SPLİT *(p,q)*-FİBONACCİ KUATERNİYONLARI VE OKTONYONLARI

Orhan DİŞKAYA

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı
Cebir ve Sayılar Teorisi Programı
Doç. Dr. Ahmet İPEK

Eylül, 2017

T.C
KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SPLİT *(p,q)*-FİBONACCİ KUATERNİYONLARI VE OKTONYONLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Orhan DİŞKAYA

Anabilim Dalı: MATEMATİK

Programı : Cebir ve Sayılar Teorisi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet İPEK

KARAMAN-2017

TEZ ONAYI

Orhan DİŞKAYA tarafından hazırlanan "**Split (p,q)-Fibonacci Kuaterniyonları ve Oktonyonları**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ahmet İPEK

Eş Danışman:

Jüri Üyeleri

İmza:

Doç. Dr. Ahmet İPEK

Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Yrd. Doç. Dr. Ozan ÖZKAN

Tez Savunma Tarihi: 14 / 09 / 2017

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Kamil ARI
Enstitü Müdürü V.

TEZ BİLDİRİMİ

Yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Orhan DİŞKAYA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SPLİT (p,q)-FİBONACCİ KUATERNİYONLARI

VE OKTONYONLARI

Orhan DİŞKAYA

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ahmet İPEK

Eylül, 2017, 59 sayfa

Bu tez, üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, literatür bilgisini içeren bir giriş, çalışmanın amacı ve kapsamı verilmektedir. İkinci bölümde, klasik ve split kuaterniyonlar ve oktonyonlar hakkında tezin konusu ile ilgili olan temel tanımlar, kavramlar ve teoremler sunulmaktadır. Üçüncü bölümde, (p,q)-Fibonacci kuaterniyonları ve oktonyonları ile ilgili olan temel tanımlar ve teoremlerden sonra split (p,q)-Fibonacci kuaterniyonları ve oktonyonları tanımlanmakta ve çalışılmaktadır. Bu kuaterniyonların ve oktonyonların bazı cebirsel özellikleri araştırılmaktadır.

Anahtar Kelimeler: Split kuaterniyonları, Split oktonyonları, Split Fibonacci kuaterniyonları, Split Fibonacci oktonyonları.

ABSTRACT

Ms Thesis

SPLIT (p,q)-FIBONACCI QUATERNIONS AND OCTONIONS

Orhan DİŞKAYA

Karamanoğlu Mehmetbey University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Doç.Dr. Ahmet İPEK

September, 2017, 59 pages

This thesis consists of three chapters. In the first chapter, an introduction devoted to the literature knowledge, the aim and the scope of the study are given. In the second chapter, the basic definitions, concepts and theorems related to the subject of the thesis about classic and split quaternions and octonions are presented. In the third chapter, after the fundamental definitions and the theorems related to (p,q)-Fibonacci quaternions and octonions, split (p,q)-Fibonacci quaternions and octonions are defined and studied. Some algebraic properties of these quaternions and octonions are investigated.

Anahtar Kelimeler: Split quaternions, Split octonions, Split Fibonacci quaternions, Split Fibonacci octonions.

ÖNSÖZ

Böyle bir çalışmaya yönelmemi sağlayan ve hazırlanması sırasında bilgi ve birikimi ile yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam, Doç. Dr. Ahmet İPEK'e teşekkür ederim. Ayrıca, beni bugünlere getiren, her türlü zorluklara rağmen benden sevgilerini ve desteklerini asla esirgemeyen aileme şükranlarımı sunarım.

Orhan DİŞKAYA

2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....i

ABSTRACT.....ii

ÖNSÖZ.....iii

TABLOLAR DİZİNİ.....v

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....vi

1. GİRİŞ.....1

2. KUATERNİYONLAR VE OKTONYONLAR.....3

2.1. Klasik Kuaterniyonlar ve Split Kuaterniyonları 3

2.2. Klasik Oktonyonlar ve Split Oktonyonları 6

3. FİBONACCİ KUATERNİYONLARI VE OKTONYONLARI..... 10

3.1. (p,q)-Fibonacci Sayı Dizisi ve Özelikleri 10

3.2. (p,q)-Fibonacci Kuaterniyonları 15

3.3. Split (p,q)-Fibonacci Kuaterniyonları 18

3.4. (p,q)-Fibonacci Oktonyonları 39

3.5. Split (p,q)-Fibonacci Oktonyonları 44

4. TARTIŞMA VE SONUÇ.....56

5. KAYNAKLAR.....57

6. ÖZGEÇMİŞ.....60

TABLOLAR DİZİNİ

Tablo **Sayfa**

Tablo 1.1……………………………………………………………………………...…3

Tablo 1.2……………………………………………………………………………...……4

Tablo 1.3……………………………………………………………………………...…6

Tablo 1.4 ……………………………………………………………………………...…7

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
H	Klasik reel kuaterniyonlar kümesi
$\hat{\mathrm{H}}$	Split reel kuaterniyonlar kümesi
O	Klasik reel oktonyonlar kümesi
$\hat{\mathrm{O}}$	Split reel oktonyonlar kümesi
$H_{p,q,n}$	(p,q)-Fibonacci kuaterniyonları
$H_{k,n}$	k-Fibonacci kuaterniyonları
H_n	Klasik fibonacci kuaterniyonları
$D_{p,q,n}$	Split (p,q)-Fibonacci kuaterniyonları
$D_{k,n}$	Split k-Fibonacci kuaterniyonları
D_n	Split Fibonacci kuaterniyonları
$O_{p,q,n}$	(p,q)-Fibonacci oktonyonları
$O_{k,n}$	k-Fibonacci oktonyonları
O_n	Klasik fibonacci oktonyonları
$Q_{p,q,n}$	Split (p,q)-Fibonacci oktonyonları
$Q_{k,n}$	Split k-Fibonacci oktonyonları
Q_n	Split Fibonacci oktonyonları
$F_{p,q,n}$	(p,q)-Fibonacci sayı dizisi
f_n	(p,q)-Fibonacci sayı dizisi
$F_{k,n}$	k-Fibonacci sayı dizisi

F_n	Fibonacci sayı dizisi
V	Vektörel kısım
S	Skaler kısmı
$\sum$	Toplam sembolü

1. GİRİŞ

Reel sayılar, bir boyutlu olan hiper-kompleks sayılardır ve adi toplam ve çarpım altında cisim özelliklerini sağlarlar. Kompleks sayılar ise 2 boyutlu olan hiper-kompleks sayılardır. Kompleks sayılarda cisim özelliklerini sağlarlar. Kuaterniyonlar hem reel sayılar hem de kompleks sayıları kapsayan aynı reel ve kompleks sayılar gibi bir sayı sistemidir. Kuaterniyonların, reel, kompleks, dual, split kuaterniyonlar olmak üzere farklı tanımlamaları mevcuttur.

Kuaterniyonlar, uzaysal dönmelerde ve fiziksel büyüklüklerin karakterlerinin belirlenmesinde önemli rol oynamaktadır. Kuaterniyonlara gurup teorisinde ve elemanter parçacıkların sınıflandırılmasında sıkça rastlanılmaktadır. Kuaterniyonların grup teori uygulamaları, kontrol sistemleri ve robotik uygulamaları da mevcuttur.

Oktonyon cebri, 8-boyutludur ve değişme ve birleşme özelliklerine sahip değildir. Bu cebir, 1843' te J. T. Graves tarafından keşfedilmiştir. Oktonyonlar 1845' te Cayley tarafından tekrar bulunmuştur.

Günümüzde oktonyonların, reel, kompleks, dual, split kuaterniyonlar olmak üzere farklı tanımlamaları mevcuttur.

Cayley, Hamilton'un birimlerinin bir genelleştirilmesi olan 8 birimin çarpım bağıntılarını sağlayacak şekilde $e_1^2 = e_2^2 = ... = e_7^2 = -1$, $\mathrm{e}_0^2 = e_0 = 1$, $\mathrm{e}_i e_0 = e_0 \mathrm{e}_i = e_i$ ve $\mathrm{e}_i e_j = -e_j \mathrm{e}_i = e_k \quad (i, j, k = 1, 2, ..., 7)$ gösterir. Split oktonyonlar kümesi ise oktonyonlara benzer olarak değişme ve birleşme özelliklerinin her ikisine de sahip olmadığını ancak split oktonyonların böleninin sıfır olabileceğini ve $e_0 = 1,\ e_1 = i,\ e_2 = j,\ e_3 = k,\quad e_4 = \ell,\ e_5 = \ell i,\ e_6 = \ell j,\ e_7 = \ell k,\quad \mathrm{e}_i e_0 = e_0 \mathrm{e}_i = e_i$ ve $\mathrm{e}_i e_j = -e_j \mathrm{e}_i = e_k \quad (i, j, k = 1, 2, ..., 7)$ özelliklerine sahip imajiner birimlerin olduğu görülür.

Kuantum mekaniği, Kuantum Hall Olayı, Dalga denklemi formulasyonu, Sicim ve M-Teorileri gibi uygulamalı bilimlerde oktonyonlar çok sık kullanılmaktadır.

Reel sayı dizileri ile kuaterniyonlar ve oktonyonların etkileşimi ile tanımlanan kuaterniyon ve oktonyon sayıları ile ilgili bilimsel çalışmalar oldukça fazladır.

Horadam (1961), Fibonacci kuaterniyonlarını tanımladı ve bu kuaterniyonların bazı özelliklerini elde etti.

Iyer (1969), Fibonacci sayıları ve Fibonacci kuaterniyonları için özdeşlikler verdi.

Halici (2012), Fibonacci kuaterniyonlarının bazı cebirsel özelliklerini araştırdı. Fibonacci kuaterniyonları için üreteç fonksiyonları ve Binet formüllerini verdi. Ayrıca Fibonacci kuaterniyonları için bazı toplam formülleri üretti.

Keçilioğlu ve Akkus (2015) Fibonacci oktonyonları üzerine çalıştı. Bu oktonyonlar için üreteç fonksiyonları ve Binet formüllerini sundu. Ayrıca Fibonacci oktonyonları üzerine bazı özdeşlik ve özellikleri verdi.

Bu tez çalışmasında ise; ikinci bölümde, klasik ve split kuaterniyonlar ve oktonyonlar hakkında tezin konusu ile ilgili olan temel tanımlar, kavramlar ve teoremler sunulmaktadır. Üçüncü bölümde, (p,q)-Fibonacci kuaterniyonları ve oktonyonları ile ilgili olan temel tanımlar ve teoremlerden sonra split (p,q)-Fibonacci kuaterniyonları ve oktonyonları tanımlanmakta ve çalışılmaktadır. Bu kuaterniyonların ve oktonyonların bazı cebirsel özellikleri araştırılmaktadır.

2. KUATERNİYONLAR VE OKTONYONLAR

Bu bölümde, klasik ve split kuaterniyonları ve oktonyonları üzerine temel tanım ve özelliklerin yer aldığı tezde gerekli olan literatür bilgisi sunulmaktadır.

2. 1. Klasik Kuaterniyonlar ve Split Kuaterniyonları

Bu bölümde; klasik ve split kuaterniyonların tanımları, $\{e_0 \cong 1, e_1, e_2, e_3\}$ birim elemanları üzerinde kurulan çarpım tabloları, bu tipteki kuaterniyonlar için iki kuaterniyonun toplamı ve çarpımı, bir skaler ile bir kuaterniyonun çarpımı, bir kuaterniyonun eşleniği, tersi, normu gibi bazı temel cebirsel özellikler verilmektedir.

Aşağıda, Hamilton (1843) tarafından keşfedilen ve günümüzde klasik reel kuaterniyonlar olarak bilinen kuaterniyonların tanımı verilmektedir.

2. 1. 1. Tanım: $\{e_0 \cong 1, e_1, e_2, e_3\}$ elemanları arasındaki çarpma işlemi,

.	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1

Tablo 1.1

biçimindeki çarpım tablosu (Erdoğdu, 2015) ile tanımlanmak üzere klasik reel kuaterniyonlar kümesi,

$$\mathrm{H} = \left\{ q = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \ ; \ q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}, \ \ e_0^2 = 1, \ \ e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Hamilton, 1843).

Günümüzde baz (birim) elemanları arasındaki cebirsel işlemlerin tanımlanma biçimlerine göre farklı isimlerle bilinen kuaterniyonlar mevcuttur. Aşağıda, elemanları arasındaki toplama işlemi klasik kuaterniyonlardaki gibi olan fakat baz (birim) elemanları arasındaki çarpma işlemleri farklı olan split kuaterniyonları tanımlanmaktadır.

2. 1. 2. Tanım: $\{e_0 \cong 1, e_1, e_2, e_3\}$ elemanları arasındaki çarpma işlemi,

.	1	e_1	e_2	e_3
1	1	e_1	e_2	e_3
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$
e_2	e_2	$-e_3$	1	$-e_1$
e_3	e_3	e_2	e_1	1

Tablo 1.2

biçimindeki çarpım tablosu (Erdoğdu, 2015) ile tanımlanmak üzere split reel kuaterniyonlar kümesi,

$$\widehat{\mathrm{H}} = \left\{ q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3 \ ; \ q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}, \ e_1^2 = -1, \ e_0^2 = e_2^2 = e_3^2 = 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Cockle, 1849).

$p = p_0e_0 + p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$ ve $q = q_0e_0 + q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$ herhangi iki kuaterniyon olsun. Bu taktirde, bu iki kuaterniyon arasındaki işlemler klasik kuaterniyon ve split kuaterniyon olma durumlarına göre aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$q \in \mathrm{H}$ veya $q \in \widehat{\mathrm{H}}$ için q 'nun skaler kısmı,

$$S_q = q_0 \ ,$$

ve vektörel kısmı,

$$V_q = q_1e_1 + q_2e_2 + q_3e_3$$

şeklinde tanımlanır (Nurkan ve Güven, 2015; Akyiğit ve ark, 2013). $p, q \in \mathrm{H}$ veya $p, q \in \widehat{\mathrm{H}}$ için $p+q$ toplamı,

$$\begin{aligned} p+q &= \left(S_p + S_q\right) + \left(V_p + V_q\right) \\ &= \left(p_0 + q_0\right)e_0 + \left(p_1 + q_1\right)e_1 + \left(p_2 + q_2\right)e_2 + \left(p_3 + q_3\right)e_3 \end{aligned}$$

ile tanımlanır (Nurkan ve Güven, 2015; Akyiğit ve ark, 2013).

Klasik kuaterniyonlar cebiri $(\mathrm{H}, +, \cdot)$ ile split kuaterniyonlar cebiri $(\widehat{\mathrm{H}}, +, \cdot)$, çarpma "."

işleminin tanımına göre farklı cebirler olduğu görülmektedir.

$p, q \in \mathbb{H}$ için pq çarpımı,

$$\begin{aligned} pq = & (p_0q_0 - p_1q_1 - p_2q_2 - p_3q_3)e_0 + (p_0q_1 + p_1q_0 + p_2q_3 - p_3q_2)e_1 \\ & + (p_0q_2 + p_2q_0 + p_3q_1 - p_1q_3)e_2 + (p_0q_3 + p_3q_0 + p_1q_2 - p_2q_1)e_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Nurkan ve Güven, 2015) ve $p, q \in \widehat{\mathbb{H}}$ için pq çarpımı,

$$\begin{aligned} pq = & (p_0q_0 - p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3)e_0 + (p_0q_1 + p_1q_0 - p_2q_3 + p_3q_2)e_1 \\ & + (p_0q_2 + p_2q_0 - p_1q_3 + p_3q_1)e_2 + (p_0q_3 + p_3q_0 - p_2q_1 + p_1q_2)e_3 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır (Akyiğit ve ark, 2013). $q \in \mathbb{H}$ veya $q \in \widehat{\mathbb{H}}$ kuaterniyonları ve $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı için λq çarpımı,

$$\lambda q = q\lambda = (\lambda q_0)e_0 + (\lambda q_1)e_1 + (\lambda q_2)e_2 + (\lambda q_3)e_3$$

ile ve q kuaterniyonunun $\overline{q}$ eşleniği,

$$\overline{q} = q_0e_0 - q_1e_1 - q_2e_2 - q_3e_3$$

şeklinde tanımlanır (Nurkan ve Güven, 2015; Akyiğit ve ark, 2013). $q \in \mathbb{H}$ için $\|q\|$ normu,

$$\|q\| = \sqrt{|q\overline{q}|} = \sqrt{|q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2|}$$

şeklinde (Nurkan ve Güven, 2015) ve $q \in \widehat{\mathbb{H}}$ için $\|q\|$ normu,

$$\|q\| = \sqrt{|q\overline{q}|} = \sqrt{|q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2|}$$

şeklinde tanımlanır (Akyiğit ve ark, 2013). $q \in \mathbb{H}$ veya $q \in \widehat{\mathbb{H}}$ kuaterniyonları ve $\|q\| \neq 0$ için q^{-1} tersi,

$$q^{-1} = \frac{\overline{q}}{\|q\|^2}$$

şeklinde tanımlanır (Nurkan ve Güven, 2015; Akyiğit ve ark, 2013).

2. 2. Klasik Oktonyonlar ve Split Oktonyonları

Bu bölümde; klasik ve split oktonyonların tanımları, $\{e_0 \cong 1, e_1, ..., e_7\}$ birim elemanları üzerinde kurulan çarpım tabloları, bu tipteki oktonyonlar için iki oktonyonun toplamı ve çarpımı, bir skaler ile bir oktonyonun çarpımı, bir oktonyonun eşleniği, tersi, normu gibi bazı temel cebirsel özellikler verilmektedir.

Aşağıda, Graves (1843) tarafından verilen klasik reel oktonyonlar kümesinin tanımı sunulmaktadır.

2. 2. 1. Tanım: $\{e_0 \cong 1, e_1, ..., e_7\}$ elemanları arasındaki çarpma işlemi,

.	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Tablo 1.3

biçimindeki çarpım tablosu (Keçilioğlu ve Akkus, 2015) ile tanımlanmak üzere klasik reel oktonyonlar kümesi,

$$\mathrm{O} = \left\{ a = \sum_{s=0}^{7} a_s e_s = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_7 e_7 \ ; \ a_0, a_1, ..., a_7 \in \mathbb{R} \right\}$$

biçiminde tanımlanır (Conway ve Smith, 2005).

Günümüzde baz (birim) elemanları arasındaki cebirsel işlemlerin tanımlanma biçimlerine göre farklı isimlerle bilinen oktonyonlar mevcuttur. Aşağıda, elemanları arasındaki toplama işlemi klasik kuaterniyonlardaki gibi olan fakat baz (birim) elemanları arasındaki çarpma işlemleri farklı olan Cayley (1845) tarafından verilen split oktonyonlar kümesinin tanımı sunulmaktadır.

2. 2. 2. Tanım: $\{e_0 \cong 1, e_1, ..., e_7\}$ elemanları arasındaki çarpma işlemi,

.	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	$-e_5$	e_4	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	$-e_6$	e_7	e_4	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	$-e_7$	$-e_6$	e_5	e_4
e_4	e_4	e_5	e_6	e_7	1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6	$-e_1$	1	e_3	$-e_2$
e_6	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$	$-e_2$	$-e_3$	1	e_1
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$	$-e_3$	e_2	$-e_1$	1

Tablo 1.4

biçimindeki çarpım tablosu (Akkus ve Kecilioglu, 2015) ile tanımlanmak üzere split reel oktonyonlar kümesi

$$\widehat{O} = \left\{ a = \sum_{s=0}^{7} a_s e_s = a_0 e_0 + a_1 e_1 + a_2 e_2 + ... + a_7 e_7 \ ; \ a_0, a_1, ..., a_7 \in \mathbb{R} \right\}$$

biçiminde tanımlanır (Jafarı, 2015) .

$a = \sum_{s=0}^{7} a_s e_s$ ve $b = \sum_{s=0}^{7} b_s e_s$ herhangi iki oktonyon olsun. Bu taktirde, bu iki oktonyon arasındaki işlemler klasik oktonyon ve split oktonyon olma durumlarına göre aşağıdaki gibi tanımlanırlar.

$a \in O$ veya $a \in \widehat{O}$ için a 'nın skaler kısmı,

$$S_a = a_0 \quad ,$$

ve vektörel kısmı,

$$V_a = \sum_{s=1}^{7} a_s e_s$$

şeklinde tanımlanır (Keçilioğlu ve Akkus, 2015). $a, b \in O$ veya $a, b \in \widehat{O}$ için $a + b$ toplamı,

$$
\begin{aligned}
a+b &= \left(S_a+S_b\right)+\left(V_a+V_b\right)\\
&= a_0+b_0+\sum_{s=1}^{7}\left(a_s+b_s\right)e_s
\end{aligned}
$$

ile tanımlanır (Keçilioğlu ve Akkus, 2015).

Buradan klasik oktonyonlar cebiri $\left(\mathrm{O},+,\cdot\right)$ ile split oktonyonlar cebirinin $\left(\widehat{\mathrm{O}},+,\cdot\right)$, çarpma "." işleminin tanımına göre farklı cebirler olduğu görülmektedir.

