İKİNCİ MERTEBEDEN IMPULSIVE DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Faruk DÖNMEZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nihal YOKUŞ

Aralık-2017

T.C

KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİNCİ MERTEBEDEN IMPULSIVE DİFERENSİYEL DENKLEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Faruk DÖNMEZ

Anabilim Dalı: Matematik

Programı : Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi

Tez Danışmanı: Doç. Dr.Nihal YOKUŞ

KARAMAN-2017

TEZ ONAYI

Faruk DÖNMEZ tarafından hazırlanan **"İkinci Mertebeden Impulsive Diferensiyel Denklemler"** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliğiyle Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS** tezi olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Nihal YOKUŞ

Jüri Üyeleri | İmza

Doç. Dr. Ali GELİŞKEN
Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Doç. Dr. Nihal YOKUŞ
Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Ayşe YAVUZ
Necmettin Erbakan Üniversitesi
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Tez Savunma Tarihi: 22.12.2017

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Kamil ARI

Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Faruk DÖNMEZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

İKİNCİ MERTEBEDEN IMPULSIVE DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Faruk DÖNMEZ
Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Nihal YOKUŞ
Aralık, 2017, 32 sayfa

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, ilk olarak ikinci mertebeden lineer homojen impulsive diferensiyel denklemin verilen koşullar altında çözümün varlığı ve tekliği gösterilmiş ardından çözümlerin temel özellikleri elde edilmiştir. Sonrasında lineer homojen olmayan impulsive diferensiyel denklemin çözümü verilmiştir.

Üçüncü bölümde periyodik sınır koşulları ile verilen sınır değer problemimizin Green fonksiyonu inşa edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Periyodik sınır koşulları, Impulsive diferensiyel denklemler, Green fonksiyonu, Volterra integral denklemi, Sınır değer problemi.

ABSTRACT

Master Thesis

SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH IMPULSIVE

Faruk DÖNMEZ

Karamanoğlu Mehmetbey University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Nihal YOKUŞ
December, 2017, 32 pages

This thesis consists of three chapters.

The first chapter is devoted to the introduction.

In the second chapter, under the given conditions on existence and uniqueness theorem for solution of a second order impulsive linear homogeneous differential equation is showed, next basic properties of solutions are given. After that general solution of the nonhomogeneous linear impulsive differential equation of second order is obtained.

In the third chapter, the Green function of boundary value problem with given periodic conditions is constructed.

KeyWords: Periodic boundary conditions, Impulsive differential equations, Green's function, Volterra integral equation, Boundary value problem.

ÖNSÖZ

Bu çalışmada danışmanlığımı üstlenen, değerli bilgileriyle ufkumu genişletmeme vesile olan saygı değer hocam Doç. Dr. Nihal YOKUŞ'a, aynı zamanda yardımlarını esirgemeyen kıymetli Arş. Gör. Nimet ÇOŞKUN'a, lisans ve yüksek lisans eğitimimde emekleri üzerimde olan saygı değer hocalarıma ve destekleriyle azmimi arttıran mutluluk kaynağım olan kıymetli aileme teşekkürlerimi sunarım.

Bu tez çalışması, 11-YL-17 numaralı proje kapsamında Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu tarafından desteklenmiştir.

Faruk DÖNMEZ
Aralık, 2017

İÇİNDEKİLER

Sayfa

1. GİRİŞ

Diferensiyel denklemlerin teorik çalışmaları, gerçek hayatta karşılaşılan problemlerin analizinde oldukça önemli bir araç olarak karşımıza çıkmaktadır. Fakat bazı problemlerin model oluşturulmasında adi diferensiyel denklemler yetersiz kalabilmektedir. Gerçek yaşamda problemler ani şokların süreksiz özelliklerinden etkilenmektedir. Asıl sürece göre ihmal edilebilecek kısa bir zaman zarfında gerçekleşen bir dış etki, sürecin durumunda impals olarak belirtilen anlık değişimlere sebep olmaktadır. O süreçlere dışarıdan yapılan etkileri göz ardı eden adi diferensiyel denklemler sürecin modellenmesinde doğru sonuç vermeyebilir. Söz konusu süreçleri matematiksel olarak modellemek için, süreksiz yörüngelere sahip impulsive diferensiyel denklemler kullanılmaktadır. Impulsive diferensiyel denklemlerin teorik gelişmeleri, teknoloji ve bilimsel problemlerin uygulamaya yönelik ihtiyaçlarından dolayı hızla gelişmektedir. Bu gelişmelerle birlikte, impulsive diferensiyel denklemler fizik, kimya, biyoloji, mühendislik ve ekonomi biliminde gerçek yaşam problemlerinin modellenerek analizinde yaygın bir şekilde kullanılmaktadır.

Samoilenko ve Perestyuk (1995) un "Impulsive Differential Equations" kitabında periyodik çözümler, kararlılık, varlık ve teklik gibi bir çok problem ele alındığında bu alandaki en önemli kaynaklardan biridir.

Yine Lakshmikantham, Bainov ve Simeonov (1989) tarafından yazılan "Theory of Impulsive Differential Equations" isimli kitap impulsive sınır değer problemleri üzerine en kapsamlı çalışmalardan biridir.

Impusive diferensiyel denklemler konusu Howell et. al. (1993), Erbe ve Wang (1994), Freiling and Yurka (2002), Eloe and Henderson (1998) tarafından da çeşitli problemler incelenerek ele alınmıştır.

Biz bu tezde

$$-\left[p(x)y'(x) \right]' + q(x)y(x) = h(x), \qquad x \in [a,c) \cup (c,b] \tag{1.1.1}$$

$$y(c^-) = d_1 y(c^+) \quad , \quad y^{[1]}(c^-) = d_2 y^{[1]}(c^+) \tag{1.1.2}$$

$$y(a) = y(b),\, y^{[1]}(a) = y^{[1]}(b) \tag{1.1.3}$$

sınırdeğer problemini ele alacağız. Burada $y^{[1]}(x) = p(x)y'(x), y(x)$ fonksiyonunun quasi türevi olarak adlandırılır.

$y(c^-), y(x)$ fonksiyonun c noktasındaki sol limitini; $y(c^+)$, $y(x)$ fonksiyonunun c noktasındaki sağ limitini ve (1.1.2) koşulları c noktasındaki impuls efekti gösterirler. (1.1.3) sınır koşulları periyodik sınır koşulları olarak adlandırılır ve ayrık olmayan sınır koşulların en önemli örneğini oluştururlar.

Bu çalışmada (1.1.1)-(1.1.3) impulsive sınır değer problemi ele alınarak bu probleme ilişkin temel çözümler bulunmuş, çözümlerin varlığı ve tekliği gösterilmiş, Green fonksiyonu inşa edilmiştir.

2. İKİNCİ MERTEBEDEN LİNEER IMPULSIVE DİFERENSİYEL DENKLEMLER

2.1. Homojen Impulsive Diferensiyel Denklemler

c bir reel sayı ve d_1, d_2 sıfırdan farklı reel sayılar olmak üzere

$$-\left[p(x)y'(x)\right]' + q(x)y(x) = 0,\; x \in (-\infty, c) \cup (c, \infty), \tag{2.1.1}$$

$$y(c^-) = d_1 y(c^+),\; y^{[1]}(c^-) = d_2 y^{[1]}(c^+) \tag{2.1.2}$$

ikinci mertebeden lineer homojen impulsive diferensiyel denklemini ele alalım.Burada $y = y(x)$ aranılan çözüm olup

$$y^{[1]}(x) = p(x)y'(x) \tag{2.1.3}$$

$y(x)$ fonksiyonunun quasi türevi olarak adlandırılır. (2.1.1) denklemindeki $p(x)$ ve $q(x)$ katsayıları $(-\infty, \infty)$ aralığı üzerinde ölçülebilir reel değerli fonksiyonlardır ve her bir c_1, c_2 sonlu reel sayıları için $c_1 < c_2$ olmak üzere

$$\int_{c_1}^{c_2} \frac{dx}{|p(x)|} < \infty, \qquad \int_{c_1}^{c_2} |q(x)|\,dx < \infty \tag{2.1.4}$$

dır.

