T.C
KARAMANOĞLU MEHMETBEY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MAKSİMUM CEBİRİNDE BAZI ÖZEL MATRİS ÇARPIMLARININ KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mustafa TEKE

Anabilim Dalı: Fen Bilimleri ve Teknolojileri

Programı : Matematik

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Ahmet İPEK

KARAMAN-2018

TEZ ONAYI

Mustafa TEKE tarafından hazırlanan "**Maksimum Cebirinde Bazı Özel Matris Çarpımlarının Karakteristik Özellikleri** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen Bilimleri ve Teknolojileri(Matematik) Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Ahmet İPEK

Eş Danışman:

Juri Üyeleri **İmza:**

Ünvanı, Adı ve Soyadı
Doç. Dr. Ahmet İPEK

Ünvanı, Adı ve Soyadı
Doç. Dr. Mustafa BAHŞİ

Ünvanı, Adı ve Soyadı
Doç. Dr. Ali GELİŞKEN

Tez Savunma Tarihi:26 /01 /2018

Yukarıdaki sonucu onaylarım

Doç. Dr. Kâmil ARI
Enstitü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlak kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Mustafa TEKE

ÖZET
Yüksek Lisans Tezi

MAKSİMUM CEBİRİNDE BAZI ÖZEL MATRİS ÇARPIMLARININ KARAKTERİSTİK ÖZELLİKLERİ

Mustafa TEKE

Karamanoğlu Mehmetbey Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Fen Bilimleri ve Teknolojileri (Matematik)

Danışman: Doç. Dr. Ahmet İPEK
Ocak, 2018, 104 sayfa

Bu tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, ilk olarak klasik reel matris cebirinde Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımlarının bazı kullanım alanları açıklanmakta, bu çarpımlar için literatür bilgisi verilmekte ve bu tez çalışmasının amacı ve önemi belirtilmektedir. Daha sonra klasik reel matris cebirinde Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımları tanımlanmakta, bu çarpımlar için sayısal örnekler verilmekte, çarpımların bazı cebirsel özellikleri sunulmakta ve her bir cebirsel özellik sayısal örneklerle doğrulanmaktadır.
İkinci bölümde, ilk olarak maksimum toplam cebiri üzerine tez çalışmasında gerekli olan temel tanım ve kavramlar verilmektedir. Daha sonra maksimum toplam matris cebirinde Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımları yeni kavramlar olarak tanımlanmakta, bu çarpımlar için sayısal örnekler verilmekte, çarpımların bazı cebirsel özellikleri ispatları ile birlikte sunulmakta ve her bir cebirsel özellik sayısal örneklerle doğrulanmaktadır.
Üçüncü bölümde, tezin bulguları özetlenmekte ve elde edilen bulgular tartışılmaktadır.
Anahtar Sözcükler: Matrislerin Hadamard çarpımı, Matrislerin Kronecker çarpımı, Matrislerin Khatri-Rao çarpımı, Matrislerin Tracy-Singh çarpımı, Maksimum cebiri.

ABSTRACT

Ms Thesis

CHARACTERISTIC PROPERTIES OF SOME SPECIAL MATRIX PRODUCTS IN MAXIMUM ALGEBRA

Mustafa TEKE

Karamanoğlu Mehmetbey University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Ahmet İPEK

January, 2018, 104 pages

This thesis consists of three main chapters. In the first chapter, firstly some application areas of Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao and Tracy-Singh products in classical real matrix algebra have been explained, the literature information for these multiplications has been given and the aim and importance of this thesis work has been stated. Then, Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao and Tracy-Singh products have been defined in classical real matrix algebra, numerical examples for these products have been given, some algebraic properties of these products have been presented and each algebraic property has been verified with numerical examples.

In the second chapter, firstly the basic definitions and concepts required in this thesis on maximum plus algebra have been given. Then, Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao and Tracy-Singh products have been defined as new concepts in the maximum plus algebra, numerical examples have been given for these products, some algebraic properties of these products have been presented together with proofs and each algebraic property has been verified with numerical examples.

In the last chapter, the findings of this thesis have been summarized and the results obtained in the thesis have been discussed.

Key Words: Hadamard product of matrices, Kronecker product of matrices, Khatri-Rao product of matrices, Tracy-Singh product of matrices, maximum algebra.

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans çalışmalarımın başlangıcından sonuna kadar engin birikimiyle beni motive eden, çalışmalarımda yardımcı olan, bana bilimsel çalışma ve düşünme yeteneği veren saygı değer danışman hocam Sayın Doç. Dr. Ahmet İPEK'e ve Yüksek Lisans çalışmalarım boyunca öneri ve desteklerini eksik etmeyen sayın hocam Doç. Dr. Ali GELİŞKEN'e teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca Yüksek Lisans yapmama vesile olan ve Yüksek Lisans süresince yardımlarını esirgemeyen arkadaşım Sayın Bilge ÖNAL' a teşekkür ederim.

Yüksek Lisans boyunca sabırla, güvenle ve sevgiyle hep yanımda olan desteklerini hiç eksik etmeyen eşime ve çocuklarıma ve yeğenim Abdulkadir TEKE'ye sosuz teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa TEKE

Ocak, 2018

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

<u>**Simgeler**</u>	<u>**Açıklama**</u>
$\circ$	Hadamard matris çarpım
$\otimes$	Kronecker matris çarpımı (Giriş Böl.)
$*$	Khatri-Rao matris çarpımı
$\odot$	Tracy-Sing matris çarpımı
$\otimes$	$\mathbb{R}_{max}$ ta çarpma işlemi (Materyal ve Yöntem Böl.)
$\bar{\circ}$	$\mathbb{R}_{max}$ ta Hamard matris çarpımı
$\bar{\otimes}$	$\mathbb{R}_{max}$ ta Kronecker matris çarpımı
$\bar{*}$	$\mathbb{R}_{max}$ ta Khatri-Rao matris çarpımı
$\bar{\odot}$	$\mathbb{R}_{max}$ ta Tracy-Singh matris çarpımı
$\mathbb{R}$	Reel sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_{max}$	Maksimum Toplam Cebiri
$\oplus$	$\mathbb{R}_{max}$ ta toplama işlemi

1. GİRİŞ

Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımları; matrisleri, matematiği, istatistiği, ekonometriyi ve sinyal işleme sistemini içeren birçok alanda önemli uygulamalara ve potansiyele sahip çarpımlardır.

Liu ve Trenkler (2008), Hadamard, Kronocker, Khatri-Rao, Tracy-Singh ve diğer matris çarpımları üzerine geniş literatür bilgilerini içeren geniş bir çalışma yapmışlardır.

Matrisler ve matris işlemleri, mühendislik, doğa ve sosyal bilimler gibi birçok alanda çalışılmakta ve uygulanmaktadır. Berman ve ark. (1989), Barnett (1990), Lütkepohl (1996), Schott (1997), Magnus ve Neudecker (1999), Hogben (2006), Schmidt ve Trenkler (2006) ve Bernstein (2005) yazmış oldukları kitaplarda; matrisler, matris işlemleri ve uygulama alanları üzerine bilgiler vermişlerdir.

Styan (1973), Neudecker ve Liu (1995), Neudecker ve Satorra (1995), Trenkler (1995), Rao ve Rao (1998), Zhang (1999), Liu (2000a, 2000b) ve Van Trees (2002) çalışmalarında Hadamard (veya Schur) ve Kronecker çarpımları üzerine çalıştılar ve bu çarpımların matris teoride, istatistikte, sistem teoride ve diğer bazı alanlarda uygulamaları üzerine bilgiler vermişlerdir.

Horn (1990), Hadamard çarpımı üzerine odaklı faydalı bir deneme hazırlamıştır.

Magnus ve Neudecker (1999), Hadamard veya Kronecker çarpımları içeren bazı temel sonuçlar ve istatistiksel uygulamalar sunmuşlardır.

Browne (1974), Pukelsheim (1977) ve Faliva (1983), Hadamard ve Kronecker çarpımları arasındaki bir eşitliği çalışmalarında farklı şekillerde kullanmışlardır.

Trenkler (2001, 2002) ve Neudecker ve Trenkler (2005, 2006a), Kronecker çarpım üzerine çalışmışlardır.

Khatri ve Rao (1968), Rao (1970), Rao ve Kleffe (1988), Horn ve Mathias (1992), Liu (1995, 1999, 2002a), Rao ve Rao (1998) ve Yang (2002a, 2002b, 2003, 2005) Hadamard çarpımının bir genelleştirilmesi olarak görülen bloklara ayrılmış matrisler için tanımlı Khatri-Rao çarpımı üzerine çalışmışlardır.

Singh (1972), Tracy ve Singh (1972), Hyland ve Collins (1989), Tracy ve Jinadassa (1989) ve Koning ve ark. (1991), Kronecker çarpımın bir genelleştirilmesi olarak görülen bloklara ayrılmış matrisler için tanımlı Tracy-Singh çarpımı üzerine çalışmışlardır.

Liu (1999), Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımları arasında bir ilişki vermiş ve pozitif tanımlı matrisler için istatiksel uygulamaları ile birlikte bu iki çarpımı içeren bazı sonuçlar sunmuştur.