$a,b\in \mathrm{O}$ için ab çarpımı Tablo 1.3 kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
ab &= \left(p_0q_0-p_1q_1-p_2q_2-p_3q_3-p_4q_4-p_5q_5-p_6q_6-p_7q_7\right)e_0\\
&+\left(p_0q_1+p_1q_0+p_2q_3-p_3q_2+p_4q_5-p_5q_4+p_7q_6-p_6q_7\right)e_1\\
&+\left(p_0q_2+p_2q_0+p_3q_1-p_1q_3+p_4q_6-p_6q_4+p_5q_7-p_7q_5\right)e_2\\
&+\left(p_0q_3+p_3q_0+p_1q_2-p_2q_1+p_4q_7-p_7q_4+p_6q_5-p_5q_6\right)e_3\\
&+\left(p_0q_4+p_4q_0+p_5q_1-p_1q_5+p_6q_2-p_2q_6+p_7q_3-p_3q_7\right)e_4\\
&+\left(p_0q_5+p_5q_0+p_1q_4-p_4q_1+p_3q_6-p_6q_3+p_7q_2-p_2q_7\right)e_5\\
&+\left(p_0q_6+p_6q_0+p_1q_7-p_7q_1+p_2q_4-p_4q_2+p_5q_3-p_3q_5\right)e_6\\
&+\left(p_0q_7+p_7q_0+p_2q_5-p_5q_2+p_3q_4-p_4q_3+p_6q_1-p_1q_6\right)e_7
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir ve benzer olarak $a,b\in \widehat{\mathrm{O}}$ için ab çarpımı da Tablo 1.4 kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
ab &= \left(p_0q_0-p_1q_1-p_2q_2-p_3q_3+p_4q_4+p_5q_5+p_6q_6+p_7q_7\right)e_0\\
&+\left(p_0q_1+p_1q_0+p_2q_3-p_3q_2+p_4q_5-p_5q_4+p_6q_7-p_7q_6\right)e_1\\
&+\left(p_0q_2+p_2q_0+p_3q_1-p_1q_3+p_4q_6-p_6q_4+p_7q_5-p_5q_7\right)e_2\\
&+\left(p_0q_3+p_3q_0+p_1q_2-p_2q_1+p_4q_7-p_7q_4+p_5q_6-p_6q_5\right)e_3\\
&+\left(p_0q_4+p_4q_0+p_1q_5-p_5q_1+p_2q_6-p_6q_2+p_3q_7-p_7q_3\right)e_4\\
&+\left(p_0q_5+p_5q_0+p_3q_6-p_6q_3+p_4q_1-p_1q_4+p_7q_2-p_2q_7\right)e_5\\
&+\left(p_0q_6+p_6q_0+p_1q_7-p_7q_1+p_4q_2-p_2q_4+p_5q_3-p_3q_5\right)e_6\\
&+\left(p_0q_7+p_7q_0+p_2q_5-p_5q_2+p_4q_3-p_3q_4+p_6q_1-p_1q_6\right)e_7
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. $a\in \mathrm{O}$ veya $a\in \widehat{\mathrm{O}}$ oktonyonları ve $k\in \mathbb{R}$ sayısı için ka çarpımı,

$$
ka = ka_0+\sum_{s=1}^{7} ka_s e_s
$$

ve a oktonyonunun $\overline{a}$ eşleniği,

$$\overline{a} = a_0 - \sum_{s=1}^{7} a_s e_s$$

şeklinde tanımlanır (Keçilioğlu ve Akkus, 2015). $a \in \mathbb{O}$ için $\|a\|$ normu,

$$\|a\| = \sqrt{|a\overline{a}|} = \sqrt{\left|a_0^2 + \sum_{s=1}^{7} a_s^2\right|}$$

şeklinde ve $a \in \widehat{\mathbb{O}}$ için $\|a\|$ normu,

$$\|a\| = \sqrt{|a\overline{a}|} = \sqrt{\left|a_0^2 + \sum_{s=1}^{3} a_s^2 - \sum_{s=4}^{7} a_s^2\right|}$$

şeklinde tanımlanır (Keçilioğlu ve Akkus, 2015). $a \in \mathbb{O}$ veya $a \in \widehat{\mathbb{O}}$ oktonyonları için $\|a\| \neq 0$ olmak üzere a^{-1} tersi,

$$a^{-1} = \frac{\overline{a}}{\|a\|^2}$$

şeklinde tanımlanır (Akkus ve Kecilioglu, 2015).

3. FİBONACCİ KUATERNİYONLARI VE OKTONYONLARI

Bu bölümde, klasik Fibonacci, *k*-Fibonacci ve *(p,q)*-Fibonacci sayı dizilerinin tanımları ve bu sayı dizileri ile oluşturulan klasik Fibonacci, *k*-Fibonacci ve *(p,q)*-Fibonacci kuaterniyonlarının ve oktonyonlarının tanımları verilmektedir. Split *(p,q)*-Fibonacci kuaterniyonları ve oktonyonları tanımlanmakta ve bu kuaterniyonlar ve oktonyonlar üzerine bazı özdeşlikler elde edilmektedir.

3. 1. (p,q)-Fibonacci Sayı Dizisi ve Özelikleri

Bu bölümde, $\{F_{p,q,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ ile gösterilen (*p*,*q*)-Fibonacci sayı dizisi, $q=1$ ve $p=k\in\mathbb{R}^+$ alınmasıyla elde edilen $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ k-Fibonacci sayı dizisi ve benzer olarak k-Fibonacci sayı dizisinde $k=1$ alınmasıyla $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ klasik Fibonacci sayı dizisi üzerine tez için gerekli olan bazı literatür bilgileri verilmektedir.

3. 1. 1. Tanım: $p>0$, $q\neq 0$ ve $p^2+4q>0$ olacak şekilde p ve q reel sayıları için ,

$$F_{p,q,0}=0\ ,\ F_{p,q,1}=1 \text{ ve } F_{p,q,n}=pF_{p,q,n-1}+qF_{p,q,n-2}\ ,\quad n\geq 2$$

şeklindeki yineleme ilişkisini sağlayan $\{F_{p,q,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ reel sayı dizisine (p,q)-Fibonacci sayı dizisi denir (Lee ve Asci, 2012).

Bazı (p,q)-Fibonacci sayıları aşağıda verilmektedir.

$$F_{p,q,0}=0,\quad F_{p,q,1}=1,\quad F_{p,q,2}=p,\quad F_{p,q,3}=p^2+q,\quad F_{p,q,4}=p^3+2pq,$$
$$F_{p,q,5}=p^4+3p^2q+q^2,\ F_{p,q,6}=p^5+4p^3q+3pq^2\ .$$

(p,q)-Fibonacci sayı dizisinin yineleme ilişkisi bir fark denklemidir ve bu denklemin karakteristik denklemi

$$t^2=pt+q$$

olup, bu denklem

$$\lambda = \frac{p+\sqrt{p^2+4q}}{2} \quad , \quad \mu = \frac{p-\sqrt{p^2+4q}}{2}$$

şeklinde iki farklı reel köke sahiptir. $F_{p,q,0}=0$, $F_{p,q,1}=1$ başlangıç koşulları ile bu fark denkleminin özel çözümü,

$$F_{p,q,n} = \frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} \ , \ n \geq 0 \ ,$$

olarak elde edilir. Bu formüle $\{F_{p,q,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için Binet formülü denir. Ayrıca λ ve μ kökleri için,

$$\lambda + \mu = p \ , \ \ \lambda - \mu = \sqrt{p^2+4q} \ \text{ ve } \ \lambda.\mu = -q$$

bağıntıları yazılır (İpek, 2016).

Aşağıdaki önerme, $\{F_{p,q,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimleri arasındaki bazı bağıntıların yer aldığı özdeşlikleri içermektedir. Bu özdeşliklerin bazıları, klasik Fibonacci sayıları için literatürde var olan özdeşliklerin benzerleri olarak öz çalışmalarla üretilmiş, bazı özdeşlikler ise var olan bilimsel çalışmalardan direkt olarak alınarak yazılmıştır.

3. 1. 1. Önermeler: $p,q \in \mathbb{R}^+$ ve $n,r,m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

1. $qF_{p,q,n}^2 + F_{p,q,n+1}^2 = F_{p,q,2n+1}$,

2. $p^2F_{p,q,2n} + 2pqF_{p,q,2n-1} + q^2F_{p,q,2n-2} = F_{p,q,2n+2}$, $n \geq 2$,

3. $p^3F_{p,q,2n} + 3p^2qF_{p,q,2n-1} + 3pq^2F_{p,q,2n-2} + q^3F_{p,q,2n-3} = F_{p,q,2n+3}$, $n \geq 2$,

4. $F_{p,q,n+1}F_{p,q,m} + qF_{p,q,n}F_{p,q,m-1} = F_{p,q,n+m}$, $m \geq 1$, (Patel ve Ray, 2016),

5. $F_{p,q,m}F_{p,q,n+1} - F_{p,q,m+1}F_{p,q,n} = (-q)^n F_{p,q,m-n}$, $m \geq n$, (Patel ve Ray, 2016),

6. $F_{p,q,n-r}F_{p,q,n+r} - F_{p,q,n}^2 = -(-q)^{n-r}F_{p,q,r}^2$, $n \geq r$,

7. $F_{p,q,n-1}F_{p,q,n+1} - F_{p,q,n}^2 = -(-q)^{n-1}$, $n \geq 1$,

8. $F_{p,q,m}F_{p,q,n} - q^2F_{p,q,m-2}F_{p,q,n-2} = pF_{p,q,m+n-2}$, $n,m \geq 2$,

9. $F_{p,q,n+1}^2 - q^2 F_{p,q,n-1}^2 = pF_{p,q,2n}$, $n \geq 1$,

10. $F_{p,q,n+1}^2 + qF_{p,q,n-1}F_{p,q,n+1} = F_{p,q,2n+1} + (-q)^n$, $n \geq 1$.

3. 1. 2. Tanım: (p,q)-Fibonacci sayı dizisinde $q=1$ ve $p=k \in \mathbb{R}^+$ alınmasıyla k-Fibonacci sayı dizisi $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$,

$$F_{k,0}=0 \ , \ F_{k,1}=1 \text{ ve } F_{k,n}=kF_{k,n-1}+F_{k,n-2} \quad , \ n\geq 2$$

yineleme bağıntısı ile tanımlanır (Falcon ve Plaza, 2009).

Bazı $k-$Fibonacci sayıları aşağıda verilmektedir.

$$F_{k,0}=0\ ,\ F_{k,1}=1\ ,\ F_{k,2}=k\ ,\ F_{k,3}=k^2+1\ ,\ F_{k,4}=k^3+2k\ ,\ F_{k,5}=k^4+3k^2+1\ .$$

$\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yineleme ilişkisinden

$$z^2 = kz+1$$

karakteristik denklemi yazılır ve bu denklemin kökleri

$$\alpha = \frac{k+\sqrt{k^2+4}}{2} \quad , \quad \beta = \frac{k-\sqrt{k^2+4}}{2}$$

şeklinde bulunur. $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin genel terimi

$$F_{k,n} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad , \ n \geq 0$$

biçiminde ifade edilir. Bu formüle $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için Binet formülü denir. α ve β kökleri için de

$$\alpha+\beta=k \ , \ \alpha-\beta=\sqrt{k^2+4} \text{ ve } \alpha.\beta=-1$$

bağıntıları mevcuttur.

Aşağıdaki önerme, $\{F_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin terimleri arasındaki bazı bağıntıların yer aldığı özdeşlikleri içermektedir. Bu özdeşliklerin bazıları, klasik Fibonacci sayıları için literatürde var olan özdeşliklerin benzerleri olarak öz çalışmalarla üretilmiş, bazı özdeşlikler ise var olan bilimsel çalışmalardan direkt olarak alınarak yazılmıştır.

3. 1. 2. Önermeler : $k \in \mathbb{R}^+$ ve $n, r, m \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

1. $F_{k,n}^2 + F_{k,n+1}^2 = F_{k,2n+1}$,

2. $k^2 F_{k,2n} + 2kF_{k,2n-1} + F_{k,2n-2} = F_{k,2n+2}$, $n \geq 2$,

3. $k^3 F_{k,2n} + 3k^2 F_{k,2n-1} + 3kF_{k,2n-2} + F_{k,2n-3} = F_{k,2n+3}$, $n \geq 2$,

4. $F_{k,n+1} F_{k,m} + F_{k,n} F_{k,m-1} = F_{k,n+m}$, $m \geq 1$, (Falcon ve Plaza, 2009),

5. $F_{k,m} F_{k,n+1} - F_{k,m+1} F_{k,n} = (-1)^n F_{k,m-n}$, $m \geq n$, (Falcon ve Plaza, 2009),

6. $F_{k,n-r} F_{k,n+r} - F_{k,n}^2 = -(-1)^{n-r} F_{k,r}^2$, $n \geq r$, (Falcon ve Plaza, 2009),

7. $F_{k,n-1} F_{k,n+1} - F_{k,n}^2 = (-1)^n$, $n \geq 1$, (Falcon ve Plaza, 2009),

8. $F_{k,m} F_{k,n} - F_{k,m-2} F_{k,n-2} = kF_{k,m+n-2}$, $n, m \geq 2$,

9. $F_{k,n+1}^2 - F_{k,n-1}^2 = kF_{k,2n}$, $n \geq 1$,

10. $F_{k,n+1}^2 + F_{k,n-1} F_{k,n+1} = F_{k,2n+1} + (-1)^n$, $n \geq 1$.

3. 1. 3. Tanım: k -Fibonacci sayı dizisinde $k = 1$ alınmasıyla klasik Fibonacci sayı dizisi $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$,

$$F_0 = 0 \ , \ F_1 = 1 \text{ ve } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \ , \ n \geq 2$$

yineleme bağıntısı şeklinde tanımlanır (Koshy, 2001).

Bu dizisinin her bir elemanına Fibonacci sayı dizisi denir. Bazı Fibonacci sayıları aşağıda verilmektedir.

$$F_1 = 1, \ F_2 = 1, \ F_3 = 2, \ F_4 = 3, \ F_5 = 5, \ F_6 = 8, \ F_7 = 13, \ F_8 = 21, \ F_9 = 34, \ F_{10} = 55.$$

$\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dizisinin yineleme ilişkisinin kararkteristik denklemi

$$x^2 = x + 1$$

olup, bu denklem

$$\psi=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\ ,\quad \gamma=\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)$$

köklerine sahiptir. Bu köklere göre $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin genel terimi,

$$F_n=\frac{\psi^n-\gamma^n}{\psi-\gamma}\ ,\quad n\geq 0$$

biçiminde ifade edilir. Bu formüle $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için Binet formülü denir. ψ ve γ kökleri arasında

$$\psi+\gamma=1\ ,\quad \psi-\gamma=\sqrt{5}\ \text{ ve }\ \psi.\gamma=-1$$

bağıntıları yazılır (Kalman ve Mena, 2003).

Aşağıdaki önermede, $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin genel terimleri arasında var olduğu iyi bilinen bazı bağıntılar sunulmaktadır.

3. 1. 3. Önermeler : $m,n,r\in\mathbb{Z}^+$ olsun. Bu durumda, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

1. $F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+1}$, (Renault, 1996),

2. $F_{2n}+2F_{2n-1}+F_{2n-2}=F_{2n+2}$, $n\geq 2$,

3. $F_{2n}+3F_{2n-1}+3F_{2n-2}+F_{2n-3}=F_{2n+3}$, $n\geq 2$,

4. $F_{n+1}F_m+F_nF_{m-1}=F_{n+m}$, (Renault, 1996),

5. $F_mF_{n+1}-F_{m+1}F_n=(-1)^nF_{m-n}$, $m\geq n$, (Renault, 1996),

6. $F_{n-r}F_{n+r}-F_n^2=-(-1)^{n-r}F_r^2$, $n\geq r$, (Renault, 1996),

7. $F_{n-1}F_{n+1}-F_n^2=(-1)^n$, (Renault, 1996),

8. $F_mF_n-F_{m-2}F_{n-2}=F_{m+n-2}$, $n,m\geq 2$,

9. $F_{n+1}^2-F_{n-1}^2=F_{2n}$,

10. $F_{n+1}^2+F_{n-1}F_{n+1}=F_{2n+1}+(-1)^n$.

3. 2. (p,q)-Fibonacci Kuaterniyonları

Bu bölümde, klasik ve *k*-Fibonacci kuaterniyonlarının bir genelleştirilmesi olan (p,q)-Fibonacci kuaterniyonları tanımlanmakta ve bu kuaterniyonlar üzerine bazı özdeşlikler sunulmaktadır.

3. 2. 1. Tanım: $n \geq 0$ olmak üzere,

$$H_{p,q,n} = F_{p,q,n}e_0 + F_{p,q,n+1}e_1 + F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2 + F_{p,q,n+3}\mathrm{e}_3$$

şeklinde tanımlı $H_{p,q,n} \in \mathbb{H}$ kuaterniyon sayılarına (p,q)-Fibonacci kuaterniyonları denir (İpek, 2016).

$\{H_{p,q,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi üzerine bu tez çalışmasında elde edilen bazı bağıntılar aşağıdaki önerme ile sunulmaktadır.

3. 2. 1. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $H_{p,q,n} + \overline{H}_{p,q,n} = 2F_{p,q,n}$,

ii. $H_{p,q,n}\overline{H}_{p,q,n} = F_{p,q,n}^2 + F_{p,q,n+1}^2 + F_{p,q,n+2}^2 + F_{p,q,n+3}^2$,

iii. $H_{p,q,n}H_{p,q,n} = -F_{p,q,n}^2 - F_{p,q,n+1}^2 - F_{p,q,n+2}^2 - F_{p,q,n+3}^2 + 2F_{p,q,n}H_{p,q,n}$,

iv. $H_{p,q,n}^2 + H_{p,q,n}\overline{H}_{p,q,n} = 2F_{p,q,n}H_{p,q,n}$.

İspat:

i. $H_{p,q,n} + \overline{H}_{p,q,n} = W_1$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} W_1 &= F_{p,q,n}e_0 + F_{p,q,n+1}e_1 + F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2 + F_{p,q,n+3}\mathrm{e}_3 + F_{p,q,n}e_0 - F_{p,q,n+1}e_1 - F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2 \\ &\quad - F_{p,q,n+3}\mathrm{e}_3 \\ &= 2F_{p,q,n},\ (e_0 = 1) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

ii. $H_{p,q,n}\overline{H}_{p,q,n} = W_2$ olsun. $H_{p,q,n}\overline{H}_{p,q,n}$ için, kuaterniyonların çarpımı tanımı hatırlanır ve bazı cebirsel işlemler yapılırsa,

$$W_2=\left(F_{p,q,n}e_0+F_{p,q,n+1}e_1+F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2+F_{p,q,n+3}\mathrm{e}_3\right)\left(F_{p,q,n}e_0-F_{p,q,n+1}e_1-F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2\right.$$
$$\left.-F_{p,q,n+3}\mathrm{e}_3\right)$$
$$=\left(F_{p,q,n}^2+F_{p,q,n+1}^2+F_{p,q,n+2}^2+F_{p,q,n+3}^2\right)e_0+\left(-F_{p,q,n}F_{p,q,n+1}+F_{p,q,n+1}F_{p,q,n}\right.$$
$$\left.-F_{p,q,n+2}F_{p,q,n+3}+F_{p,q,n+3}F_{p,q,n+2}\right)e_1+\left(-F_{p,q,n}F_{p,q,n+2}+F_{p,q,n+2}F_{p,q,n}\right.$$
$$\left.-F_{p,q,n+3}F_{p,q,n+1}+F_{p,q,n+1}F_{p,q,n+3}\right)e_2+\left(-F_{p,q,n}F_{p,q,n+3}+F_{p,q,n+3}F_{p,q,n}\right.$$
$$\left.-F_{p,q,n+1}F_{p,q,n+2}+F_{p,q,n+2}F_{p,q,n+1}\right)e_3$$
$$=F_{p,q,n}^2+F_{p,q,n+1}^2+F_{p,q,n+2}^2+F_{p,q,n+3}^2,\ \left(e_0=1\right)$$

sonucu elde edilir.

iii. $H_{p,q,n}H_{p,q,n}=W_3$ olsun. $H_{p,q,n}H_{p,q,n}$ için, kuaterniyonların çarpımı tanımı hatırlanır ve bazı cebirsel işlemler yapılırsa,

$$W_3=\left(F_{p,q,n}e_0+F_{p,q,n+1}e_1+F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2+F_{p,q,n+3}\mathrm{e}_3\right)\left(F_{p,q,n}e_0+F_{p,q,n+1}e_1+F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2\right.$$
$$\left.+F_{p,q,n+3}\mathrm{e}_3\right)$$
$$=\left(F_{p,q,n}^2-F_{p,q,n+1}^2-F_{p,q,n+2}^2-F_{p,q,n+3}^2\right)e_0+\left(F_{p,q,n}F_{p,q,n+1}+F_{p,q,n+1}F_{p,q,n}\right.$$
$$\left.+F_{p,q,n+2}F_{p,q,n+3}-F_{p,q,n+3}F_{p,q,n+2}\right)e_1+\left(F_{p,q,n}F_{p,q,n+2}+F_{p,q,n+2}F_{p,q,n}\right.$$
$$\left.+F_{p,q,n+3}F_{p,q,n+1}-F_{p,q,n+1}F_{p,q,n+3}\right)e_2\left(F_{p,q,n}F_{p,q,n+3}+F_{p,q,n+3}F_{p,q,n}\right.$$
$$\left.+F_{p,q,n+1}F_{p,q,n+2}-F_{p,q,n+2}F_{p,q,n+1}\right)e_3$$
$$=-F_{p,q,n}^2-F_{p,q,n+1}^2-F_{p,q,n+2}^2-F_{p,q,n+3}^2+2F_{p,q,n}\left(F_{p,q,n}e_0+F_{p,q,n+1}e_1\right.$$
$$\left.+F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2+F_{p,q,n+3}\mathrm{e}_3\right)$$
$$=-F_{p,q,n}^2-F_{p,q,n+1}^2-F_{p,q,n+2}^2-F_{p,q,n+3}^2+2F_{p,q,n}H_{p,q,n},\ \left(e_0=1\right)$$

elde edilir ki, önermenin ispatı tamamlanır.

iv. ii. ve iii. önermelerin taraf tarafa toplanması ile

$$H_{p,q,n}^2+H_{p,q,n}\bar{H}_{p,q,n}=2F_{p,q,n}H_{p,q,n}$$

sonucu elde edilir.

3. 2. 2. Tanım: (p,q)**-**Fibonacci kuaterniyonlarda $q=1$ ve $p=k\in\mathbb{R}^+$ alınmasıyla k-Fibonacci kuaterniyonları,

$$H_{k,n} = F_{k,n}e_0 + F_{k,n+1}e_1 + F_{k,n+2}e_2 + F_{k,n+3}e_3$$

şeklinde tanımlanır (Ramirez, 2015).

Aşağıdaki k-Fibonacci kuaterniyonları için bazı özdeşlikler verilmektedir.

3. 2. 2. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere,

i. $H_{k,n} + \bar{H}_{k,n} = 2F_{k,n}$,

ii. $H_{k,n}\overline{H}_{k,n} = F_{k,n}^2 + F_{k,n+1}^2 + F_{k,n+2}^2 + F_{k,n+3}^2 = (k^2+2)F_{k,2n+3}$,

iii. $H_{k,n}^2 = -F_{k,n}^2 - F_{k,n+1}^2 - F_{k,n+2}^2 - F_{k,n+3}^2 + 2F_{k,n}H_{k,n}$,

iv. $H_{k,n}^2 + H_{k,n}\bar{H}_{k,n} = 2F_{k,n}H_{k,n}$,

özdeşlikleri doğrudur (Ramirez, 2015).

3. 2. 3. Tanım: k -Fibonacci kuaterniyonlarında $k=1$ alınmasıyla klasik Fibonacci kuaterniyonları,

$$H_n = F_n e_0 + F_{n+1}e_1 + F_{n+2}e_2 + F_{n+3}e_3$$

şeklinde tanımlanır (Halici, 2012).