Eğer $y(x)$ fonksiyonu $(-\infty, c) \cup (c, \infty)$ aralığında $y''(x)$ türevine sahip, $p(x)y'(x)$ fonksiyonu $(-\infty, c) \cup (c, \infty)$ aralığının her bir kapalı alt aralığında mutlak sürekli ve sonlu $y(c^\pm)$, $y^{[1]}(c^\pm)$ değerlerine sahip ise ve de (2.1.1) diferensiyel denklemi ile (2.1.2) impulsive koşullarını sağlıyorsa $y(x)$ fonksiyonuna (2.1.1)-(2.1.2) impulsive diferensiyel denkleninin çözümü denir.

Teorem 1. $x_0 \in (-\infty, c) \cup (c, \infty)$ ve $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$ olmak üzere (2.1.1)-(2.1.2) impulsive diferensiyel denkleminin,

$$y(x_0)=c_0, \quad y^{[1]}(x_0)=c_1 \tag{2.1.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü vardır ve tektir. (Lakshimikantham et. al. 1989).

İspat. $x_0\in(-\infty,c)$ alalım. (2.1.4) koşullarından birincisi sağlandığından diferensiyel denklemler için çözümün varlık ve tekliği teoremi gereğince $(-\infty,c)$ aralığında (2.1.1) denkleminin (2.1.5) koşullarını sağlayan çözümü vardır ve tektir. Yine $y(x)$ çözümü sonlu $y(c^-)$ ve $y^{[1]}(c^-)$ değerlerine sahiptir. Bu durumda $y(c^+)$ ve $y^{[1]}(c^+)$ değerlerini (2.1.2) impulsive koşulları sağlanacak şekilde alırsak,

$$y(c^+)=\frac{1}{d_1}y(c^-), \qquad y^{[1]}(c^+)=\frac{1}{d_2}y^{[1]}(c^-) \tag{2.1.6}$$

olacaktır. Böylelikle $y(c^+)$ ve $y^{[1]}(c^+)$ değerleri de tanımlanmış olur. (2.1.4) koşullarından ikincisi de sağlandığından ve de diferensiyel denklemler için çözümün varlığı ve tekliği teoreminden (c,∞) aralığında (2.1.1) denkleminin (2.1.6) koşullarını sağlayan çözümü vardır ve tektir. Sonuç olarak $x_0\in(-\infty,c)$ alınırsa (2.1.1), (2.1.2) denkleminin (2.1.5) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü vardır ve tektir.
$x_0\in(c,\infty)$ için ispat benzer yolla ispatlanır.

Tanım 2. $y(x)$ ve $z(x)$, $(-\infty,c)\cup(c,\infty)$ aralığında diferensiyellenebilen iki fonksiyon olmak üzere $y(x)$ ve $z(x)$ fonksiyonlarının Wronskiyen'i

$$\begin{aligned}W_x(y,z)&=y(x)z^{[1]}(x)-y^{[1]}(x)z(x)\\&=p(x)\left[y(x)z'(x)-y'(x)z(x)\right], \quad x\in(-\infty,c)\cup(c,\infty)\end{aligned}$$

ile verilir.

Teorem 3. (2.1.1), (2.1.2) homojen impulsive diferensiyel denkleminin herhangi iki y ve z çözümünün Wronskiyen'i $(-\infty,c)$ ve (c,∞) aralıklarının her biri üzerinde sabittir. Bununla birlikte bu sabitler sırasıyla ω^- ve ω^+ olmak üzere ,

$$W_x(y,z)=\begin{cases}\omega^-, & x\in(-\infty,c)\\ \omega^+, & x\in(c,\infty)\end{cases} \tag{2.1.7}$$

ile verilir. Ayrıca

$$\omega^- = d_1 d_2 \omega^+ \tag{2.1.8}$$

bağıntısı sağlanır.

İspat. y ve z **;** (2.1.1), (2.1.2) denkleminin herhangi iki çözümü olsunlar. O taktirde

$$-\left[p(x)y'(x)\right]' + q(x)y(x) = 0 \quad , \qquad x\in(-\infty,c)\cup(c,\infty), \tag{2.1.9}$$

$$y(c^-) = d_1 y(c^+), \qquad y^{[1]}(c^-) = d_2 y^{[1]}(c^+) \tag{2.1.10}$$

ve

$$-\left[p(x)z'(x)\right]' + q(x)z(x) = 0 \quad , \qquad x\in(-\infty,c)\cup(c,\infty), \tag{2.1.11}$$

$$z(c^-) = d_1 z(c^+), \qquad z^{[1]}(c^-) = d_2 z^{[1]}(c^+) \tag{2.1.12}$$

sağlanır. (2.1.9) ve (2.1.11) eşitlikleri kullanılırsa

$$\{W_x(y,z)\}' = \left\{p(x)\left[y(x)z'(x) - y'(x)z(x)\right]\right\}'$$

$$= y(x)\left[p(x)z'(x)\right]' - \left[p(x)y'(x)\right]' z(x)$$

$$= y(x)q(x)z(x) - q(x)y(x)z(x)$$

$$= 0$$

elde edilir. Bu durum Wronskiyen'in x değişkeninden bağımsız olduğunu gösterir.

Böylelikle ω^- ve ω^+ sabitler olmak üzere

$$W_x(y,z)=\begin{cases}\omega^-, & x\in(-\infty,c)\\ \omega^+, & x\in(c,\infty)\end{cases} \qquad (2.1.13)$$

yazabiliriz.

(2.1.13) eşitliklerinden

$$\omega^- = W_{c^-}(y,z) \quad , \quad \omega^+ = W_{c^+}(y,z)$$

olup, burada (2.1.2) impulsive koşulları kullanılırsa

$$\begin{aligned}\omega^-(y,z)=W_{c^-}(y,z) &= y(c^-)z^{[1]}(c^-)-y^{[1]}(c^-)z(c^-)\\ &= d_1y(c^+)d_2z^{[1]}(c^+)-d_2y^{[1]}(c^+)d_1z(c^+)\\ &= d_1d_2W_{c^+}(y,z)\\ &= d_1d_2\omega^+\end{aligned}$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4. y ve z**;** (2.1.1), (2.1.2) denkleminin iki çözümü iseler bu durumda her $x\in(-\infty,c)\cup(c,\infty)$ için ya $W_x(y,z)=0$ ya da $W_x(y,z)\neq 0$ dır.

Teorem 5. (2.1.1), (2.1.2) homojen impulsive diferensiyel denkleminin herhangi iki çözümünün lineer bağımsız olması için gerek ve yeter şart bu çözümlerin Wronskiyen'nin sıfırdan farklı olmasıdır.

İspat. (Gereklilik) y_1 ve y_2 fonksiyonları (2.1.1), (2.1.2) denkleminin lineer bağımsız herhangi iki çözümü olsunlar. $W_x\left(y_1, y_2\right) \neq 0$ olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim , yani $W_x\left(y_1, y_2\right) = 0$ olsun. Bu durumda c_1 ve c_2 keyfi sabitler olmak üzere, $x_0 \in \left(-\infty, c\right) \cup \left(c, \infty\right)$ noktası için

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0 \\ c_1 y_1^{[1]}(x_0) + c_2 y_2^{[1]}(x_0) = 0 \end{cases} \tag{2.1.14}$$

lineer homojen denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin determinantı

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} y_1\left(x_0\right) & y_2\left(x_0\right) \\ y_1^{[1]}\left(x_0\right) & y_2^{[1]}\left(x_0\right) \end{vmatrix} &= y_1\left(x_0\right) y_2^{[1]}\left(x_0\right) - y_2\left(x_0\right) y_1^{[1]}\left(x_0\right) \\ &= W_{x_0}\left(y_1, y_2\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

olur. Bu ise denklem sisteminin aşikar olmayan en az bir $\left(c_1, c_2\right)$ çözümünün olması demektir. $\left(c_1, c_2\right)$ çözümü yardımıyla

$$y\left(x\right) = c_1 y_1\left(x\right) + c_2 y_2\left(x\right)$$

fonksiyonunu oluşturalım. (2.1.1) denklemi ve (2.1.2) koşulları lineer homojen olduğundan $y_1\left(x\right)$ ve $y_2\left(x\right)$ çözümlerinin lineer birleşimi olan $y\left(x\right)$ fonksiyonu da (2.1.1),(2.1.2) probleminin bir çözümü olacaktır. (2.1.14) denklem sisteminden

$$y\left(x_0\right) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = 0$$

ve

$$y^{[1]}\left(x_0\right) = c_1 y_1^{[1]}(x_0) + c_2 y_2^{[1]}(x_0) = 0$$

bulunur.