Optimal kontrol problemlerinde (Plus,1990), istatistiksel fizikte (Dembo ve Zeitouni, 1993; Maslov ve Samborski, 1992), ayrık sistemlerde (Cohen ve ark, 1992), otomata problemlerinde maksimum toplam cebirine çok sık başvurulmaktadır.

Butkovič (2010) ve Heidergott ve ark. (2014) yazmış oldukları kitaplarda maksimum toplam cebiri üzerine geniş bilgiler vermişlerdir.

Tezin birinci bölümünde, klasik reel matris cebirinde Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımları tanımlanmakta, bu çarpımlar için sayısal örnekler verilmekte, çarpımların bazı cebirsel özellikleri sunulmakta ve her bir cebirsel özellik sayısal örneklerle doğrulanmaktadır.

Tezin ikinci bölümde, maksimum toplam cebiri üzerine tez çalışmasında gerekli olan temel tanım ve kavramlar verilmektedir. Daha sonra maksimum matris cebirinde Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımları yeni kavramlar olarak tanımlanmakta, bu çarpımlar için sayısal örnekler verilmekte, çarpımların bazı cebirsel özellikleri ispatları ile birlikte sunulmakta ve her bir cebirsel özellik sayısal örnekle doğrulanmaktadır.

Tezin üçüncü bölümde, tezin bulguları özetlenmekte ve elde edilen bulgular tartışılmaktadır.

1.1. Hadamard Matris Çarpımı ve Özellikleri

Tanım 1.1.1 $m \times n$ boyutlu $A = \left[a_{ij}\right]$ ve $B = \left[b_{ij}\right]$ matrisleri için

$$A \bigcirc B = [a_{ij} b_{ij}]$$

şeklinde $m \times n$ boyutlu $A \bigcirc B$ matrisine A ve B matrislerinin Hadamard çarpımı denir (Horn ve Johnson, 1991).

Aşağıdaki önermede, matrislerin Hadamard çarpımlarının değişme özelliğinin olduğu verilmektedir.

Önerme 1.1.1 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımları için

$$A \bigcirc B = B \bigcirc A$$

şeklinde değişme özelliği vardır (Horn ve Johnson, 1991).

Aşağıdaki önermede, matrislerin Hadamard çarpımlarının değişme özelliğinin olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 1.1.1 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. $A\bigcirc B$ matrisi

$$A\bigcirc B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}$$

ve $B\bigcirc A$ matrisi,

$$B\bigcirc A=\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & -12 \\ -5 & 12 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $A\bigcirc B=B\bigcirc A$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, matrislerin Hadamard çarpımlarının birleşme özelliğinin olduğu verilmektedir.

Önerme 1.1.2 $A,B,C\in\mathbb{R}^{m\times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımları için

$$(A\bigcirc B)\bigcirc C = A\bigcirc(B\bigcirc C)$$

şeklinde birleşme özelliği vardır (Horn ve Johnson, 1991).

Aşağıdaki önermede, matrislerin Hadamard çarpımlarının birleşme özelliğinin olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 1.1.2 $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $C=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri için $(A\bigcirc B)\bigcirc C$ matrisi

$$(A\bigcirc B)\bigcirc C=\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\right)\bigcirc\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 12 \end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 24 \end{bmatrix}$$

ve $A\bigcirc(B\bigcirc C)$ matrisi,

$$A\bigcirc(B\bigcirc C)=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\bigcirc\left(\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 24 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $(A\bigcirc B)\bigcirc C = A\bigcirc(B\bigcirc C)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, Hadamard çarpımının toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği olduğu verilmektedir.

Önerme 1.1.3 $A,B,C\in\mathbb{R}^{m\times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımlarının toplama işlemi üzerine

$$(A+B)\bigcirc C=(A\bigcirc C)+(B\bigcirc C)$$

şeklinde sağdan dağılma özelliği ve

$$C\bigcirc(A+B)=(C\bigcirc A)+(C\bigcirc B)$$

şeklinde soldan dağılma özelliği vardır (Horn ve Johnson, 1991).

Aşağıdaki örnekte, Hadamard çarpımının toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliği olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 1.1.3 $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ matrisleri için, $(A+B)\bigcirc C$ matrisi,

$$(A+B)\bigcirc C=\left(\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}\right)\bigcirc\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 5 & -2\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 18\\ 5 & -4\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $A\bigcirc C$ ve $B\bigcirc C$ matrisleri,

$$A\bigcirc C=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 1 & -4\end{bmatrix},$$

$$B\bigcirc C=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 4 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $(A\bigcirc C)+(B\bigcirc C)$ matrisi,

$$(A\bigcirc C)+(B\bigcirc C)=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 1 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 18\\ 5 & -4\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $(A+B)\bigcirc C=(A\bigcirc C)+(B\bigcirc C)$ olduğu görülür. Benzer şekilde $C\bigcirc(A+B)$ matrisi,

$$C\bigcirc(A+B)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\bigcirc\left(\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}2 & 6\\ 5 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 18\\ 5 & -4\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $C\bigcirc A$ ve $C\bigcirc B$ matrisleri,

$$C\bigcirc A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 1 & -4\end{bmatrix},$$

$$C\bigcirc B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 4 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $(C\bigcirc A)+(C\bigcirc B)$ matrisi,

$$(C\bigcirc A)+(C\bigcirc B)=\begin{bmatrix}6 & 12\\ 1 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 6\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 18\\ 5 & -4\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $C\bigcirc(A+B)=(C\bigcirc A)+(C\bigcirc B)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, matrislerin Hadamard çarpımının transpozunun matrislerinin ayrı ayrı transpozlarının Hadamard çarpımı olduğu verilmektedir.

Önerme 1.1.4 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımları için

$$(A \bigcirc B)^T = A^T \bigcirc B^T$$

özelliği vardır (Horn ve Johnson, 1991).

Aşağıdaki örnekte, matrislerin Hadamard çarpımının transpozunun matrislerinin ayrı ayrı transpozlarının Hadamard çarpımı olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 1.1.4 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri için $(A \bigcirc B)^T$ matrisi,

$$(A \bigcirc B)^T = \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \bigcirc \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $A^T \bigcirc B^T$ matrisi,

$$A^T \bigcirc B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \bigcirc \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $(A \bigcirc B)^T = A^T \bigcirc B^T$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, herhangi bir matris ile tüm elemanları 0 olan matrisin Hadamard çarpımı 0 matrisi olduğu verilmektedir.

Önerme 1.1.5 $A, \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımları için $A \bigcirc \mathbf{0} = \mathbf{0}$ özelliği vardır.

Aşağıdaki önermede, herhangi bir matris ile tüm elemanları 0 olan matrisin Hadamard çarpımı $\mathbf{0}$ matrisi olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 1.1.5 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A \bigcirc \mathbf{0}$ matrisi

$$A \bigcirc \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \bigcirc \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

olarak bulunur. Böylece $A \bigcirc \mathbf{0} = \mathbf{0}$ olduğu görülür.

Önerme 1.1.6 Herhangi iki $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matrisleri ve $n \times n$ boyutlu D ve E köşegen matrisleri için

$$D(A \bigcirc B) = (DA) \bigcirc B = A \bigcirc (DB)$$

ve

$$(A\bigcirc B)E=(AE)\bigcirc B=A\bigcirc(BE)$$

özellikleri vardır (Horn ve Johnson, 1991).

Aşağıdaki örnekte, $D(A\bigcirc B)=(DA)\bigcirc B=A\bigcirc(DB)$ ve $\left(A\bigcirc B\right)E=\left(AE\right)\bigcirc B=A\bigcirc\left(BE\right)$ özellikleri doğrulanmaktadır.

Örnek 1.1.6 $A=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2&0\\2&3\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$ ve $E=\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}$ matrisleri tanımlansın. Bu durumda $D(A\bigcirc B)$ matrisi,

$$D(A\bigcirc B)=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}-2&0\\2&3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-4&0\\2&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&0\\6&18\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $(DA)\bigcirc B$ matrisi,

$$(DA)\bigcirc B=\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\right)\bigcirc\begin{bmatrix}-2&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&6\\3&6\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}-2&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&0\\6&18\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $A\bigcirc(DB)$ matrisi

$$A\bigcirc(DB)=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\bigcirc\left(\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0\\2&3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}-4&0\\6&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8&0\\6&18\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $D(A\bigcirc B)=(DA)\bigcirc B=A\bigcirc(DB)$ olduğu görülür.

Benzer şekilde, $(A\bigcirc B)E$ matrisi

$$(A\bigcirc B)E=\left(\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}-2&0\\2&3\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0\\2&6\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0\\2&18\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $(AE)\bigcirc B$ matrisi

$$(AE)\bigcirc B=\left(\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\right)\bigcirc\begin{bmatrix}-2&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&9\\1&6\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}-2&0\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0\\2&18\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $A\bigcirc(BE)$ matrisi

$$A\bigcirc(BE)=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\bigcirc\left(\begin{bmatrix}-2&0\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&3\\1&2\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}-2&0\\2&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4&0\\2&18\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $(A\bigcirc B)E=(AE)\bigcirc B=A\bigcirc(BE)$ olduğu görülür.