Aşağıdaki klasik Fibonacci kuaterniyonları için bazı özdeşlikler verilmektedir.

3. 2. 3. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere,

i. $H_n + \bar{H}_n = 2F_n$,

ii. $H_n\bar{H}_n = F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 = 3F_{2n+3}$,

iii. $H_n^2 = -F_n^2 - F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 - F_{n+3}^2 + 2F_nH_n$,

iv. $H_n^2 + H_n\bar{H}_n = 2F_nH_n$,

özdeşlikleri doğrudur (Halici, 2012).

3. 3. Split (p,q)-Fibonacci Kuaterniyonları

Bu bölümde, split (p,q) -Fibonacci kuaterniyonları tanımlanmaktadır. Bu kuaterniyonlar üzerine bazı cebirsel özdeşlikler verilmektedir.

3. 3. 1. Tanım: $n \geq 0$ olmak üzere,

$$D_{p,q,n} = F_{p,q,n}e_0 + F_{p,q,n+1}e_1 + F_{p,q,n+2}e_2 + F_{p,q,n+3}e_3$$

şeklinde tanımlı $D_{p,q,n} \in \widehat{\mathrm{H}}$ kuaterniyon sayılarına split (p,q) -Fibonacci kuaterniyonları denir .

3. 3. 2. Tanım: Split (p,q) -Fibonacci kuaterniyonlarında $q=1$ ve $p = k \in \mathbb{R}^+$ alınmasıyla split k -Fibonacci kuaterniyonları,

$$D_{k,n} = F_{k,n}e_0 + F_{k,n+1}e_1 + F_{k,n+2}\mathrm{e}_2 + F_{k,n+3}\mathrm{e}_3$$

şeklinde tanımlanır (Polatli ve ark., 2016).

$\{D_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi üzerine bu tez çalışmasında elde edilen bazı bağıntılar aşağıdaki önerme ile sunulmaktadır.

3. 3. 1. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $D_{k,n} + \overline{D}_{k,n} = 2F_{k,n}$,

ii. $D_{k,n}\overline{D}_{k,n} = F_{k,n}^2 + F_{k,n+1}^2 - F_{k,n+2}^2 - F_{k,n+3}^2$,

iii. $D_{k,n}^2 = -F_{k,n}^2 - F_{k,n+1}^2 + F_{k,n+2}^2 + F_{k,n+3}^2 + 2F_{k,n}D_{k,n}$,

iv. $D_{k,n}^2 + D_{k,n}\overline{D}_{k,n} = 2F_{k,n}D_{k,n}$.

İspat:

i. $D_{k,n} + \overline{D}_{k,n} = W_4$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} W_4 &= F_{k,n}e_0 + F_{k,n+1}e_1 + F_{k,n+2}\mathrm{e}_2 + F_{k,n+3}\mathrm{e}_3 + F_{k,n}e_0 - F_{k,n+1}e_1 - F_{k,n+2}\mathrm{e}_2 - F_{k,n+3}\mathrm{e}_3 \\ &= 2F_{k,n},\ (e_0 = 1) \end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir.

ii. $D_{k,n}\bar{D}_{k,n}=W_5$ olsun. $D_{k,n}\bar{D}_{k,n}$ için split kuaterniyonlarının çarpımı tanımı hatırlanır ve bazı cebirsel işlemler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
W_5 &= \left(F_{k,n}e_0+F_{k,n+1}e_1+F_{k,n+2}\mathrm{e}_2+F_{k,n+3}\mathrm{e}_3\right)\left(F_{k,n}e_0-F_{k,n+1}e_1-F_{k,n+2}\mathrm{e}_2-F_{k,n+3}\mathrm{e}_3\right)\\
&= \left(F_{k,n}^2+F_{k,n+1}^2-F_{k,n+2}^2-F_{k,n+3}^2\right)e_0+\left(-F_{k,n}F_{k,n+1}+F_{k,n+1}F_{k,n}+F_{k,n+2}F_{k,n+3}\right.\\
&\quad \left.-F_{k,n+3}F_{k,n+2}\right)e_1+\left(-F_{k,n}F_{k,n+2}+F_{k,n+2}F_{k,n}-F_{k,n+3}F_{k,n+1}+F_{k,n+1}F_{k,n+3}\right)e_2\\
&\quad +\left(-F_{k,n}F_{k,n+3}+F_{k,n+3}F_{k,n}-F_{k,n+1}F_{k,n+2}+F_{k,n+2}F_{k,n+1}\right)e_3\\
&= F_{k,n}^2+F_{k,n+1}^2-F_{k,n+2}^2-F_{k,n+3}^2,\ \left(e_0=1\right)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

iii. $D_{k,n}D_{k,n}=W_6$ olsun. Bazı cebirsel işlemlerle,

$$
\begin{aligned}
W_6 &= \left(F_{k,n}e_0+F_{k,n+1}e_1+F_{k,n+2}\mathrm{e}_2+F_{k,n+3}\mathrm{e}_3\right)\left(F_{k,n}e_0+F_{k,n+1}e_1+F_{k,n+2}\mathrm{e}_2+F_{k,n+3}\mathrm{e}_3\right)\\
&= \left(F_{k,n}^2-F_{k,n+1}^2+F_{k,n+2}^2+F_{k,n+3}^2\right)e_0+\left(F_{k,n}F_{k,n+1}+F_{k,n+1}F_{k,n}-F_{k,n+2}F_{k,n+3}\right.\\
&\quad \left.+F_{k,n+3}F_{k,n+2}\right)e_1+\left(F_{k,n}F_{k,n+2}+F_{k,n+2}F_{k,n}-F_{k,n+1}F_{k,n+3}+F_{k,n+3}F_{k,n+1}\right)e_2\\
&\quad +\left(F_{k,n}F_{k,n+3}+F_{k,n+3}F_{k,n}-F_{k,n+2}F_{k,n+1}+F_{k,n+1}F_{k,n+2}\right)e_3\\
&= -F_{k,n}^2-F_{k,n+1}^2+F_{k,n+2}^2+F_{k,n+3}^2+2F_{k,n}\left(F_{k,n}e_0+F_{k,n+1}e_1+F_{k,n+2}\mathrm{e}_2+F_{k,n+3}\mathrm{e}_3\right)\\
&= -F_{k,n}^2-F_{k,n+1}^2+F_{k,n+2}^2+F_{k,n+3}^2+2F_{k,n}D_{k,n},\ \left(e_0=1\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

iv. ii. ve iii. önermelerin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$D_{k,n}^2+D_{k,n}\bar{D}_{k,n}=2F_{k,n}D_{k,n}$$

özdeşliğine ulaşılır.

3. 3. 3. Tanım: Split k-Fibonacci kuaterniyonlarında $k=1$ alınmasıyla split Fibonacci kuaterniyonları

$$D_n=F_ne_0+F_{n+1}e_1+F_{n+2}\mathrm{e}_2+F_{n+3}\mathrm{e}_3$$

şeklinde tanımlanır **(**Akyiğit ve ark., 2013).

Aşağıdaki split Fibonacci kuaterniyonları için bazı özdeşlikler verilmiştir.

3. 3. 2. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere,

i. $D_n \bar{D}_n = F_n^2 + F_{n+1}^2 - F_{n+2}^2 - F_{n+3}^2,$

ii. $D_n + D_{n+1} = D_{n+2}$,

iii. $D_n D_m + D_{n+1} D_{m+1} = 5F_{n+m+1} + 2D_{n+m+1}$,

iv. $D_n e_0 - D_{n+1} e_1 - D_{n+2} e_2 - D_{n+3} e_3 = -5F_{n+3}$,

özdeşlikler doğrudur (Akyiğit ve ark., 2013).

$\{D_{p,q,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi üzerine bu tez çalışmasında elde edilen bazı bağıntılar aşağıdaki önermeler ve teoremler ile sunulmaktadır.

Gösterim kolaylığı açısından $F_{p,q,n} \cong f_n$ gösterimi kullanılacaktır.

3. 3. 3. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $D_{p,q,n} + \bar{D}_{p,q,n} = 2f_n$,

ii. $D_{p,q,n} \bar{D}_{p,q,n} = f_n^2 + f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2$,

iii. $D_{p,q,n} D_{p,q,n} = -f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + 2 f_n D_{p,q,n}$,

iv. $D_{p,q,n}^2 + D_{p,q,n} \bar{D}_{p,q,n} = 2 f_n D_{p,q,n}$.

İspat:

i. $D_{p,q,n} + \bar{D}_{p,q,n} = W_7$ olsun. Split kuaterniyonlarının toplamı tanımı ile

$$\begin{aligned} W_7 &= (f_n e_0 + f_{n+1} e_1 + f_{n+2} e_2 + f_{n+3} e_3) + (f_n e_0 - f_{n+1} e_1 - f_{n+2} e_2 - f_{n+3} e_3) \\ &= 2f_n, \ (e_0 = 1) \end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir.

ii. $D_{p,q,n} \bar{D}_{p,q,n} = W_8$ olsun. Split kuaterniyonlarının çarpımı hatırlanarak bazı cebirsel işlemlerle,

$$
\begin{aligned}
W_8 &= (f_n e_0 + f_{n+1}e_1 + f_{n+2}e_2 + f_{n+3}e_3)\,(f_n e_0 - f_{n+1}e_1 - f_{n+2}e_2 - f_{n+3}e_3\ ) \\
&= \left(f_n^2 + f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2 \right) e_0 + (-f_n f_{n+1} + f_{n+1} f_n + f_{n+2} f_{n+3} - f_{n+3} f_{n+2}) e_1 \\
&\quad + (-f_n f_{n+2} + f_{n+2} f_n + f_{n+1} f_{n+3} - f_{n+3} f_{n+1}) e_2 + (-f_n f_{n+3} + f_{n+3} f_n + f_{n+2} f_{n+1} \\
&\quad - f_{n+1} f_{n+2}) e_3 \\
&= f_n^2 + f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2,\ (e_0 = 1)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

iii. $D_{p,q,n} D_{p,q,n} = W_9$ olsun. Split kuaterniyonlar arasındaki cebirsel işlemlerle,

$$
\begin{aligned}
W_9 &= \left(f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 \right) e_0 + (f_n f_{n+1} + f_{n+1} f_n - f_{n+2} f_{n+3} + f_{n+3} f_{n+2}) e_1 \\
&\quad + (f_n f_{n+2} + f_{n+2} f_n - f_{n+1} f_{n+3} + f_{n+3} f_{n+1}) e_2 + (f_n f_{n+3} + f_{n+3} f_n - f_{n+2} f_{n+1} \\
&\quad + f_{n+1} f_{n+2}) e_3 \\
&= f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + 2 f_n (f_{n+1} e_1 + f_{n+2} e_2 + f_{n+3} e_3) \\
&= -f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + 2 f_n (f_n + f_{n+1} e_1 + f_{n+2} e_2 + f_{n+3} e_3) \\
&= -f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + 2 f_n D_{p,q,n},\ (e_0 = 1)
\end{aligned}
$$

özdeşliği elde edilir.

iv. ii. ve iii. önermelerin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$
D_{p,q,n}^2 + D_{p,q,n} \bar{D}_{p,q,n} = 2 f_n D_{p,q,n}
$$

özdeşliğine ulaşılır.

3. 3. 4. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $D_{p,q,2n+1} e_0 - D_{p,q,2n+2} e_1 - D_{p,q,2n+3} e_2 - D_{p,q,2n+4} e_3 = qD_{p,q,n} \bar{D}_{p,q,n} + \mathrm{D}_{p,q,n+1} \bar{D}_{p,q,n+1}$,

ii. $-D_{p,q,2n+1} e_0 + D_{p,q,2n+2} e_1 + D_{p,q,2n+3} e_2 + D_{p,q,2n+4} e_3 = -qD_{p,q,n} \bar{D}_{p,q,n} - D_{p,q,n+1} \bar{D}_{p,q,n+1}$,

iii. $D_{p,q,2n+1} e_0 + D_{p,q,2n+2} e_1 + D_{p,q,2n+3} e_2 + D_{p,q,2n+4} e_3 = -qD_{p,q,n} \bar{D}_{p,q,n} - D_{p,q,n+1} \bar{D}_{p,q,n+1}$
$+ 2D_{p,q,2n+1}$.

İspat:

i. $D_{p,q,2n+1} e_0 - D_{p,q,2n+2} e_1 - D_{p,q,2n+3} e_2 - D_{p,q,2n+4} e_3 = W_{10}$ olsun. Kuaterniyonların çarpımı hatırlanır ve 3. 1. 1 Önermesinin 1. özdeşliği ile

$$
\begin{aligned}
W_{10} &= \left(f_{2n+1}e_0 + f_{2n+2}e_1 + f_{2n+3}e_2 + f_{2n+4}e_3 \right)e_0 - \left(f_{2n+2}e_0 + f_{2n+3}e_1 + f_{2n+4}e_2 \right.\\
&\quad \left. + f_{2n+5}e_3 \right)e_1 - \left(f_{2n+3}e_0 + f_{2n+4}e_1 + f_{2n+5}e_2 + f_{2n+6}e_3 \right)e_2 - \left(f_{2n+4}e_0 + f_{2n+5}e_1 \right.\\
&\quad \left. + f_{2n+6}e_2 + f_{2n+7}e_3 \right)e_3\\
&= f_{2n+1} + f_{2n+2}e_1 + f_{2n+3}e_2 + f_{2n+4}e_3 - f_{2n+2}e_1 + f_{2n+3} + f_{2n+4}e_3 - f_{2n+5}e_2\\
&\quad - f_{2n+3}e_2 - f_{2n+4}e_3 - f_{2n+5} - f_{2n+6}e_1 - f_{2n+4}e_3 + f_{2n+5}e_2 + f_{2n+6}e_1 - f_{2n+7}\\
&= f_{2n+1} + f_{2n+3} - f_{2n+5} - f_{2n+7}\\
&= qf_n^2 + f_{n+1}^2 + qf_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 - qf_{n+2}^2 - f_{n+3}^2 - qf_{n+3}^2 - f_{n+4}^2\\
&= q(f_n^2 + f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2) + f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2 - f_{n+4}^2\\
&= qD_{p,q,n}\bar{D}_{p,q,n} + D_{p,q,n+1}\bar{D}_{p,q,n+1}\ ,\ \left(e_0 = 1\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

ii. $-D_{p,q,2n+1}e_0 + D_{p,q,2n+2}e_1 + D_{p,q,2n+3}e_2 + D_{p,q,2n+4}e_3 = W_{11}$ olsun. i. önermenin ispatına benzer olarak kuaterniyonların çarpımı, 3. 1. 1 Önermesinin 1. özdeşliği ve bazı cebirsel işlemlerle,

$$
\begin{aligned}
W_{11} &= -\left(f_{2n+1}e_0 + f_{2n+2}e_1 + f_{2n+3}e_2 + f_{2n+4}e_3 \right)e_0 + \left(f_{2n+2}e_0 + f_{2n+3}e_1 + f_{2n+4}e_2 \right.\\
&\quad \left. + f_{2n+5}e_3 \right)e_1 + \left(f_{2n+3}e_0 + f_{2n+4}e_1 + f_{2n+5}e_2 + f_{2n+6}e_3 \right)e_2 + \left(f_{2n+4}e_0 + f_{2n+5}e_1 \right.\\
&\quad \left. + f_{2n+6}e_2 + f_{2n+7}e_3 \right)e_3\\
&= - f_{2n+1} - f_{2n+2}e_1 - f_{2n+3}e_2 - f_{2n+4}e_3 + f_{2n+2}e_1 - f_{2n+3} - f_{2n+4}e_3 + f_{2n+5}e_2\\
&\quad + f_{2n+3}e_2 + f_{2n+4}e_3 + f_{2n+5} + f_{2n+6}e_1 + f_{2n+4}e_3 - f_{2n+5}e_2 - f_{2n+6}e_1 + f_{2n+7}\\
&= - f_{2n+1} - f_{2n+3} + f_{2n+5} + f_{2n+7}\\
&= -qf_n^2 - f_{n+1}^2 - qf_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 + qf_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + qf_{n+3}^2 + f_{n+4}^2\\
&= q(- f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2) - f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + f_{n+4}^2\\
&= -qD_{p,q,n}\bar{D}_{p,q,n} - D_{p,q,n+1}\bar{D}_{p,q,n+1},\ \left(e_0 = 1\right)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

iii. $D_{p,q,2n+1}e_0 + D_{p,q,2n+2}e_1 + D_{p,q,2n+3}e_2 + D_{p,q,2n+4}e_3 = W_{12}$ olsun. i. önermenin ispatına benzer olarak kuaterniyonların çarpımı, 3. 1. 1 Önermesinin 1. özdeşliği ve bazı cebirsel işlemlerle,

$$
\begin{aligned}
W_{12} &= \left(f_{2n+1}e_0 + f_{2n+2}e_1 + f_{2n+3}e_2 + f_{2n+4}e_3 \right)e_0 + \left(f_{2n+2}e_0 + f_{2n+3}e_1 + f_{2n+4}e_2 \right.\\
&\quad \left. + f_{2n+5}e_3 \right)e_1 + \left(f_{2n+3}e_0 + f_{2n+4}e_1 + f_{2n+5}e_2 + f_{2n+6}e_3 \right)e_2 + \left(f_{2n+4}e_0 + f_{2n+5}e_1 \right.\\
&\quad \left. + f_{2n+6}e_2 + f_{2n+7}e_3 \right)e_3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= f_{2n+1} + f_{2n+2}e_1 + f_{2n+3}e_2 + f_{2n+4}e_3 + f_{2n+2}e_1 - f_{2n+3} - f_{2n+4}e_3 + f_{2n+5}e_2 \\
&\quad + f_{2n+3}e_2 + f_{2n+4}e_3 + f_{2n+5} + f_{2n+6}e_1 + f_{2n+4}e_3 - f_{2n+5}e_2 - f_{2n+6}e_1 + f_{2n+7} \\
&= -f_{2n+1} - f_{2n+3} + f_{2n+5} + f_{2n+7} + 2(f_{2n+1}e_0 + f_{2n+2}e_1 + f_{2n+3}e_2 + f_{2n+4}e_3) \\
&= -qf_n^2 - f_{n+1}^2 - qf_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 + qf_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + qf_{n+3}^2 + f_{n+4}^2 + 2D_{p,q,2n+1} \\
&= q(-f_n^2 - f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2) - f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + f_{n+4}^2 + 2D_{p,q,2n+1} \\
&= -qD_{p,q,n}\bar{D}_{p,q,n} - D_{p,q,n+1}\bar{D}_{p,q,n+1} + 2D_{p,q,2n+1}, \ (e_0 = 1)
\end{aligned}
$$

özdeşliği elde edilir.

Aşağıdaki teoremde $\{D_{p,q,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin genel terimi için Binet formülü verilmektedir.

3. 3. 1. Teorem: $\{e_0, e_1, e_2, e_3\} \subset \widehat{\mathrm{H}}$ olsun. Böylece,

$$\hat{\lambda} = 1e_0 + \lambda e_1 + \lambda^2 e_2 + \lambda^3 e_3 \ \text{ve} \ \hat{\mu} = 1e_0 + \mu e_1 + \mu^2 e_2 + \mu^3 e_3$$

olmak üzere $n \geq 0$ için

$$D_{p,q,n} = \frac{\hat{\lambda}\lambda^n - \hat{\mu}\mu^n}{\lambda - \mu}$$

formülü doğrudur.

İspat: $D_{p,q,n} = W_{13}$ olsun. $D_{p,q,n}$ tanımından ve f_n için Binet formülünden,

$$
\begin{aligned}
W_{13} &= f_n e_0 + f_{n+1}e_1 + f_{n+2}e_2 + f_{n+3}e_3 \\
&= \left(\frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu}\right)e_0 + \left(\frac{\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}}{\lambda - \mu}\right)e_1 + \left(\frac{\lambda^{n+2} - \mu^{n+2}}{\lambda - \mu}\right)e_2 + \left(\frac{\lambda^{n+3} - \mu^{n+3}}{\lambda - \mu}\right)e_3 \\
&= \frac{\lambda^n}{\lambda - \mu}(1e_0 + \lambda e_1 + \lambda^2 e_2 + \lambda^3 e_3) - \frac{\mu^n}{\lambda - \mu}(1e_0 + \mu e_1 + \mu^2 e_2 + \mu^3 e_3) \\
&= \frac{\hat{\lambda}\lambda^n - \hat{\mu}\mu^n}{\lambda - \mu}
\end{aligned}
$$

formülü elde edilir.

3. 3. 5. Önerme: Aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $pD_{p,q,2n} + qD_{p,q,2n-1} = D_{p,q,2n+1}, \quad n \geq 1$,

ii. $p^2 D_{p,q,2n} + 2pqD_{p,q,2n-1} + q^2 D_{p,q,2n-2} = D_{p,q,2n+2},\quad n \geq 2$,

iii. $p^3 D_{p,q,2n} + 3p^2 qD_{p,q,2n-1} + 3pq^2 D_{p,q,2n-2} + q^3 D_{p,q,2n-3} = D_{p,q,2n+3},\ n \geq 2$.