O halde Teorem 1 (çözümün tekliği) gereği $y\left(x\right) = 0$ olacaktır. Buradan

$$c_1 y_1\left(x\right) + c_2 y_2\left(x\right) = 0$$

elde ederiz. $\left(c_1, c_2\right)$ çiftlerinden en az biri sıfırdan farklı olduklarından $y_1\left(x\right)$ ve $y_2\left(x\right)$ fonksiyonları lineer bağımlı olur. Bu ise çelişkidir. Çünkü y_1 ve y_2 fonksiyonları lineer bağımsızdırlar. O halde kabulümüz yanlış olup $W_x\left(y_1, y_2\right) \neq 0$ olmalıdır.

(Yeterlilik) $W_x(y_1,y_2)\neq 0$ olsun. $y_1$ve y_2 çözümlerinin lineer bağımlı olduklarını varsayalım. Bu durumda

$$y_1(x)=k\,y_2(x)$$

olacaktır. Buradan her $x\in(-\infty,c)\cup(c,\infty)$ için

$$W_x(y_1,y_2)=W_x(k\,y_2,y_2)$$
$$=ky_2(x)\,y_2^{[1]}(x)-ky_2^{[1]}(x)\,y_2(x)=0$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir. Çünkü $W_x(y_1,y_2)\neq 0$ dır. O halde y_1 ve y_2 çözümleri lineer bağımsızdırlar.

Teorem 6. (2.1.1),(2.1.2) homojen impulsive diferensiyel denkleminin iki lineer bağımsız çözümü her zaman var olup bu denklemin her hangi bir çözümü bu çözümlerin lineer birleşimi alarak yazılabilir.(Lakshmikantham et al. 1989).

İspat . İlk olarak (2.1.1), (2.1.2) denkleminin iki lineer bağımsız çözümünün her zaman var olduğunu gösterelim.

Teorem 1, gereğince $x_0\in(-\infty,c)\cup(c,\infty)$ olmak üzere (2.1.1), (2.1.2) denkleminin sırasıyla

$$y_1(x_0)=c_1,\quad y_1^{[1]}(x_0)=c_2$$

ve

$$y_2(x_0)=c_3,\quad y_2^{[1]}(x_0)=c_4$$

başlangıç koşulları sağlayan y_1 ve y_2 çözümleri vardır. Ayrıca c_1,c_2,c_3 ve c_4 sabitlerini $c_1c_4\neq c_2c_3$ şartı sağlayacak şekilde alalım. Bu seçimi her zaman yapabiliriz.

$$W_{x_0}(y_1,y_2)=y_1(x_0)\,y_2^{[1]}(x_0)-y_1^{[1]}(x_0)\,y_2(x_0)$$
$$=c_1c_4-c_2c_3$$
$$\neq 0$$

olup Teorem 5 gereğince $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümleri lineer bağımsızdırlar.

Gösterelim ki (2.1.1), (2.1.2) denkleminin her hangi bir çözümü $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerinin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir.

$y(x)$ fonksiyonu (2.1.1), (2.1.2) denkleminin her hangi bir çözümü olsun.

$$y(x)=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)$$

olacak biçimde a_1 ve a_2 reel sayılarının var olduğunu gösterelim. $x_0\in(-\infty,c)\cup(c,\infty)$ olmak üzere,

$$\begin{cases} a_1y_1(x_0)+a_2y_2(x_0)=y(x_0) \\ a_1y_1^{[1]}(x_0)+a_2y_2^{[1]}(x_0)=y^{[1]}(x_0) \end{cases} \tag{2.1.15}$$

lineer homojen olmayan denklem sistemini ele alalım. Bu denklem sisteminin determinantı

$$\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1^{[1]}(x_0) & y_2^{[1]}(x_0) \end{vmatrix}=W_{x_0}(y_1,y_2)$$

$$\neq 0$$

olur. O halde bu denklem sisteminin tek bir (a_1,a_2) çözümü vardır. Buradan

$$z(x)=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)$$

fonksiyonu nu oluşturalım. (2.1.1) denklemi ve (2.1.2) koşulları lineer homojen olup $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ çözümlerinin lineer birleşimi olan $z(x)$ fonksiyonunda (2.1.1), (2.1.2) denkleminin bir çözümü olur. (2.1.15) denklem sisteminden

$$z(x_0)=y(x_0) \text{ ve } z^{[1]}(x_0)=y^{[1]}(x_0)$$

bulunur. Buradan Teorem 1 (çözümün tekliği) gereğince

$$z(x)=y(x)=a_1y_1(x)+a_2y_2(x)$$

elde edilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

2.2. Homojen Olmayan Impulsive Diferensiyel Denklemler

$$-\left[p(x)y'(x)\right]'+q(x)y(x)=h(x),\, x\in(-\infty,c)\cup(c,\infty), \tag{2.2.1}$$

$$y(c^-)=d_1y(c^+), \qquad y^{[1]}(c^-)=d_2y^{[1]}(c^+) \tag{2.2.2}$$

ikinci mertebeden lineer homojen olmayan impulsive diferensiyel denklemini ele alalım.

Burada $h(x)$, $(-\infty,c)\cup(c,\infty)$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olup , $x_1 < x_2$ koşulunu sağlayan x_1 , x_2 sonlu reel sayıları için

$$\int_{x_1}^{x_2} |h(x)|\, dx < \infty$$

gerçeklenir.

Teorem 7. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$, (2.1.1), (2.1.2) homojen impulsive diferensiyel denkleminin temel çözümler cümlesini oluştursunlar. Bu durumlarda c_1 ve c_2 herhangi sabitler olmak üzere (2.2.1) , (2.2.2) homojen olmayan impulsive diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \int_c^x \frac{y_1(x)y_2(s) - y_1(s)y_2(x)}{W_s(y_1, y_2)} h(s)\,ds, \quad x \in (-\infty,c)\cup(c,\infty) \quad (2.2.3)$$

şeklindedir.

İspat.

$$-\left[p(x)y'(x)\right]' + q(x)y(x) = 0,\ x \in (-\infty,c)\cup(c,\infty), \quad (2.2.4)$$

$$y(c^-) = d_1 y(c^+), \qquad y^{[1]}(c^-) = d_2 y^{[1]}(c^+) \quad (2.2.5)$$

homojen impulsive diferensiyel denkleminin genel çözümü

$$\hat{y}(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

olup, (2.2.1)-(2.2.2) homojen olmayan impulsive diferensiyel denkleminin genel çözümünü

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) \quad (2.2.6)$$

olacak şekilde arayalım.

$$y'(x) = c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) + c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)$$

bulunur. Burada

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \quad (2.2.7)$$

olacak şekilde $c_1(x)$ve $c_2(x)$ katsayılarını bulalım.

$$y'(x) = c_1(x)y_1'(x) + c_2(x)y_2'(x)$$

olup bu sonuç (2.2.1) denkleminde yerine yazılırsa,

$$-\left[p(x)c_1(x)y_1'(x) + p(x)c_2(x)y_2'(x)\right]' + q(x)y(x) = h(x)$$

Buradan

$$-\Big[p'(x)c_1(x)y_1'(x) + p'(x)c_2(x)y_2'(x) + p(x)c_1'(x)y_1'(x) + p(x)c_2'(x)y_2'(x)$$
$$+p(x)c_1(x)y_1''(x) + p(x)c_2(x)y_2''(x)\Big]$$
$$+q(x)c_1(x)y_1(x) + q(x)c_2(x)y_2(x) = h(x)$$

