p_n + p_{n+1}i + p_{n+2}j + p_{n+3}k\right) + \left(p_{n+1} + p_{n+2}i + p_{n+3}j + p_{n+4}k\right) \\ &= q_{n+1} + q_{n+2}i + q_{n+3}j + q_{n+4}k = QPL_{n+1} \end{aligned}$$

olduğu görülür.

ii) Önerme 3.2.1 den, $p_n + q_n = p_{n+1}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} QP_{n+1} - QP_n &= \left(p_{n+1} + p_{n+2}i + p_{n+3}j + p_{n+4}k\right) - \left(p_n + p_{n+1}i + p_{n+2}j + p_{n+3}k\right) \\ &= q_n + q_{n+1}i + q_{n+2}j + q_{n+3}k = QPL_n \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) Önerme 3.2.1 den $2p_n + q_n = q_{n+1}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} 2QP_n + QPL_n &= 2\left(p_n + p_{n+1}i + p_{n+2}j + p_{n+3}k\right) + \left(q_n + q_{n+1}i + q_{n+2}j + q_{n+3}k\right) \\ &= q_{n+1} + q_{n+2}i + q_{n+3}j + q_{n+4}k = QPL_{n+1} \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4: $\underline{\gamma} = 1 + i\gamma + j\gamma^2 + k\gamma^3$ ve $\underline{\delta} = 1 + i\delta + j\delta^2 + k\delta^3$ olmak üzere ve $n \geq 1$ iken n. Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için,

$$\gamma QP_n + QP_{n-1} = \gamma^n \underline{\gamma}$$

ve

$$\delta QP_n + QP_{n-1} = \delta^n \underline{\delta}$$

özdeşlikleri elde edilir. Burada γ ve δ, $x^2 - 2x - 1 = 0$ karekteristik polinomunun kökleridir (İpek ve Çimen, 2016).

İspat: $\gamma^n = \gamma p_n + p_{n-1}$ ve $\gamma^n = \gamma p_n + p_{n-1}$ olmak üzere ve $n \geq 1$ iken,

$$\begin{aligned}
\gamma QP_n + QP_{n-1} &= \gamma\left(p_n + p_{n+1}i + p_{n+2}j + p_{n+3}k\right) + \left(p_{n-1} + p_n i + p_{n+1}j + p_{n+2}k\right) \\
&= \left(\gamma p_n + p_{n-1}\right) + \left(\gamma p_{n+1} + p_n\right)i + \left(\gamma p_{n+2} + p_{n+1}\right)j + \left(\gamma p_{n+3} + p_{n+2}\right)k \\
&= \gamma^n + \gamma^{n+1}i + \gamma^{n+2}j + \gamma^{n+3}k \\
&= \gamma^n\left(1 + \gamma i + \gamma^2 j + \gamma^3 k\right) \\
&= \gamma^n \underline{\gamma}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
\delta QP_n + QP_{n-1} &= \delta\left(p_n + p_{n+1}i + p_{n+2}j + p_{n+3}k\right) + \left(p_{n-1} + p_n i + p_{n+1}j + p_{n+2}k\right) \\
&= \left(\delta p_n + p_{n-1}\right) + \left(\delta p_{n+1} + p_n\right)i + \left(\delta p_{n+2} + p_{n+1}\right)j + \left(\delta p_{n+3} + p_{n+2}\right)k \\
&= \delta^n + \delta^{n+1}i + \delta^{n+2}j + \delta^{n+3}k \\
&= \delta^n\left(1 + \delta i + \delta^2 j + \delta^3 k\right) \\
&= \delta^n \underline{\delta}
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2.5: $\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$ ve $\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$ olmak üzere $n \geq 1$ iken $n.$ Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için Binet formülü:

i) $$QP_n = \frac{\gamma^n \underline{\gamma} - \delta^n \underline{\delta}}{\gamma - \delta} \qquad \textbf{(3.2.35)}$$

ii) $$QPL_n = \frac{\gamma^n \underline{\gamma} + \delta^n \underline{\delta}}{2} \qquad \textbf{(3.2.36)}$$

şeklinde verilir (İpek ve Çimen, 2015).

İspat:

i) $$\gamma QP_n + QP_{n-1} = \gamma^n \underline{\gamma}$$

$$\delta QP_n + QP_{n-1} = \delta^n \underline{\delta}$$

olmak üzere özdeşlikler taraf tarafa çıkarılınca;

$$\gamma QP_n - \delta QP_n = \gamma^n \underline{\gamma} - \delta^n \underline{\delta}$$

eşitliğinden,

$$QP_n = \frac{\gamma^n \underline{\gamma} - \delta^n \underline{\delta}}{\gamma - \delta}$$

elde edilir.

ii) $$\gamma QP_n + QP_{n-1} = \gamma^n \underline{\gamma}$$

$$\delta QP_n + QP_{n-1} = \delta^n \underline{\delta}$$

olmak üzere özdeşlikler taraf tarafa toplanınca;

$$\gamma^n \underline{\gamma} + \delta^n \underline{\delta} = (\gamma + \delta) QP_n + 2QP_{n-1}$$

elde edilir. $\gamma + \delta = 2$ değeri yerine yazılıp $QP_n + QP_{n+1} = QPL_{n+1}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\gamma^n \underline{\gamma} + \delta^n \underline{\delta} = 2(QP_n + QP_{n-1}) = 2QPL_n$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2.6: $n \geq 1$ için, aşağıdaki formüller doğrudur (Liana ve Wloch, 2016).

I. $$|QP_n|^2 = \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\left(120+84\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\left(120-84\sqrt{2}\right)}{8} \qquad \textbf{(3.2.37)}$$

II. $$|QPL_n|^2 = 8|QP_n|^2 \qquad \textbf{(3.2.38)}$$

İspat:

$x^2 - 2x - 1 = 0$ karekteristik denkleminin kökleri olan γ ve δ için;

i. $$|QP_n|^2 = p_n^{\ 2} + p_{n+1}^{\ 2} + p_{n+2}^{\ 2} + p_{n+3}^{\ 2}$$

$$= \left(\frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}\right)^2 + \left(\frac{\gamma^{n+1} - \delta^{n+1}}{\gamma - \delta}\right)^2 + \left(\frac{\gamma^{n+2} - \delta^{n+2}}{\gamma - \delta}\right)^2 + \left(\frac{\gamma^{n+3} - \delta^{n+3}}{\gamma - \delta}\right)^2$$

$$= \left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^n - \left(1-\sqrt{2}\right)^n}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$+ \left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+2} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+2}}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+3} - \left(1-\sqrt{2}\right)^{n+3}}{2\sqrt{2}}\right)^2$$

$$+ \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+2} - 2\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+2}}{8}$$

$$+ \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+4} - 2\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+2}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+2} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+4}}{8}$$

$$+ \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n+6} - 2\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+3}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+3} + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2n+6}}{8}$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\left[1+\left(1+\sqrt{2}\right)^{2}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{4}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{6}\right]}{8}$$
$$-\frac{2\left[\left(-1\right)^{n}+\left(-1\right)^{n+1}+\left(-1\right)^{n+2}+\left(-1\right)^{n+3}\right]}{8}$$
$$+\frac{\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\left[1+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{4}+\left(1-\sqrt{2}\right)^{6}\right]}{8}$$
$$=\frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{2n}\left(120+84\sqrt{2}\right)+\left(1-\sqrt{2}\right)^{2n}\left(120-84\sqrt{2}\right)}{8}$$

formülü elde edilir.

ii. $\left|QPL_n\right|^2 = {q_n}^2 + {q_{n+1}}^2 + {q_{n+2}}^2 + {q_{n+3}}^2 \ddots.$

$$=\left(\gamma^n+\delta^n\right)^2+\left(\gamma^{n+1}+\delta^{n+1}\right)^2+\left(\gamma^{n+2}+\delta^{n+2}\right)^2+\left(\gamma^{n+3}+\delta^{n+3}\right)^2$$
$$=\gamma^{2n}+2\gamma^n\delta^n+\delta^{2n}+\gamma^{2(n+1)}-2\gamma^n\delta^n+\delta^{2(n+1)}$$
$$+\gamma^{2(n+2)}+2\gamma^n\delta^n+\delta^{2(n+2)}+\gamma^{2(n+3)}-2\gamma^n\delta^n+\delta^{2(n+3)}$$
$$=8\left(\frac{\gamma^{2n}-2\gamma^n\delta^n+\delta^{2n}}{8}+\frac{\gamma^{2(n+1)}+2\gamma^n\delta^n+\delta^{2(n+1)}}{8}\right.$$
$$\left.+\frac{\gamma^{2(n+2)}-2\alpha^n\delta^n+\delta^{2(n+2)}}{8}+\frac{\gamma^{2(n+3)}+2\gamma^n\delta^n+\delta^{2(n+3)}}{8}\right)$$
$$=8\left(\frac{\gamma^n-\delta^n}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\gamma^{n+1}-\delta^{n+1}}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\gamma^{n+2}-\delta^{n+2}}{2\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{\gamma^{n+3}-\delta^{n+3}}{2\sqrt{2}}\right)^2$$
$$=8\left|QP_n\right|^2$$

olduğu elde edilir.