Önerme 1.1.7 a ve c; $m\times 1$ boyutlu vektörler, b ve d $n\times 1$; boyutlu vektörler olmak üzere

$$(ab^T)\bigcirc(cd^T)=(a\bigcirc c)(b\bigcirc d)^T$$

eşitliği vardır.

Aşağıdaki örnekte, $(ab^T)\bigcirc(cd^T)=(a\bigcirc c)(b\bigcirc d)^T$ özelliği doğrulanmaktadır.

Örnek 1.1.7 $a=\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}$, $c=\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ ve $d=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ matrisleri için $(ab^T)\bigcirc(cd^T)$

matrisi,

$$(ab^T)\bigcirc(cd^T)=\left(\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix}\right)\bigcirc\left(\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}6 & 3\\-4 & -2\\2 & 1\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}8 & 12\\2 & 3\\6 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48 & 36\\-8 & -6\\12 & 9\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $(a\bigcirc c)(b\bigcirc d)^T$ matrisi

$$(a\bigcirc c)(b\bigcirc d)^T=\left(\begin{bmatrix}3\\-2\\1\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}4\\1\\3\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\bigcirc\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}\right)^T=\begin{bmatrix}12\\-2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}12\\-2\\3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}48 & 36\\-8 & -6\\12 & 9\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $(ab^T)\bigcirc(cd^T)=(a\bigcirc c)(b\bigcirc d)^T$ olduğu görülür.

1.2. Kronecker Matris Çarpımı ve Bazı Özellikleri

Tanım 1.2.1 $A=\left[a_{ij}\right]$ ile $B=\left[b_{ij}\right]$ matrisleri sırasıyla $m\times n$ ile $s\times r$ tipinde matrisler olmak üzere $ij.$ terimi $s\times r$ boyutlu $a_{ij}B$ alt matrisi olan

$$A\otimes B=\left[a_{ij}.B\right]$$

şeklindeki $ms\times nr$ boyutlu $A\otimes B$ matrisine A ve B matrislerinin Kronecker matris çarpımı denir (Horn ve Johnson, 1991).

Bu tanıma aşağıda bir örnek verilmiştir.

Örnek 1.2.1 $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\2 & 4 & 1\end{bmatrix}$ matrislerinin Kronecker çarpımı

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}3 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0 & 1 & 3\\2 & 4 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 3 & 9 & 0 & 4 & 12\\6 & 12 & 3 & 8 & 16 & 4\\0 & 2 & 6 & 0 & 3 & 9\\4 & 8 & 2 & 6 & 12 & 3\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Kronecker matris çarpımı değişmeli değildir. Bir başka ifade ile

$$A \otimes B = B \otimes A$$

olması gerekmez. Bu durum aşağıda bir örnekle açıklanmıştır.

Örnek 1.2.2 $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. $A \otimes B$ matrisi

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 & 3 & 6 & 9 \\ 4 & 0 & -2 & -6 & 0 & 3 \\ 4 & 8 & 12 & 1 & 2 & 3 \\ -8 & 0 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $B \otimes A$ matrisi

$$B \otimes A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 & 6 & -6 & 9 \\ 4 & 1 & 8 & 2 & 12 & 3 \\ 4 & -6 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ -8 & -2 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $A \otimes B \neq B \otimes A$ olduğu görülür.

Herhangi $n \times n$ mertebeli $A = [a_{ij}]$ matrisinin esas köşegeni üzerindeki $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ elemanları için $\text{köş}(A)$ ile $\text{köş}(A) = [a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}]$ şeklinde $1 \times n$ matrisi gösterilmektedir.

Önerme 1.2.1

a. Kronecker matris çarpımı için

$$\mathbf{0} \otimes A = A \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

özelliği,

b. A ve B kare matris olmak üzere,

$$\text{köş}(A \otimes B) = \text{köş}(A) \otimes \text{köş}(B)$$

özelliği vardır.

Aşağıdaki örnekte, $\mathbf{0} \otimes A = A \otimes \mathbf{0} = \mathbf{0}$ ve $\text{köş}(A \otimes B) = \text{köş}(A) \otimes \text{köş}(B)$ özelliği doğrulanmaktadır.

Örnek 1.2.3 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin.

a. $\mathbf{0}$ ve A matrislerinin Kronecker çarpımı,

$$\mathbf{0}\otimes A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

ve

$$A\otimes\mathbf{0}=\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

olarak bulunur. Buradan $\mathbf{0}\otimes A=A\otimes\mathbf{0}=\mathbf{0}$ olduğu görülür.

b. *A* ve *B* matrisleri için $\text{köş}\left(A\otimes B\right)$,

$$\text{köş}\left(A\otimes B\right)=\text{köş}\left(\begin{bmatrix}1&2\\-1&3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3&0\\1&1\end{bmatrix}\right)=\text{köş}\begin{bmatrix}3&0&6&0\\1&1&2&2\\-3&0&9&0\\-1&-1&3&3\end{bmatrix}$$

şeklindeki eşitlikten

$$\text{köş}\left(A\otimes B\right)=\begin{bmatrix}3&1&9&3\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $\text{köş}\left(A\right)\otimes\text{köş}\left(B\right)$ hesaplanırsa

$$\text{köş}\left(A\right)\otimes\text{köş}\left(B\right)=\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&9&3\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $\text{köş}\left(A\otimes B\right)=\text{köş}\left(A\right)\otimes\text{köş}\left(B\right)$ olduğu görülür.

Önerme 1.2.2

a. A_1 ve A_2 aynı mertebeli ve B herhangi mertebeli matrisler olmak üzere,

$$\left(A_1+A_2\right)\otimes B=\left(A_1\otimes B\right)+\left(A_2\otimes B\right),$$

b. B_1 ve B_2 aynı mertebeli ve A herhangi mertebeli matrisler olmak üzere,

$$A\otimes\left(B_1+B_2\right)=\left(A\otimes B_1\right)+\left(A\otimes B_2\right),$$

c. α ve β birer skaler, A ve B herhangi mertebeli matrisler olmak üzere,

$$(\alpha A)\otimes(\beta B)=\alpha\beta\left(A\otimes B\right)$$

özellikleri vardır (Horn ve Johnson, 1991).

Örnek 1.2.4

a. $A_1=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}, A_2=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. $(A_1+A_2)\otimes B$ matrisi

$$(A_1+A_2)\otimes B=\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\right)\otimes\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 3\\ 5 & 3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -6\\ 10 & 0 & 5 & 6 & 0 & 3\\ 5 & 10 & -10 & 3 & 6 & -6\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $(A_1\otimes B)+(A_2\otimes B)$ matrisi,

$$(A_1\otimes B)+(A_2\otimes B)=\left(\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2\\ 1 & 2 & -2 & 2 & 4 & -4\\ 6 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 6 & -6 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1\\ -1 & -2 & 2 & 1 & 2 & -2\\ 4 & 0 & 2 & 6 & 0 & 3\\ 2 & 4 & -4 & 3 & 6 & -6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 & -6\\ 10 & 0 & 5 & 6 & 0 & 3\\ 5 & 10 & -10 & 3 & 6 & -6\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $(A_1+A_2)\otimes B=(A_1\otimes B)+(A_2\otimes B)$ olduğu görülür.

b. $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}$, $B_1=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ ve $B_2=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. $A\otimes(B_1+B_2)$ matrisi

$$A\otimes(B_1+B_2)=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\otimes\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\right)$$

şeklindeki eşitlikten

$$A\otimes(B_1+B_2)=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 28 & 0 & 7 & 0 & 14\\ -1 & -1 & 3 & 3 & 1 & 1\\ 0 & -7 & 0 & 21 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $(A\otimes B_1)+(A\otimes B_2)$ matrisi,

$$(A\otimes B_1)+(A\otimes B_2)=\left(\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix}\right)+\left(\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & 3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}12 & 8 & 3 & 2 & 6 & 4\\ 4 & 16 & 1 & 4 & 2 & 8\\ -3 & -2 & 9 & 6 & 3 & 2\\ -1 & -4 & 3 & 12 & 1 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-8 & -4 & -2 & -1 & -4 & -2\\ -4 & 12 & -1 & 3 & -2 & 6\\ 2 & 1 & -6 & -3 & -2 & -1\\ 1 & -3 & -3 & 9 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 4 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 28 & 0 & 7 & 0 & 14\\ -1 & -1 & 3 & 3 & 1 & 1\\ 0 & -7 & 0 & 21 & 0 & 7\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $A\otimes(B_1+B_2)=(A\otimes B_1)+(A\otimes B_2)$ olduğu görülür.

c. $\alpha=3,\beta=2$ skalerleri ile $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 5\end{bmatrix}$ matrisleri için $(3A)\otimes(2B)$ matrisi,

$$(3A)\otimes(2B)=\left(3\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\right)\otimes\left(2\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 5\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}9 & 6\\ 12 & 3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}4 & -6\\ -2 & 10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}36 & -54 & 24 & -36\\ -18 & 90 & -12 & 60\\ 48 & -72 & 12 & -18\\ -24 & 120 & -6 & 30\end{bmatrix}$$

elde edilir ve $(3.2)(A\otimes B)$ matrisi

$$(3.2)(A\otimes B)=6\left(\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2 & -3\\ -1 & 5\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}36 & -54 & 24 & -36\\ -18 & 90 & -12 & 60\\ 48 & -72 & 12 & -18\\ -24 & 120 & -6 & 30\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $\alpha A \otimes \beta B = \alpha\beta\left(A \otimes B\right)$ olduğu görülür.