İspat:

i. $pD_{p,q,2n} + qD_{p,q,2n-1} = W_{14}$ olsun. Split kuaterniyonlar için, skaler ile kuaterniyon çarpımı, kuaterniyonların toplamı ve (p,q)-Fibonacci sayı dizisi tanımı hatırlanırsa,

$$\begin{aligned}
W_{14} &= p(f_{2n}e_0 + f_{2n+1}e_1 + f_{2n+2}e_2 + f_{2n+3}e_3) + q(f_{2n-1}e_0 + f_{2n}e_1 + f_{2n+1}e_2 + f_{2n+2}e_3) \\
&= (pf_{2n} + qf_{2n-1})e_0 + (pf_{2n+1} + qf_{2n})e_1 + (pf_{2n+2} + qf_{2n+1})e_2 + (pf_{2n+3} + qf_{2n+2})e_3 \\
&= f_{2n+1}e_0 + f_{2n+2}e_1 + f_{2n+3}e_2 + f_{2n+4}e_3 \\
&= D_{p,q,2n+1}
\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir. Aynı özdeşliğe $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$\begin{aligned}
W_{14} &= (\lambda + \mu)\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n} - \widehat{\mu}\mu^{2n}}{\lambda - \mu}\right) - \lambda.\mu\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n-1} - \widehat{\mu}\mu^{2n-1}}{\lambda - \mu}\right) \\
&= \frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n+1} - \widehat{\mu}\mu^{2n}\lambda}{\lambda - \mu} + \frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n}\mu - \widehat{\mu}\mu^{2n+1}}{\lambda - \mu} - \left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n}\mu - \widehat{\mu}\mu^{2n}\lambda}{\lambda - \mu}\right) \\
&= \frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n+1} - \widehat{\mu}\mu^{2n+1}}{\lambda - \mu} \\
&= D_{p,q,2n+1}
\end{aligned}$$

şeklinde ulaşılır.

ii. $p^2 D_{p,q,2n} + 2pqD_{p,q,2n-1} + q^2 D_{p,q,2n-2} = W_{15}$ olsun. Split kuaterniyonlarındaki cebirsel işlemler ve 3. 1. 1. Önermesinin 2. özdeşliği ile

$$\begin{aligned}
W_{15} &= p^2(f_{2n}e_0 + f_{2n+1}e_1 + f_{2n+2}e_2 + f_{2n+3}e_3) + 2pq(f_{2n-1}e_0 + f_{2n}e_1 + f_{2n+1}e_2 + f_{2n+2}e_3) \\
&\quad + q^2(f_{2n-2}e_0 + f_{2n-1}e_1 + f_{2n}e_2 + f_{2n+1}e_3) \\
&= \left(p^2 f_{2n} + 2pqf_{2n-1} + q^2 f_{2n-2}\right)e_0 + \left(p^2 f_{2n+1} + 2pqf_{2n} + q^2 f_{2n-1}\right)e_1 + \left(p^2 f_{2n+2}\right. \\
&\quad \left. + 2pqf_{2n+1} + q^2 f_{2n}\right)e_2 + \left(p^2 f_{2n+3} + 2pqf_{2n+2} + q^2 f_{2n+1}\right)e_3 \\
&= f_{2n+2}e_0 + f_{2n+3}e_1 + f_{2n+4}e_2 + f_{2n+5}e_3 \\
&= D_{p,q,2n+2}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Aynı özdeşliğe $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$W_{15}=(\lambda+\mu)^2\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}-\hat{\mu}\mu^{2n}}{\lambda-\mu}\right)-2(\lambda+\mu)\lambda.\mu\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n-1}-\hat{\mu}\mu^{2n-1}}{\lambda-\mu}\right)$$
$$+(\lambda.\mu)^2\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n-2}-\hat{\mu}\mu^{2n-2}}{\lambda-\mu}\right)$$
$$=\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+2}-\hat{\mu}\mu^{2n}\lambda^2}{\lambda-\mu}+2\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+1}\mu-\hat{\mu}\mu^{2n+1}\lambda}{\lambda-\mu}\right)+\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}\mu^2-\hat{\mu}\mu^{2n+2}}{\lambda-\mu}$$
$$-2\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+1}\mu-\hat{\mu}\mu^{2n}\lambda^2}{\lambda-\mu}\right)-2\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}\mu^2-\hat{\mu}\mu^{2n+1}\lambda}{\lambda-\mu}\right)+\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}\mu^2-\hat{\mu}\mu^{2n}\lambda^2}{\lambda-\mu}$$
$$=\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+2}-\hat{\mu}\mu^{2n+2}}{\lambda-\mu}$$
$$=D_{p,q,2n+2}$$

şeklinde ulaşılır.

iii. $p^3D_{p,q,2n}+3p^2qD_{p,q,2n-1}+3pq^2D_{p,q,2n-2}+q^3D_{p,q,2n-3}=W_{16}$ olsun. Böylece split kuaterniyonlarındaki cebirsel işlemler ve 3. 1. 1. Önermesinin 3. özdeşliği ile

$$W_{16}=p^3\left(f_{2n}e_0+f_{2n+1}e_1+f_{2n+2}e_2+f_{2n+3}e_3\right)+3p^2q\left(f_{2n-1}e_0+f_{2n}e_1+f_{2n+1}e_2\right.$$
$$\left.+f_{2n+2}e_3\right)+3pq^2\left(f_{2n-2}e_0+f_{2n-1}e_1+f_{2n}e_2+f_{2n+1}e_3\right)+q^3\left(f_{2n-3}e_0+f_{2n-2}e_1\right.$$
$$\left.+f_{2n-1}e_2+f_{2n}e_3\right)$$
$$=\left(p^3f_{2n}+3p^2qf_{2n-1}+3pq^2f_{2n-2}+q^3f_{2n-3}\right)e_0+\left(p^3f_{2n+1}+3p^2qf_{2n}+3pq^2f_{2n-1}\right.$$
$$\left.+q^3f_{2n-2}\right)e_1+\left(p^3f_{2n+2}+3p^2qf_{2n+1}+3pq^2f_{2n}+q^3f_{2n-1}\right)e_2+\left(p^3f_{2n+3}\right.$$
$$\left.+3p^2qf_{2n+2}+3pq^2f_{2n+1}+q^3f_{2n}\right)e_3$$
$$=f_{2n+3}e_0+f_{2n+4}e_1+f_{2n+5}e_2+f_{2n+6}e_3$$
$$=D_{p,q,2n+3}$$

sonucu elde edilir. Aynı özdeşliğe $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$W_{16}=(\lambda+\mu)^3\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}-\hat{\mu}\mu^{2n}}{\lambda-\mu}\right)-3(\lambda+\mu)^2\lambda.\mu\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n-1}-\hat{\mu}\mu^{2n-1}}{\lambda-\mu}\right)$$
$$+3(\lambda+\mu)(\lambda.\mu)^2\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n-2}-\hat{\mu}\mu^{2n-2}}{\lambda-\mu}\right)-(\lambda.\mu)^3\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n-3}-\hat{\mu}\mu^{2n-3}}{\lambda-\mu}\right)$$
$$=\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+3}-\hat{\mu}\mu^{2n}\lambda^3}{\lambda-\mu}+3\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+2}\mu-\hat{\mu}\mu^{2n+1}\lambda^2}{\lambda-\mu}\right)+3\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+1}\mu^2-\hat{\mu}\mu^{2n+2}\lambda}{\lambda-\mu}\right)$$

$$+\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}\mu^3-\hat{\mu}\mu^{2n+3}}{\lambda-\mu}\right)-3\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+2}\mu-\hat{\mu}\mu^{2n}\lambda^3}{\lambda-\mu}\right)-3\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}\mu^3-\hat{\mu}\mu^{2n+2}\lambda}{\lambda-\mu}\right)$$

$$-6\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+1}\mu^2-\hat{\mu}\mu^{2n+1}\lambda^2}{\lambda-\mu}\right)+3\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+1}\mu^2-\hat{\mu}\mu^{2n}\lambda^3}{\lambda-\mu}\right)$$

$$+3\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}\mu^3-\hat{\mu}\mu^{2n+1}\lambda^2}{\lambda-\mu}\right)-\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}\mu^3-\hat{\mu}\mu^{2n}\lambda^3}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+3}-\hat{\mu}\mu^{2n+3}}{\lambda-\mu}$$

$$=D_{p,q,2n+3}$$

şeklinde ulaşılır.

3. 3. 6. Önerme: Aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $D_{p,q,n-1}D_{p,q,n+1}-D_{p,q,n-2}D_{p,q,n+2}=(-q)^{n-2}\left(\frac{\hat{\mu}\hat{\lambda}\lambda^3-\hat{\lambda}\hat{\mu}\mu^3}{\lambda-\mu}\right),\quad n\geq 2,$

ii. $D_{p,q,n-1}D_{p,q,n+3}-D^2_{p,q,n+1}=-p(-q)^{n-1}\left(\frac{\hat{\mu}\hat{\lambda}\lambda^2-\hat{\lambda}\hat{\mu}\mu^2}{\lambda-\mu}\right),\quad n\geq 1,,$

iii. $D_{p,q,m}D_{p,q,n}-q^2D_{p,q,m-2}D_{p,q,n-2}=p\big(-f_{n+m-2}-f_{n+m}+f_{n+m+2}+f_{n+m+4}$

$+2D_{p,q,n+m-2}\big),\quad n,m\geq 2,$

iv. $D^2_{p,q,n+1}-q^2D^2_{p,q,n-1}=p\left(-f_{n+m}-f_{n+m+2}+f_{n+m+4}+f_{n+m+6}+2D_{p,q,n+m}\right),\quad n\geq 1,,$

v. $D^2_{p,q,n+1}-qD_{p,q,n-1}D_{p,q,n+1}=pD_{p,q,n}D_{p,q,n+1},\quad n\geq 1,$

vi. $D^2_{p,q,n+1}+qD_{p,q,n-1}D_{p,q,n+1}=\left(\hat{\lambda}\lambda^n+\hat{\mu}\mu^n\right)D_{p,q,n+1},\quad n\geq 1.$

İspat:

i. $D_{p,q,n-1}D_{p,q,n+1}-D_{p,q,n-2}D_{p,q,n+2}=W_{17}$ olsun. Kuaterniyonların çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$W_{17}=\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n-1}-\hat{\mu}\mu^{n-1}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+1}-\hat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right)-\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n-2}-\hat{\mu}\mu^{n-2}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+2}-\hat{\mu}\mu^{n+2}}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=\frac{\left(\hat{\lambda}\lambda^n\right)^2-\hat{\lambda}\hat{\mu}(\lambda\mu)^n\lambda^{-1}\mu^1-\hat{\mu}\hat{\lambda}(\lambda\mu)^n\mu^{-1}\lambda^1+\left(\hat{\mu}\mu^n\right)^2}{(\lambda-\mu)^2}$$

$$-\frac{\left(\widehat{\lambda}\lambda^{n}\right)^{2}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n}\lambda^{-2}\mu^{2}-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n}\mu^{-2}\lambda^{2}+\left(\widehat{\mu}\mu^{n}\right)^{2}}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$=\frac{\left(\lambda\mu\right)^{n-2}\left(-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\left(\lambda\mu^{3}-\mu^{4}\right)+\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\left(\lambda^{4}-\mu\lambda^{3}\right)\right)}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$=\frac{\left(\lambda\mu\right)^{n-2}\left(-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{3}\left(\lambda-\mu\right)+\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{3}\left(\lambda-\mu\right)\right)}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$=\left(\lambda\mu\right)^{n-2}\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{3}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{3}}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=\left(-q\right)^{n-2}\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{3}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{3}}{\lambda-\mu}\right)$$

sonuca ulaşılır.

ii. $D_{p,q,n-1}D_{p,q,n+3}-D_{p,q,n+1}^{2}=W_{18}$ olsun. Kuaterniyonların çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$W_{18}=\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n-1}-\widehat{\mu}\mu^{n-1}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+3}-\widehat{\mu}\mu^{n+3}}{\lambda-\mu}\right)-\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+1}-\widehat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right)^{2}$$

$$=\frac{\left(\widehat{\lambda}\lambda^{n+1}\right)^{2}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n}\lambda^{-1}\mu^{3}-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n}\mu^{-1}\lambda^{3}+\left(\widehat{\mu}\mu^{n+1}\right)^{2}}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$-\frac{\left(\widehat{\lambda}\lambda^{n+1}\right)^{2}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}+\left(\widehat{\mu}\mu^{n+1}\right)^{2}}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$=\frac{\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}\left(1-\frac{\mu^{2}}{\lambda^{2}}\right)-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}\left(\frac{\lambda^{2}}{\mu^{2}}-1\right)}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$=\left(\lambda\mu\right)^{n+1}\frac{\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda^{2}}\right)-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu^{2}}\right)}{\lambda-\mu}$$

$$=-\left(\lambda+\mu\right)\left(\lambda\mu\right)^{n-1}\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{2}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{2}}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=-p\left(-q\right)^{n-1}\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{2}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{2}}{\lambda-\mu}\right)$$

sonuca ulaşılır.

iii. $D_{p,q,m}D_{p,q,n}-q^2D_{p,q,m-2}D_{p,q,n-2}=W_{19}$ olsun. Kuaterniyonların çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü ile köklerinin çarpımı $\lambda\mu=-q$ olduğu hatırlanırsa,

$$
\begin{aligned}
W_{19} &= \left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^m-\widehat{\mu}\mu^m}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^n-\widehat{\mu}\mu^n}{\lambda-\mu}\right)-q^2\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{m-2}-\widehat{\mu}\mu^{m-2}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n-2}-\widehat{\mu}\mu^{n-2}}{\lambda-\mu}\right) \\
&= \frac{\widehat{\lambda}^2\lambda^{m+n}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^m\mu^n-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^m\lambda^n+\widehat{\mu}^2\mu^{m+n}}{(\lambda-\mu)^2} \\
&\quad -(\lambda\mu)^2\frac{\widehat{\lambda}^2\lambda^{m+n-4}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{m-2}\mu^{n-2}-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{m-2}\lambda^{n-2}+\widehat{\mu}^2\mu^{m+n-4}}{(\lambda-\mu)^2} \\
&= \frac{\widehat{\lambda}^2\lambda^{m+n}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^m\mu^n-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^m\lambda^n+\widehat{\mu}^2\mu^{m+n}}{(\lambda-\mu)^2} \\
&\quad +\frac{-\widehat{\lambda}^2\lambda^{m+n-2}\mu^2+\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^m\mu^n+\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^m\lambda^n-\widehat{\mu}^2\mu^{m+n-2}\lambda^2}{(\lambda-\mu)^2} \\
&= \frac{\widehat{\lambda}^2\lambda^{m+n-2}\lambda^2+\widehat{\mu}^2\mu^{m+n-2}\mu^2-\widehat{\lambda}^2\lambda^{m+n-2}\mu^2-\widehat{\mu}^2\mu^{m+n-2}\lambda^2}{(\lambda-\mu)^2} \\
&= \frac{\widehat{\lambda}^2\lambda^{m+n-2}\left(\lambda^2-\mu^2\right)-\widehat{\mu}^2\mu^{m+n-2}\left(\lambda^2-\mu^2\right)}{(\lambda-\mu)^2} \\
&= (\lambda+\mu)\frac{\widehat{\lambda}^2\lambda^{m+n-2}-\widehat{\mu}^2\mu^{m+n-2}}{\lambda-\mu} \\
&= p\,\frac{\left(-1-\lambda^2+\lambda^4+\lambda^6+2\widehat{\lambda}\right)\lambda^{n+m-2}-\left(-1-\mu^2+\mu^4+\mu^6+2\widehat{\mu}\right)\mu^{n+m-2}}{\lambda-\mu} \\
&= p\left(\frac{-\lambda^{n+m-2}-\lambda^{n+m}+\lambda^{n+m+2}+\lambda^{n+m+4}+\mu^{n+m-2}+\mu^{n+m}-\mu^{n+m+2}-\mu^{n+m+4}}{\lambda-\mu}\right. \\
&\quad \left.+2\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+m-2}-\widehat{\mu}\mu^{n+m-2}}{\lambda-\mu}\right) \\
&= p\left(-f_{n+m-2}-f_{n+m}+f_{n+m+2}+f_{n+m+4}+2D_{p,q,n+m-2}\right)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

iv. iii. önermede m yerine $n+1$ ve n yerine de $n+1$ konulması bu önermenin doğruluğunu ispatlar.

v. $D_{p,q,n+1}^2-qD_{p,q,n-1}D_{p,q,n+1}=W_{20}$ olsun. Kuaterniyonların çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü ile köklerinin çarpımı $\lambda\mu=-q$ olduğu hatırlanırsa,

$$
\begin{aligned}
W_{20} &= \left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+1}-\hat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+1}-\hat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right)-q\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n-1}-\hat{\mu}\mu^{n-1}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+1}-\hat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right) \\
&= \frac{\left(\hat{\lambda}\lambda^{n+1}\right)^2-\hat{\lambda}\hat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}-\hat{\mu}\hat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}+\left(\hat{\mu}\mu^{n+1}\right)^2}{\left(\lambda-\mu\right)^2} \\
&\quad +\lambda\mu\frac{\left(\hat{\lambda}\lambda^{n}\right)^2-\hat{\lambda}\hat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n}\lambda^{-1}\mu^{1}-\hat{\mu}\hat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n}\mu^{-1}\lambda^{1}+\left(\hat{\mu}\mu^{n}\right)^2}{\left(\lambda-\mu\right)^2} \\
&= \frac{\left(\hat{\lambda}\lambda^{n}\right)^2\lambda\left(\lambda+\mu\right)-\hat{\lambda}\hat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda}\right)-\hat{\mu}\hat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}\left(\frac{\lambda+\mu}{\mu}\right)}{\left(\lambda-\mu\right)^2} \\
&\quad +\frac{\left(\hat{\mu}\mu^{n}\right)^2\mu\left(\lambda+\mu\right)}{\left(\lambda-\mu\right)^2} \\
&= \left(\lambda+\mu\right)\frac{\left(\hat{\lambda}\lambda^{n+1}\right)^2\mu-\hat{\lambda}\hat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}\mu-\hat{\mu}\hat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}\lambda+\left(\hat{\mu}\mu^{n+1}\right)^2\lambda}{\lambda\mu\left(\lambda-\mu\right)^2} \\
&= \left(\lambda+\mu\right)\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+1}\mu\left(\hat{\lambda}\lambda^{n+1}-\hat{\mu}\mu^{n+1}\right)-\hat{\mu}\mu^{n+1}\lambda\left(\hat{\lambda}\lambda^{n+1}-\hat{\mu}\mu^{n+1}\right)}{\lambda\mu\left(\lambda-\mu\right)^2} \\
&= \left(\lambda+\mu\right)\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n}-\hat{\mu}\mu^{n}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+1}-\hat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right) \\
&= pD_{p,q,n}D_{p,q,n+1}
\end{aligned}
$$

sonuca elde edilir.

vi. $D_{p,q,n+1}^2+qD_{p,q,n-1}D_{p,q,n+1}=W_{21}$ olsun. Kuaterniyonların çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü ile köklerinin çarpımı $\lambda\mu=-q$ olduğu hatırlanırsa,

$$
\begin{aligned}
W_{21} &= \left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+1}-\hat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+1}-\hat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right)+q\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n-1}-\hat{\mu}\mu^{n-1}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+1}-\hat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right) \\
&= \frac{\left(\hat{\lambda}\lambda^{n+1}\right)^2-\hat{\lambda}\hat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}-\hat{\mu}\hat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}+\left(\hat{\mu}\mu^{n+1}\right)^2}{\left(\lambda-\mu\right)^2} \\
&\quad -\lambda\mu\frac{\left(\hat{\lambda}\lambda^{n}\right)^2-\hat{\lambda}\hat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n}\lambda^{-1}\mu^{1}-\hat{\mu}\hat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n}\mu^{-1}\lambda^{1}+\left(\hat{\mu}\mu^{n}\right)^2}{\left(\lambda-\mu\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{\left(\widehat{\lambda}\lambda^{n}\right)^{2}\lambda(\lambda-\mu)-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}(\lambda\mu)^{n+1}\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda}\right)+\widehat{\mu}\widehat{\lambda}(\lambda\mu)^{n+1}\left(\frac{\lambda-\mu}{\mu}\right)}{(\lambda-\mu)^{2}}$$

$$-\frac{\left(\widehat{\mu}\mu^{n}\right)^{2}\mu(\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^{2}}$$

$$=\frac{\left(\widehat{\lambda}\lambda^{n+1}\right)^{2}\mu-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}(\lambda\mu)^{n+1}\mu+\widehat{\mu}\widehat{\lambda}(\lambda\mu)^{n+1}\lambda-\left(\widehat{\mu}\mu^{n+1}\right)^{2}\lambda}{\lambda\mu(\lambda-\mu)}$$

$$=\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+1}\mu\left(\widehat{\lambda}\lambda^{n+1}-\widehat{\mu}\mu^{n+1}\right)+\widehat{\mu}\mu^{n+1}\lambda\left(\widehat{\lambda}\lambda^{n+1}-\widehat{\mu}\mu^{n+1}\right)}{\lambda\mu(\lambda-\mu)}$$

$$=\left(\widehat{\lambda}\lambda^{n}+\widehat{\mu}\mu^{n}\right)\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+1}-\widehat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=\left(\widehat{\lambda}\lambda^{n}+\widehat{\mu}\mu^{n}\right)D_{p,q,n+1}$$

sonucu elde edilir.