Aşağıdaki teoremde Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için Cassini özdeşliği verilmiştir.

Teorem 3.2.7: (Cassini Özdeşliği) $\underline{\gamma}=1+i\gamma+j\gamma^2+k\gamma^3$ ve $\underline{\delta}=1+i\delta+j\delta^2+k\delta^3$ olmak üzere Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için Cassini özdeşliği;

i) $QP_{n+1}.QP_{n-1}-{QP_n}^2=\left(-1\right)^n\left[\dfrac{\left(\gamma^2+1\right)\underline{\gamma}\underline{\delta}+\left(\delta^2+1\right)\underline{\delta}\underline{\gamma}}{\left(\gamma-\delta\right)^2}\right]$ **(3.2.39)**

ii) $QPL_{n+1}.QPL_{n-1}-{QPL_n}^2=\left(-1\right)^n\left[\dfrac{\left(-\gamma^2+1\right)\underline{\gamma}\underline{\delta}+\left(-\delta^2+1\right)\underline{\delta}\underline{\gamma}}{\left(\gamma-\delta\right)^2}\right]$ **(3.2.40)**

şeklinde verilir (Liana ve Wloch, 2016).

İspat: $n \geq 1$ için,

i. $$QP_{n+1}.QP_{n-1} - QP_n^{\,2} = \left(\frac{\gamma^{n+1}\underline{\gamma} - \delta^{n+1}\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)\left(\frac{\gamma^{n-1}\underline{\gamma} - \delta^{n-1}\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right) - \left(\frac{\gamma^{n}\underline{\gamma} - \delta^{n}\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)^2$$

$$= \frac{1}{(\gamma-\delta)^2}\Big[\gamma^{2n}\underline{\gamma}^2 - \gamma^{n+1}\delta^{n-1}\underline{\gamma}\underline{\delta} - \delta^{n+1}\gamma^{n-1}\underline{\delta}\underline{\gamma} + \delta^{2n}\underline{\delta}^2$$

$$-\gamma^{2n}\underline{\gamma}^2 + \gamma^n\delta^n\underline{\gamma}\underline{\delta} + \gamma^n\delta^n\underline{\delta}\underline{\gamma} - \delta^{2n}\underline{\delta}^2\Big]$$

$$= \left[\frac{-\gamma^{n+1}\delta^{n-1}\underline{\gamma}\underline{\delta} - \delta^{n+1}\gamma^{n-1}\underline{\delta}\underline{\gamma} + \gamma^n\delta^n\underline{\gamma}\underline{\delta} + \gamma^n\delta^n\underline{\delta}\underline{\gamma}}{(\gamma-\delta)^2}\right]$$

$$= (\alpha\beta)^{n-1}\left[\frac{\left(-\gamma^2+\gamma\delta\right)\underline{\gamma}\underline{\delta} + \left(-\delta^2+\gamma\delta\right)\underline{\delta}\underline{\gamma}}{(\gamma-\delta)^2}\right]$$

$$= (-1)^n\left[\frac{\left(\gamma^2+1\right)\underline{\gamma}\underline{\delta} + \left(\delta^2+1\right)\underline{\delta}\underline{\gamma}}{(\gamma-\delta)^2}\right]$$

ii. $$QPL_{n+1}.QPL_{n-1} - QPL_n^{\,2} = \left(\frac{\gamma^{n+1}\underline{\gamma} + \delta^{n+1}\underline{\delta}}{2}\right)\left(\frac{\gamma^{n-1}\underline{\gamma} + \delta^{n-1}\underline{\delta}}{2}\right) - \left(\frac{\gamma^{n}\underline{\gamma} + \delta^{n}\underline{\delta}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\Big[\gamma^{2n}\underline{\gamma}^2 + \gamma^{n+1}\delta^{n-1}\underline{\gamma}\underline{\delta} + \delta^{n+1}\gamma^{n-1}\underline{\delta}\underline{\gamma} + \delta^{2n}\underline{\delta}^2$$

$$-\gamma^{2n}\underline{\gamma}^2 - \gamma^n\delta^n\underline{\gamma}\underline{\delta} - \gamma^n\delta^n\underline{\delta}\underline{\gamma} - \delta^{2n}\underline{\delta}^2\Big]$$

$$= \left[\frac{\gamma^{n+1}\delta^{n-1}\underline{\gamma}\underline{\delta} + \delta^{n+1}\gamma^{n-1}\underline{\delta}\underline{\gamma} - \gamma^n\delta^n\underline{\gamma}\underline{\delta} - \gamma^n\delta^n\underline{\delta}\underline{\gamma}}{4}\right]$$

$$= (\gamma\delta)^{n-1}\left[\frac{\left(\gamma^2-\gamma\delta\right)\underline{\gamma}\underline{\delta} + \left(\delta^2-\gamma\delta\right)\underline{\delta}\underline{\gamma}}{4}\right]$$

$$= (-1)^{n-1}\left[\frac{\left(-1+\gamma^2\right)\underline{\gamma}\underline{\delta} + \left(-1+\delta^2\right)\underline{\delta}\underline{\gamma}}{4}\right]$$

$$= (-1)^n\left[\frac{\left(-\gamma^2+1\right)\underline{\gamma}\underline{\delta} + \left(-\delta^2+1\right)\underline{\delta}\underline{\gamma}}{(\gamma-\delta)^2}\right].$$

Aşağıdaki teorem ile Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonlar için Catalan özdeşliği sunulmaktadır.

Teorem 3.2.8: (Catalan Özdeşliği) Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $$QP_n^2 - QP_{n-r}.QP_{n+r} = (-1)^{n-r}\left[\frac{\left(\delta^{2r}+(-1)^{r+1}\right)\underline{\gamma\delta}+\left(\gamma^{2r}+(-1)^{r+1}\right)\underline{\delta\gamma}}{(\gamma-\delta)^2}\right] \quad \textbf{(3.2.41)}$$

ii. $$QPL_n^{\ 2} - QPL_{n+r}.QPL_{n-r} = (-1)^{n-r}\left[\frac{\left(-\delta^{2r}+(-1)^{r}\right)\underline{\gamma\delta}+\left(-\gamma^{2r}+(-1)^{r}\right)\underline{\delta\gamma}}{4}\right] \quad \textbf{(3.2.42)}$$

İspat:

i.
$$QP_n^2 - QP_{n-r}.QP_{n+r} = \left(\frac{\gamma^n\underline{\gamma}-\delta^n\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)^2 - \left(\frac{\gamma^{n-r}\underline{\gamma}-\delta^{n-r}\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)\left(\frac{\gamma^{n+r}\underline{\gamma}-\delta^{n+r}\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)$$

$$=\frac{1}{(\gamma-\delta)^2}\Big[\gamma^{2n}\underline{\gamma}^2-\gamma^n\delta^n\underline{\gamma\delta}-\delta^n\gamma^n\underline{\delta\gamma}+\delta^{2n}\underline{\delta}^2$$

$$-\gamma^{2n}\underline{\gamma}^2+\gamma^{n-r}\delta^{n+r}\underline{\gamma\delta}+\gamma^{n+r}\delta^{n-r}\underline{\delta\gamma}-\delta^{2n}\underline{\delta}^2\Big]$$

$$=\left[\frac{-\gamma^n\delta^n\underline{\gamma\delta}-\delta^n\gamma^n\underline{\delta\gamma}+\gamma^{n-r}\delta^{n+r}\underline{\gamma\delta}+\gamma^{n+r}\delta^{n-r}\underline{\delta\gamma}}{(\gamma-\delta)^2}\right]$$

$$=(-1)^{n-r}\left[\frac{\left(\delta^{2r}+(-1)^{r+1}\right)\underline{\gamma\delta}+\left(\gamma^{2r}+(-1)^{r+1}\right)\underline{\delta\gamma}}{(\gamma-\delta)^2}\right].$$

ii.
$$QPL_n^{\ 2} - QPL_{n+r}.QPL_{n-r} = \left(\frac{\gamma^n\underline{\gamma}+\delta^n\underline{\delta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma^{n+r}\underline{\gamma}+\delta^{n+r}\underline{\delta}}{2}\right)\left(\frac{\gamma^{n-r}\underline{\gamma}+\delta^{n-r}\underline{\delta}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\gamma^{2n}\underline{\gamma}^2+\gamma^n\delta^n\underline{\gamma\delta}+\delta^n\gamma^n\underline{\delta\gamma}+\delta^{2n}\underline{\delta}^2$$

$$-\gamma^{2n}\underline{\gamma}^2-\gamma^{n-r}\delta^{n+r}\underline{\gamma\delta}-\gamma^{n+r}\delta^{n-r}\underline{\delta\gamma}-\delta^{2n}\underline{\delta}^2\Big]$$

$$=\left[\frac{\gamma^n\delta^n\underline{\gamma\delta}+\delta^n\gamma^n\underline{\delta\gamma}-\gamma^{n-r}\delta^{n+r}\underline{\gamma\delta}-\gamma^{n+r}\delta^{n-r}\underline{\delta\gamma}}{4}\right]$$

$$=(-1)^{n-r}\left[\frac{\left(-\delta^{2r}+(-1)^{r}\right)\underline{\gamma\delta}+\left(-\gamma^{2r}+(-1)^{r}\right)\underline{\delta\gamma}}{4}\right].$$

Aşağıdaki teorem ile Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonlar için Vajda özdeşliği sunulmaktadır.