Önerme 1.2.3 A, B, C ve D uygun boyutlu matrisler olmak üzere

$$\left(A \otimes B\right)\left(C \otimes D\right) = AC \otimes BD$$

özelliği vardır (Horn ve Johnson, 1991).

Aşağıdaki örnekte, $\left(A \otimes B\right)\left(C \otimes D\right) = AC \otimes BD$ özelliği doğrulanmaktadır.

Örnek 1.2.5 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin.

Bu durumda $\left(A \otimes B\right)\left(C \otimes D\right)$ matrisi,

$$\begin{aligned}
\left(A \otimes B\right)\left(C \otimes D\right) &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} -4 & 6 & -6 & 9 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -6 & -21 & -36 \\ 2 & 7 & 12 \\ -3 & -12 & -24 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $\left(AC\right) \otimes \left(BD\right)$ matrisi

$$\begin{aligned}
\left(AC\right) \otimes \left(BD\right) &= \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}\right) \otimes \left(\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 7 & 12 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -6 & -21 & -36 \\ 2 & 7 & 12 \\ -3 & -12 & -24 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece $\left(A \otimes B\right)\left(C \otimes D\right) = AC \otimes BD$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, matrislerin Kronecker çarpımların birleşme özelliğinin olduğu verilmektedir.

Önerme 1.2.4 A, B ve C herhangi üç matris olmak üzere

$$\left(A\otimes B\right)\otimes C = A\otimes\left(B\otimes C\right)$$

şeklinde birleşme özelliği vardır (Horn ve Johnson, 1991).

Aşağıdaki örnekte, matrislerin Kronecker çarpımların birleşme özelliğinin olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 1.2.6 $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ ve $C=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. $\left(A\otimes B\right)\otimes C$ matrisi,

$$\left(A\otimes B\right)\otimes C = \left(\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\right)\otimes\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 12 & 4 & 4 & 6 & 2\\ 0 & 4 & 8 & 0 & 2 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 6 & 9 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 6\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}16 & 24 & 8 & 8 & 12 & 4\\ 24 & 36 & 12 & 12 & 18 & 6\\ 0 & 8 & 16 & 0 & 4 & 8\\ 0 & 12 & 24 & 0 & 6 & 12\\ 4 & 6 & 2 & 12 & 18 & 6\\ 6 & 9 & 3 & 18 & 27 & 9\\ 0 & 2 & 4 & 0 & 6 & 12\\ 0 & 3 & 6 & 0 & 9 & 18\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $A\otimes\left(B\otimes C\right)$ matrisi,

$$A\otimes\left(B\otimes C\right)=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\otimes\left(\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}4 & 6 & 2\\ 6 & 9 & 3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & 3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}16 & 24 & 8 & 8 & 12 & 4\\ 24 & 36 & 12 & 12 & 18 & 6\\ 0 & 8 & 16 & 0 & 4 & 8\\ 0 & 12 & 24 & 0 & 6 & 12\\ 4 & 6 & 2 & 12 & 18 & 6\\ 6 & 9 & 3 & 18 & 27 & 9\\ 0 & 2 & 4 & 0 & 6 & 12\\ 0 & 3 & 6 & 0 & 9 & 18\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$ olduğu görülür.

Önerme 1.2.5 Herhangi *A* ve *B* matrisleri, *b* reel vektörü ve α skaleri için

$$\alpha\otimes A=\alpha A=A\otimes\alpha$$

özelliği ve AB çarpımı tanımlı ise

$$(A\otimes b)B=(A.B)\otimes b$$

özelliği vardır.

Örnek 1.2.7

a. $\alpha=3$ ve $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}$ matrisi için $3\otimes A$ matrisi

$$3\otimes A=3\otimes\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 3 & 6\\ 12 & 0\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $3A$ matrisi

$$3A=3\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 3 & 6\\ 12 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $A\otimes 3$ matrisi

$$A\otimes 3=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\\ 4 & 0\end{bmatrix}\otimes 3=\begin{bmatrix}6 & 9\\ 3 & 6\\ 12 & 0\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $\alpha\otimes A=\alpha A=A\otimes\alpha$ olduğu görülür.

b. $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ matrisleri, $b=\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}$ vektörü için, $(A\otimes b)B$ matrisi

$$(A\otimes b)B=\left(\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 10 & 15\\ 0 & 8\\ 0 & 20\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 34\\ -20 & 85\\ -16 & 24\\ -40 & 60\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $(AB)\otimes b$ matrisi

$$(AB)\otimes b=\left(\begin{bmatrix}2 & 3\\ 0 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4\\ -2 & 3\end{bmatrix}\right)\otimes\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 17\\ -8 & 12\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2\\ 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8 & 34\\ -20 & 85\\ -16 & 24\\ -40 & 60\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $(A\otimes b)B=(AB)\otimes b$ bulunur.

Önerme 1.2.6 Herhangi iki a ve b reel vektörleri için

$$a\otimes b^T = ab^T = b^T \otimes a$$

özelliği vardır.

Aşağıdaki örnekte, $a\otimes b^T = ab^T = b^T \otimes a$ özelliği doğrulanmaktadır.

Örnek 1.2.8 $a=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 2\\ 0\end{bmatrix}$ ve $b^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\end{bmatrix}$ vektörleri için $a\otimes b^T$ ve ab^T matrisleri

$$a\otimes b^T=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 2\\ 0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -3\\ 3 & 12 & 9\\ 2 & 8 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

ve

$$ab^T=\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 2\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -3\\ 3 & 12 & 9\\ 2 & 8 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $b^T\otimes a$ matrisi

$$b^T\otimes a=\begin{bmatrix}1 & 4 & 3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}-1\\ 3\\ 2\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -4 & -3\\ 3 & 12 & 9\\ 2 & 8 & 6\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $a\otimes b^T = ab^T = b^T \otimes a$ olduğu görülür.

Önerme 1.2.7

a. A ve B herhangi boyutlu matrisler için $(A\otimes B)^T = A^T\otimes B^T$ özelliği vardır (Horn ve Johnson, 1991).

b. A ve B karesel matrisler için $iz\left(A\otimes B\right)=iz\left(A\right)iz\left(B\right)$ eşitliği vardır (Horn ve Johnson, 1991).

c. A ve B karesel matrisler için A ve B idempotent ise $A\otimes B$ idempotenttir (Horn ve Johnson, 1991).

d. A ve B karesel matrisleri simetrik ise $A\otimes B$ simetriktir (Horn ve Johnson, 1991).

Örnek 1.2.9

a. $A=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. $\left(A\otimes B\right)^T$ matrisi

$$\left(A\otimes B\right)^T=\left(\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)^T$$

$$=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 5 & 5 \\ 8 & 12 & 10 & 15 \\ -2 & -2 & -3 & -3 \\ -4 & -6 & -6 & -9 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 & -4 \\ 4 & 12 & -2 & -6 \\ 5 & 10 & -3 & -6 \\ 5 & 15 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $A^T\otimes B^T$ matrisi

$$A^T\otimes B^T=\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 & -4 \\ 4 & 12 & -2 & -6 \\ 5 & 10 & -3 & -6 \\ 5 & 15 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Buradan $\left(A\otimes B\right)^T=A^T\otimes B^T$ olduğu görülür.

b. $A=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. $iz\left(A\otimes B\right)$ hesaplanırsa

$$iz\left(A\otimes B\right)=iz\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$=iz\begin{bmatrix} 4 & 12 & 2 & 6 \\ -12 & 4 & -6 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$=4+4+0+0=8$$

şeklinde elde edilir. $iz\left(A\right)iz\left(B\right)$ hesaplanırsa

$$iz(A)iz(B)=iz\left(\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & 0\end{bmatrix}\right)iz\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ -3 & 1\end{bmatrix}\right)$$

$$=(4+0)(1+1)=8$$

sunucuna ulaşılır. Böylece $iz(A\otimes B)=iz(A)iz(B)$ olduğu görülür.

c. $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -3 & -2\end{bmatrix}$ idempotent matrislerinin Kronecker çarpımları

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -2 & -1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3 & 2\\ -3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 4 & 3 & 2\\ -6 & -4 & -3 & -2\\ -6 & -4 & -3 & -2\\ 6 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $A\otimes B$ ile $A\otimes B$ matrislerinin çarpımı ise,

$$(A\otimes B)(A\otimes B)=\begin{bmatrix}6 & 4 & 3 & 2\\ -6 & -4 & -3 & -2\\ -6 & -4 & -3 & -2\\ 6 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 4 & 3 & 2\\ -6 & -4 & -3 & -2\\ -6 & -4 & -3 & -2\\ 6 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 4 & 3 & 2\\ -6 & -4 & -3 & -2\\ -6 & -4 & -3 & -2\\ 6 & 4 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan A ve B idempotent ise $A\otimes B$ idempotent olduğu görülür.

d. $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ kare simetrik matrisleri verilsin. $A\otimes B$ matrisi

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -1 & -6 & 2\\ -1 & 4 & 2 & -8\\ -6 & 2 & 9 & -3\\ 2 & -8 & -3 & 12\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece A ve B kare simetrik matrisleri için $A\otimes B$ simetriktir.