Buradan,

$$c_1(x)\left[-p'(x)y_1'(x) - p(x)y_1''(x) + q(x)y_1(x)\right] + c_2(x)\left[-p'(x)y_2'(x) - p(x)y_2''(x) + q(x)y_2(x)\right]$$
$$-p(x)c_1'(x)y_1'(x) - p(x)c_2'(x)y_2'(x) = h(x)$$

olur. $y_1(x)$ ve $y_2(x)$, (2.1.1), (2.1.2) homojen denklemin birer çözümü olduklarından

$$-p(x)c_1'(x)y_1'(x) - p(x)c_2'(x)y_2'(x) = h(x) \qquad (2.2.8)$$

bulunur. (2.2.7) ve (2.2.8) den

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x) + c_2'(x)y_2(x) = 0 \\ c_1'(x)y_1'(x) + c_2'(x)y_2'(x) = \dfrac{-h(x)}{p(x)} \end{cases} \qquad (2.2.9)$$

denklem sisteminden $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ katsayılarını bulalım. Bunun için birinci ve ikinci eşitliğin her iki yanını sırasıyla $y_2'(x)$ ve $-y_2(x)$ ile çarpalım.

$$c_1'(x)y_1(x)y_2'(x) - c_1'(x)y_1'(x)y_2(x) = \frac{y_2(x)h(x)}{p(x)}$$

$$c_1'(x)\left[y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)\right] = \frac{y_2(x)h(x)}{p(x)}$$

$$c_1'(x) = \frac{y_2(x)h(x)}{W_x(y_1, y_2)}$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafını c den x e integrallersek,

$$\int_c^x c_1'(s)\,ds = \int_c^x \frac{y_2(s)h(s)}{W_s(y_1,y_2)}ds$$

$$c_1(x) - c_1(c) = \int_c^x \frac{y_2(s)h(s)}{W_s(y_1,y_2)}ds$$

$$c_1(x) = c_1 + \int_c^x \frac{y_2(s)h(s)}{W_s(y_1,y_2)}ds$$

elde edilir.

Şimdi (2.2.9) denklem sisteminin her iki tarafını $y_1'(x)$ ve $-y_1(x)$ ile çarpalım. Buradan

$$c_2'(x)y_1'(x)y_2(x) - c_2'(x)y_2'(x)y_1(x) = \frac{h(x)y_1(x)}{p(x)}$$

$$c_2'(x)\left[y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)\right] = \frac{h(x)y_1(x)}{p(x)}$$

$$c_2'(x) = \frac{-y_1(x)h(x)}{W_x(y_1,y_2)}$$

bulunur. Eşitliğin her iki yanını c den x e integrallersek

$$\int_c^x c_2'(s)\,ds = -\int_c^x \frac{y_1(s)h(s)}{W_s(y_1,y_2)}ds$$

$$c_2(x) - c_2(c) = -\int_c^x \frac{y_1(s)h(s)}{W_s(y_1,y_2)}ds$$

$$c_2(x) = c_2 - \int_c^x \frac{y_1(s)h(s)}{W_s(y_1,y_2)}ds$$

elde edilir.

Bulunan $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ değerleri (2.2.6) da yerlerine yazılırsa,

$$y(x) = \left(c_1 + \int_c^x \frac{y_2(s)h(s)}{W_s(y_1,y_2)}ds\right)y_1(x) + \left(c_2 - \int_c^x \frac{y_1(s)h(s)}{W_s(y_1,y_2)}ds\right)y_2(x)$$

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \int_c^x \frac{y_1(x)y_2(s) - y_1(s)y_2(x)}{W_s(y_1,y_2)}h(s)\,ds, \quad x \in (-\infty,c)\cup(c,\infty)$$

bulunur.

3. GREEN FONKSİYONU

3.1. Green Fonksiyonunun Elde Edilmesi

$a < c < b$ olmak üzere a,b ve c birer nokta olsun.

$$-\left[p(x)y'(x)\right]' + q(x)y(x) = h(x), \qquad x \in [a,c) \cup (c,b] \tag{3.1.1}$$

$$y(c^-) = d_1 y(c^+), \quad y^{[1]}(c^-) = d_2 y^{[1]}(c^+) \tag{3.1.2}$$

$$y(a) = y(b), \; y^{[1]}(a) = y^{[1]}(b) \tag{3.1.3}$$

impulsive sınır değer problemini göz önüne alalım. Burada $p(x), q(x)$ ve $h(x)$, $[a,b]$ üzerinde tanımlı reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\int_a^b \frac{d_x}{|p(x)|} < \infty \;, \quad \int_a^b |q(x)|\,dx < \infty \;, \quad \int_a^b |h(x)|\,dx < \infty$$

integrallenebilirlik koşullarını sağlarlar. Ayrıca d_1 ve d_2 sıfırdan farklı birer reel sayıdır. (3.1.1) , (3.1.2) denklemine ilişkin

$$-\left[p(x)y'(x)\right]' + q(x)y(x) = 0, \; x \in [a,c) \cup (c,b] \tag{3.1.4}$$

$$y(c^-) = d_1 y(c^+), \quad y^{[1]}(c^-) = d_2 y^{[1]}(c^+) \tag{3.1.5}$$

lineer homojen impulsive diferensiyel denklemini ele alalım. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları (3.1.4) , (3.1.5) denkleminin sırasıyla,

$$\begin{aligned} u(a) &= 1, \quad u^{[1]}(a) = 0 \\ v(a) &= 0, \quad v^{[1]}(a) = 1 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar. Bu $u(x)$ ve $v(x)$ çözümlerinin $x = a$ noktası için Wronskiyen'i (3.1.6) koşulları yardımıyla,

$$W_a(u,v) = u(a)v^{[1]}(a) - u^{[1]}(a)v(a) = 1$$

bulunur.

Böylelikle Teorem 3 den,

$$W_x(u,v)=\begin{cases}1, & x\in[a,c)\\ d_1^{-1}d_2^{-1}, & x\in(c,b]\end{cases} \tag{3.1.7}$$

şeklinde yazabiliriz.

Şimdi

$$D=u(b)+v^{[1]}(b)-d_1^{-1}d_2^{-1}-1 \tag{3.1.8}$$

olarak adlandıralım.

Teorem 8. $D\neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul (3.1.4), (3.1.5) homojen impulsive diferensiyel denkleminin (3.1.3) periyodik sınır koşullarını sağlayan tek çözümünün $y(x)\equiv 0$ aşikar çözüm olmasıdır.

İspat. $u(x)$ ve $v(x)$; (3.1.4), (3.1.5) probleminin temel çözümler cümlesini oluşturduklarından, (3.1.4), (3.1.5) probleminin genel çözümü

$$y(x)=c_1u(x)+c_2v(x)$$

şeklinde yazılabilir, öyle ki burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Buradan (3.1.3) sınır koşulları ile (3.1.6) başlangıç koşulları dikkate alınırsa;

$$\begin{cases}[u(b)-1]c_1+v(b)c_2=0\\ u^{[1]}(b)c_1+\left[v^{[1]}(b)-1\right]c_2=0\end{cases}$$

lineer homojen denklem sistemi elde edilir.

Bu denklem sisteminin determinantı

$$\begin{vmatrix}u(b)-1 & v(b)\\ u^{[1]}(b) & v^{[1]}(b)-1\end{vmatrix}=(u(b)-1)\left(v^{[1]}(b)-1\right)-u^{[1]}(b)v(b)$$

$$=u(b)v^{[1]}-u(b)-v^{[1]}(b)+1-v(b)u^{[1]}(b)$$

$$=W_b(u,v)-u(b)-v^{[1]}(b)+1$$

$$=d_1^{-1}.d_2^{-1}-u(b)-v^{[1]}(b)+1$$

$$= -D$$

olacaktır. O halde bu denklem sisteminin tek çözümünün $y(x) \equiv 0$ aşikar çözüm olması için gerek ve yeter şart $D \neq 0$ olmasıdır.