Teorem 3.2.9: (Vajda Özdeşliği) Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i) $$QP_{n+i}.QP_{n+j}-QP_{n}.QP_{n+i+j}=(-1)^{n}\left[\frac{\left(\delta^{i+j}-\gamma^{i}\delta^{j}\right)\underline{\gamma}\underline{\delta}+\left(\gamma^{i+j}-\gamma^{j}\delta^{i}\right)\underline{\delta}\underline{\gamma}}{(\gamma-\delta)^{2}}\right] \quad \textbf{(3.2.43)}$$

ii**)** $$QPL_{n+i}QPL_{n+j}-QPL_{n}.QPL_{n+i+j}=(-1)^{n}\left[\frac{\left(-\delta^{i+j}+\gamma^{i}\delta^{j}\right)\underline{\gamma}\underline{\delta}+\left(-\gamma^{i+j}+\gamma^{j}\delta^{i}\right)\underline{\delta}\underline{\gamma}}{4}\right]$$

(3.2.44)

İspat: $n\geq 0$ için,

i. $QP_{n+i}.QP_{n+j}-QP_{n}.QP_{n+i+j}=$

$$=\left(\frac{\gamma^{n+i}\underline{\gamma}-\delta^{n+i}\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)\left(\frac{\gamma^{n+j}\underline{\gamma}-\delta^{n+j}\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)-\left(\frac{\gamma^{n}\underline{\gamma}-\delta^{n}\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)\left(\frac{\gamma^{n+i+j}\underline{\gamma}-\delta^{n+i+j}\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)$$

$$=\frac{1}{(\gamma-\delta)^{2}}\Big[\gamma^{2n+i+j}\underline{\gamma}^{2}-\gamma^{n+i}\delta^{n+j}\underline{\gamma}\underline{\delta}-\delta^{n+i}\gamma^{n+j}\underline{\delta}\underline{\gamma}+\delta^{2n+i+j}\underline{\delta}^{2}$$

$$-\gamma^{2n+i+j}\underline{\gamma}^{2}+\gamma^{n}\delta^{n+i+j}\underline{\gamma}\underline{\delta}+\gamma^{n+i+j}\delta^{n}\underline{\delta}\underline{\gamma}-\delta^{2n+i+j}\underline{\delta}^{2}\Big]$$

$$=\left[\frac{-\gamma^{n+i}\delta^{n+j}\underline{\gamma}\underline{\delta}-\delta^{n+i}\gamma^{n+j}\underline{\delta}\underline{\gamma}+\gamma^{n}\delta^{n+i+j}\underline{\gamma}\underline{\delta}+\gamma^{n+i+j}\delta^{n}\underline{\delta}\underline{\gamma}}{(\gamma-\delta)^{2}}\right]$$

$$=(-1)^{n}\left[\frac{\left(\delta^{i+j}-\gamma^{i}\delta^{j}\right)\underline{\gamma}\underline{\delta}+\left(\gamma^{i+j}-\gamma^{j}\delta^{i}\right)\underline{\delta}\underline{\gamma}}{(\gamma-\delta)^{2}}\right].$$

ii. $QPL_{n+i}QPL_{n+j}-QPL_{n}.QPL_{n+i+j}=$

$$=\left(\frac{\gamma^{n+i}\underline{\gamma}+\delta^{n+i}\underline{\delta}}{2}\right)\left(\frac{\gamma^{n+j}\underline{\gamma}+\delta^{n+j}\underline{\delta}}{2}\right)-\left(\frac{\gamma^{n}\underline{\gamma}+\delta^{n}\underline{\delta}}{2}\right)\left(\frac{\gamma^{n+i+j}\underline{\gamma}+\delta^{n+i+j}\underline{\delta}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\gamma^{2n+i+j}\underline{\gamma}^{2}+\gamma^{n+i}\delta^{n+j}\underline{\gamma}\underline{\delta}+\delta^{n+i}\gamma^{n+j}\underline{\delta}\underline{\gamma}+\delta^{2n+i+j}\underline{\delta}^{2}$$

$$-\gamma^{2n+i+j}\underline{\gamma}^{2}-\gamma^{n}\delta^{n+i+j}\underline{\gamma}\underline{\delta}-\gamma^{n+i+j}\delta^{n}\underline{\delta}\underline{\gamma}-\delta^{2n+i+j}\underline{\delta}^{2}\Big]$$

$$=\left[\frac{\gamma^{n+i}\delta^{n+j}\underline{\gamma}\underline{\delta}+\delta^{n+i}\gamma^{n+j}\underline{\delta}\underline{\gamma}-\gamma^{n}\delta^{n+i+j}\underline{\gamma}\underline{\delta}-\gamma^{n+i+j}\delta^{n}\underline{\delta}\underline{\gamma}}{4}\right]$$

$$=(-1)^n\left[\frac{\left(-\delta^{i+j}+\gamma^i\delta^j\right)\underline{\gamma\delta}+\left(-\gamma^{i+j}+\gamma^j\delta^i\right)\underline{\delta\gamma}}{4}\right].$$

Aşağıdaki teorem ile Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonlar için D'Ocagne özdeşliği sunulmaktadır.

Teorem 3.2.10: (D'Ocagne Özdeşliği) Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i) $$QP_mQP_{n+1}-QP_nQP_{m+1}=(-1)^n\left[\frac{\left(\delta^{m-n+1}-\gamma^{m-n+1}\delta\right)\underline{\gamma\delta}+\left(\gamma^{m-n+1}-\delta^{m-n+1}\gamma\right)\underline{\delta\gamma}}{(\gamma-\delta)^2}\right] \quad \textbf{(3.2.45)}$$

ii) $$QPL_m.QPL_{n+1}-QPL_n.QPL_{m+1}=(-1)^n\left[\frac{\left(\delta^{m-n+1}+\gamma^{m-n+1}\delta\right)\underline{\gamma\delta}+\left(\gamma^{m-n+1}+\delta^{m-n+1}\gamma\right)\underline{\delta\gamma}}{4}\right]$$

(3.2.46)

İspat: $n,m\geq 0$ için,

i. $QP_mQP_{n+1}-QP_nQP_{m+1}=$

$$=\left(\frac{\gamma^m\underline{\gamma}-\delta^m\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)\left(\frac{\gamma^{n+1}\underline{\gamma}-\delta^{n+1}\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)-\left(\frac{\gamma^n\underline{\gamma}-\delta^n\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)\left(\frac{\gamma^{m+1}\underline{\gamma}-\delta^{m+1}\underline{\delta}}{\gamma-\delta}\right)$$

$$=\frac{1}{(\gamma-\delta)^2}\Big[\gamma^{m+n+1}\underline{\gamma}^2-\gamma^m\delta^{n+1}\underline{\gamma\delta}-\delta^m\gamma^{n+1}\underline{\delta\gamma}+\delta^{m+n+1}\underline{\delta}^2$$

$$-\gamma^{m+n+1}\underline{\gamma}^2+\gamma^n\delta^{m+1}\underline{\gamma\delta}+\gamma^{m+1}\delta^n\underline{\delta\gamma}-\delta^{m+n+1}\underline{\delta}^2\Big]$$

$$=(-1)^n\left[\frac{\left(\delta^{m-n+1}-\gamma^{m-n+1}\delta\right)\underline{\gamma\delta}+\left(\gamma^{m-n+1}-\delta^{m-n+1}\gamma\right)\underline{\delta\gamma}}{(\gamma-\delta)^2}\right]$$

ii. $QPL_m.QPL_{n+1}-QPL_n.QPL_{m+1}=$

$$=\left(\frac{\gamma^m\underline{\gamma}+\delta^m\underline{\delta}}{2}\right)\left(\frac{\gamma^{n+1}\underline{\gamma}+\delta^{n+1}\underline{\delta}}{2}\right)-\left(\frac{\gamma^n\underline{\gamma}+\delta^n\underline{\delta}}{2}\right)\left(\frac{\gamma^{m+1}\underline{\gamma}+\delta^{m+1}\underline{\delta}}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\gamma^{m+n+1}\underline{\gamma}^2+\gamma^m\delta^{n+1}\underline{\gamma\delta}+\delta^m\gamma^{n+1}\underline{\delta\gamma}+\delta^{m+n+1}\underline{\delta}^2$$

$$-\gamma^{m+n+1}\underline{\gamma}^2-\gamma^n\delta^{m+1}\underline{\gamma\delta}-\gamma^{m+1}\delta^n\underline{\delta\gamma}-\delta^{m+n+1}\underline{\delta}^2\Big]$$

$$=(-1)^n\left[\frac{\left(\delta^{m-n+1}+\gamma^{m-n+1}\delta\right)\underline{\gamma\delta}+\left(\gamma^{m-n+1}+\delta^{m-n+1}\gamma\right)\underline{\delta\gamma}}{4}\right].$$

Fibonacci kuaterniyon için üreteç fonksiyonun elde edilişine benzer yöntemlerle bu tezde üretilen aşağıdaki teoremde QP_n Pell ve QPL_n Pell-Lucas kuaterniyonları için üreteç fonksiyonlar sunulmaktadır.