1.3 Khatri-Rao Matris Çarpımı ve Özellikleri

Tanım 1.3.1 $A=[a_{ij}]$ ve $B=[b_{pq}]$ matrisleri sırasıyla $m\times n$ ve $s\times r$ tipinde herhangi iki matris olsun. A_{ij} ile B_{ij} sırasıyla A ile B matrislerinin $m_i\times n_j$ ve $s_i\times r_j$ boyutlu alt matrisleri ve $A_{ij}\otimes B_{ij}$ de $m_i s_i\times n_j r_j$ boyutlu alt matris olmak üzere,

$$A*B=[A_{ij}\otimes B_{ij}]_{ij}$$

şeklinde tanımlanan $\sum m_i s_i \times \sum n_j r_j$ boyutlu $A*B$ matrisine A ve B matrislerinin Khatri-Rao çarpımı denir (Zhour ve Kilicman 2006).

Örnek 1.3.1 $A=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$, $B=\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ \hline 3 & 6 & 9 \end{array}\right]$ olsun. A ve B matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix} 9 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $A*B$ matrisi

$$A*B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}*\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}\otimes B_{11} & A_{12}\otimes B_{12} \\ A_{21}\otimes B_{21} & A_{22}\otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1B_{11} & 2B_{11} & 3B_{12} \\ 4B_{11} & 5B_{11} & 6B_{12} \\ 7B_{21} & 8B_{21} & 9B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 & 8 & 21 \\ 2 & 5 & 4 & 10 & 24 \\ 4 & 16 & 5 & 20 & 42 \\ 8 & 20 & 10 & 25 & 48 \\ 21 & 42 & 24 & 48 & 81 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Matrislerinin Khatri-Rao çarpımı değişmeli değildir. Bir başka ifade ile matrislerin

$$A*B=B*A$$

olması gerekmez (Zhour ve Kilicman 2006). Bu durum aşağıda bir örnekle açıklanmıştır.

Örnek 1.3.2 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. A ve B matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}0 & 3\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $A*B$ matrisi

$$A*B=\begin{bmatrix}A_{11}\otimes B_{11} & A_{12}\otimes B_{12}\\ A_{21}\otimes B_{21} & A_{22}\otimes B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2B_{11} & 3B_{11} & 4B_{12}\\ -1B_{11} & 0B_{11} & 2B_{12}\\ 2B_{21} & 1B_{21} & 0B_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 4 & 12 & 6 & 4\\ 4 & 2 & 6 & 3 & 0\\ -4 & -2 & 0 & 0 & 2\\ -2 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $B*A$ matrisi,

$$B*A=\begin{bmatrix}B_{11}\otimes A_{11} & B_{12}\otimes A_{12}\\ B_{21}\otimes A_{21} & B_{22}\otimes A_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4A_{11} & 2A_{11} & 1A_{12}\\ 2A_{11} & 1A_{11} & 0A_{12}\\ 0A_{21} & 3A_{21} & 1A_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}8 & 12 & 4 & 6 & 4\\ -4 & 0 & -2 & 0 & 2\\ 4 & 6 & 2 & 3 & 0\\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $A*B\neq B*A$ olduğu görülür.

Önerme 1.3.1 A**,** B**,** C ve D aynı mertebeli reel matrisler olmak üzere

$$(A+C)*(B+D)=(A*B)+\left(A*D\right)+(C*B)+(C*D)$$

özelliği vardır (Liu, 1999).

Aşağıdaki örnekte, $(A+C)*(B+D)=(A*B)+\left(A*D\right)+(C*B)+(C*D)$ özelliği doğrulanmaktadır.

Örnek 1.3.3 $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\\ 2 & 4 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -3\\ 0 & 3 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ ve $D=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ -2 & -3 & 0\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix}$

olsun. $A+C$ ve $B+D$ matrisleri

$$A+C=\begin{bmatrix}2&3&0\\1&6&3\\6&6&1\end{bmatrix} \text{ ve } B+D=\begin{bmatrix}2&3&3\\1&-1&1\\6&4&5\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $A+C=K$ ve $B+D=L$ matrislerini

$$K_{11}=\begin{bmatrix}2&3\\1&6\end{bmatrix},\ K_{12}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix},\ K_{21}=\begin{bmatrix}6&6\end{bmatrix},\ K_{22}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

$$L_{11}=\begin{bmatrix}2&3\\1&-1\end{bmatrix},\ L_{12}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\ L_{21}=\begin{bmatrix}6&4\end{bmatrix},\ L_{22}=\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $K*L$ matrisi

$$K*L=\begin{bmatrix}K_{11}\otimes L_{11} & K_{12}\otimes L_{12}\\ K_{21}\otimes L_{21} & K_{22}\otimes L_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2L_{11}&3L_{11}&0L_{12}\\1L_{11}&6L_{11}&3L_{12}\\6L_{21}&6L_{21}&1L_{22}\end{bmatrix}$$

olup buradan,

$$K*L=\begin{bmatrix}4&6&6&9&0\\2&-2&3&-3&0\\2&3&12&18&9\\1&-1&6&-6&3\\36&24&36&24&5\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. A, B, C ve D matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix}4&2\\1&3\end{bmatrix},A_{12}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},A_{21}=\begin{bmatrix}2&4\end{bmatrix},A_{22}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}1&2\\3&2\end{bmatrix},B_{12}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},B_{21}=\begin{bmatrix}2&1\end{bmatrix},B_{22}=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$$

$$C_{11}=\begin{bmatrix}-2&1\\0&3\end{bmatrix},C_{12}=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix},C_{21}=\begin{bmatrix}4&2\end{bmatrix},C_{22}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

$$D_{11}=\begin{bmatrix}1&1\\-2&-3\end{bmatrix},D_{12}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix},D_{21}=\begin{bmatrix}4&3\end{bmatrix},D_{22}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $A*B$, $A*D$, $C*B$ ve $C*D$ matrisleri sırasıyla,

$$A*B=\begin{bmatrix}A_{11}\otimes B_{11} & A_{12}\otimes B_{12}\\ A_{21}\otimes B_{21} & A_{22}\otimes B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4B_{11}&2B_{11}&3B_{12}\\1B_{11}&3B_{11}&2B_{12}\\2B_{21}&4B_{21}&0B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&8&2&4&0\\12&8&6&4&3\\1&2&3&6&0\\3&2&9&6&2\\4&2&8&4&0\end{bmatrix}$$

$$A*D=\begin{bmatrix} A_{11}\otimes D_{11} & A_{12}\otimes D_{12} \\ A_{21}\otimes D_{21} & A_{22}\otimes D_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4D_{11} & 2D_{11} & 3D_{12} \\ 1D_{11} & 3D_{11} & 2D_{12} \\ 2D_{21} & 4D_{21} & 0D_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 & 2 & 9 \\ -8 & -12 & -4 & -6 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 6 \\ -2 & -3 & -6 & -9 & 0 \\ 8 & 6 & 16 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C*B=\begin{bmatrix} C_{11}\otimes B_{11} & C_{12}\otimes B_{12} \\ C_{21}\otimes B_{21} & C_{22}\otimes B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2B_{11} & 1B_{11} & -3B_{12} \\ 0B_{11} & 3B_{11} & 1B_{12} \\ 4B_{21} & 2B_{21} & 1B_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -4 & 1 & 2 & 0 \\ -6 & -4 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 6 & 1 \\ 8 & 4 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$C*D=\begin{bmatrix} C_{11}\otimes D_{11} & C_{12}\otimes D_{12} \\ C_{21}\otimes D_{21} & C_{22}\otimes_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2D_{11} & 1D_{11} & -3D_{12} \\ 0D_{11} & 3D_{11} & 1D_{12} \\ 4D_{21} & 2D_{21} & 1D_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 & 1 & -9 \\ 4 & 6 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -9 & 0 \\ 16 & 12 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan $(A*B)+(A*D)+(C*B)+(C*D)$ matrisi

$$(A*B)+(A*D)+(C*B)+(C*D)=\begin{bmatrix} 4 & 6 & 6 & 9 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 12 & 18 & 9 \\ 1 & -1 & 6 & -6 & 3 \\ 36 & 24 & 36 & 24 & 5 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $(A+C)*(B+D)=(A*B)+(A*D)+(C*B)+(C*D)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, matrislerin Khatri-Rao çarpımlarının transpozunun, matrislerin transpozlarının Khatri-Rao çarpımları olduğu verilmektedir.

Önerme 1.3.2 A ve B herhangi boyutlu matrisler olmak üzere

$$(A*B)^T=A^T*B^T$$

özelliği vardır (Liu, 1999).