3. 3. 7. Önerme: $n,r,t\geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $D_{p,q,n+r}f_{n+t}-D_{p,q,n+t}f_{n+r}=-(-q)^{n+t}D_{p,q,o}f_{r-t},\quad r\geq t,,$

ii. $D_{p,q,n+r}f_{n-r}-D_{p,q,n-r}f_{n+r}=-(-q)^{n-r}D_{p,q,o}f_{2r},\quad n\geq r,,$

iii. $D_{p,q,n+r}f_{n}-D_{p,q,n}f_{n+r}=-(-q)^{n}D_{p,q,o}f_{r},$

iv. $D_{p,q,n+1}f_{n}-D_{p,q,n}f_{n+1}=-(-q)^{n}D_{p,q,o},$

v. $D_{p,q,n+r}f_{n+t}-(-q)^{r+t}D_{p,q,n-r}f_{n-t}=D_{p,q,2n}f_{r+t}+(-q)^{n+t}D_{p,q,0}f_{r-t},\quad n\geq r,t,$

vi. $D_{p,q,n+r}f_{n+r}-(-q)^{2r}D_{p,q,n-r}f_{n-r}=D_{p,q,2n}f_{2r},\quad n\geq r,$

vii. $D_{p,q,n+r}f_{n+r}-(-q)^{r}D_{p,q,n}f_{n}=D_{p,q,2n+r}f_{r},$

viii. $D_{p,q,n+1}f_{n+1}+qD_{p,q,n}f_{n}=D_{p,q,2n+1}.$

İspat:

i. $D_{p,q,n+r}f_{n+t}-D_{p,q,n+t}f_{n+r}=W_{22}$ olsun. Kuaterniyonların ile (*p*,*q*)-Fibonacci sayı dizilerinin çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$W_{22}=\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+r}-\widehat{\mu}\mu^{n+r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n+t}-\mu^{n+t}}{\lambda-\mu}\right)-\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+t}-\widehat{\mu}\mu^{n+t}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n+r}-\mu^{n+r}}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n+r+t}-\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n}\lambda^{r}\mu^{t}-\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n}\mu^{r}\lambda^{t}+\widehat{\mu}\mu^{2n+r+t}}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$-\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n+r+t}-\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n}\lambda^{t}\mu^{r}-\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n}\mu^{t}\lambda^{r}+\widehat{\mu}\mu^{2n+r+t}}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$=\frac{-\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n+t}\left(\lambda^{r-t}-\mu^{r-t}\right)+\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n+t}\left(\lambda^{r-t}-\mu^{r-t}\right)}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$=\frac{-\left(\lambda\mu\right)^{n+t}\left(\widehat{\lambda}-\widehat{\mu}\right)\left(\lambda^{r-t}-\mu^{r-t}\right)}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$=-\left(\lambda\mu\right)^{n+t}\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{0}-\widehat{\mu}\mu^{0}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{r-t}-\mu^{r-t}}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=-\left(-q\right)^{n+t}D_{p,q,o}f_{r-t}$$

sonuca ulaşılır.

ii. $D_{p,q,n+r}f_{n-r}-D_{p,q,n-r}f_{n+r}=W_{23}$ olsun. Kuaterniyonların ile (p,q)-Fibonacci sayı dizilerinin çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$W_{23}=\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+r}-\widehat{\mu}\mu^{n+r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n-r}-\mu^{n-r}}{\lambda-\mu}\right)-\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n-r}-\widehat{\mu}\mu^{n-r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n+r}-\mu^{n+r}}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n}-\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n}\lambda^{r}\mu^{-r}-\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n}\mu^{r}\lambda^{-r}+\widehat{\mu}\mu^{2n}}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$-\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n}-\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n}\lambda^{-r}\mu^{r}-\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n}\mu^{-r}\lambda^{r}+\widehat{\mu}\mu^{2n}}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$=\frac{-\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n-r}\left(\lambda^{2r}-\mu^{2r}\right)+\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n-r}\left(\lambda^{2r}-\mu^{2r}\right)}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$=\frac{-\left(\lambda\mu\right)^{n-r}\left(\widehat{\lambda}-\widehat{\mu}\right)\left(\lambda^{2r}-\mu^{2r}\right)}{\left(\lambda-\mu\right)^{2}}$$

$$=-\left(\lambda\mu\right)^{n-r}\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{0}-\widehat{\mu}\mu^{0}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{2r}-\mu^{2r}}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=-\left(-q\right)^{n-r}D_{p,q,o}f_{2r}$$

sonuca ulaşılır.

iii. $D_{p,q,n+r} f_n - D_{p,q,n} f_{n+r} = W_{24}$ olsun. Kuaterniyonların ile (*p*,*q*)-Fibonacci sayı dizilerinin çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$W_{24} = \left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+r} - \widehat{\mu}\mu^{n+r}}{\lambda - \mu} \right)\left(\frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} \right) - \left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^n - \widehat{\mu}\mu^n}{\lambda - \mu} \right)\left(\frac{\lambda^{n+r} - \mu^{n+r}}{\lambda - \mu} \right)$$

$$= \frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n+r} - \widehat{\lambda}(\lambda\mu)^n \lambda^r - \widehat{\mu}(\lambda\mu)^n \mu^r + \widehat{\mu}\mu^{2n+r}}{(\lambda - \mu)^2}$$

$$- \frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n+r} - \widehat{\lambda}(\lambda\mu)^n \mu^r - \widehat{\mu}(\lambda\mu)^n \lambda^r + \widehat{\mu}\mu^{2n+r}}{(\lambda - \mu)^2}$$

$$= \frac{-\widehat{\lambda}(\lambda\mu)^n (\lambda^r - \mu^r) + \widehat{\mu}(\lambda\mu)^n (\lambda^r - \mu^r)}{(\lambda - \mu)^2}$$

$$= \frac{-(\lambda\mu)^n (\widehat{\lambda} - \widehat{\mu})(\lambda^r - \mu^r)}{(\lambda - \mu)^2}$$

$$= -(\lambda\mu)^n \left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^0 - \widehat{\mu}\mu^0}{\lambda - \mu} \right)\left(\frac{\lambda^r - \mu^r}{\lambda - \mu} \right)$$

$$= -(-q)^n D_{p,q,o} f_r$$

sonuca ulaşılır.

iv. $D_{p,q,n+1} f_n - D_{p,q,n} f_{n+1} = W_{25}$ olsun. Kuaterniyonların ile (*p*,*q*)-Fibonacci sayı dizilerinin çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$W_{25} = \left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+1} - \widehat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda - \mu} \right)\left(\frac{\lambda^n - \mu^n}{\lambda - \mu} \right) - \left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^n - \widehat{\mu}\mu^n}{\lambda - \mu} \right)\left(\frac{\lambda^{n+1} - \mu^{n+1}}{\lambda - \mu} \right)$$

$$= \frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n+1} - \widehat{\lambda}(\lambda\mu)^n \lambda - \widehat{\mu}(\lambda\mu)^n \mu + \widehat{\mu}\mu^{2n+1}}{(\lambda - \mu)^2}$$

$$- \frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n+1} - \widehat{\lambda}(\lambda\mu)^n \mu - \widehat{\mu}(\lambda\mu)^n \lambda + \widehat{\mu}\mu^{2n+1}}{(\lambda - \mu)^2}$$

$$= \frac{-\widehat{\lambda}(\lambda\mu)^n (\lambda - \mu) + \widehat{\mu}(\lambda\mu)^n (\lambda - \mu)}{(\lambda - \mu)^2}$$

$$= \frac{-(\lambda\mu)^n (\widehat{\lambda} - \widehat{\mu})(\lambda - \mu)}{(\lambda - \mu)^2}$$

$$=-(\lambda\mu)^n\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^0-\hat{\mu}\mu^0}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu}\right)$$
$$=-(-q)^n D_{p,q,o}$$

sonuca ulaşılır.

v. $D_{p,q,n+r}f_{n+t}-(-q)^{r+t}D_{p,q,n-r}f_{n-t}=W_{26}$ olsun. Kuaterniyonların ile (p,q)-Fibonacci sayı dizilerinin çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü ile köklerinin çarpımı $\lambda\mu=-q$ olduğu hatırlanırsa,

$$W_{26}=\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+r}-\hat{\mu}\mu^{n+r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n+t}-\mu^{n+t}}{\lambda-\mu}\right)-(-q)^{r+t}\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n-r}-\hat{\mu}\mu^{n-r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n-t}-\mu^{n-t}}{\lambda-\mu}\right)$$
$$=\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+r+t}-\hat{\lambda}(\lambda\mu)^n\lambda^r\mu^t-\hat{\mu}(\lambda\mu)^n\mu^r\lambda^t+\hat{\mu}\mu^{2n+r+t}}{(\lambda-\mu)^2}$$
$$-(\lambda\mu)^{r+t}\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n-r-t}-\hat{\lambda}(\lambda\mu)^n\lambda^{-r}\mu^{-t}-\hat{\mu}(\lambda\mu)^n\mu^{-r}\lambda^{-t}+\hat{\mu}\mu^{2n-r-t}}{(\lambda-\mu)^2}$$
$$=\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}\left(\lambda^{r+t}-\mu^{r+t}\right)-\hat{\mu}\mu^{2n}\left(\lambda^{r+t}-\mu^{r+t}\right)-(\lambda\mu)^n\lambda^r\mu^t\left(\hat{\lambda}-\hat{\mu}\right)}{(\lambda-\mu)^2}$$
$$+\frac{(\lambda\mu)^n\mu^r\lambda^t\left(\hat{\lambda}-\hat{\mu}\right)}{(\lambda-\mu)^2}$$
$$=\frac{\left(\hat{\lambda}\lambda^{2n}-\hat{\mu}\mu^{2n}\right)\left(\lambda^{r+t}-\mu^{r+t}\right)+(\lambda\mu)^n\left(\hat{\lambda}-\hat{\mu}\right)\left(\lambda^r\mu^t-\mu^r\lambda^t\right)}{(\lambda-\mu)^2}$$
$$=\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}-\hat{\mu}\mu^{2n}}{\lambda-\mu}\right).\left(\frac{\lambda^{r+t}-\mu^{r+t}}{\lambda-\mu}\right)+(\lambda\mu)^{n+t}\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^0-\hat{\mu}\mu^0}{\lambda-\mu}\right).\left(\frac{\lambda^{r-t}-\mu^{r-t}}{\lambda-\mu}\right)$$
$$=D_{p,q,2n}f_{r+t}+(-q)^{n+t}D_{p,q,0}f_{r-t}$$

sonucu elde edilir.

vi. $D_{p,q,n+r}f_{n+r}-(-q)^{2r}D_{p,q,n-r}f_{n-r}=W_{27}$ olsun. Kuaterniyonların ile (p,q)-Fibonacci sayı dizilerinin çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü ile köklerinin çarpımı $\lambda\mu=-q$ olduğu hatırlanırsa,

$$
\begin{aligned}
W_{27} &= \left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+r}-\hat{\mu}\mu^{n+r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n+r}-\mu^{n+r}}{\lambda-\mu}\right)-(-q)^{2r}\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n-r}-\hat{\mu}\mu^{n-r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n-r}-\mu^{n-r}}{\lambda-\mu}\right)\\
&= \frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+2r}-\hat{\lambda}(\lambda\mu)^{n+r}-\hat{\mu}(\lambda\mu)^{n+r}+\hat{\mu}\mu^{2n+2r}}{(\lambda-\mu)^2}\\
&\quad -(\lambda\mu)^{2r}\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n-2r}-\hat{\lambda}(\lambda\mu)^{n-r}-\hat{\mu}(\lambda\mu)^{n-r}+\hat{\mu}\mu^{2n-2r}}{(\lambda-\mu)^2}\\
&= \frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}\left(\lambda^{2r}-\mu^{2r}\right)-\hat{\mu}\mu^{2n}\left(\lambda^{2r}-\mu^{2r}\right)}{(\lambda-\mu)^2}\\
&= \left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}-\hat{\mu}\mu^{2n}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{2r}-\mu^{2r}}{\lambda-\mu}\right)\\
&= D_{p,q,2n}f_{2r}
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

vii. $D_{p,q,n+r}f_{n+r}-(-q)^{r}D_{p,q,n}f_{n}=W_{28}$ olsun. Kuaterniyonların ile (p,q)-Fibonacci sayı dizilerinin çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü ile köklerinin çarpımı $\lambda\mu=-q$ olduğu hatırlanırsa,

$$
\begin{aligned}
W_{28} &= \left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n+r}-\hat{\mu}\mu^{n+r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n+r}-\mu^{n+r}}{\lambda-\mu}\right)-(-q)^{r}\left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n}-\hat{\mu}\mu^{n}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n}-\mu^{n}}{\lambda-\mu}\right)\\
&= \frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+2r}-\hat{\lambda}(\lambda\mu)^{n+r}-\hat{\mu}(\lambda\mu)^{n+r}+\hat{\mu}\mu^{2n+2r}}{(\lambda-\mu)^2}\\
&\quad -(\lambda\mu)^{r}\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n}-\hat{\lambda}(\lambda\mu)^{n}-\hat{\mu}(\lambda\mu)^{n}+\hat{\mu}\mu^{2n}}{(\lambda-\mu)^2}\\
&= \frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+r}\left(\lambda^{r}-\mu^{r}\right)-\hat{\mu}\mu^{2n+r}\left(\lambda^{r}-\mu^{r}\right)}{(\lambda-\mu)^2}\\
&= \left(\frac{\hat{\lambda}\lambda^{2n+r}-\hat{\mu}\mu^{2n+r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{r}-\mu^{r}}{\lambda-\mu}\right)\\
&= D_{p,q,2n+r}f_{r}
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

viii. $D_{p,q,n+1}f_{n+1}+qD_{p,q,n}f_n=W_{29}$ olsun. Kuaterniyonlar ile (p,q)-Fibonacci sayı dizilerinin çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü ile köklerinin çarpımı $\lambda\mu=-q$ olduğu hatırlanırsa,

$$
\begin{aligned}
W_{29} &= \left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+1}-\widehat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n+1}-\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right)+q\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n}-\widehat{\mu}\mu^{n}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{n}-\mu^{n}}{\lambda-\mu}\right)\\
&= \frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n+2}-\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}-\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n+1}+\widehat{\mu}\mu^{2n+2}}{\left(\lambda-\mu\right)^2}\\
&\quad -\lambda\mu\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n}-\widehat{\lambda}\left(\lambda\mu\right)^{n}-\widehat{\mu}\left(\lambda\mu\right)^{n}+\widehat{\mu}\mu^{2n}}{\left(\lambda-\mu\right)^2}\\
&= \frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n+1}\left(\lambda-\mu\right)-\widehat{\mu}\mu^{2n+1}\left(\lambda-\mu\right)}{\left(\lambda-\mu\right)^2}\\
&= \left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{2n+1}-\widehat{\mu}\mu^{2n+1}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda-\mu}{\lambda-\mu}\right)\\
&= D_{p,q,2n+1}
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

3. 3. 2. Teorem (Honsberger Özdeşliği): $n\geq 0$ ve $m\geq 1$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlik doğrudur.

$$D_{p,q,n+1}D_{p,q,m}+qD_{p,q,n}D_{p,q,m-1}=-f_{n+m}-f_{n+m+2}+f_{n+m+4}+f_{n+m+6}+2D_{p,q,n+m}\,.$$

İspat: $D_{p,q,n+1}D_{p,q,m}+qD_{p,q,n}D_{p,q,m-1}=W_{30}$ olsun. Böylece split kuaterniyonlarındaki cebirsel işlemler ve 3. 1. 1. Önermesinin 4. özdeşliği ile

$$
\begin{aligned}
W_{30} &= \left(f_{n+1}e_0+f_{n+2}e_1+f_{n+3}e_2+f_{n+4}e_3\right)\left(f_m e_0+f_{m+1}e_1+f_{m+2}e_2+f_{m+3}e_3\right)+q\left(f_n e_0\right.\\
&= f_{n+1}f_m-f_{n+2}f_{m+1}+f_{n+3}f_{m+2}+f_{n+4}f_{m+3}+\left(f_{n+1}f_{m+1}+f_{n+2}f_m-f_{n+3}f_{m+3}\right.\\
&\quad \left.+f_{n+4}f_{m+2}\right)e_1+(f_{n+1}f_{m+2}+f_{n+3}f_m-f_{n+2}f_{m+3}+f_{n+4}f_{m+1})e_2+(f_{n+1}f_{m+3}\\
&\quad +f_{n+4}f_m-f_{n+3}f_{m+1}+f_{n+2}f_{m+2})e_3+q\left[f_n f_{m-1}-f_{n+1}f_m+f_{n+2}f_{m+1}+f_{n+3}f_{m+2}\right.\\
&\quad +e_1\left(f_n f_m+f_{n+1}f_{m-1}-f_{n+2}f_{m+2}+f_{n+3}f_{m+1}\right)+\left(f_n f_{m+1}+f_{n+2}f_{m-1}-f_{n+1}f_{m+2}\right.\\
&\quad \left.\left.+f_{n+3}f_m\right)e_2+\left(f_n f_{m+2}+f_{n+3}f_{m-1}-f_{n+2}f_m+f_{n+1}f_{m+1}\right)e_3\right]\\
&= \left(f_{n+1}f_m+qf_n f_{m-1}\right)-\left(f_{n+2}f_{m+1}+qf_{n+1}f_m\right)+\left(f_{n+3}f_{m+2}+qf_{n+2}f_{m+1}\right)+\left(f_{n+4}f_{m+3}\right.\\
&\quad \left.+qf_{n+3}f_{m+2}\right)+\left[\left(f_{n+1}f_{m+1}+qf_n f_m\right)+\left(f_{n+2}f_m+qf_{n+1}f_{m-1}\right)-\left(f_{n+3}f_{m+3}+qf_{n+2}f_{m+2}\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\left(f_{n+4} f_{m+2} + q f_{n+3} f_{m+1} \right)\Big] e_1 + \Big[\left(f_{n+1} f_{m+2} + q f_n f_{m+1} \right) + \left(f_{n+3} f_m + q f_{n+2} f_{m-1} \right) \\
&-\left(f_{n+2} f_{m+3} + q f_{n+1} f_{m+2} \right) + \left(f_{n+4} f_{m+1} + q f_{n+3} f_m \right)\Big] e_2 + \Big[\left(f_{n+1} f_{m+3} + q f_n f_{m+2} \right) \\
&+\left(f_{n+4} f_m + q f_{n+3} f_{m-1} \right) - \left(f_{n+3} f_{m+1} + q f_{n+2} f_m \right) + \left(f_{n+2} f_{m+2} + q f_{n+1} f_{m+1} \right)\Big] e_3 \\
&= + f_{n+m} - f_{n+m+2} + f_{n+m+4} + f_{n+m+6} + (f_{n+m+1} + f_{n+m+1} - f_{n+m+5} + f_{n+m+5}) e_1 \\
&+(f_{n+m+2} + f_{n+m+2} - f_{n+m+4} + f_{n+m+4}) e_2 + (f_{n+m+3} + f_{n+m+3} - f_{n+m+3} + f_{n+m+3}) e_3 \\
&= + f_{n+m} - f_{n+m+2} + f_{n+m+4} + f_{n+m+6} - 2 f_{n+m} e_0 + 2 f_{n+m} e_0 + 2 f_{n+m+1} e_1 + 2 f_{n+m+2} e_2 \\
&+2 f_{n+m+3} e_3 \\
&= - f_{n+m} - f_{n+m+2} + f_{n+m+4} + f_{n+m+6} + 2\left(f_{n+m} e_0 + f_{n+m+1} e_1 + f_{n+m+2} e_2 + f_{n+m+3} e_3 \right) \\
&= - f_{n+m} - f_{n+m+2} + f_{n+m+4} + f_{n+m+6} + 2 D_{p,q,n+m}, \quad (e_0 = 1)
\end{aligned}
$$

sonuca ulaşılır. Aynı özdeşliğe $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü ile köklerinin çarpımı $\lambda\mu = -q$ olduğu hatırlanırsa,

$$
\begin{aligned}
W_{30} &= \left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+1} - \widehat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda - \mu} \right)\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{m} - \widehat{\mu}\mu^{m}}{\lambda - \mu} \right) + q\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n} - \widehat{\mu}\mu^{n}}{\lambda - \mu} \right)\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{m-1} - \widehat{\mu}\mu^{m-1}}{\lambda - \pi} \right) \\
&= \frac{\left(\widehat{\lambda}\right)^2 \lambda^{n+m+1} - \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{n+1}\mu^{m} - \widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{n+1}\lambda^{m} + \left(\widehat{\mu}\right)^2 \mu^{n+m+1}}{\left(\lambda - \mu\right)^2} \\
&\quad + q\left[\frac{\left(\widehat{\lambda}\right)^2 \lambda^{n+m-1} - \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{n}\mu^{m-1} - \widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{n}\lambda^{m-1} + \left(\widehat{\mu}\right)^2 \mu^{n+m-1}}{\left(\lambda - \mu\right)^2} \right] \\
&= \frac{\left(\widehat{\lambda}\right)^2 \lambda\lambda^{n+m} - \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{n+1}\mu^{m} - \widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{n+1}\lambda^{m} + \left(\widehat{\mu}\right)^2 \mu\mu^{n+m}}{\left(\lambda - \mu\right)^2} \\
&\quad + q\left[\frac{\left(\widehat{\lambda}\right)^2 \mu\lambda^{n+m} - \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{n+1}\mu^{m} - \widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{n+1}\lambda^{m} + \left(\widehat{\mu}\right)^2 \lambda\mu^{n+m}}{\lambda\mu\left(\lambda - \mu\right)^2} \right] \\
&= \frac{\left(\widehat{\lambda}\right)^2 \lambda\lambda^{n+m} - \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{n+1}\mu^{m} - \widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{n+1}\lambda^{m} + \left(\widehat{\mu}\right)^2 \mu\mu^{n+m}}{\left(\lambda - \mu\right)^2} \\
&\quad + q\left[\frac{\left(\widehat{\lambda}\right)^2 \mu\lambda^{n+m} - \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{n+1}\mu^{m} - \widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{n+1}\lambda^{m} + \left(\widehat{\mu}\right)^2 \lambda\mu^{n+m}}{-q\left(\lambda - \mu\right)^2} \right] \\
&= \frac{\left(\widehat{\lambda}\right)^2 \lambda\lambda^{n+m} - \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{n+1}\mu^{m} - \widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{n+1}\lambda^{m} + \left(\widehat{\mu}\right)^2 \mu\mu^{n+m}}{\left(\lambda - \mu\right)^2} \\
&\quad + \frac{-\left(\widehat{\lambda}\right)^2 \mu\lambda^{n+m} + \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{n+1}\mu^{m} + \widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{n+1}\lambda^{m} - \left(\widehat{\mu}\right)^2 \lambda\mu^{n+m}}{\left(\lambda - \mu\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$=\frac{\left(\widehat{\lambda}\right)^2\lambda^{n+m}(\lambda-\mu)-\left(\widehat{\mu}\right)^2\mu^{n+m}(\lambda-\mu)}{\left(\lambda-\mu\right)^2}$$

$$=\frac{\left(\widehat{\lambda}\right)^2\lambda^{n+m}-\left(\widehat{\mu}\right)^2\mu^{n+m}}{\left(\lambda-\mu\right)}$$

$$=\frac{\left(-1-\lambda^2+\lambda^4+\lambda^6+2\widehat{\lambda}\right)\lambda^{n+m}-\left(-1-\mu^2+\mu^4+\mu^6+2\widehat{\mu}\right)\mu^{n+m}}{\lambda-\mu}$$

$$=\frac{-\lambda^{n+m}-\lambda^{n+m+2}+\lambda^{n+m+4}+\lambda^{n+m+6}+\mu^{n+m}+\mu^{n+m+2}-\mu^{n+m+4}-\mu^{n+m+6}}{\lambda-\mu}$$

$$+2\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+m}-\widehat{\mu}\mu^{n+m}}{\lambda-\mu}$$

$$=-f_{n+m}-f_{n+m+2}+f_{n+m+4}+f_{n+m+6}+2D_{p,q,n+m}$$

sonucu elde edilir.

3. 3. 8. Önerme: $n\geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlik doğrudur.

$$D_{p,q,n+1}^2+qD_{p,q,n}^2=-f_{2n+1}-f_{2n+3}+f_{2n+5}+f_{2n+7}+2D_{p,q,2n+1}\,.$$

İspat: 3. 3. 2. Teoreminde m yerine $n+1$ yazılırsa önerme ispatlanır.