Teorem 3.2.11: $n \in \mathbb{Z}$ için,

a) QP_n Pell kuaterniyonunun $P(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} QP_n(x)t^n$ üreteç fonksiyonu;

$$P(x,t) = \frac{t + i + (2+t)j + (5+2t)k}{1 - 2t - t^2} \tag{3.2.47}$$

şeklinde ifade edilir.

b) QPL_n kuaterniyonunun $L(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} QPL_n(x)t^n$ üreteç fonksiyonu;

$$L(x,t) = \frac{t - 1 + (1+t)i + (3+t)j + (7+3t)k}{1 - 2t - t^2} \tag{3.2.48}$$

şeklinde verilir.

İspat:

a) QP_n Pell kuaterniyonunun $P(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} QP_n(x)t^n$ üreteç fonksiyonunu dikkate alalım. QP_n için Binet formülü kullanılarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
P(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\underline{\gamma}\gamma^n - \underline{\delta}\delta^n}{\gamma - \delta} \right) t^n &= \frac{1}{\gamma - \delta} \left(\frac{\underline{\gamma}}{1 - \gamma t} - \frac{\underline{\delta}}{1 - \delta t} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma - \delta} \left(\frac{\underline{\gamma}(1 - \delta t) - \underline{\delta}(1 - \gamma t)}{1 - 2t - t^2} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma - \delta} \left(\frac{\underline{\gamma} - \underline{\delta} + \left[-\underline{\gamma}(\gamma + \delta) + \underline{\delta}(\gamma + \delta) \right] t + \left(\underline{\gamma}\gamma - \underline{\delta}\delta \right) t}{1 - 2t - t^2} \right) \\
&= \frac{1}{\gamma - \delta} \left(\frac{\underline{\gamma} - \underline{\delta} + \left[\left(\underline{\gamma}\gamma - \underline{\delta}\delta \right) - 2\left(\underline{\gamma} - \underline{\delta} \right) \right] t}{1 - 2t - t^2} \right) \\
&= \frac{QP_0 + \left(QP_1 - 2QP_0 \right) t}{1 - 2t - t^2}
\end{aligned}$$

olur. Burada;

$$QP_0 = P_0 + P_1 i + P_2 j + P_3 k = i + 2j + 5k$$
$$QP_1 = P_1 + P_2 i + P_3 j + P_4 k = 1 + 2i + 5j + 12k$$

olduğundan,

$$P(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}QP_n(x)t^n=\frac{QP_0+\left(QP_1-2QP_0\right)t}{1-2t-t^2}=\frac{t+i+(2+t)j+(5+2t)k}{1-2t-t^2}$$

elde edilir.

b) QPL_n Pell-Lucas kuaterniyonunun $L(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} QPL_n(x)t^n$ üreteç fonksiyonunu dikkate alalım. QPL_n için Binet formülünü kullanarak;

$$L(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}Q_n(x)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\underline{\gamma}\gamma^n+\underline{\delta}\delta^n}{2}\right)t^n=\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{\gamma}}{1-\gamma t}+\frac{\underline{\delta}}{1-\delta t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{\gamma}\left(1-\delta t\right)+\underline{\delta}\left(1-\gamma t\right)}{1+2t-t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{\gamma}+\underline{\delta}+\left[-\underline{\gamma}(\gamma+\delta)-\underline{\delta}(\gamma+\delta)\right]t+\left(\underline{\gamma}\gamma+\underline{\delta}\delta\right)t}{1+2t-t^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\underline{\gamma}+\underline{\delta}+\left[\left(\underline{\gamma}\gamma+\underline{\delta}\delta\right)-2\left(\underline{\gamma}+\underline{\delta}\right)\right]t}{1-2t-t^2}\right)$$

$$=\frac{QPL_0+\left(QPL_1-2QPL_0\right)t}{1-2t-t^2}$$

elde edilir. Burada;

$$QPL_0=Q_0+Q_1i+Q_2j+Q_3k=1+i+3j+7k$$
$$QPL_1=Q_1+Q_2i+Q_3j+Q_4k=1+3i+7j+17k$$

olmak üzere,

$$L(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}QPL_n(x)t^n=\frac{QPL_0+\left(QPL_1-2QPL_0\right)t}{1-2t-t^2}=\frac{t-1+\left(1+t\right)i+(3+t)j+(7+3t)k}{1-2t-t^2}$$

özdeşliği elde edilir.

Aşağıdaki teoremde QP_{m+n} Pell ve QPL_{m+n} Pell-Lucas kuaterniyonları için üreteç fonksiyonlar sunulmaktadır.

Teorem 3.2.12: $m,n\in\mathbb{Z}$ için,

a) QP_{m+n} Pell kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty}QP_{m+n}x^n=\frac{QP_m+QP_{m-1}x}{1-2x-x^2} \qquad \textbf{(3.2.49)}$$

şeklinde ifade edilir.

b) QPL_{m+n} Pell-Lucas kuaterniyonunun üreteç fonksiyonu;

$$\sum_{n=0}^{\infty} QPL_{m+n}x^n = \frac{QPL_m - QPL_{m-1}x}{1-2x-x^2} \tag{3.2.50}$$

şeklinde verilir.

İspat:

a) QP_{m+n} Pell kuaterniyonunun $P(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} QP_{m+n}(x)x^n$ üreteç fonksiyonunu dikkate alalım. QP_{m+n} için Binet formülü kullanılarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} QP_{m+n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\underline{\gamma}\gamma^{m+n} - \underline{\delta}\delta^{m+n}}{\gamma-\delta}\right)x^n = \frac{1}{\gamma-\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\underline{\gamma}\gamma^m(\gamma x)^n - \underline{\delta}\delta^m(\delta x)^n\right)$$

$$= \frac{1}{\gamma-\delta}\left(\frac{\underline{\gamma}\gamma^m}{1-\gamma x} - \frac{\underline{\delta}\delta^m}{1-\delta x}\right)$$

Buradan payda eşitleme ve gerekli işlemlerle,

$$\sum_{n=0}^{\infty} QP_{m+n}x^n = \frac{1}{\gamma-\delta}\left(\frac{\underline{\gamma}\gamma^m - \underline{\delta}\delta^m + \left(\underline{\gamma}\gamma^{m-1} - \underline{\delta}\delta^{m-1}\right)x}{1-2x-x^2}\right)$$

$$= \frac{QP_m + QP_{m-1}x}{1-2x-x^2}$$

özdeşliği elde edilir.

b) QPL_{m+n} Pell-Lucas kuaterniyonunun $P(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} QPL_{m+n}(x)x^n$ üreteç fonksiyonunu dikkate alalım. QPL_{m+n} için Binet formülü kullanılarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} QPL_{m+n}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\underline{\gamma}\gamma^{m+n} + \underline{\delta}\delta^{m+n}}{2}\right)x^n = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\underline{\gamma}\gamma^m(\gamma x)^n + \underline{\delta}\delta^m(\delta x)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{\gamma}\gamma^m}{1-\gamma x} + \frac{\underline{\delta}\delta^m}{1-\delta x}\right)$$

Buradan payda eşitleme ve gerekli işlemlerle,

$$\sum_{n=0}^{\infty} QP_{m+n}x^n = \frac{1}{2}\left(\frac{\underline{\gamma}\gamma^m + \underline{\delta}\delta^m - \left(\underline{\gamma}\gamma^{m-1} + \underline{\delta}\delta^{m-1}\right)x}{1-2x-x^2}\right)$$

$$= \frac{QPL_m - QPL_{m-1}x}{1-2x-x^2}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.2.13: $n \geq 1$ için, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur (İpek ve Çimen, 2016).