Teorem 9. $D \neq 0$ olmak üzere (3.1.1)-(3.1.3) homojen olmayan impulsive sınır değer probleminin çözümü

$$y(x) = \int_a^b G(x,s)h(s)ds, \; x \in [a,c) \cup (c,b] \tag{3.1.9}$$

şeklindedir. Burada

$$G(x,s) = \frac{1}{DW_s(u,v)}\left[v(b)u(x)u(s) - u^{[1]}v(x)v(s)\right]$$

$$+\frac{1}{DW_s(u,v)} \begin{cases} \left[v^{[1]}(b)-1\right]u(x)v(s) - \left[u(b)-1\right]u(s)v(x), & s \leq x \\ \left[v^{[1]}(b) - d_1^{-1}.d_2^{-1}\right]u(s)v(x) - \left[u(b) - d_1^{-1}.d_2^{-1}\right]u(x)v(s), & x \leq s \end{cases}$$

fonksiyonuna (3.1.1)-(3.1.3) impulsive sınır değer probleminin Green fonksiyonu denir.

İspat. $D \neq 0$ koşulu altında $u(x)$ ve $v(x)$ çözümleri lineer bağımsız olup Teorem 7 gereğince (3.1.1), (3.1.2) denkleminin genel çözümü,

$$y(x) = c_1 u(x) + c_2 v(x) + \int_c^x \frac{u(x)v(s) - u(s)v(x)}{W_s(u,v)} h(s)ds, \quad x \in [a,c) \cup (c,b] \tag{3.1.10}$$

şeklindedir. c_1 ve c_2 sabitlerini öyle seçelim ki, $y(x)$ çözümü (3.1.3) koşullarını sağlasın. $y(x)$ fonksiyonunun quasi türevi alınırsa,

$$y^{[1]}(x) = c_1 u^{[1]}(x) + c_2 v^{[1]}(x) + \int_c^x \frac{u^{[1]}(x)v(s) - u(s)v^{[1]}(x)}{W_s(u,v)} h(s)ds \tag{3. 1. 11}$$

bulunur.

$y(a)$, $y(b)$ve $y^{[1]}(a)$, $y^{[1]}(b)$ değerlerini hesaplarsak, sırasıyla

$$y(a) = c_1 + \int_c^a \frac{v(s)}{W_s(u,v)} h(s)ds,$$

$$y^{[1]}(a) = c_2 - \int_c^a \frac{u(s)}{W_s(u,v)} h(s)ds,$$

$$y(b)=c_1u(b)+c_2v(b)+\int_c^b \frac{u(b)v(s)-u(s)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds,$$

ve

$$y^{[1]}(b)=c_1u^{[1]}(b)+c_2v^{[1]}(b)+\int_c^b \frac{u^{[1]}(b)v(s)-u(s)v^{[1]}(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

elde edilir.

Bulunan bu değerleri (3.1.3) koşulunda sırasıyla yerlerine yazalım. $y(a)=y(b)$ koşulu göz önüne alınırsa

$$\left[u(b)-1\right]c_1+v(b)c_2=\int_c^a \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\int_c^b \frac{u(b)v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_c^b \frac{u(s)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$=-\int_a^c \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\int_c^b \frac{u(b)v(s)-u(s)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds \qquad (3.1.12)$$

bulunur.

$y^{[1]}(a)=y^{[1]}(b)$ koşulu dikkate alınırsa,

$$u^{[1]}(b)c_1+\left[v^{[1]}(b)-1\right]c_2=\int_a^c \frac{u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\int_c^b \frac{u^{[1]}(b)v(s)-u(s)v^{[1]}(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

(3.1.13)

bulunur. (3.1.10) , (3.1.11) den

$$\begin{cases} \left[u(b)-1\right]c_1+v(b)c_2=-\int_a^c \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\int_c^b \frac{u(b)v(s)-u(s)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds \\ u^{[1]}(b)c_1+\left[v^{[1]}(b)-1\right]c_2=\int_a^c \frac{u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\int_c^b \frac{u^{[1]}(b)v(s)-u(s)v^{[1]}(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds \end{cases}$$

(3.1.14)

denklem sistemini çözelim. Birinci ve ikinci eşitliğin her iki yanını sırasıyla $v^{[1]}(b)-1$ ve $-v(b)$ ile çarpalım. Buradan

$$c_1\left\{u(b)v^{[1]}(b)-v^{[1]}(b)-u(b)+1-v(b)u^{[1]}(b)\right\}=-\int_a^c \frac{v(s)\left[v^{[1]}(b)-1\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds-\int_a^c \frac{u(s)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$-\int_c^b \frac{u(b)v(s)v^{[1]}(b)-u(s)v(b)v^{[1]}(b)-u(b)v(s)+u(s)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\int_c^b \frac{u^{[1]}(b)v(s)v(b)-u(s)v^{[1]}(b)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$c_1(-D)=\int_a^c \frac{-v(s)\left[v^{[1]}(b)-1\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_a^c \frac{-u(s)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$
$$+\int_c^b \frac{u^{[1]}(b)v(s)v(b)-u(b)v(s)v^{[1]}(b)+u(b)v(s)-u(s)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$=\int_a^c \frac{-v(s)\left[v^{[1]}(b)-1\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_a^c \frac{-u(s)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$
$$+\int_c^b \frac{v(s)D}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_c^b \frac{-v(s)\left[v^{[1]}(b)-1\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_c^b \frac{-u(s)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$=\int_a^b \frac{-v(s)\left[v^{[1]}(b)-1\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_a^b \frac{-u(s)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_c^b \frac{v(s)D}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

olup buradan

$$c_1=\frac{v^{[1]}(b)-1}{D}\int_a^b \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds+\frac{v(b)}{D}\int_a^b \frac{u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\int_c^b \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

elde edilir.

Şimdi de (3.1.14) denklem sisteminde birinci ve ikinci eşitliğin her iki yanını sırayla, $-u^{[1]}(b)$ ve $\left[u(b)-1\right]$ ile çarpalım. Buradan

$$c_2\left\{-v(b)u^{[1]}(b)+u(b)v^{[1]}(b)-u(b)-v^{[1]}(b)+1\right\}=\int_a^c \frac{v(s)u^{[1]}(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\int_a^c \frac{u(s)\left[u(b)-1\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_c^b \frac{u(b)u^{[1]}(b)v(s)-u(s)u^{[1]}(b)v(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$-\int_c^b \frac{u^{[1]}(b)u(b)v(s)-u(s)v^{[1]}(b)u(b)-u^{[1]}(b)v(s)+u(s)v^{[1]}(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$c_2(-D)=\int_a^c \frac{u^{[1]}(b)v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_a^c \frac{u(s)\left[u(b)-1\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\int_c^b \frac{u(b)u(s)v^{[1]}(b)+u^{[1]}(b)v(s)-u(s)u^{[1]}(b)v(b)-u(s)v^{[1]}(b)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$=\int_a^c \frac{u(s)\left[u(b)-1\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_a^c \frac{u^{[1]}(b)v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_c^b \frac{u(s)(-D)}{W_s(u,v)}h(s)d(s)$$

$$+\int_c^b \frac{u(s)\left[u(b)-1\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_c^b \frac{u^{[1]}(b)v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$=\int_a^b \frac{u(s)\left[u(b)-1\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_a^b \frac{u^{[1]}(b)v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_c^b \frac{(-D).u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

olup buradan

$$c_2=-\frac{u(b)-1}{D}\int_a^b \frac{u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\frac{u^{[1]}(b)}{D}\int_a^b \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_c^b \frac{u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

bulunur.