3. 3. 3. Teorem (d'Ocagne'nin Özdeşliği): $m\geq n+1$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlik doğrudur.

$$D_{p,q,m}D_{p,q,n+1}-D_{p,q,m+1}D_{p,q,n}=-(-q)^m\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{n-m}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{n-m}}{\lambda-\mu}\right)$$

İspat: $D_{p,q,m}D_{p,q,n+1}-D_{p,q,m+1}D_{p,q,n}=W_{31}$ olsun. Kuaterniyonların çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$W_{31}=\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^m-\widehat{\mu}\mu^m}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+1}-\widehat{\mu}\mu^{n+1}}{\lambda-\mu}\right)-\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{m+1}-\widehat{\mu}\mu^{m+1}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^n-\widehat{\mu}\mu^n}{\lambda-\mu}\right)$$

$$=\frac{\left(\widehat{\lambda}\right)^2\lambda^{n+m+1}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^m\mu^{n+1}-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^m\lambda^{n+1}+\left(\widehat{\mu}\right)^2\mu^{n+m+1}}{\left(\lambda-\mu\right)^2}$$

$$+\frac{-\left(\widehat{\lambda}\right)^2\lambda^{n+m+1}+\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{m+1}\mu^n+\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{m+1}\lambda^n-\left(\widehat{\mu}\right)^2\mu^{n+m+1}}{\left(\lambda-\mu\right)^2}$$

$$=\frac{\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{m}\mu^{n}(\lambda-\mu)-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{m}\lambda^{n}(\lambda-\mu)}{(\lambda-\mu)^{2}}$$

$$=\frac{\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{m}\mu^{n}-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{m}\lambda^{n}}{\lambda-\mu}$$

$$=\frac{(\lambda\mu)^{m}(\lambda\mu)^{-m}(\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{m}\mu^{n}-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{m}\lambda^{n})}{\lambda-\mu}$$

$$=-(-q)^{m}\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{n-m}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{n-m}}{\lambda-\mu}\right)$$

sonuca ulaşılır.

3. 3. 4. Teorem (Catalan'ın Özdeşliği): $n\geq r\geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlik doğrudur.

$$D_{p,q,n-r}D_{p,q,n+r}-D_{p,q,n}^{2}=-(-q)^{n-r}\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{r}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{r}}{\lambda-\mu}\right)f_{r}\,.$$

İspat: $D_{p,q,n-r}D_{p,q,n+r}-D_{p,q,n}^{2}=W_{32}$ olsun. Kuaterniyonların çarpımı, $D_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

$$W_{32}=\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n-r}-\widehat{\mu}\mu^{n-r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n+r}-\widehat{\mu}\mu^{n+r}}{\lambda-\mu}\right)-\left(\frac{\widehat{\lambda}\lambda^{n}-\widehat{\mu}\mu^{n}}{\lambda-\mu}\right)^{2}$$

$$=\frac{\left(\widehat{\lambda}\right)^{2}\lambda^{2n}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{n-r}\mu^{n+r}-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{n-r}\lambda^{n+r}+\left(\widehat{\mu}\right)^{2}\mu^{2n}}{(\lambda-\mu)^{2}}$$

$$+\frac{-\left(\widehat{\lambda}\right)^{2}\lambda^{2n}+\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\lambda^{n}\mu^{n}+\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\mu^{n}\lambda^{n}-\left(\widehat{\mu}\right)^{2}\mu^{2n}}{(\lambda-\mu)^{2}}$$

$$=\frac{-\left(\dfrac{\widehat{\lambda}\widehat{\mu}(\lambda\mu)^{n}\mu^{2r}+\widehat{\mu}\widehat{\lambda}(\lambda\mu)^{n}\lambda^{2r}}{(\lambda\mu)^{r}}\right)+\widehat{\lambda}\widehat{\mu}(\lambda\mu)^{n}+\widehat{\mu}\widehat{\lambda}(\lambda\mu)^{n}}{(\lambda-\mu)^{2}}$$

$$=\frac{-(\lambda\mu)^{n-r}\left(\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{2r}+\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{2r}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}(\lambda\mu)^{r}-\widehat{\mu}\widehat{\lambda}(\lambda\mu)^{r}\right)}{(\lambda-\mu)^{2}}$$

$$=\frac{-(\lambda\mu)^{n-r}\left(\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{r}(\lambda^{r}-\mu^{r})-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{r}(\lambda^{r}-\mu^{r})\right)}{(\lambda-\mu)^{2}}$$

$$=-(\lambda\mu)^{n-r}\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{r}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{r}}{\lambda-\mu}\right)\left(\frac{\lambda^{r}-\mu^{r}}{\lambda-\mu}\right)$$
$$=-(-q)^{n-r}\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{r}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{r}}{\lambda-\mu}\right)f_{r}$$

sonuca ulaşılır.

3. 3. 5. Teorem (Cassini'nin Özdeşliği): $n\geq 1$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlik doğrudur.

$$D_{p,q,n-1}D_{p,q,n+1}-D_{p,q,n}^{2}=-(-q)^{n-1}\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu}{\lambda-\mu}\right).$$

İspat : 3. 3. 4. Teoreminde $r=1$ yazılırsa önerme ispatlanır.

3. 4. (p,q)-Fibonacci Oktonyonları

Bu bölümde, (p,q) -Fibonacci oktonyonları ve (p,q) parametre ikilisinin özel durumları sonucu ortaya çıkan *k*-Fibonacci ve klasik Fibonacci oktonyonları tanımlanmakta ve bu oktonyonlar üzerine bazı özdeşlikler sunulmaktadır

3. 4. 1. Tanım: $n\geq 0$ olmak üzere,

$$O_{p,q,n}=\sum_{s=0}^{7}F_{p,q,n+s}e_{s}=F_{p,q,n}e_{0}+F_{p,q,n+1}e_{1}+F_{p,q,n+2}e_{2}+\ldots+F_{p,q,n+7}e_{7}$$

şeklinde tanımlı $O_{p,q,n}\in \mathbb{O}$ kuaterniyon sayılarına (p,q)-Fibonacci oktonyonları denir.

Aşağıdaki $(p,q)-$ Fibonacci oktonyonları için bazı özdeşlikleri içeren önerme verilmiştir (İpek ve Çimen, 2016).

3. 4. 1. Önerme: $n\geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $O_{p,q,n}+\overline{O}_{p,q,n}=2F_{p,q,n}$,

ii. $O_{p,q,n}\overline{O}_{p,q,n}=\sum_{s=0}^{7}F_{p,q,n+s}^{2}$,

iii. $O^2_{p,q,n} = -\sum_{s=0}^{7} F^2_{p,q,n+s} + 2F_{p,q,n}O_{p,q,n}$,

iv. $O^2_{p,q,n} + O_{p,q,n}\bar{O}_{p,q,n} = 2F_{p,q,n}O_{p,q,n}$.

İspat:

i. $O_{p,q,n} + \bar{O}_{p,q,n} = W_{33}$ olsun. Böylece,

$$
\begin{aligned}
W_{33} &= F_{p,q,n}e_0 + F_{p,q,n+1}e_1 + F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2 + ... + F_{p,q,n+7}\mathrm{e}_7 + F_{p,q,n}e_0 - F_{p,q,n+1}e_1 - F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2 \\
&\quad - ... - F_{p,q,n+7}\mathrm{e}_7 \\
&= 2F_{p,q,n}, \quad (e_0 = 1)
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

ii. $O_{p,q,n}\bar{O}_{p,q,n} = W_{34}$ olsun. $O_{p,q,n}\bar{O}_{p,q,n}$ için oktonyonların çarpımı tanımı hatırlanır ve bazı cebirsel işlemler yapılırsa,

$$
\begin{aligned}
W_{34} &= \left(F_{p,q,n}e_0 + F_{p,q,n+1}e_1 + F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2 + ... + F_{p,q,n+7}\mathrm{e}_7\right)\left(F_{p,q,n}e_0 - F_{p,q,n+1}e_1\right. \\
&\quad \left. - F_{p,q,n+2}\mathrm{e}_2 - ... - F_{p,q,n+7}\mathrm{e}_7\right) \\
&= \left(F^2_{p,q,n} + F^2_{p,q,n+1} + F^2_{p,q,n+3} + ... + F^2_{p,q,n+7}\right)e_0 + \left(-F_{p,q,n}F_{p,q,n+1} + F_{p,q,n+1}F_{p,q,n}\right. \\
&\quad - F_{p,q,n+2}F_{p,q,n+3} + F_{p,q,n+3}F_{p,q,n+2} - F_{p,q,n+4}F_{p,q,n+5} + F_{p,q,n+5}F_{p,q,n+4} \\
&\quad \left. - F_{p,q,n+7}F_{p,q,n+6} + F_{p,q,n+6}F_{p,q,n+7}\right)e_1 + \left(-F_{p,q,n}F_{p,q,n+2} + F_{p,q,n+2}F_{p,q,n}\right. \\
&\quad - F_{p,q,n+3}F_{p,q,n+1} + F_{p,q,n+1}F_{p,q,n+3} - F_{p,q,n+4}F_{p,q,n+6} + F_{p,q,n+6}F_{p,q,n+4} \\
&\quad \left. - F_{p,q,n+5}F_{p,q,n+7} + F_{p,q,n+7}F_{p,q,n+5}\right)e_2 + ... + \left(-F_{p,q,n}F_{p,q,n+7} + F_{p,q,n+7}F_{p,q,n}\right. \\
&\quad - F_{p,q,n+2}F_{p,q,n+5} + F_{p,q,n+5}F_{p,q,n+2} - F_{p,q,n+3}F_{p,q,n+4} + F_{p,q,n+4}F_{p,q,n+3} \\
&\quad \left. - F_{p,q,n+6}F_{p,q,n+1} + F_{p,q,n+1}F_{p,q,n+6}\right)e_7 \\
&= F^2_{p,q,n} + F^2_{p,q,n+1} + F^2_{p,q,n+2} + ... + F^2_{p,q,n+7} \\
&= \sum_{s=0}^{7} F^2_{p,q,n+s}, \quad (e_0 = 1)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

iii. $O_{p,q,n}O_{p,q,n} = W_{35}$ olsun. $O_{p,q,n}O_{p,q,n}$ için oktonyonların çarpımı tanımı hatırlanır ve bazı cebirsel işlemler yapılırsa,

$$W_{35}=\left(F_{p,q,n}e_0+F_{p,q,n+1}e_1+F_{p,q,n+2}e_2+...+F_{p,q,n+7}e_7\right)\left(F_{p,q,n}e_0+F_{p,q,n+1}e_1+F_{p,q,n+2}e_2\right.$$
$$\left.+...+F_{p,q,n+7}e_7\right)$$
$$=\left(F_{p,q,n}^2-F_{p,q,n+1}^2-F_{p,q,n+3}^2-...-F_{p,q,n+7}^2\right)e_0+\left(F_{p,q,n}F_{p,q,n+1}+F_{p,q,n+1}F_{p,q,n}\right.$$
$$+F_{p,q,n+2}F_{p,q,n+3}-F_{p,q,n+3}F_{p,q,n+2}+F_{p,q,n+4}F_{p,q,n+5}-F_{p,q,n+5}F_{p,q,n+4}$$
$$\left.+F_{p,q,n+7}F_{p,q,n+6}-F_{p,q,n+6}F_{p,q,n+7}\right)e_1+\left(F_{p,q,n}F_{p,q,n+2}+F_{p,q,n+2}F_{p,q,n}\right.$$
$$+F_{p,q,n+3}F_{p,q,n+1}-F_{p,q,n+1}F_{p,q,n+3}+F_{p,q,n+4}F_{p,q,n+6}-F_{p,q,n+6}F_{p,q,n+4}$$
$$\left.+F_{p,q,n+5}F_{p,q,n+7}-F_{p,q,n+7}F_{p,q,n+5}\right)e_2+...+\left(F_{p,q,n}F_{p,q,n+7}+F_{p,q,n+7}F_{p,q,n}\right.$$
$$+F_{p,q,n+2}F_{p,q,n+5}-F_{p,q,n+5}F_{p,q,n+2}+F_{p,q,n+3}F_{p,q,n+4}-F_{p,q,n+4}F_{p,q,n+3}$$
$$\left.+F_{p,q,n+6}F_{p,q,n+1}-F_{p,q,n+1}F_{p,q,n+6}\right)e_7$$
$$=-F_{p,q,n}^2-F_{p,q,n+1}^2-F_{p,q,n+2}^2-...-F_{p,q,n+7}^2+2F_{p,q,n}\left(F_{p,q,n}e_0+F_{p,q,n+1}e_1\right.$$
$$\left.+F_{p,q,n+2}e_2+...+F_{p,q,n+7}e_7\right)$$
$$=-\sum_{s=0}^{7}F_{p,q,n+s}^2+2F_{p,q,n}O_{p,q,n},\ \ (e_0=1)$$

elde edilir ki, önermenin ispatı tamamlanır.

iv. ii. ve iii. önermelerin taraf tarafa toplanması ile

$$O_{p,q,n}^2+O_{p,q,n}\overline{O}_{p,q,n}=2F_{p,q,n}O_{p,q,n}$$

sonucu elde edilir.

3. 4. 2. Tanım: (p,q)-Fibonacci oktonyonlarında $q=1$ ve $p=k\in\mathbb{R}^{+}$ alınmasıyla k-Fibonacci oktonyonları,

$$O_{k,n}=\sum_{s=0}^{7}F_{k,n+s}e_s=F_{k,n}e_0+F_{k,n+1}e_1+F_{k,n+2}e_2+...+F_{k,n+7}e_7$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıdaki k-Fibonacci oktonyonları için bazı özdeşlikleri içeren önerme verilmiştir.

3. 4. 2. Önerme: $n\geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $O_{k,n}+\overline{O}_{k,n}=2F_{k,n}$,

ii. $O_{k,n}\bar{O}_{k,n}=\sum_{s=0}^{7}F_{k,n+s}^{2}$,

iii. $O_{k,n}^{2}=-\sum_{s=0}^{7}F_{k,n+s}^{2}+2F_{k,n}O_{k,n}$,

iv. $O_{k,n}^{2}+O_{k,n}\bar{O}_{k,n}=2F_{k,n}O_{k,n}$.

İspat:

i. $O_{k,n}+\bar{O}_{k,n}=W_{36}$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}W_{36}&=F_{k,n}e_0+F_{k,n+1}e_1+F_{k,n+2}\mathrm{e}_2+...+F_{k,n+7}\mathrm{e}_7+F_{k,n}e_0-F_{k,n+1}e_1-F_{k,n+2}\mathrm{e}_2\\&\quad-...-F_{k,n+7}\mathrm{e}_7\\&=2F_{k,n},\ \ (e_0=1)\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

ii. $O_{k,n}\bar{O}_{k,n}=W_{37}$ olsun. $O_{k,n}\bar{O}_{k,n}$ için oktonyonların çarpımı tanımı hatırlanır ve bazı cebirsel işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}W_{37}&=\left(F_{k,n}e_0+F_{k,n+1}e_1+F_{k,n+2}\mathrm{e}_2+...+F_{k,n+7}\mathrm{e}_7\right)\left(F_{k,n}e_0-F_{k,n+1}e_1-F_{k,n+2}\mathrm{e}_2\right.\\&\quad\left.-...-F_{p,q,n+7}\mathrm{e}_7\right)\\&=\left(F_{k,n}^2+F_{k,n+1}^2+F_{k,n+3}^2+...+F_{k,n+7}^2\right)e_0+\left(-F_{k,n}F_{k,n+1}+F_{k,n+1}F_{k,n}-F_{k,n+2}F_{k,n+3}\right.\\&\quad\left.+F_{k,n+3}F_{k,n+2}-F_{k,n+4}F_{k,n+5}+F_{k,n+5}F_{k,n+4}-F_{k,n+7}F_{k,n+6}+F_{k,n+6}F_{k,n+7}\right)e_1\\&\quad+\left(-F_{k,n}F_{k,n+2}+F_{k,n+2}F_{k,n}-F_{k,n+3}F_{k,n+1}+F_{k,n+1}F_{k,n+3}-F_{k,n+4}F_{k,n+6}\right.\\&\quad\left.+F_{k,n+6}F_{k,n+4}-F_{k,n+5}F_{k,n+7}+F_{k,n+7}F_{k,n+5}\right)e_2+...+\left(-F_{k,n}F_{k,n+7}+F_{k,n+7}F_{k,n}\right.\\&\quad-F_{k,n+2}F_{k,n+5}+F_{k,n+5}F_{k,n+2}-F_{k,n+3}F_{k,n+4}+F_{k,n+4}F_{k,n+3}-F_{k,n+6}F_{k,n+1}\\&\quad\left.+F_{k,n+1}F_{k,n+6}\right)e_7\\&=F_{k,n}^2+F_{k,n+1}^2+F_{k,n+2}^2+...+F_{k,n+7}^2\\&=\sum_{s=0}^{7}F_{k,n+s}^2,\ \ (e_0=1)\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

iii. $O_{k,n}O_{k,n} = W_{38}$ olsun. $O_{k,n}O_{k,n}$ için oktonyonların çarpımı tanımı hatırlanır ve bazı cebirsel işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}
W_{38} &= \left(F_{k,n}e_0 + F_{k,n+1}e_1 + F_{k,n+2}\mathrm{e}_2 + ... + F_{k,n+7}\mathrm{e}_7\right)\left(F_{k,n}e_0 + F_{k,n+1}e_1 + F_{k,n+2}\mathrm{e}_2\right. \\
&\quad \left. + ... + F_{p,q,n+7}\mathrm{e}_7\right) \\
&= \left(F_{k,n}^2 - F_{k,n+1}^2 - F_{k,n+3}^2 - ... - F_{k,n+7}^2\right)e_0 + \left(F_{k,n}F_{k,n+1} + F_{k,n+1}F_{k,n} + F_{k,n+2}F_{k,n+3}\right. \\
&\quad - F_{k,n+3}F_{k,n+2} + F_{k,n+4}F_{k,n+5} - F_{k,n+5}F_{k,n+4} + F_{k,n+7}F_{k,n+6} \left. - F_{k,n+6}F_{k,n+7}\right)e_1 \\
&\quad + \left(F_{k,n}F_{k,n+2} + F_{k,n+2}F_{k,n} + F_{k,n+3}F_{k,n+1} - F_{k,n+1}F_{k,n+3} + F_{k,n+4}F_{k,n+6}\right. \\
&\quad \left. - F_{k,n+6}F_{k,n+4} + F_{k,n+5}F_{k,n+7} - F_{k,n+7}F_{k,n+5}\right)e_2 + ... + \left(F_{k,n}F_{k,n+7} + F_{k,n+7}F_{k,n}\right. \\
&\quad + F_{k,n+2}F_{k,n+5} - F_{k,n+5}F_{k,n+2} + F_{k,n+3}F_{k,n+4} - F_{k,n+4}F_{k,n+3} + F_{k,n+6}F_{k,n+1} \\
&\quad \left. - F_{k,n+1}F_{k,n+6}\right)e_7 \\
&= -F_{k,n}^2 - F_{k,n+1}^2 - F_{k,n+2}^2 - ... - F_{k,n+7}^2 + 2F_{k,n}\left(F_{k,n}e_0 + F_{k,n+1}e_1 + F_{k,n+2}\mathrm{e}_2\right. \\
&\quad \left. + ... + F_{k,n+7}\mathrm{e}_7\right) \\
&= -\sum_{s=0}^{7} F_{k,n+s}^2 + 2F_{k,n}O_{k,n}, \quad (e_0 = 1)
\end{aligned}$$

elde edilir ki, önermenin ispatı tamamlanır.

iv. ii. ve iii. önermeleri taraf tarafa toplanması ile

$$O_{k,n}^2 + O_{k,n}\bar{O}_{k,n} = 2F_{k,n}O_{k,n}$$

sonucu elde edilir.

3. 4. 3. Tanım: k -Fibonacci oktonyonlarında $k = 1$ alınmasıyla klasik fibonacci oktonyonları,

$$O_n = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s}e_s = F_n e_0 + F_{n+1}e_1 + F_{n+2}e_2 + ... + F_{n+7}e_7$$

şeklinde tanımlanmaktadır **(** Keçilioğlu ve Akkus , 2015).

Aşağıdaki klasik fibonacci oktonyonları için bazı özdeşlikleri içeren önerme verilmiştir.

3. 4. 3. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere,

i. $O_n + \overline{O}_n = 2F_n$,

ii. $O_n\bar{O}_n = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s}^2 = 21F_{2n+7}$,

iii. $O_n^2 = -\sum_{s=0}^{7} F_{n+s}^2 + 2F_n O_n$,

iv. $O_n^2 + O_n\bar{O}_n = 2F_n O_n$,

özdeşlikler doğrudur (Keçilioğlu ve Akkus, 2015).

3. 5. Split (p,q)-Fibonacci Oktonyonları

Bu bölümde, split (p,q)-Fibonacci oktonyonları tanımlanmaktadır. Bu oktonyonlar üzerine bazı cebirsel özdeşlikler verilmektedir.

3. 5. 1. Tanım: $n \geq 0$ olmak üzere,

$$Q_{p,q,n} = \sum_{s=0}^{7} F_{p,q,n+s} e_s = F_{p,q,n} e_0 + F_{p,q,n+1} e_1 + F_{p,q,n+2} e_2 + \ldots + F_{p,q,n+7} e_7$$

şeklinde tanımlı $Q_{p,q,n} \in \hat{\mathrm{O}}$ kuaterniyon sayılarına split (p,q)-Fibonacci oktonyonları denir.

3. 5. 2. Tanım: Split (p,q)-Fibonacci oktonyonlarında $q=1$ ve $p = k \in \mathbb{R}^+$ alınmasıyla split k-Fibonacci oktonyonları,

$$Q_{k,n} = \sum_{s=0}^{7} F_{k,n+s} e_s = F_{k,n} e_0 + F_{k,n+1} e_1 + F_{k,n+2} e_2 + \ldots + F_{k,n+7} e_7$$

şeklinde tanımlanır.

$\{Q_{k,n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi üzerine bu tez çalışmasında elde edilen bazı bağıntılar aşağıdaki önerme ile sunulmaktadır.

3. 5. 1. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $Q_{k,n} + \bar{Q}_{k,n} = 2F_{k,n}$,

ii. $Q_{k,n}\overline{Q}_{k,n}=\sum_{s=0}^{3}F_{k,n+s}^{2}-\sum_{s=4}^{7}F_{k,n+s}^{2}$,

iii. $Q_{k,n}^{2}=-\sum_{s=0}^{3}F_{k,n+s}^{2}+\sum_{s=4}^{7}F_{k,n+s}^{2}+2F_{k,n}Q_{k,n}$,

iv. $Q_{k,n}^{2}+Q_{k,n}\overline{Q}_{k,n}=2F_{k,n}Q_{k,n}$.