a) $QPL_n^{\ 2} - 2QP_n^2 = (-1)^n \dfrac{\underline{\gamma\delta} + \underline{\delta\gamma}}{2}$ **(3.2.51)**

b) $m \geq 1$ için, $QPL_{2m+1}^{\ \ 2} - QPL_{2m-1}.QPL_{2m+3} = \dfrac{-\left(\underline{\gamma\delta} + \underline{\delta\gamma}\right) + \left(\delta^4 \underline{\gamma\delta} + \gamma^4 \underline{\delta\gamma}\right)}{4}$ **(3.2.52)**

İspat:

a)
$$QPL_n^{\ 2} - 2QP_n^2 = \frac{\gamma^{2n}\underline{\gamma}^2 + \gamma^n\delta^n\underline{\gamma\delta} + \gamma^n\delta^n\underline{\delta\gamma} + \delta^{2n}\underline{\delta}^2}{4}$$
$$-\frac{\gamma^{2n}\underline{\gamma}^2 + \gamma^n\delta^n\underline{\gamma\delta} + \gamma^n\delta^n\underline{\delta\gamma} + \delta^{2n}\underline{\delta}^2}{4}$$
$$= (-1)^n \frac{\underline{\gamma\delta} + \underline{\delta\gamma}}{2}$$

b)
$$QPL_{2m+1}^{\ \ 2} - QPL_{2m-1}.QPL_{2m+3} =$$
$$= \left(\frac{\gamma^{2m+1}\underline{\gamma} + \delta^{2m+1}\underline{\delta}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\gamma^{2m-1}\underline{\gamma} - \delta^{2m-1}\underline{\delta}}{2}\right)\left(\frac{\gamma^{2m+3}\underline{\gamma} - \delta^{2m+3}\underline{\delta}}{2}\right)$$
$$= \left(\frac{\gamma^{4m+2}\underline{\gamma}^2 + \gamma^{2m+1}\delta^{2m+1}\underline{\gamma\delta} + \gamma^{2m+1}\delta^{2m+1}\underline{\delta\gamma} + \delta^{4m+2}\underline{\delta}^2}{4}\right)$$
$$-\left(\frac{\gamma^{4m+2}\underline{\gamma}^2 + \gamma^{2m-1}\delta^{2m+3}\underline{\gamma\delta} + \gamma^{2m+3}\delta^{2m-1}\underline{\delta\gamma} + \delta^{4m+2}\underline{\delta}^2}{4}\right)$$
$$= \frac{-\left(\underline{\gamma\delta} + \underline{\delta\gamma}\right) + \delta^4\underline{\gamma\delta} + \gamma^4\underline{\delta\gamma}}{4}$$

Tanım 3.2.5:

$$QP(n) = \begin{pmatrix} QP_n & QP_{n-1} \\ QP_{n-1} & QP_{n-2} \end{pmatrix},\ QPL(n) = \begin{pmatrix} QPL_n & QPL_{n-1} \\ QPL_{n-1} & QPL_{n-2} \end{pmatrix} \qquad \textbf{(3.2.53)}$$

şeklinde tanımlanan $QP(n)$ ve $QPL(n)$ matrislerine sırasıyla Pell ve Pell-Lucas kuaterniyon matrisleri denir (Liana ve Wloch, 2016).

Teorem 3.2.14: $n \geq 2$ iken $QP(n)$ ve $QPL(n)$ matrisleri için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur (Liana ve Wloch, 2016).

i) $\begin{pmatrix} QP_n & QP_{n-1} \\ QP_{n-1} & QP_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QP_2 & QP_1 \\ QP_1 & QP_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2}$ **(3.2.54)**

ii) $\begin{pmatrix} QPL_n & QPL_{n-1} \\ QPL_{n-1} & QPL_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QPL_2 & QPL_1 \\ QPL_1 & QPL_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2}$ **(3.2.55)**

İspat:

i) $n=2$ için,

$$\begin{pmatrix} QP_2 & QP_1 \\ QP_1 & QP_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QP_2 & QP_1 \\ QP_1 & QP_0 \end{pmatrix}$$

elde edilen ifade $n=2$ için doğrudur. n değişkeni için doğru kabul ederek $n+1$ değişkeni için doğru olduğunu gösterelim;

$$\begin{pmatrix} QP_2 & QP_1 \\ QP_1 & QP_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QP_n & QP_{n-1} \\ QP_{n-1} & QP_{n-2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2QP_n + QP_{n-1} & QP_n \\ 2QP_{n-1} + QP_{n-2} & QP_{n-1} \end{pmatrix}$$

Pell kuaterniyonun tanımından,

$$\begin{aligned} 2QP_n + QP_{n-1} &= 2\left(P_n + iP_{n+1} + jP_{n+2} + kP_{n+3}\right) + \left(P_{n-1} + iP_n + jP_{n+1} + kP_{n+2}\right) \\ &= 2P_n + P_{n-1} + i(2P_{n+1} + P_n) + j\left(2P_{n+2} + P_{n+1}\right) + k\left(2P_{n+3} + P_{n+2}\right) \\ &= P_{n+1} + P_{n+2}i + P_{n+3}j + P_{n+4}k = QP_{n+1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 2QP_{n-1} + QP_{n-2} &= 2\left(P_{n-1} + iP_n + jP_{n+1} + kP_{n+2}\right) + \left(P_{n-2} + iP_{n-1} + jP_n + kP_{n+1}\right) \\ &= 2P_{n-1} + P_{n-2} + i(2P_n + P_{n-1}) + j\left(2P_{n+1} + P_n\right) + k\left(2P_{n+2} + P_{n+1}\right) \\ &= P_n + P_{n+1}i + P_{n+2}j + P_{n+3}k = QP_n \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

ii) $n=2$ için,

$$\begin{pmatrix} QPL_2 & QPL_1 \\ QPL_1 & QPL_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QPL_2 & QPL_1 \\ QPL_1 & QPL_0 \end{pmatrix}$$

elde edilen ifade $n=2$ için doğrudur. n değişkeni için doğru kabul ederek $n+1$ değişkeni için doğru olduğunu gösterelim;

$$\begin{pmatrix} QPL_2 & QPL_1 \\ QPL_1 & QPL_0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-2} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} QPL_n & QPL_{n-1} \\ QPL_{n-1} & QPL_{n-2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2QPL_n + QPL_{n-1} & QPL_n \\ 2QPL_{n-1} + QPL_{n-2} & QPL_{n-1} \end{pmatrix}$$

Pell-Lucas kuaterniyonun tanımından;

$$2QPL_n + QPL_{n-1} = 2\left(q_n + iq_{n+1} + jq_{n+2} + kq_{n+3}\right) + \left(q_{n-1} + iq_n + jq_{n+1} + kq_{n+2}\right)$$
$$= 2q_n + q_{n-1} + i(2q_{n+1} + q_n) + j\left(2q_{n+2} + q_{n+1}\right) + k\left(2q_{n+3} + q_{n+2}\right)$$
$$= q_{n+1} + q_{n+2}i + q_{n+3}j + q_{n+4}k = QPL_{n+1}$$

ve

$$2QPL_{n-1} + QPL_{n-2} = 2\left(q_{n-1} + iq_n + jq_{n+1} + kq_{n+2}\right) + \left(q_{n-2} + iq_{n-1} + jq_n + kq_{n+1}\right)$$
$$= 2q_{n-1} + q_{n-2} + i(2q_n + q_{n-1}) + j\left(2q_{n+1} + q_n\right) + k\left(2q_{n+2} + q_{n+1}\right)$$
$$= q_n + q_{n+1}i + q_{n+2}j + q_{n+3}k = QPL_n$$

olduğu görülür.

Teorem 3.2.15: Pell ve Pell-Lucas kuaterniyonları için aşağıdaki özdeşlikler doğrudur (Liana ve Wloch, 2016).

i) $QP_n.QP_{n-2} - QP^2{}_{n-1} = \left(-2 - 2j - 16k\right)\left(-1\right)^{n-2}$

ii) $QPL_n.QPL_{n-2} - QPL^2{}_{n-1} = \left(16 + 16j + 128k\right)\left(-1\right)^{n-2}$

İspat:

i) $QP_n.QP_{n-2} - QP^2{}_{n-1} = \left(QP_2.QP_0 - QP^2{}_1\right)\left(-1\right)^{n-2} = \left(-2 - 2j - 16k\right)\left(-1\right)^{n-2}$

ii) $QPL_n.QPL_{n-2} - QPL^2{}_{n-1} = \left(QPL_2.QPL_0 - QPL^2{}_1\right)\left(-1\right)^{n-2} = \left(16 + 16j + 128k\right)\left(-1\right)^{n-2}$

3.3 Jakobstal ve Jakobstal-Lucas Kuaterniyonları

Tanım 3.3.1: $J_0 = 0, J_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için,

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} \tag{3.3.1}$$

şeklinde tanımlı sayılara Jakobsthal sayıları denir (Horadam, 1988).