Bulunan c_1 ve c_2 değerleri (3.1.10) da yerlerine yazılırsa,

$$y(x)=\frac{v^{[1]}(b)u(x)-u(x)}{D}\int_a^b \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds+\frac{v(b)u(x)}{D}\int_a^b \frac{u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\int_c^b \frac{v(s)u(x)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\frac{v(x)-u(b)v(x)}{D}\int_a^b \frac{u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\frac{u^{[1]}(b)v(x)}{D}\int_a^b \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\int_c^b \frac{u(s)v(x)}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_c^x \frac{u(x)v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\int_c^x \frac{u(s)v(x)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$=\frac{v(b)u(x)}{D}\int_a^b \frac{u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\frac{u^{[1]}(b)v(x)}{D}\int_a^b \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\frac{1}{D}\int_a^b \frac{v^{[1]}(b)u(x)v(s)-u(x)v(s)+v(x)u(s)-u(b)v(x)u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\int_b^x \frac{v(s)u(x)}{W_s(u,v)}h(s)ds+\int_x^b \frac{u(s)v(x)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$=\frac{v(b)u(x)}{D}\int_a^b \frac{u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\frac{u^{[1]}(b)v(x)}{D}\int_a^b \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\frac{1}{D}\int_a^b \frac{v^{[1]}(b)u(x)v(s)-u(x)v(s)+v(x)u(s)-u(b)v(x)u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\frac{1}{D}\int_x^b \frac{D\left[u(s)v(x)-v(s)u(x)\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$=\frac{v(b)u(x)}{D}\int_a^b \frac{u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\frac{u^{[1]}(b)v(x)}{D}\int_a^b \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\frac{1}{D}\int_a^x \frac{v^{[1]}(b)u(x)v(s)-u(x)v(s)+v(x)u(s)-u(b)v(x)u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\frac{1}{D}\int_x^b \frac{v^{[1]}(b)u(x)v(s)-u(x)v(s)+v(x)u(s)-u(b)v(x)u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\frac{1}{D}\int_x^b \frac{\left[u(b)+v^{[1]}(b)-d_1^{-1}d_2^{-1}-1\right]\left[u(s)v(x)-v(s)u(x)\right]}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$=\frac{v(b)u(x)}{D}\int_a^b \frac{u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds-\frac{u^{[1]}(b)v(x)}{D}\int_a^b \frac{v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\frac{1}{D}\int_a^x \frac{v^{[1]}(b)u(x)v(s)-u(x)v(s)+v(x)u(s)-u(b)v(x)u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\frac{1}{D}\int_x^b \frac{-u(b)v(s)u(x)+v^{[1]}(b)u(s)v(x)-u(s)v(x)d_1^{-1}d_2^{-1}+v(s)u(x)d_1^{-1}d_2^{-1}}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$= \frac{1}{D}\int_a^b \frac{v(b)u(x)u(s)-u^{[1]}(b)v(x)v(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\frac{1}{D}\int_a^x \frac{\left(v^{[1]}(b)-1\right)u(x)v(s)-\left(u(b)-1\right)v(x)u(s)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

$$+\frac{1}{D}\int_x^b \frac{\left(v^{[1]}(b)-d_1^{-1}d_2^{-1}\right)u(s)v(x)-\left(u(b)-d_1^{-1}d_2^{-1}\right)v(s)u(x)}{W_s(u,v)}h(s)ds$$

olup buradan

$$y(x)=\int_a^b G(x,s)h(s)ds \ , \quad x\in[a,c)\cup(c,b]$$

elde edilir.

3.2. Green Fonksiyonunun Pozitifliği

Bu kısımda yeniden

$$-\left[p(x)y'(x)\right]'+q(x)y(x)=h(x) \quad , \quad x\in[a,c)\cup(c,b] \tag{3.2.1}$$

$$y(c^-)=d_1y(c^+), \quad y^{[1]}(c^-)=d_2y^{[1]}(c^+) \tag{3.2.2}$$

$$y(a)=y(b), \quad y^{[1]}(a)=y^{[1]}(b) \tag{3.2.3}$$

impulsive sınır değer problemini ele alalım. Burada

(H_1**)** $p(x)>0, q(x)\geq 0$ ve hemen hemen her yerde $q(x)\neq 0$ olmak üzere

$$\int_a^b \frac{dx}{p(x)}<\infty, \quad \int_a^b q(x)dx<\infty$$

integrallenebilirlik koşulları sağlanır.

(H_2**)** $d_1>0, d_2>0$ ve $d_1+d_2\geq 1+d_1d_2$ dir.

(3.1.1), (3.1.2) denklemine ilişkin

$$-\left[p(x)y'(x)\right]'+q(x)y(x)=0, \ x\in[a,c)\cup(c,b] \tag{3.2.4}$$

$$y(c^-)=d_1y(c^+), \quad y^{[1]}(c^-)=d_2y^{[1]}(c^+) \tag{3.2.5}$$

lineer homojen diferensiyel denklemini göz önüne alalım.

$u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları (3.1.4), (3.1.5) denklemlerinin sırasıyla

$$u(a)=1, \quad u^{[1]}(a)=0 \tag{3.2.6}$$

$$v(a)=0, \quad v^{[1]}(a)=1 \tag{3.2.7}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar.

Lemma 3.2.1. $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları için sırasıyla aşağıdaki özellikleri vardır.

$$(i)\ u^{[1]}(x)=\int_a^x q(s)u(s)ds,\ x\in[a,c), \tag{3.2.8}$$

$$(ii)\ u(x)=1+\int_a^x\left[\int_s^x \frac{dt}{p(t)}\right]q(s)u(s)ds,\ x\in[a,c) \tag{3.2.9}$$

$$(iii)\ u^{[1]}(x)=u^{[1]}(c^+)+\int_c^x q(s)u(s)ds,\ x\in(c,b], \tag{3.2.10}$$

$$(iv)\ u(x)=u(c^+)+u^{[1]}(c^+)\int_c^x \frac{dt}{p(t)}+\int_c^x\left[\int_s^x \frac{dt}{p(t)}\right]q(s)u(s)ds,\ \ x\in[c,b) \tag{3.2.11}$$

$$(v)\ v^{[1]}(x)=1+\int_a^x q(s)v(s)ds,\ \ x\in[a,c) \tag{3.2.12}$$

$$(vi)\ v(x)=\int_a^x \frac{dt}{p(t)}+\int_a^x\left[\int_s^x \frac{dt}{p(t)}\right]q(s)v(s)ds,\ x\in[a,c), \tag{3.2.13}$$

$$(vii)\ v^{[1]}(x)=v^{[1]}(c^+)+\int_c^x q(s)v(s)ds,\ x\in(c,b] \tag{3.2.14}$$

$$(viii)\ v(x)=v(c^+)+v^{[1]}(c^+)\int_c^x \frac{dt}{p(t)}+\int_c^x\left[\int_s^x \frac{dt}{p(t)}\right]q(s)v(s)ds,\ x\in(c,b] \tag{3.2.15}$$

İspat.

(i) $u(x)$ fonksiyonu (3.2.4) denkleminin çözümü olduğundan

$$-\left[p(x)u'(x)\right]'+q(x)u(x)=0$$

gerçeklenir. Buradan

$$\left[p(x)u'(x)\right]'=q(x)u(x) \tag{3.2.16}$$

yazabiliriz. $x\in[a,c)$ alalım. (3.2.16) eşitliğinin her iki yanını a dan x e integralleyip (3.2.6) koşulunun ikincisini ele alırsak,

$$\int_a^x \left[p(s)u'(s)\right]' ds = \int_a^x q(s)u(s)ds$$

$$p(x)u'(x) - u^{[1]}(a) = \int_a^x q(s)u(s)ds \tag{3.2.17}$$

$$u^{[1]}(x) = \int_a^x q(s)u(s)ds,\ x \in [a,c)$$

bulunur.