Aşağıdaki örnekte, matrislerin Khatri-Rao çarpımlarının transpozunun, matrislerin transpozlarının Khatri-Rao çarpımları olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 1.3.4 $A=\begin{bmatrix}4&5&3\\2&0&3\\1&3&2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-5&1&4\\3&2&-2\\3&4&1\end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. A ve B matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix}4&5\\2&0\end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}, A_{21}=\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}, A_{22}=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix},$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}-5&1\\3&2\end{bmatrix}, B_{12}=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}, B_{21}=\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}, B_{22}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix},$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $(A*B)^T$ matrisi

$$(A*B)^T=\begin{bmatrix}A_{11}\otimes B_{11} & A_{12}\otimes B_{12}\\ A_{21}\otimes B_{21} & A_{22}\otimes B_{22}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}4B_{11}&5B_{11}&3B_{12}\\2B_{11}&0B_{11}&3B_{12}\\1B_{21}&3B_{21}&2B_{22}\end{bmatrix}^T$$

$$=\begin{bmatrix}-20&4&-25&5&12\\12&8&15&10&-6\\-10&2&0&0&12\\6&4&0&0&-6\\3&4&9&12&2\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-20&12&-10&6&3\\4&8&2&4&4\\-25&15&0&0&9\\5&10&0&0&12\\12&-6&12&-6&2\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

$$A^T=\begin{bmatrix}4&2&1\\5&0&3\\3&3&2\end{bmatrix},\ B^T=\begin{bmatrix}-5&3&3\\1&2&4\\4&-2&1\end{bmatrix}$$

matrislerini

$$A_{11}^T=\begin{bmatrix}4&2\\5&0\end{bmatrix}, A_{12}^T=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, A_{21}^T=\begin{bmatrix}3&3\end{bmatrix}, A_{22}^T=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

$$B_{11}^T=\begin{bmatrix}-5&3\\1&2\end{bmatrix}, B_{12}^T=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, B_{21}^T=\begin{bmatrix}4&-2\end{bmatrix}, B_{22}^T=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. A^T*B^T matrisi

$$A^T * B^T = \begin{bmatrix} 4B_{11}^T & 2B_{11}^T & 1B_{12}^T \\ 5B_{11}^T & 0B_{11}^T & 3B_{12}^T \\ 3B_{21}^T & 3B_{21}^T & 2B_{22}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 12 & -10 & 6 & 3 \\ 4 & 8 & 2 & 4 & 4 \\ -25 & 15 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 10 & 0 & 0 & 12 \\ 12 & -6 & 12 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $(A*B)^T = A^T * B^T$ olduğu görülür.

Önerme 1.3.3 Matrislerin Khatri-Rao çarpımlarının toplama işlemi üzerine

$$(A+B)*C = (A*C)+(B*C)$$

şeklinde sağdan dağılma özelliği vardır.

Aşağıdaki örnekte, Khatri-Rao çarpımının toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği olduğu doğrulanmıştır.

Örnek 1.3.5 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ olsun. A ve B matrislerinin toplamı,

$$A+B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $A+B=K$ ile C matrislerini

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}, K_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, K_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \end{bmatrix}, K_{22} = \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, C_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, C_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}, C_{22} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $K*C$ matrisi,

$$K*C = \begin{bmatrix} K_{11} \otimes C_{11} & K_{12} \otimes C_{12} \\ K_{21} \otimes C_{21} & K_{22} \otimes C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4C_{11} & 6C_{11} & 3C_{12} \\ 5C_{11} & 4C_{11} & 5C_{12} \\ 0C_{21} & 4C_{21} & 5C_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır ve $(A+B)*C$ matrisi,

$$(A+B)*C=\begin{bmatrix}12&8&18&12&6\\16&4&24&6&9\\15&10&12&8&10\\20&5&16&4&15\\0&0&8&12&20\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. *A* ve *B* matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix}3&4\\1&3\end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}, A_{21}=\begin{bmatrix}-2&1\end{bmatrix}, A_{22}=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}1&2\\4&1\end{bmatrix}, B_{12}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, B_{21}=\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}, B_{22}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $(A*B)+(B*C)$ matrisi,

$$(A*C)+(B*C)=\begin{bmatrix}A_{11}\otimes C_{11}&A_{12}\otimes C_{12}\\A_{21}\otimes C_{21}&A_{22}\otimes C_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11}\otimes C_{11}&B_{12}\otimes C_{12}\\B_{21}\otimes C_{21}&B_{22}\otimes C_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3C_{11}&4C_{11}&2C_{12}\\1C_{11}&3C_{11}&2C_{12}\\-2C_{21}&1C_{21}&4C_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1C_{11}&2C_{11}&1C_{12}\\4C_{11}&1C_{11}&3C_{12}\\2C_{21}&3C_{21}&1C_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9&6&12&8&4\\12&3&16&4&6\\3&2&9&6&4\\4&1&12&3&6\\-4&-6&2&3&16\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3&2&6&4&2\\4&1&8&2&3\\12&8&3&2&6\\16&4&4&1&9\\4&6&6&9&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12&8&18&12&6\\16&4&24&6&9\\15&10&12&8&10\\20&5&16&4&15\\0&0&8&12&20\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $(A+B)*C=(A*C)+(B*C)$ elde edilir.

Önerme 1.3.4 Matrislerin Khatri-Rao çarpımlarının toplama işlemi üzerine

$$A*(B+C)=(A*B)+(A*C)$$

şeklinde soldan dağılma özelliği vardır.

Aşağıdaki örnekte, Khatri-Rao çarpımının toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliği olduğu doğrulanmıştır.

Örnek 1.3.6 $A=\begin{bmatrix}5&4&3\\2&3&1\\1&3&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}4&2&1\\3&1&2\\-3&1&-4\end{bmatrix}$ ve $C=\begin{bmatrix}1&2&3\\3&4&2\\1&2&5\end{bmatrix}$ olsun. B ve C matrislerinin toplamı,

$$B+C=\begin{bmatrix}5&4&4\\6&5&4\\-2&3&1\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. A ile $B+C=K$ matrislerini,

$$A_{11}=\begin{bmatrix}5&4\\2&3\end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, A_{21}=\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}, A_{22}=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$$

$$K_{11}=\begin{bmatrix}5&4\\6&5\end{bmatrix}, K_{12}=\begin{bmatrix}4\\4\end{bmatrix}, K_{21}=\begin{bmatrix}-2&3\end{bmatrix}, K_{22}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $A*K$ matrisi,

$$A*K=\begin{bmatrix}A_{11}\otimes K_{11} & A_{12}\otimes K_{12}\\ A_{21}\otimes K_{21} & A_{22}\otimes K_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5K_{11}&4K_{11}&3K_{12}\\2K_{11}&3K_{11}&1K_{12}\\1K_{21}&3K_{21}&4K_{22}\end{bmatrix},$$

$$=\begin{bmatrix}25&20&20&16&12\\30&25&24&20&12\\10&8&15&12&4\\12&10&18&15&4\\-2&3&-6&9&4\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. B ve C matrislerini

$$B_{11}=\begin{bmatrix}4&2\\3&1\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}-3&1\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}-4\end{bmatrix}$$

$$C_{11}=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\ C_{12}=\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix},\ C_{21}=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix},\ C_{22}=\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $(A*B)+(A*C)$ matrisi,

$$(A*B)+(A*C)=\begin{bmatrix}A_{11}\otimes B_{11} & A_{12}\otimes B_{12}\\ A_{21}\otimes B_{21} & A_{22}\otimes B_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}A_{11}\otimes C_{11} & A_{12}\otimes C_{12}\\ A_{21}\otimes C_{21} & A_{22}\otimes C_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5B_{11}&4B_{11}&3B_{12}\\2B_{11}&3B_{11}&1B_{12}\\1B_{21}&3B_{21}&4B_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5C_{11}&4C_{11}&3C_{12}\\2C_{11}&3C_{11}&1C_{12}\\1C_{21}&3C_{21}&4C_{22}\end{bmatrix}$$

toplamı ile

$$(A*B)+(A*C)=\begin{bmatrix} 20 & 10 & 16 & 8 & 3 \\ 15 & 5 & 12 & 4 & 6 \\ 8 & 4 & 12 & 6 & 1 \\ 6 & 2 & 9 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & -9 & 3 & -16 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 5 & 10 & 4 & 8 & 9 \\ 15 & 20 & 12 & 16 & 6 \\ 2 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 6 & 8 & 9 & 12 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 6 & 20 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 25 & 20 & 20 & 16 & 12 \\ 30 & 25 & 24 & 20 & 12 \\ 10 & 8 & 15 & 12 & 4 \\ 12 & 10 & 18 & 15 & 4 \\ -2 & 3 & -6 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $A*(B+C)=(A*B)+(A*C)$ olduğu görülür.