Tanım 3.3.2: $j_0 = 2, j_1 = 1$ olmak üzere $n \geq 2$ için,

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2} \tag{3.3.2}$$

şeklinde tanımlı sayılara Jakobsthal-Lucas sayıları denir (Horadam, 1988).

Aşağıdaki tablo bazı n değerlerine göre J_n ve j_n sayılarını vermektedir.

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**…**
J_n	**0**	**1**	**1**	**3**	**5**	**11**	**21**	**43**	**85**	**171**	**341**	**…**
j_n	**2**	**1**	**5**	**7**	**17**	**31**	**65**	**127**	**257**	**511**	**1025**	**…**

Çizelge 3.3.1. İlk 10 Jakobsthal ve Jakobsthal-Lucas sayısını veren tablo

Önerme 3.1.1: $n,m,r \in \mathbb{N}$ olmak üzere J_n ve j_n sayıları aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $j_{n+1} + j_n = 3(J_{n+1} + J_n) = 3.2^n,$ **(3.3.3)**

2. $j_{n+1} - j_n = 3(J_{n+1} - J_n) + 4(-1)^{n+1} = 2^n + 2(-1)^{n+1},$ **(3.3.4)**

3. $j_{n+r} + j_{n-r} = 3(J_{n+r} + J_{n-r}) + 4(-1)^{n-r} = 2^{n-r}(2^{2r} + 1) + 2(-1)^{n-r},$ **(3.3.5)**

4. $j_{n+r} - j_{n-r} = 3(J_{n+r} - J_{n-r}) = 2^{n-r}(2^{2r} - 1),$ **(3.3.6)**

5. $J_n + j_n = 2J_{n+1},$ **(3.3.7)**

6. $3J_n + j_n = 2^{n+1},$ **(3.3.8)**

7. $J_n.j_n = J_{2n},$ **(3.3.9)**

8. $J_m.j_n - J_n.j_m = (-1)^n 2^{n+1} J_{m-n},$ **(3.3.10)**

9. $J_m.j_n + J_n.j_m = 2J_{m+n},$ **(3.3.11)**

10. $J_n = \frac{1}{3}\left(2^n - (-1)^n\right),$ **(3.3.12)**

11. $j_n = 2^n - (-1)^n.$ **(3.3.13)**

Burada sırasıyla (3.3.12) ve (3.3.13)'de verilen formüller sırasıyla Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları için Binet formülüdür (Liana ve Wloch, 2016).

Tanım 3.3.3: $n \geq 1$ olmak üzere J_n ve j_n sırasıyla *n.* Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas sayıları olmak üzere, *n.* Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları sırasıyla,

$$JQ_n = J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}, \quad \textbf{(3.3.14)}$$

$$JLQ_n = j_n + ij_{n+1} + jj_{n+2} + kj_{n+3}. \quad \textbf{(3.3.15)}$$

şeklinde tanımlıdır (Liana ve Wloch, 2016).

Teorem 3.3.1: $n \geq 1$ ve $r \geq 1$ olmak üzere Jacobsthal kuaterniyonları için aşağıdaki özdeşlikler sağlanır (Liana ve Wloch, 2016).

i) $JQ_{n+1} + JQ_n = 2^n(1 + 2i + 4j + 8k),$ **(3.3.16)**

ii) $JQ_{n+1} - JQ_n = \frac{1}{3}\left[2^n(1 + 2i + 4j + 8k) + 2(-1)^n(1 - i + j - k)\right],$ **(3.3.17)**

iii) $JQ_{n+r} + JQ_{n-r} = \left[\frac{1}{3}2^{n-r}(2^{2r} + 1)(1 + 2i + 4j + 8k) - 2(-1)^{n-r}(1 - i + j - k)\right],$ **(3.3.18)**

iv) $JQ_{n+r} - JQ_{n-r} = \frac{1}{3}\left[2^{n-r}(2^{2r} - 1)(1 + 2i + 4j + 8k)\right]$ **(3.3.19)**

v) $\left|JQ_n\right| = \frac{1}{9}\left[85.2^{2n} + 10.2^n(-1)^n + 4\right].$ **(3.3.20)**

İspat:

i) $JQ_n = J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}$

$JQ_{n+1} = J_{n+1} + iJ_{n+2} + jJ_{n+3} + kJ_{n+4}$

olmak üzere özdeşlikler taraf tarafa toplanarak,

$$JQ_{n+1} + JQ_n = (J_{n+1} + J_n) + i(J_{n+2} + J_{n+1}) + j(J_{n+3} + J_{n+2}) + k(J_{n+4} + J_{n+3})$$

ifadesi elde edilir. Burada (3.3.3)'ü kullanarak,

$$\begin{aligned} JQ_{n+1} + JQ_n &= 2^n + i2^{n+1} + j2^{n+2} + k2^{n+3} \\ &= 2^n(1 + 2i + 4j + 8k) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

ii) $JQ_{n+1} = J_{n+1} + iJ_{n+2} + jJ_{n+3} + kJ_{n+4}$

$JQ_n = J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}$

olmak üzere özdeşlikler taraf tarafa çıkarılarak,

$$JQ_{n+1} - JQ_n = (J_{n+1} - J_n) + i(J_{n+2} - J_{n+1}) + j(J_{n+3} - J_{n+2}) + k(J_{n+4} - J_{n+3})$$

elde edilir ve (3.3.4)'ten,

$$\begin{aligned} JQ_{n+1} - JQ_n &= \frac{1}{3}\left[2^n + 2(-1)^n\right] + i\frac{1}{3}\left[2^{n+1} + 2(-1)^{n+1}\right] \\ &\quad + j\frac{1}{3}\left[2^{n+2} + 2(-1)^{n+2}\right] + k\frac{1}{3}\left[2^{n+3} + 2(-1)^{n+3}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[2^n(1 + 2i + 4j + 8k) + 2(-1)^n(1 - i + j - k)\right] \end{aligned}$$

olduğu görülür.

iii) $JQ_{n+r} + JQ_{n-r} = (J_{n+r} + J_{n-r}) + i(J_{n+r+1} + J_{n-r+1}) + j(J_{n+r+2} + J_{n-r+2}) + k(J_{n+r+3} + J_{n-r+3})$

eşitliğinde (3.3.5)'ü kullanarak,

$$\begin{aligned} JQ_{n+1} - JQ_n &= \frac{1}{3}\left(2^{n-r}\left(2^{2r} + 1\right) - 2(-1)^{n-r}\right) + i\frac{1}{3}\left(2^{n-r+1}\left(2^{2r} + 1\right) - 2(-1)^{n-r+1}\right) \\ &\quad + j\frac{1}{3}\left(2^{n-r+2}\left(2^{2r} + 1\right) - 2(-1)^{n-r+2}\right) + k\frac{1}{3}\left(2^{n-r+3}\left(2^{2r} + 1\right) - 2(-1)^{n-r+3}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left[2^{n-r}\left(2^{2r} + 1\right)(1 + 2i + 4j + 8k) - 2(-1)^{n-r}(1 - i + j - k)\right] \end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

iv) $JQ_{n+r}-JQ_{n-r}=\left(J_{n+r}-J_{n-r}\right)+i\left(J_{n+r+1}-J_{n-r+1}\right)+j\left(J_{n+r+2}-J_{n-r+2}\right)+k\left(J_{n+r+3}-J_{n-r+3}\right)$

eşitliği ve (3.3.6)'dan,

$$\begin{aligned}JQ_{n+r}-JQ_{n-r}&=\frac{1}{3}\left[2^{n-r}\left(2^{2r}-1\right)+i2^{n-r+1}\left(2^{2r}-1\right)+j2^{n-r+2}\left(2^{2r}-1\right)+k2^{n-r+3}\left(2^{2r}-1\right)\right]\\&=\frac{1}{3}2^{n-r}\left(2^{2r}-1\right)\left(1+2i+4j+8k\right)\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

v) $\left|JQ_n\right|=\sum_{i=0}^{3}J_{n+i}^2$

olmak üzere bu eşitlikte (3.3.12) binet formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}\left|JQ_n\right|&=\frac{1}{9}\left[\left(2^n-(-1)^n\right)^2+\left(2^{n+1}-(-1)^{n+1}\right)^2+\left(2^{n+2}-(-1)^{n+2}\right)^2+\left(2^{n+3}-(-1)^{n+3}\right)^2\right]\\&=\frac{1}{9}\left[2^{2n}-2.2^n(-1)^n+(-1)^{2n}+4.2^{2n}+4.2^n(-1)^n\right.\\&\quad+(-1)^{2n}+16.2^{2n}-8.2^n(-1)^n+(-1)^{2n}\\&\quad\left.+64.2^{2n}+16.2^n(-1)^n+(-1)^{2n}\right]\\&=\frac{1}{9}\left[85.2^{2n}+10.2^n(-1)^n+4\right]\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir.