(ii)**.** (3.2.17) den

$$u'(x) = \frac{1}{p(x)}\int_a^x q(s)u(s)ds$$

yazabiliriz. Her iki yanı a dan x e integralleyip (3.2.6) koşulunun birincisini kullanırsak,

$$\int_a^x u'(t)dt = \int_a^x \left[\frac{1}{p(t)}\int_a^t q(s)u(s)ds\right]dt$$

$$u(x) - u(a) = \int_a^x \left[\frac{1}{p(t)}\int_a^t q(s)u(s)ds\right]dt$$

$$u(x) = 1 + \int_a^x \left[\int_s^x \frac{dt}{p(t)}\right] q(s)u(s)ds,\ x \in [a,c)$$

elde edilir.

(iii) (3.2.16) eşitliğinin her iki yanı c den x e integrallenirse

$$\int_c^x \left[p(s)u'(s)\right]' ds = \int_c^x q(s)u(s)ds$$

$$u^{[1]}(x) - u^{[1]}(c^+) = \int_c^x q(s)u(s)ds$$

$$u^{[1]}(x) = u^{[1]}(c^+) + \int_c^x q(s)u(s)ds,\ x \in (c,b]$$

bulunur.

(iv) $u^{[1]}(x) = p(x)u'(x)$ eşitliği (iii) de kullanılırsa

$$u'(x) = \frac{u^{[1]}(c^+)}{p(x)} + \frac{1}{p(x)}\int_c^x q(s)u(s)ds \tag{3.2.18}$$

gerçeklenir. (3.2.18) eşitliğinin her iki yanını c den x e integrallersek,

$$\int_c^x u'(t)\,dt = u^{[1]}(c^+)\int_c^x \frac{1}{p(t)}dt + \int_c^x \left[\frac{1}{p(t)}\int_c^t q(s)u(s)\,ds\right]dt$$

$$u(x)-u(c^+) = u^{[1]}(c^+)\int_c^x \frac{1}{p(t)}dt + \int_c^x \left[\frac{1}{p(t)}\int_c^t q(s)u(s)\,ds\right]dt$$

$$u(x) = u(c^+)+u^{[1]}(c^+)\int_c^x \frac{1}{p(t)}dt + \int_c^x \left[\int_s^x \frac{1}{p(t)}dt\right]q(s)u(s)\,ds,\ \ x\in(c,b]$$

elde edilir.

Şimdi $v(x)$ fonksiyonu için verilen eşitliklerin varlığını gösterelim.

(v) $v(x)$ fonksiyonu (3.2.4) denkleminin çözümü olduğundan

$$-\left[p(x)v'(x)\right]'+q(x)v(x)=0$$

sağlanır. Buradan

$$\left[p(x)v'(x)\right]' = q(x)v(x) \tag{3.2.19}$$

yazabiliriz. $x\in[a,c)$ olsun. (3.2.19) eşitliğinin her iki yanını a dan x e integrallersek,

$$\int_a^x \left[p(s)v'(s)\right]' ds = \int_a^x q(s)v(s)\,ds$$

$$p(x)v'(x)-v^{[1]}(a) = \int_a^x q(s)v(s)\,ds \tag{3.2.20}$$

$$v^{[1]}(x) = 1+\int_a^x q(s)v(s)\,ds,\ \ x\in[a,c)$$

bulunur.

(vi) (3.2.20) den

$$v'(x) = \frac{1}{p(x)}+\frac{1}{p(x)}\int_a^x q(t)v(t)\,dt$$

yazabiliriz. Her iki yanı a dan x e integralleyip (3.2.7) koşulunun birincisini göz önüne alırsak,

$$\int_a^x v'(t)\,dt = \int_a^x \frac{1}{p(t)}dt + \int_a^x \left[\frac{1}{p(t)}\int_a^t q(s)v(s)\,ds\right]dt$$

$$v(x)-v(a)=\int_a^x \frac{1}{p(t)}dt+\int_a^x\left[\frac{1}{p(t)}\int_s^t q(s)v(s)ds\right]dt$$

$$v(x)=\int_a^x \frac{dt}{p(t)}+\int_a^x\left[\int_s^x \frac{dt}{p(t)}\right]q(s)v(s)ds, \quad x\in[a,c)$$

elde edilir.

(vii) $v(x)$ fonksiyonu (3.2.4) denkleminin çözümü olduğundan

$$-\left[p(x)v'(x)\right]'+q(x)v(x)=0$$

sağlanır. Buradan her iki yanın c den x e integralini alırsak,

$$\int_c^x\left[p(s)v'(s)\right]'ds=\int_c^x q(s)v(s)ds$$

$$v^{[1]}(x)-v^{[1]}(c^+)=\int_c^x q(s)v(s)ds$$

$$v^{[1]}(x)=v^{[1]}(c^+)+\int_c^x q(s)v(s)ds, \quad x\in(c,b]$$

bulunur.

$(viii)$. $v^{[1]}(x)=p(x)v'(x)$ eşitliği (vii) de kullanılırsa

$$v'(x)=\frac{v^{[1]}(c^+)}{p(x)}+\frac{1}{p(x)}\int_c^x q(s)v(s)ds \tag{3.2.21}$$

sağlanır. (3.2.21) eşitliğinin her iki yanı c den x e integrallenirse ,

$$\int_c^x v'(t)dt=v^{[1]}(c^+)\int_c^x \frac{1}{p(t)}dt+\int_c^x\left[\frac{1}{p(t)}\int_c^t q(s)v(s)ds\right]dt$$

$$v(x)-v(c^+)=v^{[1]}(c^+)\int_c^x \frac{1}{p(t)}dt+\int_c^x\left[\frac{1}{p(t)}\int_c^t q(s)v(s)ds\right]dt$$

$$v(x)=v(c^+)+v^{[1]}(c^+)\int_c^x \frac{1}{p(t)}dt+\int_c^x\left[\int_s^x \frac{1}{p(t)}dt\right]q(s)v(s)ds, \quad x\in(c,b]$$

elde edilir.

Lemma 1. $A(x,s)$, $-\infty<x_1\le x$, $s\le x_2<\infty$ aralığında tanımlı negatif olmayan sürekli bir fonksiyon ve $h(x)$, $[x_1,x_2]$ aralığında negatif olmayan integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $[x_1, x_2]$ aralığında tanımlı negatif olmayan sürekli $f(x)$ fonksiyonu için

$$y(x) = f(x) + \int_{x_1}^{x} A(x,s)h(s)y(s)ds, \quad x_1 \le x \le x_2, \tag{3.2.22}$$

Volterra integral denkleminin tek bir $y(x)$ çözümü vardır ve bu çözüm sürekli olup

$$y(x) \ge f(x), \quad x_1 \le x \le x_2 \tag{3.2.23}$$

eşitsizliğini gerçekler.

İspat. (3.2.22) denklemini çözmek için ardaşık yaklaşımlar metodunu uygulayalım.

$$y_0(x) = f(x)$$

$$y_k(x) = \int_{x_1}^{x} A(x,s)h(s)y_{k-1}(s)ds, \quad k = 1, 2, ... \tag{3.2.24}$$

olsun.

(3.2.24)eşitliklerini taraf tarafa toplayalım, buradan

$$\sum_{k=0}^{n} y_k(x) = f(x) + \sum_{k=1}^{n} \int_{x_1}^{x} A(x,s)h(s)y_{k-1}(s)ds$$

$$= f(x) + \int_{x_1}^{x} A(x,s)h(s)\sum_{k=1}^{n} y_{k-1}(s)ds \tag{3.2.25}$$

olur. O halde eğer $\sum_{k=0}^{\infty} y_k(x)$ serisinin $[x_1, x_2]$ aralığında düzgün yakınsak olduğu gösterilirse bu serinin toplamı (3.2.22) denkleminin bir sürekli çözümü olacaktır.

$$a_1 = \underset{x \in [x_1, x_2]}{maks} f(x), \quad a_2 = \underset{x_1 \le x,\, s \le x_2}{maks} A(x,s)$$

alalım. Bu durumda

$$y_0(x) = f(x) \le a_1$$

olur.

$$y_1(x) = \int_{x_1}^{x} A(x,s)h(s)y_0(s)ds$$

$$\le a_1 \underset{x_1 \le x,\, s \le x_2}{maks} A(x,s) \int_{x_1}^{x} h(s)ds$$

$$= a_1 a_2 \int_{x_1}^{x} h(s)\,ds$$

bulunur.

$$y_2(x) = \int_{x_1}^{x} A(x,s)\,h(s)\,y_1(s)\,ds$$

$$\le a_1 a_2 \max_{x_1 \le x,\, s \le x_2} A(x,s) \int_{x_1}^{x} h(s)\left(\int_{x_1}^{x} h(t)\,dt\right) ds$$

$$\le a_1 \frac{a_2^2}{2}\left(\int_{x_1}^{x} h(s)\,ds\right)^2$$

elde edilir.