1.4 Tracy-Singh Matris Çarpımı ve Özellikleri

Tanım 1.4.1 $A=\left[a_{ij}\right]$ ve $B=\left[b_{pq}\right]$ matrisleri sırasıyla $m\times n$ ve $s\times r$ tipinde herhangi iki matris olsun. A_{ij} ile B_{pq} sırasıyla, A ile B matrislerinin $m_i\times n_i$ $(m=\sum m_i, n=\sum n_j)$ ve $s_p\times r_q$ $(s=\sum s_p, \sum r_q)$ boyutlu $ij.$ ve $pq.$ blok alt matrisleri olmak üzere

$$A\odot B=\left[A_{ij}\odot B\right]_{ij}=\left[(A_{ij}\otimes B_{pq})_{pq}\right]_{ij}$$

şeklinde tanımlanan $ms\times nr$ boyutlu $A\odot B$ matrisine A ve B matrislerinin Tracy-Singh çarpımı denir (Zhour ve Kilicman, 2006).

Örnek 1.4.1 $A=\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 3 & 0 & 0 \end{array}\right]$ ve $B=\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 \end{array}\right]$ matrisleri verilsin. A ve B matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. Matrislerin Tracy-Singh çarpımları,

$$A \odot B = \begin{bmatrix} A_{11} \odot B & A_{12} \odot B \\ A_{21} \odot B & A_{22} \odot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \otimes B_{11} & A_{11} \otimes B_{12} & A_{12} \otimes B_{11} & A_{12} \otimes B_{12} \\ A_{11} \otimes B_{21} & A_{11} \otimes B_{22} & A_{12} \otimes B_{21} & A_{12} \otimes B_{22} \\ A_{21} \otimes B_{11} & A_{21} \otimes B_{12} & A_{22} \otimes B_{11} & A_{22} \otimes B_{12} \\ A_{21} \otimes B_{21} & A_{21} \otimes B_{22} & A_{22} \otimes B_{21} & A_{22} \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Matrislerin Tracy-Singh çarpımları değişmeli değildir. Bir başka ifade ile

$$A \odot B = B \odot A$$

olması gerekmez (Zhour ve Kılıcman, 2006). Bu durum aşağıda bir örnekle doğrulanmıştır.

Örnek 1.4.2 $A = \left[\begin{array}{cc:c} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ \hdashline 4 & -1 & 1 \end{array}\right]$ ve $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. A ve B matrislerini

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislerine ayıralım. $A \odot B$ matrisi,

$$A \odot B = \begin{bmatrix} A_{11} \odot B & A_{12} \odot B \\ A_{21} \odot B & A_{22} \odot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \otimes B_{11} & A_{11} \otimes B_{12} & A_{12} \otimes B_{11} & A_{12} \otimes B_{12} \\ A_{11} \otimes B_{21} & A_{11} \otimes B_{22} & A_{12} \otimes B_{21} & A_{12} \otimes B_{22} \\ A_{21} \otimes B_{11} & A_{21} \otimes B_{12} & A_{22} \otimes B_{11} & A_{22} \otimes B_{12} \\ A_{21} \otimes B_{21} & A_{21} \otimes B_{22} & A_{22} \otimes B_{21} & A_{22} \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

ile

$$A \odot B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -6 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 12 & 3 & 3 & 9 & 4 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 2 & 4 & 1 & 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 3 & 2 & 6 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 16 & 4 & -4 & -1 & 12 & -3 & 4 & 1 & 3 \\ 8 & 4 & -2 & -1 & 8 & -2 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. $B \odot A$ matrisi ise

$$B \odot A = \begin{bmatrix} B_{11} \odot A & B_{12} \odot A \\ B_{21} \odot A & B_{22} \odot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \otimes A_{11} & B_{11} \otimes A_{12} & B_{12} \otimes A_{11} & B_{12} \otimes A_{12} \\ B_{11} \otimes A_{21} & B_{11} \otimes A_{22} & B_{12} \otimes A_{21} & B_{12} \otimes A_{22} \\ B_{21} \otimes A_{11} & B_{21} \otimes A_{12} & B_{22} \otimes A_{11} & B_{22} \otimes A_{12} \\ B_{21} \otimes A_{21} & B_{21} \otimes A_{22} & B_{22} \otimes A_{21} & B_{22} \otimes A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 & -6 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 12 & 1 & 3 & 4 & 1 & 3 & 9 & 3 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 0 & 0 & 6 & 3 & 0 \\ -8 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & -1 & 1 \\ 16 & -4 & 4 & -1 & 4 & 1 & 12 & -3 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 3 & 2 & 1 & 2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 8 & -2 & 4 & -1 & 2 & 1 & 8 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $A \odot B \neq B \odot A$ olduğu görülür.

Önerme 1.4.1 A, B, C ve D matrisleri uygun mertebeli matrisler olmak üzere,

$$(A+C) \odot (B+D) = (A \odot B) + (A \odot D) + (C \odot B) + (C \odot D)$$

özelliği vardır (Zhour ve Kılicman, 2006).

Örnek 1.4.3 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ olsun.

$A+C$ ve $B+D$ matrisleri

$$A+C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & 5 \end{bmatrix} \text{ ve } B+D = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir $A+C=K$ ve $B+D=L$ olmak üzere K ve L matrislerini

$$K_{11}=\begin{bmatrix}6&4\\2&1\end{bmatrix},\ K_{12}=\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix},\ K_{21}=\begin{bmatrix}5&2\end{bmatrix},\ K_{22}=\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}$$

$$L_{11}=\begin{bmatrix}4&5\\4&4\end{bmatrix},\ L_{12}=\begin{bmatrix}4\\5\end{bmatrix},\ L_{21}=\begin{bmatrix}4&3\end{bmatrix},\ L_{22}=\begin{bmatrix}4\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $K\odot L$ matrisi,

$$K\odot L=\begin{bmatrix}K_{11}\odot L & K_{12}\odot L\\ K_{21}\odot L & K_{22}\odot L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11}\otimes L_{11} & K_{11}\otimes L_{12} & K_{12}\otimes L_{11} & K_{12}\otimes L_{12}\\ K_{11}\otimes L_{21} & K_{11}\otimes L_{22} & K_{12}\otimes L_{21} & K_{12}\otimes L_{22}\\ K_{21}\otimes L_{11} & K_{21}\otimes L_{12} & K_{22}\otimes L_{11} & K_{22}\otimes L_{12}\\ K_{21}\otimes L_{21} & K_{21}\otimes L_{22} & K_{22}\otimes L_{21} & K_{22}\otimes L_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}24&30&16&20&24&16&20&25&20\\24&24&16&16&30&20&20&20&25\\8&10&4&5&8&4&24&30&24\\8&8&4&4&10&5&24&24&30\\24&18&16&12&24&16&20&15&20\\8&6&4&3&8&4&24&18&24\\20&25&8&10&20&8&20&25&20\\20&20&8&8&25&10&20&20&25\\20&15&8&6&20&8&20&15&20\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. A, B, C ve D matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix}4&3\\0&1\end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix}1&1\end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}1&4\\2&1\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}3&1\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

$$C_{11}=\begin{bmatrix}2&1\\2&0\end{bmatrix},\ C_{12}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix},\ C_{21}=\begin{bmatrix}4&1\end{bmatrix},\ C_{22}=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$$

$$D_{11}=\begin{bmatrix}3&1\\2&3\end{bmatrix},\ D_{12}=\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix},\ D_{21}=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix},\ D_{22}=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $A\odot B$ matrisi,

$$A\odot B=\begin{bmatrix}A_{11}\odot B & A_{12}\odot B\\ A_{21}\odot B & A_{22}\odot B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}\otimes B_{11} & A_{11}\otimes B_{12} & A_{12}\otimes B_{11} & A_{12}\otimes B_{12}\\ A_{11}\otimes B_{21} & A_{11}\otimes B_{22} & A_{12}\otimes B_{21} & A_{12}\otimes B_{22}\\ A_{21}\otimes B_{11} & A_{21}\otimes B_{12} & A_{22}\otimes B_{11} & A_{22}\otimes B_{12}\\ A_{21}\otimes B_{21} & A_{21}\otimes B_{22} & A_{22}\otimes B_{21} & A_{22}\otimes B_{22}\end{bmatrix}$$