Teorem 3.3.2: $n\geq 1$ ve $r\geq 1$ olmak üzere Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için aşağıdaki özdeşlikler sağlanır (Liana ve Wloch, 2016).

i) $JLQ_{n+1}+JLQ_n=3.2^n\left(1+2i+4j+8k\right),$ **(3.3.21)**

ii) $JLQ_{n+1}-JLQ_n=2^n\left(1+2i+4j+8k\right)+2\left(-1\right)^n\left(1-i+j-k\right),$ **(3.3.22)**

iii) $JLQ_{n+r}+JLQ_{n-r}=\left[\ 2^{n-r}\left(2^{2r}+1\right)\left(1+2i+4j+8k\right)\right.$

$\left.-2\left(-1\right)^{n-r}\left(1-i+j-k\right)\ \right],$ **(3.3.23)**

iv) $JLQ_{n+r}-JLQ_{n-r}=2^{n-r}\left(2^{2r}-1\right)\left(1+2i+4j+8k\right)$ **(3.3.24)**

v) $\left|JLQ_n\right|=85.2^{2n}+10.2^n\left(-1\right)^n+4.$ **(3.3.25)**

İspat :

i) $JLQ_n=j_n+ij_{n+1}+jj_{n+2}+kj_{n+3}$

$JLQ_{n+1}=j_{n+1}+ij_{n+2}+jj_{n+3}+kj_{n+4}$

olmak üzere iki ifade taraf tarafa toplanarak;

$$JLQ_{n+1}+JLQ_n=\left(j_{n+1}+j_n\right)+i\left(j_{n+2}+j_{n+1}\right)+j\left(j_{n+3}+j_{n+2}\right)+k\left(j_{n+4}+j_{n+3}\right)$$

elde edilir. Bu denklemde (3.3.3)'ü kullanarak,

$$\begin{aligned}JLQ_{n+1}+JLQ_n&=3.2^n+3.2^{n+1}i+3.2^{n+2}j+3.2^{n+3}k\\&=3.2^n\left(1+2i+4j+8k\right)\end{aligned}$$

olduğu elde edilir.

ii) $JLQ_n = j_n + ij_{n+1} + jj_{n+2} + kj_{n+3}$

$JLQ_{n+1} = j_{n+1} + ij_{n+2} + jj_{n+3} + kj_{n+4}$

olmak üzere iki ifade taraf tarafa çıkarılarak;

$$JLQ_{n+1}-JLQ_n=\left(j_{n+1}-j_n\right)+i\left(j_{n+2}-j_{n+1}\right)+j\left(j_{n+3}-j_{n+2}\right)+k\left(j_{n+4}-j_{n+3}\right)$$

elde edilir. Burada (3.3.4) ten,

$$\begin{aligned}JLQ_{n+1}-JLQ_n&=\left[2^n+2\left(-1\right)^n\right]+i\left[2^{n+1}+2\left(-1\right)^{n+1}\right]\\&\quad+j\left[2^{n+2}+2\left(-1\right)^{n+2}\right]+k\left[2^{n+3}+2\left(-1\right)^{n+3}\right]\\&=\left[2^n\left(1+2i+4j+8k\right)+2\left(-1\right)^n\left(1-i+j-k\right)\right]\end{aligned}$$

denklemi elde edilir.

iii) $JLQ_{n+r}+JLQ_{n-r}=\left(j_{n+r}+j_{n-r}\right)+i\left(j_{n+r+1}+j_{n-r+1}\right)+j\left(j_{n+r+2}+j_{n-r+2}\right)+k\left(j_{n+r+3}+j_{n-r+3}\right)$

olmak üzere (3.3.5)'ten,

$$\begin{aligned}JLQ_{n+1}+JLQ_n&=\left(2^{n-r}\left(2^{2r}+1\right)-2\left(-1\right)^{n-r}\right)+i\left(2^{n-r+1}\left(2^{2r}+1\right)-2\left(-1\right)^{n-r+1}\right)\\&\quad+j\left(2^{n-r+2}\left(2^{2r}+1\right)-2\left(-1\right)^{n-r+2}\right)+k\left(2^{n-r+3}\left(2^{2r}+1\right)-2\left(-1\right)^{n-r+3}\right)\\&=\left[2^{n-r}\left(2^{2r}+1\right)\left(1+2i+4j+8k\right)-2\left(-1\right)^{n-r}\left(1-i+j-k\right)\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

iv) $JLQ_{n+r}-JLQ_{n-r}=\left(j_{n+r}-j_{n-r}\right)+i\left(j_{n+r+1}-j_{n-r+1}\right)+j\left(j_{n+r+2}-j_{n-r+2}\right)+k\left(j_{n+r+3}-j_{n-r+3}\right)$

denklemi için (3.3.6)'dan,

$$\begin{aligned}JLQ_{n+r}-JLQ_{n-r}&=\left[2^{n-r}\left(2^{2r}-1\right)+i2^{n-r+1}\left(2^{2r}-1\right)+j2^{n-r+2}\left(2^{2r}-1\right)+k2^{n-r+3}\left(2^{2r}-1\right)\right]\\&=2^{n-r}\left(2^{2r}-1\right)\left(1+2i+4j+8k\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

v) $\left|JLQ_n\right|=\sum_{i=0}^{3} j_{n+i}^2$

olmak üzere (3.3.12) binet formülü kullanılarak,

$$\left|JLQ_n\right| = \left[\left(2^n - (-1)^n\right)^2 + \left(2^{n+1} - (-1)^{n+1}\right)^2 + \left(2^{n+2} - (-1)^{n+2}\right)^2 + \left(2^{n+3} - (-1)^{n+3}\right)^2\right]$$

$$= \Big[2^{2n} - 2.2^n(-1)^n + (-1)^{2n} + 4.2^{2n} + 4.2^n(-1)^n$$

$$+ (-1)^{2n} + 16.2^{2n} - 8.2^n(-1)^n + (-1)^{2n}$$

$$+ 64.2^{2n} + 16.2^n(-1)^n + (-1)^{2n} \Big]$$

$$= \left[85.2^{2n} + 10.2^n(-1)^n + 4\right]$$

özdeşliği elde edilir.

Teorem 3.3.3: $n \geq 1$ için Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas kuaterniyonları için aşağıdaki özdeşlikler sağlanır (Liana ve Wloch, 2016).

i) $$JQ_n + JLQ_n = 2.JQ_{n+1} \quad \textbf{(3.3.26)}$$

ii) $$3JQ_n + JLQ_n = 2^{n+1}\left(1 + 2i + 4j + 8k\right) \quad \textbf{(3.3.27)}$$

İspat:

i) $JQ_n + JLQ_n = \left(J_n + j_n\right) + i\left(J_{n+1} + j_{n+1}\right) + j\left(J_{n+2} + j_{n+2}\right) + k\left(J_{n+3} + j_{n+3}\right)$

olmak üzere (3.3.9)'dan,

$$\begin{aligned} JQ_n + JLQ_n &= \left(2J_{n+1}\right) + i\left(2J_{n+2}\right) + j\left(2J_{n+3}\right) + k\left(2J_{n+4}\right) \\ &= 2JQ_{n+1} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

ii) $3JQ_n + JLQ_n = \left(3J_n + j_n\right) + i\left(3J_{n+1} + j_{n+1}\right) + j\left(3J_{n+2} + j_{n+2}\right) + k\left(3J_{n+3} + j_{n+3}\right)$

denklemi için (3.3.8)'den,

$$\begin{aligned} 3JQ_n + JLQ_n &= 2^{n+1} + 2^{n+2}i + 2^{n+3}j + 2^{n+4}k \\ &= 2^{n+1}\left(1 + 2i + 4j + 8k\right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Tanım 3.3.4:

$$JQ(n) = \begin{pmatrix} JQ_n & JQ_{n-1} \\ JQ_{n+1} & JQ_n \end{pmatrix}, \ JLQ(n) = \begin{pmatrix} JLQ_n & JLQ_{n-1} \\ JLQ_{n+1} & JLQ_n \end{pmatrix} \quad \textbf{(3.3.28)}$$

şeklinde tanımlı matrislere sırasıyla Jacobsthal ve Jacobsthal-Lucas Kuaterniyon matrisleri denir (Liana ve Wloch, 2016).