İspat:

i. $Q_{k,n}+\overline{Q}_{k,n}=W_{39}$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned}W_{39}&=F_{k,n}e_0+F_{k,n+1}e_1+F_{k,n+2}e_2+\ldots+F_{k,n+7}e_7+F_{k,n}e_0-F_{k,n+1}e_1-F_{k,n+2}e_2\\&-\ldots-F_{k,n+7}e_7\\&=2F_{k,n}\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir.

ii. $Q_{k,n}\overline{Q}_{k,n}=W_{40}$ olsun. $Q_{k,n}\overline{Q}_{k,n}$ için split oktonyonlarının çarpımı tanımı hatırlanır ve bazı cebirsel işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned}W_{40}&=\left(F_{k,n}e_0+F_{k,n+1}e_1+F_{k,n+2}e_2+\ldots+F_{k,n+7}e_7\right)\left(F_{k,n}e_0-F_{k,n+1}e_1-F_{k,n+2}e_2\right.\\&\left.-\ldots-F_{k,n+7}e_7\right)\\&=\left(F_{k,n}F_{k,n}+\ldots+F_{k,n+3}F_{k,n+3}-F_{k,n+4}F_{k,n+4}-\ldots-F_{k,n+7}F_{k,n+7}\right)e_0\\&+\left(-F_{k,n}F_{k,n+1}+F_{k,n+1}F_{k,n}-F_{k,n+2}F_{k,n+3}+F_{k,n+3}F_{k,n+2}-F_{k,n+4}F_{k,n+5}\right.\\&\left.+F_{k,n+5}F_{k,n+4}-F_{k,n+6}F_{k,n+7}+F_{k,n+7}F_{k,n+6}\right)e_1+\left(-F_{k,n}F_{k,n+2}+F_{k,n+2}F_{k,n}\right.\\&-F_{k,n+3}F_{k,n+1}+F_{k,n+1}F_{k,n+3}-F_{k,n+4}F_{k,n+6}+F_{k,n+6}F_{k,n+4}-F_{k,n+7}F_{k,n+5}\\&\left.+F_{k,n+5}F_{k,n+7}\right)e_2+\ldots+\left(-F_{k,n}F_{k,n+7}+F_{k,n+7}F_{k,n}-F_{k,n+2}F_{k,n+5}+F_{k,n+5}F_{k,n+2}\right.\\&\left.-F_{k,n+4}F_{k,n+3}+F_{k,n+3}F_{k,n+4}-F_{k,n+6}F_{k,n+1}+F_{k,n+1}F_{k,n+6}\right)e_7\\&=F_{k,n}^2+F_{k,n+1}^2+F_{k,n+2}^2+F_{k,n+3}^2-F_{k,n+4}^2-F_{k,n+5}^2-F_{k,n+6}^2-F_{k,n+7}^2\\&=\sum_{s=0}^{3}F_{k,n+s}^{2}-\sum_{s=4}^{7}F_{k,n+s}^{2}\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

iii. $Q_{k,n}Q_{k,n}=W_{41}$ olsun. Bazı cebirsel işlemlerle,

$$
\begin{aligned}
W_{41} &= \left(F_{k,n}e_0 + F_{k,n+1}e_1 + F_{k,n+2}e_2 + \ldots + F_{k,n+7}e_7\right)\left(F_{k,n}e_0 + F_{k,n+1}e_1 + F_{k,n+2}e_2\right. \\
&\quad \left. + \ldots + F_{k,n+7}e_7\right) \\
&= (F_{k,n}F_{k,n} - \ldots - F_{k,n+3}F_{k,n+3} + F_{k,n+4}F_{k,n+4} + \ldots + F_{k,n+7}F_{k,n+7})e_0 \\
&\quad + \left(F_{k,n}F_{k,n+1} + F_{k,n+1}F_{k,n} + F_{k,n+2}F_{k,n+3} - F_{k,n+3}F_{k,n+2} + F_{k,n+4}F_{k,n+5}\right. \\
&\quad \left. - F_{k,n+5}F_{k,n+4} + F_{k,n+6}F_{k,n+7} - F_{k,n+7}F_{k,n+6}\right)e_1 + \left(F_{k,n}F_{k,n+2} + F_{k,n+2}F_{k,n}\right. \\
&\quad + F_{k,n+3}F_{k,n+1} - F_{k,n+1}F_{k,n+3} + F_{k,n+4}F_{k,n+6} - F_{k,n+6}F_{k,n+4} + F_{k,n+7}F_{k,n+5} \\
&\quad \left. - F_{k,n+5}F_{k,n+7}\right)e_2 + \ldots + \left(F_{k,n}F_{k,n+7} + F_{k,n+7}F_{k,n} + F_{k,n+2}F_{k,n+5} - F_{k,n+5}F_{k,n+2}\right. \\
&\quad \left. + F_{k,n+4}F_{k,n+3} - F_{k,n+3}F_{k,n+4} + F_{k,n+6}F_{k,n+1} - F_{k,n+1}F_{k,n+6}\right)e_7 \\
&= -F_{k,n}^2 - F_{k,n+1}^2 - F_{k,n+2}^2 - F_{k,n+3}^2 + F_{k,n+4}^2 + F_{k,n+5}^2 + F_{k,n+6}^2 + F_{k,n+7}^2 \\
&\quad + 2F_{k,n}\left(F_{k,n}e_0 + F_{k,n+1}e_1 + F_{k,n+2}e_2 + \ldots + F_{k,n+7}e_7\right) \\
&= -\sum_{s=0}^{3} F_{k,n+s}^2 + \sum_{s=4}^{7} F_{k,n+s}^2 + 2F_{k,n}Q_{k,n}
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir.

iv. ii. ve iii. önermelerin taraf tarafa toplanmasıyla

$$Q_{k,n}^2 + Q_{k,n}\bar{Q}_{k,n} = 2F_{k,n}Q_{k,n}$$

özdeşliğine ulaşılır.

3. 5. 3. Tanım: Split k-Fibonacci oktonyonlarında $k=1$ alınmasıyla split fibonacci oktonyonları ,

$$Q_n = \sum_{s=0}^{7} F_{n+s}e_s = F_n e_0 + F_{n+1}e_1 + F_{n+2}e_2 + \ldots + F_{n+7}e_7$$

şeklinde tanımlanır **(** Keçilioğlu ve Akkus , 2015).

Aşağıdaki split Fibonacci oktonyonları için bazı özdeşlikleri içeren önerme verilmiştir.

3. 5. 2. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $Q_n + \bar{Q}_n = 2F_n$,

ii. $Q_n\bar{Q}_n = \sum_{s=0}^{3} F_{n+s}^2 - \sum_{s=4}^{7} F_{n+s}^2$,

iii. $Q_n^2 = -\sum_{s=0}^{3} F_{n+s}^2 + \sum_{s=4}^{7} F_{n+s}^2 + 2F_n Q_n$,

iv. $Q_n^2 + Q_n \overline{Q}_n = 2F_n Q_n$.

İspat:

i. $Q_n + \overline{Q}_n = W_{42}$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} W_{42} &= F_n e_0 + F_{n+1} e_1 + F_{n+2} e_2 + \ldots + F_{n+7} e_7 + F_n e_0 - F_{n+1} e_1 - F_{n+2} e_2 - \ldots - F_{n+7} e_7 \\ &= 2F_n \end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir.

ii. $Q_n \overline{Q}_n = W_{43}$ olsun. $Q_n \overline{Q}_n$ için split oktonyonlarının çarpımı tanımı hatırlanır ve bazı cebirsel işlemler yapılırsa,

$$\begin{aligned} W_{43} &= \left(F_n e_0 + F_{n+1} e_1 + F_{n+2} e_2 + \ldots + F_{n+7} e_7\right)\left(F_n e_0 - F_{n+1} e_1 - F_{n+2} e_2 - \ldots - F_{n+7} e_7\right) \\ &= (F_n F_n + \ldots + F_{n+3} F_{n+3} - F_{n+4} F_{n+4} - \ldots - F_{n+7} F_{n+7}) e_0 + \left(-F_n F_{n+1} + F_{n+1} F_n\right. \\ &\quad -F_{n+2} F_{n+3} + F_{n+3} F_{n+2} - F_{n+4} F_{n+5} + F_{n+5} F_{n+4} - F_{n+6} F_{n+7} + F_{n+7} F_{n+6} \left.\right) e_1 + \left(-F_n F_{n+2}\right. \\ &\quad +F_{n+2} F_n - F_{n+3} F_{n+1} + F_{n+1} F_{n+3} - F_{n+4} F_{n+6} + F_{n+6} F_{n+4} - F_{n+7} F_{n+5} + F_{n+5} F_{n+7} \left.\right) e_2 \\ &\quad +\ldots + \left(-F_n F_{n+7} + F_{n+7} F_n - F_{n+2} F_{n+5} + F_{n+5} F_{n+2} - F_{n+4} F_{n+3} + F_{n+3} F_{n+4} - F_{n+6} F_{n+1}\right. \\ &\quad \left. +F_{n+1} F_{n+6}\right) e_7 \\ &= F_n^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 - F_{n+4}^2 - F_{n+5}^2 - F_{n+6}^2 - F_{n+7}^2 \\ &= \sum_{s=0}^{3} F_{n+s}^2 - \sum_{s=4}^{7} F_{n+s}^2 \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

iii. $Q_n Q_n = W_{44}$ olsun. Bazı cebirsel işlemlerle,

$$\begin{aligned} W_{44} &= \left(F_n e_0 + F_{n+1} e_1 + F_{n+2} e_2 + \ldots + F_{n+7} e_7\right)\left(F_n e_0 + F_{n+1} e_1 + F_{n+2} e_2 + \ldots + F_{n+7} e_7\right) \\ &= (F_n F_n - \ldots - F_{n+3} F_{n+3} + F_{n+4} F_{n+4} + \ldots + F_{n+7} F_{n+7}) e_0 + \left(F_n F_{n+1} + F_{n+1} F_n\right. \\ &\quad +F_{n+2} F_{n+3} - F_{n+3} F_{n+2} + F_{n+4} F_{n+5} - F_{n+5} F_{n+4} + F_{n+6} F_{n+7} - F_{n+7} F_{n+6} \left.\right) e_1 + \left(F_n F_{n+2}\right. \\ &\quad +F_{n+2} F_n + F_{n+3} F_{n+1} - F_{n+1} F_{n+3} F_{n+4} F_{n+6} - F_{n+6} F_{n+4} + F_{n+7} F_{n+5} - F_{n+5} F_{n+7} \left.\right) e_2 \\ &\quad +\ldots + \left(F_n F_{n+7} + F_{n+7} F_{k,n} + F_{n+2} F_{n+5} - F_{n+5} F_{n+2} + F_{n+4} F_{n+3} - F_{n+3} F_{k,n+4}\right. \\ &\quad \left. +F_{n+6} F_{n+1} - F_{n+1} F_{n+6}\right) e_7 \end{aligned}$$

$$=-F_n^2-F_{n+1}^2-F_{n+2}^2-F_{n+3}^2+F_{n+4}^2+F_{n+5}^2+F_{n+6}^2+F_{n+7}^2+2F_n\left(F_ne_0+F_{n+1}e_1\right.$$
$$\left.+F_{n+2}e_2+\ldots+F_{n+7}e_7\right)$$
$$=-\sum_{s=0}^{3}F_{n+s}^2+\sum_{s=4}^{7}F_{n+s}^2+2F_nQ_n$$

sonucu elde edilir.

iv. ii. ve iii. önermelerin taraf tarafa toplanması ile

$$Q_n^2+Q_n\bar{Q}_n=2F_nQ_n$$

özdeşliğine ulaşılır.

Gösterim kolaylığı açısından $F_{p,q,n}\cong f_n$ gösterimi kullanılacaktır.

$\left\{Q_{p,q,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi üzerine bu tez çalışmasında elde edilen bazı bağıntılar aşağıdaki önermeler ve teoremler ile sunulmaktadır.

3. 5. 3. Önerme: $n\geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $Q_{p,q,n}+\bar{Q}_{p,q,n}=2f_n$,

ii. $Q_{p,q,n}\bar{Q}_{p,q,n}=\sum_{s=0}^{3}f_{n+s}^2-\sum_{s=4}^{7}f_{n+s}^2,$

iii. $Q_{p,q,n}^2=-\sum_{s=0}^{3}f_{n+s}^2+\sum_{s=4}^{7}f_{n+s}^2+2f_nQ_{p,q,n}$,

iv. $Q_{p,q,n}^2+Q_{p,q,n}\bar{Q}_{p,q,n}=2f_nQ_{p,q,n}$.

İspat:

i. $Q_{p,q,n}+\bar{Q}_{p,q,n}=W_{45}$ olsun. Split oktonyonlarının toplamı tanımı ile

$$W_{45}=f_ne_0+f_{n+1}e_1+f_{n+2}e_2+\ldots+f_{n+7}e_7+f_ne_0-f_{n+1}e_1-f_{n+2}e_2-\ldots-f_{n+7}e_7$$
$$=2f_n$$

özdeşliği elde edilir.

ii. $Q_n\bar{Q}_n=W_{46}$ olsun. Split oktonyonlarının çarpımı hatırlanarak bazı cebirsel işlemlerle

$$\begin{aligned}
W_{46} &= \left(f_n e_0 + f_{n+1}e_1 + f_{n+2}e_2 + \ldots + f_{n+7}e_7\right)\left(f_n e_0 - f_{n+1}e_1 - f_{n+2}e_2 - \ldots - f_{n+7}e_7\right) \\
&= (f_n f_n + \ldots + f_{n+3} f_{n+3} - f_{n+4} f_{n+4} - \ldots - f_{n+7} f_{n+7})e_0 + \left(-f_n f_{n+1} + f_{n+1} f_n \right.\\
&\quad - f_{n+2} f_{n+3} + f_{n+3} f_{n+2} - f_{n+4} f_{n+5} + f_{n+5} f_{n+4} - f_{n+6} f_{n+7} + \left. f_{n+7} f_{n+6}\right)e_1 \\
&\quad + \left(-f_n f_{n+2} + f_{n+2} f_n - f_{n+3} f_{n+1} + f_{n+1} f_{n+3} - f_{n+4} f_{n+6} + f_{n+6} f_{n+4} - f_{n+7} f_{n+5}\right.\\
&\quad \left. + f_{n+5} f_{n+7}\right)e_2 + \ldots + \left(-f_n f_{n+7} + f_{n+7} f_n - f_{n+2} f_{n+5} + f_{n+5} f_{n+2} - f_{n+4} f_{n+3}\right.\\
&\quad \left. + f_{n+3} f_{n+4} - f_{n+6} f_{n+1} + f_{n+1} f_{n+6}\right)e_7 \\
&= f_n^2 + f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 - f_{n+4}^2 - f_{n+5}^2 - f_{n+6}^2 - f_{n+7}^2 \\
&= \sum_{s=0}^{3} f_{n+s}^2 - \sum_{s=4}^{7} f_{n+s}^2
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

iii. $Q_n Q_n = W_{47}$ olsun. Split kuaterniyonlar arasındaki cebirsel işlemlerle

$$\begin{aligned}
W_{47} &= \left(f_n e_0 + f_{n+1}e_1 + f_{n+2}e_2 + \ldots + f_{n+7}e_7\right)\left(f_n e_0 + f_{n+1}e_1 + f_{n+2}e_2 + \ldots + f_{n+7}e_7\right) \\
&= (f_n f_n - \ldots - f_{n+3} f_{n+3} + f_{n+4} f_{n+4} + \ldots + f_{n+7} f_{n+7})e_0 + \left(f_n f_{n+1} + f_{n+1} f_n \right.\\
&\quad + f_{n+2} f_{n+3} - f_{n+3} f_{n+2} + f_{n+4} f_{n+5} - f_{n+5} f_{n+4} + f_{n+6} f_{n+7} - \left. f_{n+7} f_{n+6}\right)e_1 \\
&\quad + \left(f_n f_{n+2} + f_{n+2} f_n + f_{n+3} f_{n+1} - f_{n+1} f_{n+3} + f_{n+4} f_{n+6} - f_{n+6} f_{n+4} + f_{n+7} f_{n+5}\right.\\
&\quad \left. - f_{n+5} f_{n+7}\right)e_2 + \ldots + \left(f_n f_{n+7} + f_{n+7} f_{k,n} + f_{n+2} f_{n+5} - f_{n+5} f_{n+2} + f_{n+4} f_{n+3}\right.\\
&\quad \left. - f_{n+3} f_{k,n+4} + f_{n+6} f_{n+1} - f_{n+1} f_{n+6}\right)e_7 \\
&= -f_n^2 - f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2 + f_{n+4}^2 + f_{n+5}^2 + f_{n+6}^2 + f_{n+7}^2 + 2 f_n \left(f_n e_0 + f_{n+1}e_1\right.\\
&\quad \left. + f_{n+2}e_2 + \ldots + f_{n+7}e_7\right) \\
&= -f_n^2 - f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2 + f_{n+4}^2 + f_{n+5}^2 + f_{n+6}^2 + f_{n+7}^2 + 2 f_n Q_{p,q,n} \\
&= -\sum_{s=0}^{3} f_{n+s}^2 + \sum_{s=4}^{7} f_{n+s}^2 + 2 f_n Q_{p,q,n}
\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir.

iv. ii. ve iii. önermelerin taraf tarafa toplanmasıyla

$$Q_{p,q,n}^2 + Q_{p,q,n}\overline{Q}_{p,q,n} = 2 f_n Q_{p,q,n}$$

özdeşliğine ulaşılır.

3. 5. 4. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $Q_{p,q,2n+1}e_0 - \ldots - Q_{p,q,2n+4}e_3 - Q_{p,q,2n+5}e_4 - \ldots - Q_{p,q,2n+8}e_7 = qQ_{p,q,n}\bar{Q}_{p,q,n}$
$+Q_{p,q,n+1}\bar{Q}_{p,q,n+1}$,

ii. $-Q_{p,q,2n+1}e_0 + \ldots + Q_{p,q,2n+4}e_3 + Q_{p,q,2n+5}e_4 + \ldots + Q_{p,q,2n+8}e_7 = -qQ_{p,q,n}\bar{Q}_{p,q,n}$
$-Q_{p,q,n+1}\bar{Q}_{p,q,n+1}$,

iii. $Q_{p,q,2n+1}e_0 + \ldots + Q_{p,q,2n+4}e_3 + Q_{p,q,2n+5}e_4 + \ldots + Q_{p,q,2n+8}e_7 = -qQ_{p,q,n}\bar{Q}_{p,q,n}$
$-Q_{p,q,n+1}\bar{Q}_{p,q,n+1} + 2Q_{p,q,2n+1}$.

İspat:

i. $Q_{p,q,2n+1}e_0 - \ldots - Q_{p,q,2n+4}e_3 - Q_{p,q,2n+5}e_4 - \ldots - Q_{p,q,2n+8}e_7 = W_{48}$ olsun. Oktonyonların çarpımı hatırlanır ve 3. 1. 1 Önermesinin 1. özdeşliği ile

$$\begin{aligned}
W_{48} &= \left(f_{2n+1}e_0 + \ldots + f_{2n+4}e_3 + f_{2n+5}e_4 + \ldots + f_{2n+8}e_7 \right)e_0 - \ldots - \left(f_{2n+4}e_0 + \ldots + f_{2n+7}e_3 \right. \\
&\quad \left. + f_{2n+8}e_4 + \ldots + f_{2n+11}e_7 \right)e_3 - \left(f_{2n+5}e_0 + \ldots + f_{2n+8}e_3 + f_{2n+9}e_4 + \ldots + f_{2n+12}e_7 \right)e_4 \\
&\quad - \ldots - \left(f_{2n+8}e_0 + \ldots + f_{2n+11}e_3 + f_{2n+12}e_4 + \ldots + f_{2n+15}e_7 \right)e_7 \\
&= f_{2n+1}e_0 + \ldots + f_{2n+4}e_3 + f_{2n+5}e_4 + \ldots + f_{2n+8}e_7 - \ldots - f_{2n+4}e_3 + \ldots + f_{2n+7} - f_{2n+8}e_7 \\
&\quad + \ldots + f_{2n+11}e_4 - f_{2n+5}e_4 - \ldots + f_{2n+8}e_7 - f_{2n+9} + \ldots + f_{2n+12}e_3 - \ldots - f_{2n+8}e_7 \\
&\quad - \ldots - f_{2n+11}e_4 - f_{2n+12}e_3 - \ldots - f_{2n+15} \\
&= f_{2n+1} + \ldots + f_{2n+7} - f_{2n+9} - \ldots - f_{2n+15} \\
&= qf_n^2 + f_{n+1}^2 + \ldots + qf_{n+3}^2 + f_{n+4}^2 - qf_{n+4}^2 - f_{n+5}^2 - \ldots - qf_{n+7}^2 - f_{n+8}^2 \\
&= q\left(f_n^2 + \ldots + f_{n+3}^2 - f_{n+4}^2 - \ldots - f_{n+7}^2 \right) + f_{n+1}^2 + \ldots + f_{n+4}^2 - f_{n+5}^2 - \ldots - f_{n+8}^2 \\
&= qQ_{p,q,n}\bar{Q}_{p,q,n} + Q_{p,q,n+1}\bar{Q}_{p,q,n+1}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

ii. $-Q_{p,q,2n+1}e_0 + \ldots + Q_{p,q,2n+4}e_3 + Q_{p,q,2n+5}e_4 + \ldots + Q_{p,q,2n+8}e_7 = W_{49}$ olsun. i. önermenin ispatına benzer olarak oktonyonların çarpımı, 3. 1. 1 Önermesinin 1. özdeşliği ve bazı cebirsel işlemlerle,

$$\begin{aligned}
W_{49} &= -\left(f_{2n+1}e_0 + \ldots + f_{2n+4}e_3 + f_{2n+5}e_4 + \ldots + f_{2n+8}e_7 \right)e_0 + \ldots + \left(f_{2n+4}e_0 + \ldots + f_{2n+7}e_3 \right. \\
&\quad \left. + f_{2n+8}e_4 + \ldots + f_{2n+11}e_7 \right)e_3 + \left(f_{2n+5}e_0 + \ldots + f_{2n+8}e_3 + f_{2n+9}e_4 + \ldots + f_{2n+12}e_7 \right)e_4 \\
&\quad + \ldots + \left(f_{2n+8}e_0 + \ldots + f_{2n+11}e_3 + f_{2n+12}e_4 + \ldots + f_{2n+15}e_7 \right)e_7
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -f_{2n+1}e_0 - \ldots - f_{2n+4}e_3 - f_{2n+5}e_4 - \ldots - f_{2n+8}e_7 + \ldots + f_{2n+4}e_3 + \ldots - f_{2n+7} \\
&\quad + f_{2n+8}e_7 - \ldots - f_{2n+11}e_4 + f_{2n+5}e_4 + \ldots - f_{2n+8}e_7 + f_{2n+9} - \ldots - f_{2n+12}e_3 \\
&\quad + \ldots + f_{2n+8}e_7 + \ldots + f_{2n+11}e_4 + f_{2n+12}e_3 + \ldots + f_{2n+15} \\
&= -f_{2n+1} - \ldots - f_{2n+7} + f_{2n+9} + \ldots + f_{2n+15} \\
&= -qf_n^2 - f_{n+1}^2 - \ldots - qf_{n+3}^2 - f_{n+4}^2 + qf_{n+4}^2 + f_{n+5}^2 + \ldots + qf_{n+7}^2 + f_{n+8}^2 \\
&= -q\left(f_n^2 + \ldots + f_{n+3}^2 - f_{n+4}^2 - \ldots - f_{n+7}^2\right) - \left(f_{n+1}^2 + \ldots + f_{n+4}^2 - f_{n+5}^2 - \ldots - f_{n+8}^2\right) \\
&= -qQ_{p,q,n}\overline{Q}_{p,q,n} - Q_{p,q,n+1}\overline{Q}_{p,q,n+1}
\end{aligned}
$$

sonucuna ulaşılır.