Bu şekilde devam edilirse $k = n$ için

$$0 \le y_n(x) \le a_1 \frac{a_2^n}{n!}\left(\int_{x_1}^{x} h(s)\,ds\right)^n, \quad n = 1,2,...$$

olacaktır.

Burada

$$\int_{x_1}^{x_2} h(s)\,ds = a_3$$

alırsak,

$$y_n(x) \le a_1 . \frac{(a_2 a_3)^n}{n!}$$

yazabiliriz.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(a_2 a_3)^n}{n!} < \infty$$

olup $\sum_{k=0}^{\infty} y_k(x)$ serisi düzgün yakınsaktır. (3.2.25) de $n \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\sum_{k=0}^{\infty} y_k(x) = f(x) + \int_{x_1}^{x} A(x,s)\,h(s) \sum_{k=1}^{\infty} y_{k-1}(s)\,ds$$

elde edilir. O halde (3.2.22) denklemi sürekli

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)$$

çözümüne sahip ve $f(x) \geq 0$ olduğundan $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\int_{x_1}^{x_2} A(x,s) h(s) y_{n-1}(s) ds \geq 0$$

bulunur. Bu durumda

$$y_n(x) \geq 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} y(x) &\geq y_0(x) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

gerçeklenir.

4. KAYNAKLAR

Agarwal, R. P.,O'Regan, D. ve Wong, P.J.Y., 1999. Positive Solutions of Differential, Difference and integral Equations, Kluwer, Dordrecht.

Akhmet, M. U., 2005. On the smoothness of solutions of impulsive autonomous systems, Nonlinear Anal., 60, 311-324.

Akhmet, M. U., ve Yılmaz, O., 2005. Positive solutions of linear impulsive differential equations, Nonlinear Anal., 8, 289-295.

Atici, F.M. ve Guseinov, G. Sh., 2001. On the existence of positive solutions for non linear differential equations with periodic coefficients, J. Comput. Appl. Math., 132, 341-356.

Bainov, D. D. ve Simeonov, P. S. ,1985. Stability under persistent disturbances for systems with impulse effect, J. Math. Anal. Appl, 109, 546-563.

Bainov, D. D. ve Govachev, V. , 1994. Impulsive Differential Equations with a Small Parameter. Word Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

Bainov, D. D. ve Simeonov, P. S., 1989.Systems with Impulsive Effect Theory and Application, Ellis Horwood Series in Mathematics and its Applications,Ellis Horwood, Chichister, U. K.

Bainov, D. D. ve Simeonov, P. S., 1995. Impulsive Differential Equations: Asymptotic Properties of the Solutions, World Scientific, Singapure, New Jersey, London

Bainov, D. D. ve Simeonov, P. S., 1993. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications, Longman Scientific and Technical, Essex, England.

Benchohra, M., Henderson, J.ve Ntouyas, S., 2006. Impulsive Differential Equations and Inclusions, Hindawi Publishing Corporation, New York.

Bereketoğlu, H. ve Huseynov, A., 2006. On positive solutions for a nonlinear boundary value problem with impulsive, Czesh. Math. J. 56, 247-265.

Dishliev, A. B. ve Bainov, D. D., 1987. Differentiabilitiy on a paramater and initial condition of the solution of a system of differential equations with impulses, Österreic. Akad. Wiss. Math.-Natur. Kl. Sitzungsber.II, 196, 69-96.

Guo, D. ve Lakshmikhantam, V., 1988. Nonlinear Problems in Abstraat Cones, Academic Press, San Diego.

George, R.K.,Nandakumaran, A.K. ve Arapostathis, A., 2000. A note on controllability of impulsive systems, J. Math. Appl. 241(2), 276-283.

Huseynov, A., 2009. On the sign of Green's function for an impulsive differential equation with periodic boundary conditions. Appl. Math. Comput, 208, 197-205.

Huo, H.F., Li, W.T., ve Lui, X., 2004. Existence and global attractivity of positive periodic solution of an impulsive delay differential equation, Appl. Anal., 83, 1276-1290.

Kaul, S., 1990. On impulsive semi- dynamical systems J. Math. Apple., 150, 120-128.

Krasnosel'skii, M. A.,1964. Positive Solutions of Operator Equations, Noordhoff, Groningen.

Kelley, W. G. ve Peterson, A. C., 1991. Difference Equations: An introduction with Applications, Academic Press, New York.

Lakshmikantham, V.,Bainov, D. D. ve Simeonov, P. S., 1989. Theory of Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore.

Lakshmikantham, V.,Murty K.N., and Sivasundaram, S., 1992. Impulsive differential systems for two-point boundary value problems. Applied Mathematics and Computation, 50, 157-166.

Li, Y. 2008. Positive periodic solutions of nonlinear differential systems with impulses, Nonlinear Anal., 68, 2389-2405.

Murty, K.N.,Howell., G. H. ve Sivasundaram, S.1993. Two-point boundary value problems associated with a system of first order nonlinear impulsive differential equations, Applicable Analsis, 51, 303-313.

Naimark, M. A., 1968. Linear Differential Operators, Part II. Ungar, New York.

Nenov, S., 1999. Impulsive controllability and optimization problems in population Dynamics. Nonlinear Anal. 36, 881-890.

O'Regan, D. ve Frigon, M., 1996. Impulsive differential equations with variable times, Nonlinear Anal., 26, 1913-1922.

Peterson, A. C.,1973. On the sign of Green's function beyond the interval of disconjugacy, Rocky Mt. J. Math., 3, 41-51.

Peterson, A. C.,1973. On the sign of Green's functions, J. Diff. Eq. 21, 167-178.

Peterson, A. C.,1979. Green's functions for focal type boundary value problems, Rocky Mt. J. Math., 9, 721-732.

Samoilenko, A. M. ve Perestyuk, N. A. ,1995. Impulsive Differential Equations. World Scientific, Singapore.

Schwabik, S.,Turdy’, O. ve Vejuoda, O.,1979. Differential and Integral Equations: Boundary Value Problems and Adjoint. Academia and Reidel, Prahaand Dordrecht.

Schwabik, S.,1992. Generalized Ordinary Differential Equations. WorldScientific, Singapore.

Turdy’, M., 1994. Linear distributional differential equations of the second order, Math. Bohem., 119, 415-436.

Yan, J. 2007. Existence of positive periodic solutions of impulsive functional differential equations with two parameters, J. Math. Anal. Appl., 327, 854-868.

Zhang, X.,Zhao, A., ve Yan, X., 2008. Existence of pozitif periodic solutionsfor an impulsive differential equation, Nonlinear Anal. 68, 3209-3216.

Zafer, A., 2011. Oscillation of second-order sublinear impulsive differential equations, Abstr. Appl. Anal., Art. ID 458275.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	: Faruk DÖNMEZ
Doğum Tarihi ve Yer	: 16/06/1990 - Silifke
Medeni Hali	: Bekar
Yabancı Dili	: İngilizce
e-mail	: farukdz90@gmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	Karamaoğlu Mehmetbey Üniversitesi	2014-
Lisans	Mustafa Kemal Üniversitesi	2014
Lise	Silifke Lisesi	2007