Teorem 3.3.4: $n \geq 1$ iken Jacobsthal Kuaterniyon matrisleri için aşağıdaki özdeşlik doğrudur (Liana ve Wloch, 2016).

$$\begin{pmatrix} JQ_n & JQ_{n-1} \\ JQ_{n+1} & JQ_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} JQ_1 & JQ_0 \\ JQ_2 & JQ_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \tag{3.3.29}$$

İspat: $n = 1$ için,

$$\begin{pmatrix} JQ_1 & JQ_0 \\ JQ_2 & JQ_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} JQ_1 & JQ_0 \\ JQ_2 & JQ_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{0}$$

olur. n değişkeni için doğru kabul ederek $n+1$ değişkeni için;

$$\begin{pmatrix} JQ_{n+1} & JQ_n \\ JQ_{n+2} & JQ_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} JQ_1 & JQ_0 \\ JQ_2 & JQ_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{n}$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} JQ_1 & JQ_0 \\ JQ_2 & JQ_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{n} &= \begin{pmatrix} JQ_1 & JQ_0 \\ JQ_2 & JQ_1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}^{n-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} JQ_n & JQ_{n-1} \\ JQ_{n+1} & JQ_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} JQ_n + 2JQ_{n-1} & JQ_n \\ JQ_{n+1} + 2JQ_n & JQ_{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} JQ_{n+1} & JQ_n \\ JQ_{n+2} & JQ_{n+1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olup tümevarımla özelliğin sağlandığı görülür.

Teorem 3.3.5: (Cassini Özdeşliği) $n \geq 1$ iken Jakobshtal ve Jakobshtal-Lucas kuaterniyonları için Cassini özdeşliği;

i) $JQ_n^{\,2} - JQ_{n+1}.JQ_{n-1} = (7 - 3i + 3j + 9k).(-2)^{n-1}$

$$= \left(JQ_1^{\,2} - JQ_2.JQ_0\right).(-2)^{n-1} \tag{3.3.30}$$

ii) $JLQ_n^{\,2} - JLQ_{n+1}.JLQ_{n-1} = 9.(7 - 3i + 3j + 9k).(-2)^{n-1}$ **(3.3.31)**

şeklinde tanımlanır (Liana ve Wloch, 2016).

İspat:

i) $JQ_n = J_n + iJ_{n+1} + jJ_{n+2} + kJ_{n+3}$,

$JQ_{n+1} = J_{n+1} + iJ_{n+2} + jJ_{n+3} + kJ_{n+4}$

$JQ_{n-1} = J_{n-1} + iJ_n + jJ_{n+1} + kJ_{n+2}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} JQ_n^{\,2} - JQ_{n+1}.JQ_{n-1} &= J_n^2 - J_{n+1}^2 - J_{n+2}^2 - J_{n+3}^2 - J_{n+1}J_{n-1} \\ &+ J_{n+2}J_n + J_{n+3}J_{n+1} + J_{n+4}J_{n+2} \\ &+ i\left(J_{n+1}J_n - J_{n+2}J_{n-1} - J_{n+3}J_{n+2} + J_{n+4}J_{n+1}\right) \\ &+ j\left(2J_{n+2}J_n - J_{n+1}^2 + J_{n+2}^2 - J_{n+3}J_{n-1} - J_{n+4}J_n\right) \\ &+ k\left(3J_nJ_{n+3} - 2J_{n+1}J_{n+2} - J_{n+4}J_{n-1}\right) \end{aligned}$$

(3.3.12) binet formülünü kullanarak;

$$JQ_n^{\,2} - JQ_{n+1}.JQ_{n-1} = \left(7 - 3i + 3j + 9k\right).\left(-2\right)^{n-1}$$

olduğu elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} JQ_1^{\,2} - JQ_2.JQ_0 &= \left(J_1 + iJ_2 + jJ_3 + kJ_4\right)^2 - \left(J_2 + iJ_3 + jJ_4 + kJ_5\right)\left(J_0 + iJ_1 + jJ_2 + kJ_3\right) \\ &= \left(1 + i + 3j + 5k\right)^2 - \left(1 + 3i + 5j + 11k\right)\left(i + j + 3k\right) \\ &= \left(7 - 3i + 3j + 9k\right) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$JQ_n^{\,2} - JQ_{n+1}.JQ_{n-1} = \left(JQ_1^{\,2} - JQ_2.JQ_0\right).\left(-2\right)^{n-1}$$

olduğu elde edilir.

ii) $JLQ_n = j_n + ij_{n+1} + jj_{n+2} + kj_{n+3}$,

$JLQ_{n+1} = j_{n+1} + ij_{n+2} + jj_{n+3} + kj_{n+4}$

$JLQ_{n-1} = j_{n-1} + ij_n + jj_{n+1} + kj_{n+2}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} JLQ_n^{\,2} - JLQ_{n+1}.JLQ_{n-1} &= j_n^2 - j_{n+1}^2 - j_{n+2}^2 - j_{n+3}^2 - j_{n+1}j_{n-1} \\ &+ j_{n+2}j_n + j_{n+3}j_{n+1} + j_{n+4}j_{n+2} \\ &+ i\left(j_{n+1}j_n - j_{n+2}j_{n-1} - j_{n+3}j_{n+2} + j_{n+4}j_{n+1}\right) \\ &+ j\left(2j_{n+2}j_n - j_{n+1}^2 + j_{n+2}^2 - j_{n+3}j_{n-1} - j_{n+4}j_n\right) \\ &+ k\left(3j_nj_{n+3} - 2j_{n+1}j_{n+2} - j_{n+4}j_{n-1}\right) \end{aligned}$$

(3.3.13) binet formülünü kullanarak;

$$JLQ_n^{\,2} - JLQ_{n+1}.JLQ_{n-1} = 9.\left(7 - 3i + 3j + 9k\right).\left(-2\right)^{n-1}$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

Hamilton, W. R., 1844. On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions. Royal Irish Academy, 2, 424–434.

Hamilton, W. R., 1866. Elements of quaternions. C.J. Joly publishing, Ireland.

Halici, S., 2013. On complex Fibonacci quaternions. Adv. Appl.Clifford Algebras 23, 105–112.

Halici, S., 2012. On Fibonacci quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebras 22, 321–327.

Horadam, A.F., 1963. Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. Am. Math. Month. **70**, 289–291.

Çimen C.B. ve İpek A., 2016. On Pell quaternions and Pell–Lucas quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebras. **26** (1), 39-51.

Horadam, A.F., 1988. Jacobsthal representation numbers. Fibonacci Quarterly **34**, 40–54.

Horadam, A.F., 1993. Quaternion recurrence relations. Ulam Quarterly **2**, 23–33.

Horadam, A.F., 1971. Pell identities. Fibonacci Quart. **9**(3), 245–263.

Iyer, M.R., 1969. A note on Fibonacci quaternions. Fibonacci Quaterly **3**, 225–229.

Nurkan, S.K. ve Güven, İ.A., 2015. Dual Fibonacci quaternions. Adv. Appl. Clifford Algebras **25** (2), 403–414.

Szynal-Liana A. ve Wloch I., 2016. The Pell quaternions and the Pell octonions. Adv. Appl. Clifford Algebras. **26**(1), 435-440.

Szynal-Liana A. ve Wloch I., 2015. A Note on Jacobsthal Quaternions Adv. Appl. Clifford Algebras. **26**(1), 441-447.

Ward J. P., 1997. Quaternions and Cayley Numbers: Algebra and Applications. Kluwer Academic Publishers, London.

Koshy, T., 2001. Fibonacci and Lucas numbers with applications. Wiley-Intersection, New York.

Koshy, T., 2010. Pell and Pell–Lucas Numbers with Applications. Springer New York Heidelberg Dordrecht London.

Koshy, T., 2009. Catalan Numbers with Applications. Oxford University Press.

Morais J.P., Georgiev S. ve Wolfgang S., 2010. Real Quaternionic Calculus Handbook, Springer Basel Heidelberg, New York.

Swamy, M.N.S., 1973. On generalized Fibonacci quaternions. Fibonacci Quat. **11**(5), 547–549.

Iakin, A.L., 1977. Generalized Quaternions with Quaternion Components, The Fib. Quarterly, **15**(1977), 350-352

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Hanifi ÇELİKTEN
Doğum Tarihi ve Yer : 04.09.1984 - Adana
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce
Telefon : 0553 474 87 00
e-mail : hanificelikten@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Yüksek Lisans	KMÜ	2017
Lisans	Mersin Ünv.	2012
Lise		

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2011-2012	İlkem Dershanesi	Stajer Öğr.
2012-2013	Celal Aydın Dershaneleri	Matematik Öğr.
2013-2014	Çukurova Etüt Merk.	Matematik Öğr.
2014-2015	Ahi Evran Lisesi	Matematik Öğr.
2015-2016	Karaman Kurs Merkezi	Matematik Öğr.
2016-	Babaoğlu And. Lisesi	Matematik Öğr.