iii. $Q_{p,q,2n+1}e_0 + \ldots + Q_{p,q,2n+4}e_3 + Q_{p,q,2n+5}e_4 + \ldots + Q_{p,q,2n+8}e_7 = W_{50}$ olsun. i. önermenin ispatına benzer olarak oktonyonların çarpımı, 3. 1. 1 Önermesinin 1. özdeşliği ve bazı cebirsel işlemlerle

$$
\begin{aligned}
W_{50} &= \left(f_{2n+1}e_0 + \ldots + f_{2n+4}e_3 + f_{2n+5}e_4 + \ldots + f_{2n+8}e_7\right)e_0 + \ldots + \left(f_{2n+4}e_0 + \ldots + f_{2n+7}e_3\right. \\
&\quad \left. + f_{2n+8}e_4 + \ldots + f_{2n+11}e_7\right)e_3 + \left(f_{2n+5}e_0 + \ldots + f_{2n+8}e_3 + f_{2n+9}e_4 + \ldots + f_{2n+12}e_7\right)e_4 \\
&\quad + \ldots + \left(f_{2n+8}e_0 + \ldots + f_{2n+11}e_3 + f_{2n+12}e_4 + \ldots + f_{2n+15}e_7\right)e_7 \\
&= f_{2n+1}e_0 + \ldots + f_{2n+4}e_3 + f_{2n+5}e_4 + \ldots + f_{2n+8}e_7 + \ldots + f_{2n+4}e_3 + \ldots - f_{2n+7} + f_{2n+8}e_7 \\
&\quad - \ldots - f_{2n+11}e_4 + f_{2n+5}e_4 + \ldots - f_{2n+8}e_7 + f_{2n+9} - \ldots - f_{2n+12}e_3 + \ldots + f_{2n+8}e_7 \\
&\quad + \ldots + f_{2n+11}e_4 + f_{2n+12}e_3 + \ldots + f_{2n+15} \\
&= -f_{2n+1} - \ldots - f_{2n+7} + f_{2n+9} + \ldots + f_{2n+15} + 2(f_{2n+1}e_0 + \ldots + f_{2n+4}e_3 + f_{2n+5}e_4 \\
&\quad + \ldots + f_{2n+8}e_7) \\
&= -qf_n^2 - f_{n+1}^2 - \ldots - qf_{n+3}^2 - f_{n+4}^2 + qf_{n+4}^2 + f_{n+5}^2 + \ldots + qf_{n+7}^2 + f_{n+8}^2 + 2Q_{p,q,2n+1} \\
&= -q\left(f_n^2 + \ldots + f_{n+3}^2 - f_{n+4}^2 - \ldots - f_{n+7}^2\right) - \left(f_{n+1}^2 + \ldots + f_{n+4}^2 - f_{n+5}^2 - \ldots - f_{n+8}^2\right) \\
&\quad + 2Q_{p,q,2n+1} \\
&= -qQ_{p,q,n}\overline{Q}_{p,q,n} - Q_{p,q,n+1}\overline{Q}_{p,q,n+1} + 2Q_{p,q,2n+1}
\end{aligned}
$$

özdeşliği elde edilir.

Aşağıdaki teoremde $\left\{Q_{p,q,n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin genel terimi için Binet formülü verilmektedir.

3. 5. 1. Teorem (Binet Formülü): $\left\{e_0, e_1, e, \ldots, e_7\right\} \subset \widehat{\mathrm{O}}$ olsun. $\widehat{\lambda} = \sum_{s=0}^{7} \lambda^s e_s$ ve $\widehat{\mu} = \sum_{s=0}^{7} \mu^s e_s$ olmak üzere $n \geq 0$ için,

$$Q_{p,q,n}=\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n}-\hat{\mu}\mu^{n}}{\lambda-\mu}$$

formülü doğrudur.

İspat: $Q_{p,q,n}=W_{51}$ olsun. $Q_{p,q,n}$ tanımından ve f_n için Binet formülünden,

$$\begin{aligned}
W_{51}&=\sum_{s=0}^{7} f_{n+s}e_s\\
&=\sum_{s=0}^{7}\left(\frac{\lambda^{n+s}-\mu^{n+s}}{\lambda-\mu}\right)e_s\\
&=\frac{\lambda^{n}}{\lambda-\mu}(\sum_{s=0}^{7}\lambda^{s}e_s)-\frac{\mu^{n}}{\lambda-\mu}(\sum_{s=0}^{7}\mu^{s}e_s)\\
&=\frac{\hat{\lambda}\lambda^{n}-\hat{\mu}\mu^{n}}{\lambda-\mu}
\end{aligned}$$

formülü elde edilir.

3. 5. 5. Önerme: Aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $pQ_{p,q,2n}+qQ_{p,q,2n-1}=Q_{p,q,2n+1}$, $n\geq 1$,

ii. $p^2Q_{p,q,2n}+2pqQ_{p,q,2n-1}+q^2Q_{p,q,2n-2}=Q_{p,q,2n+2}$, $n\geq 2$,

iii. $p^3Q_{p,q,2n}+3p^2qQ_{p,q,2n-1}+3pq^2Q_{p,q,2n-2}+q^3Q_{p,q,2n-3}=Q_{p,q,2n+3}$, $n\geq 2$.

İspat:

i. $pQ_{p,q,2n}+qQ_{p,q,2n-1}=W_{52}$ olsun. Split oktonyonlar için, skaler ile oktonyon çarpımı, oktonyonların toplamı ve (*p*,*q*)-Fibonacci sayı dizisi tanımı hatırlanırsa

$$\begin{aligned}
W_{52}&=p\left(f_{2n}e_0+f_{2n+1}e_1+f_{2n+2}e_2+\ldots+f_{2n+7}e_7\right)+q\left(f_{2n-1}e_0+f_{2n}e_1+f_{2n+1}e_2\right.\\
&\quad\left.+\ldots+f_{2n+6}e_7\right)\\
&=\left(pf_{2n}+qf_{2n-1}\right)e_0+\left(pf_{2n+1}+qf_{2n}\right)e_1+\left(pf_{2n+2}+qf_{2n+1}\right)e_2\\
&\quad+\ldots+\left(pf_{2n+7}+qf_{2n+6}\right)e_7\\
&=f_{2n+1}e_0+f_{2n+2}e_1+f_{2n+3}e_2+\ldots+f_{2n+8}e_7\\
&=Q_{p,q,2n+1}
\end{aligned}$$

özdeşliği elde edilir. Aynı özdeşliğe $Q_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

3. 3. 5. Önermedeki i. önermenin ispatına benzer şekilde elde edilir.

ii. $p^2 Q_{p,q,2n} + 2pqQ_{p,q,2n-1} + q^2 Q_{p,q,2n-2} = W_{53}$ olsun. Split oktonyonlarındaki cebirsel işlemler ve 3. 1. 1. Önermesinin 2. özdeşliği ile

$$\begin{aligned}
W_{53} &= p^2\left(f_{2n}e_0 + f_{2n+1}e_1 + f_{2n+2}e_2 + \ldots + f_{2n+7}e_7\right) + 2pq\left(f_{2n-1}e_0 + f_{2n}e_1 + f_{2n+1}e_2\right. \\
&\quad \left. + \ldots + f_{2n+6}e_7\right) + q^2\left(f_{2n-2}e_0 + f_{2n-1}e_1 + f_{2n}e_2 + \ldots + f_{2n+5}e_7\right) \\
&= \left(p^2 f_{2n} + 2pqf_{2n-1} + q^2 f_{2n-2}\right)e_0 + \left(p^2 f_{2n+1} + 2pqf_{2n} + q^2 f_{2n-1}\right)e_1 \\
&\quad + \left(p^2 f_{2n+2} + 2pqf_{2n+1} + q^2 f_{2n}\right)e_2 + \ldots + \left(p^2 f_{2n+7} + 2pqf_{2n+6} + q^2 f_{2n+5}\right)e_7 \\
&= f_{2n+2}e_0 + f_{2n+3}e_1 + f_{2n+4}e_2 + \ldots + f_{2n+9}e_7 \\
&= Q_{p,q,2n+2}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Aynı özdeşliğe $Q_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak,

3. 3. 5. Önermedeki ii. önermenin ikinci ispatına benzer şekilde elde edilir.

iii. $p^3 Q_{p,q,2n} + 3p^2 qQ_{p,q,2n-1} + 3pq^2 Q_{p,q,2n-2} + q^3 Q_{p,q,2n-3} = W_{54}$ olsun. Böylece split oktonyonlarındaki cebirsel işlemler ve 3. 1. 1. Önermesinin 3. özdeşliği ile

$$\begin{aligned}
W_{54} &= p^3\left(f_{2n}e_0 + f_{2n+1}e_1 + f_{2n+2}e_2 + \ldots + f_{2n+7}e_7\right) + 3p^2 q\left(f_{2n-1}e_0 + f_{2n}e_1 + f_{2n+1}e_2\right. \\
&\quad \left. + \ldots + f_{2n+6}e_7\right) + 3pq^2\left(f_{2n-2}e_0 + f_{2n-1}e_1 + f_{2n}e_2 + \ldots + f_{2n+5}e_7\right) + q^3\left(f_{2n-3}e_0\right. \\
&\quad \left. + f_{2n-2}e_1 + f_{2n-1}e_2 + \ldots + f_{2n+4}e_7\right) \\
&= \left(p^3 f_{2n} + 3p^2 qf_{2n-1} + 3pq^2 f_{2n-2} + q^3 f_{2n-3}\right)e_0 + \left(p^3 f_{2n+1} + 3p^2 qf_{2n} + 3pq^2 f_{2n-1}\right. \\
&\quad \left. + q^3 f_{2n-2}\right)e_1 + \left(p^3 f_{2n+2} + 3p^2 qf_{2n+1} + 3pq^2 f_{2n} + q^3 f_{2n-1}\right)e_2 + \ldots + \left(p^3 f_{2n+7}\right. \\
&\quad \left. + 3p^2 qf_{2n+6} + 3pq^2 f_{2n+5} + q^3 f_{2n+4}\right)e_7 \\
&= f_{2n+3}e_0 + f_{2n+4}e_1 + f_{2n+5}e_2 + \ldots + f_{2n+10}e_7 \\
&= Q_{p,q,2n+3}
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Aynı özdeşliğe $Q_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak

3. 3. 5. Önermedeki iii. önermenin ikinci ispatına benzer şekilde elde edilir.

3. 5. 6. Önerme: Aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $Q_{p,q,n-1}Q_{p,q,n+1} - Q_{p,q,n-2}Q_{p,q,n+2} = (-q)^{n-2}\left(\dfrac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^3 - \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^3}{\lambda - \mu}\right), \quad n \geq 2,$

ii. $Q_{p,q,n-1}Q_{p,q,n+3}-Q_{p,q,n+1}^{2}=-p\left(-q\right)^{n-1}\left(\dfrac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{2}-\widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{2}}{\lambda-\mu}\right),\quad n\geq 1,,$

iii. $Q_{p,q,m}Q_{p,q,n}-q^{2}Q_{p,q,m-2}Q_{p,q,n-2}=p\big(-f_{n+m-2}-f_{n+m}+f_{n+m+2}+f_{n+m+4}$

$+2Q_{p,q,n+m-2}\big),\quad n,m\geq 2,$

iv. $Q_{p,q,n+1}^{2}-q^{2}Q_{p,q,n-1}^{2}=p\left(-f_{n+m}-f_{n+m+2}+f_{n+m+4}+f_{n+m+6}+2Q_{p,q,n+m}\right),\quad n\geq 1,$

v. $Q_{p,q,n+1}^{2}-qQ_{p,q,n-1}Q_{p,q,n+1}=pQ_{p,q,n}Q_{p,q,n+1},\ n\geq 1,,$

vi. $Q_{p,q,n+1}^{2}+qQ_{p,q,n-1}Q_{p,q,n+1}=\left(\widehat{\lambda}\lambda^{n}+\widehat{\mu}\mu^{n}\right)Q_{p,q,n+1},\ n\geq 1.$

İspat: i.-vi. İspatları, $Q_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak 3. 3. 6. Önermedeki i.-vi. Önermelerinin ispatlarına benzer şekilde elde edilir.

3. 5. 7. Önerme: $n,r,t\geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlikler doğrudur.

i. $Q_{p,q,n+r}f_{n+t}-Q_{p,q,n+t}f_{n+r}=-\left(-q\right)^{n+t}Q_{p,q,o}f_{r-t},\ r\geq t,,$

ii. $Q_{p,q,n+r}f_{n-r}-Q_{p,q,n-r}f_{n+r}=-\left(-q\right)^{n-r}Q_{p,q,o}f_{2r},\ n\geq r,$

iii. $Q_{p,q,n+r}f_{n}-Q_{p,q,n}f_{n+r}=-\left(-q\right)^{n}Q_{p,q,o}f_{r},$

iv. $Q_{p,q,n+1}f_{n}-Q_{p,q,n}f_{n+1}=-\left(-q\right)^{n}Q_{p,q,o},$

v. $Q_{p,q,n+r}f_{n+t}-\left(-q\right)^{r+t}Q_{p,q,n-r}f_{n-t}=Q_{p,q,2n}f_{r+t}+\left(-q\right)^{n+t}Q_{p,q,0}f_{r-t},\ n\geq t,r,$

vi. $Q_{p,q,n+r}f_{n+r}-\left(-q\right)^{2r}Q_{p,q,n-r}f_{n-r}=Q_{p,q,o}f_{2r},\ n\geq r,$

vii. $Q_{p,q,n+r}f_{n+r}-\left(-q\right)^{r}Q_{p,q,n}f_{n}=Q_{p,q,2n+r}f_{r}$

viii. $Q_{p,q,n+1}f_{n+1}+qQ_{p,q,n}f_{n}=Q_{p,q,2n+1}.$

İspat: i.-viii. İspatları, $Q_{p,q,n}$ için verilen Binet formülü kullanılarak 3. 3. 7. Önermedeki i.-viii. önermelerinin ispatlarına benzer şekilde elde edilir.

3. 5. 2. Teorem (Honsberger Özdeşliği): $n\geq 0$ ve $m\geq 1$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlik doğrudur.

$$Q_{p,q,n+1}Q_{p,q,m}+qQ_{p,q,n}Q_{p,q,m-1}=-f_{n+m}-f_{n+m+2}+f_{n+m+4}+f_{n+m+6}+2Q_{p,q,n+m}.$$

İspat: İspat, 3. 3. 2. Teoremindeki ispata benzer şekilde elde edilir.

3. 5. 8. Önerme: $n \geq 0$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlik doğrudur.

$$Q_{p,q,n+1}^2 + qQ_{p,q,n}^2 = -f_{2n+1} - f_{2n+3} + f_{2n+5} + f_{2n+7} + 2Q_{p,q,2n+1}\,.$$

İspat: İspat, 3. 3. 8. Önermedeki ispata benzer şekilde elde edilir.

3. 5. 3. Teorem (d'Ocagne'nin Özdeşliği): $m \geq n+1$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlik doğrudur.

$$Q_{p,q,m}Q_{p,q,n+1} - Q_{p,q,m+1}Q_{p,q,n} = -(-q)^m\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{n-m} - \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{n-m}}{\lambda-\mu}\right).$$

İspat: İspat, 3. 3. 3. Teoremindeki ispata benzer şekilde elde edilir.

3. 5. 4. Teorem (Catalan'ın Özdeşliği): $n \geq r$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlik doğrudur.

$$Q_{p,q,n-r}Q_{p,q,n+r} - Q_{p,q,n}^2 = -(-q)^{n-r}\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda^{r} - \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu^{r}}{\lambda-\mu}\right)f_r\,.$$

İspat: İspat, 3. 3. 4 Teoremindeki ispata benzer şekilde elde edilir.

3. 5. 5. Teorem (Cassini'nin Özdeşliği): $n \geq 1$ olmak üzere, aşağıdaki özdeşlik doğrudur.

$$Q_{p,q,n-1}Q_{p,q,n+1} - Q_{p,q,n}^2 = -(-q)^{n-1}\left(\frac{\widehat{\mu}\widehat{\lambda}\lambda - \widehat{\lambda}\widehat{\mu}\mu}{\lambda-\mu}\right).$$

İspat: İspat, 3. 3. 5. Teoremindeki ispata benzer şekilde elde edilir.

4. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezde, split (p,q) -Fibonacci kuaterniyon ve oktonyon sayı dizileri tanımlandı. Yeni tanımlanan bu sayı dizileri, p ve q parametrelerine bağlı olarak split Fibonacci kuaterniyon ve oktonyon sayı dizilerinin bir genelleştirilmesidir. Bu sayı dizileri için, dikkatli çalışmalar ile Binet formülleri, Catalan, Cassini, D'ocagne, Honsberger özdeşlikleri gibi bir çok özdeşlikler elde edildi.

Split kuaterniyonlar veya oktonyonlar cebirlerinde çarpma işlemleri değişmeli olmadığından, split (p,q) -Fibonacci kuaterniyon ve oktonyon sayı dizileri üzerine elde edilen özdeşlikler, klasik Fibonacci kuaterniyon ve oktonyon sayı dizileri için üretilmiş özdeşliklerin sunumlarına göre biraz daha karmaşık durumda sunulmuşlardır.

Gelecek çalışmalar arasında, p ve q parametrelerine bağlı olarak dual Fibonacci kuaterniyon ve oktonyon sayı dizilerinin bir genelleştirilmesi olarak görülebilen dual (p,q) -Fibonacci kuaterniyon ve oktonyon sayı dizilerinin tanımlanması ve bu sayı dizileri için Binet formülleri, Catalan, Cassini, D'ocagne, Honsberger gibi bir çok özdeşlikleri elde etme yer alabilir.

5. KAYNAKLAR

Akkus, I. ve Kecilioglu, O., 2015. Split Fibonacci and Lucas octonions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, *25*(3), 517-525.

Akyiğit, M., Kösal, H. H. ve Tosun, M., 2013. Split Fibonacci Quaternions. *Article in Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 535-545.

Baez, J., 2002. The Octonions. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(2), 145-205.

Cockle, J. 1849. On Systems of Algebra Involving More than One Imaginary. *Philosophical Magazine*, 35: 434-435.

Conway, J. H. ve Smith, D. A., 2005. On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *42*, 229-243.

Erdoğdu, M., 2015. Split Kuaterniyon Matrisleri. *Doktora tezi, Akdeniz Üniversitesi*, Antalya.

Falcon S. ve Plaza, A., 2009. On k-Fibonacci numbers of arithmetic indexes. *Applied Mathematics and Computation,* 208(1), 180–185.

Falcon S., 2013. On the generating matrices of the k-Fibonacci numbers. *Proyecciones Journal of Mathematics,* Vol. 32, 347-357.

Halici, S., 2012. On Fibonacci Quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras, 22*(2), 321-327.

Hamilton, W. R., 1843. On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions. *Proceedings of the Royal Irish Academy*. Vol. 2.

Horadam, A.F., 1961. A Generalized Fibonacci Sequence. *American Math. Monthly* 68 (1961), 455–459.

İpek, A., 2016. On (p, q)-Fibonacci quaternions and their Binet formulas, generating functions and certain binomial sums. *Advances in Applied Clifford Algebras,* 27 , 1343–1351.

Ipek, A. ve Cimen, C. B., 2016. On (p, q)-Fibonacci octonions. *Mathematica Aeterna*, Vol. 6, no. 6, 923 – 932.

İyer, M. R., 1969. Some Result On Fibonacci Quaternions. *Indian Statistical Institute,* 7(2), 201-210.

Jafarı, M., 2015. Split Octonion Analysis, Representation Theory and Geometry. *space*, *8*, 7.

Kalman D. ve Mena R., 2003. The Fibonacci numbers: exposed. *Mathematics Magazine*, 76.3: 167-181.

Keçilioğlu, O. ve Akkus, I., 2015. The Fibonacci Octonions. *Advances in Applied Cliff ord Algebras*, 25(1), 151-158.

Koshy, T., 2001. Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. *A Wiley-Intersience Publication,* USA.

Lee, G. ve Asci, M., 2012. Some properties of the (p,q)-Fibonacci and (p, q)-Lucas polynomials. *Journal of Applied Mathematics,* 2012, 2-15.

Nurkan, S. K. ve Güven, İ. A., 2015. Dual fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, *25*(2), 403-414.

Patel, B. K, ve Ray P. K., 2016. On The Propertıes Of (p, q)-Fıbonaccı and (p, q)-Lucas Quaternıons. *Article in Mathematical Reports,* 244.

Polatli, E., Kizilates, C. ve Kesim, S., 2016. On Split k-Fibonacci and k-Lucas Quaternions. *Article in Advances in Applied Clifford Algebras*, 26(1), 353-362.

Ramirez J. L., 2015. Some Combinatorial Properties of the k-Fibonacci and the k-Lucas Quaternions. *An. Şt. Univ. Ovidius Constana*, 23(2), 201-212.

Renault, M., 1996. The Fibonacci sequence under various moduli. *Wake Forest University*.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Orhan DİŞKAYA

Doğum Tarihi ve Yer : 03.10.1988 / MERSİN

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Telefon : 05357001071

e-mail : orhandiskaya33@gmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet Tarihi
Lisans	Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	2013
Lise	Mine Günaştı Lisesi	2005

İş Deneyimi

Yıl	Yer	Görev
2015-2016	Halk Eğitim Merkezi	Usta Öğretici