şeklindedir. Blok matrislerin maksimum çarpımı ile

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 3 & 12 & 8 & 6 & 2 & 8 & 4 \\ 8 & 4 & 6 & 3 & 4 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & 5 & 20 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 10 & 5 & 5 \\ 12 & 4 & 9 & 3 & 8 & 6 & 6 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 15 & 5 & 10 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 2 & 2 & 2 & 8 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $A \odot D$ matrisi

$$A \odot D = \begin{bmatrix} A_{11} \odot D & A_{12} \odot D \\ A_{21} \odot D & A_{22} \odot D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \otimes D_{11} & A_{11} \otimes D_{12} & A_{12} \otimes D_{11} & A_{12} \otimes D_{12} \\ A_{11} \otimes D_{21} & A_{11} \otimes D_{22} & A_{12} \otimes D_{21} & A_{12} \otimes D_{22} \\ A_{21} \otimes D_{11} & A_{21} \otimes D_{12} & A_{22} \otimes D_{11} & A_{22} \otimes D_{12} \\ A_{21} \otimes D_{21} & A_{21} \otimes D_{22} & A_{22} \otimes D_{21} & A_{22} \otimes D_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 4 & 9 & 3 & 8 & 6 & 6 & 2 & 4 \\ 8 & 12 & 6 & 9 & 16 & 12 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 15 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 & 10 & 15 & 20 \\ 4 & 8 & 3 & 6 & 8 & 6 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 5 & 10 & 10 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & 4 & 4 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $C \odot B$ matrisi,

$$C \odot B = \begin{bmatrix} C_{11} \odot B & C_{12} \odot B \\ C_{21} \odot B & C_{22} \odot B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \otimes B_{11} & C_{11} \otimes B_{12} & C_{12} \otimes B_{11} & C_{12} \otimes B_{12} \\ C_{11} \otimes B_{21} & C_{11} \otimes B_{22} & C_{12} \otimes B_{21} & C_{12} \otimes B_{22} \\ C_{21} \otimes B_{11} & C_{21} \otimes B_{12} & C_{22} \otimes B_{11} & C_{22} \otimes B_{12} \\ C_{21} \otimes B_{21} & C_{21} \otimes B_{22} & C_{22} \otimes B_{21} & C_{22} \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Blok matrislerin çarpımı ile

$$C \odot B = \begin{bmatrix} 2 & 8 & 1 & 4 & 4 & 2 & 3 & 12 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 6 & 3 & 3 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 4 & 2 & 9 & 3 & 6 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 16 & 1 & 4 & 8 & 2 & 3 & 12 & 6 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 4 & 1 & 6 & 3 & 3 \\ 12 & 4 & 3 & 1 & 8 & 2 & 9 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $C \odot D$ matrisi,

$$C \odot D = \begin{bmatrix} C_{11} \odot D & C_{12} \odot D \\ C_{21} \odot D & C_{22} \odot D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} \otimes D_{11} & C_{11} \otimes D_{12} & C_{12} \otimes D_{11} & C_{12} \otimes D_{12} \\ C_{11} \otimes D_{21} & C_{11} \otimes D_{22} & C_{12} \otimes D_{21} & C_{12} \otimes D_{22} \\ C_{21} \otimes D_{11} & C_{21} \otimes D_{12} & C_{22} \otimes D_{11} & C_{22} \otimes D_{12} \\ C_{21} \otimes D_{21} & C_{21} \otimes D_{22} & C_{22} \otimes D_{21} & C_{22} \otimes D_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 2 & 3 & 1 & 4 & 2 & 9 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 8 & 4 & 6 & 9 & 12 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 8 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 2 & 4 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 12 & 4 & 3 & 1 & 8 & 2 & 9 & 3 & 6 \\ 8 & 12 & 2 & 3 & 16 & 4 & 6 & 9 & 12 \\ 4 & 8 & 1 & 2 & 8 & 2 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $(A \odot B) + (A \odot D) + (C \odot B) + (C \odot D)$ matrisi,

$$(A \odot B) + (A \odot D) + (C \odot B) + (C \odot D) = \begin{bmatrix} 24 & 30 & 16 & 20 & 24 & 16 & 20 & 25 & 20 \\ 24 & 24 & 16 & 16 & 30 & 20 & 20 & 20 & 25 \\ 8 & 10 & 4 & 5 & 8 & 4 & 24 & 30 & 24 \\ 8 & 8 & 4 & 4 & 10 & 5 & 24 & 24 & 30 \\ 24 & 18 & 16 & 12 & 24 & 16 & 20 & 15 & 20 \\ 8 & 6 & 4 & 3 & 8 & 4 & 24 & 18 & 24 \\ 20 & 25 & 8 & 10 & 20 & 8 & 20 & 25 & 20 \\ 20 & 20 & 8 & 8 & 25 & 10 & 20 & 20 & 25 \\ 20 & 15 & 8 & 6 & 20 & 8 & 20 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $(A + C) \odot (B + D) = (A \odot B) + (A \odot D) + (C \odot B) + (C \odot D)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, Önerme 1.4.1'de sunulan eşitliğin özel durumları verilmektedir.

Önerme 1.4.2 Matrislerin Tracy-Singh çarpımının toplama işlemi üzerine

$$(A+B)\odot C=(A\odot C)+(B\odot C)$$

şeklinde sağdan dağılma özelliği ve

$$C\odot\left(A+B\right)=\left(C\odot A\right)+\left(C\odot B\right)$$

şeklinde soldan dağılma özelliği vardır.

Aşağıdaki örnekte matrislerin Tracy-Singh çarpımının toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliğinin olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 1.4.4 $A=\left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 \end{array}\right]$, $B=\left[\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$ ve $C=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. A, B ve C matrisleri

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ C_{12}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ C_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix},\ C_{22}=\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayrılsın. İlk olarak $(A+B)\odot C$ matrisini hesaplayalım. $A+B$ matrisi

$$A+B=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. $A+B=K$ olmak üzere K matrisi

$$K_{11}=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix},\ K_{12}=\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix},\ K_{21}=\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix},\ K_{22}=\begin{bmatrix} 6 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayrılsın. $K\odot C$ matrisi,

$$K\odot C=\begin{bmatrix} K_{11}\odot C & K_{12}\odot C \\ K_{21}\odot C & K_{22}\odot C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_{11}\otimes C_{11} & K_{11}\otimes C_{12} & K_{12}\otimes C_{11} & K_{12}\otimes C_{12} \\ K_{11}\otimes C_{21} & K_{11}\otimes C_{22} & K_{12}\otimes C_{21} & K_{12}\otimes C_{22} \\ K_{21}\otimes C_{11} & K_{21}\otimes C_{12} & K_{22}\otimes C_{11} & K_{22}\otimes C_{12} \\ K_{21}\otimes C_{21} & K_{21}\otimes C_{22} & K_{22}\otimes C_{21} & K_{22}\otimes C_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Blok matrislerin çarpımı ile

$$K \odot C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 2 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 12 & 24 & 10 & 20 & 6 & 5 & 10 & 20 & 5 \\ 18 & 6 & 15 & 5 & 12 & 10 & 15 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 6 & 2 & 8 & 6 \\ 6 & 24 & 5 & 20 & 18 & 15 & 5 & 20 & 15 \\ 6 & 12 & 8 & 16 & 3 & 4 & 12 & 21 & 6 \\ 9 & 3 & 12 & 4 & 6 & 8 & 18 & 6 & 12 \\ 3 & 12 & 4 & 16 & 9 & 12 & 6 & 24 & 18 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. $A \odot C$ matrisi ,

$$A \odot C = \begin{bmatrix} A_{11} \otimes C & A_{12} \otimes C \\ A_{21} \otimes C & A_{22} \otimes C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \otimes C_{11} & A_{11} \otimes C_{12} & A_{12} \otimes C_{11} & A_{12} \otimes C_{12} \\ A_{11} \otimes C_{21} & A_{11} \otimes C_{22} & A_{12} \otimes C_{21} & A_{12} \otimes C_{22} \\ A_{21} \otimes C_{11} & A_{21} \otimes C_{12} & A_{22} \otimes C_{11} & A_{22} \otimes C_{12} \\ A_{21} \otimes C_{21} & A_{21} \otimes C_{22} & A_{22} \otimes C_{21} & A_{22} \otimes C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6 & 12 & 4 & 8 & 3 & 2 & 2 & 4 & 1 \\ 9 & 3 & 6 & 2 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 8 & 16 & 2 & 4 & 4 & 1 & 4 & 8 & 2 \\ 12 & 4 & 3 & 1 & 8 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 3 & 12 & 2 & 8 & 9 & 6 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 16 & 1 & 4 & 12 & 3 & 2 & 8 & 6 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 2 & 3 & 8 & 16 & 4 \\ 6 & 2 & 9 & 3 & 4 & 6 & 12 & 4 & 8 \\ 2 & 8 & 3 & 12 & 6 & 9 & 4 & 16 & 12 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir ve $B \odot C$ matrisi,

$$B \odot C = \begin{bmatrix} B_{11} \odot C & B_{12} \odot C \\ B_{21} \odot C & B_{22} \odot C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} \otimes C_{11} & B_{11} \otimes C_{12} & B_{12} \otimes C_{11} & B_{12} \otimes C_{12} \\ B_{11} \otimes C_{21} & B_{11} \otimes C_{22} & B_{12} \otimes C_{21} & B_{12} \otimes C_{22} \\ B_{21} \otimes C_{11} & B_{21} \otimes C_{12} & B_{22} \otimes C_{11} & B_{22} \otimes C_{12} \\ B_{21} \otimes C_{21} & B_{21} \otimes C_{22} & B_{22} \otimes C_{21} & B_{22} \otimes C_{22} \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Blok matrislerin çarpımı ile

$$B \odot C = \begin{bmatrix} -6 & -12 & 0 & 0 & -3 & 0 & 2 & 4 & 1 \\ -9 & -3 & 0 & 0 & -6 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 8 & 8 & 16 & 2 & 4 & 6 & 12 & 3 \\ 6 & 2 & 12 & 4 & 4 & 8 & 9 & 3 & 6 \\ -3 & -12 & 0 & 0 & -9 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 16 & 6 & 12 & 3 & 12 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 1 & 1 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 2 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 4 & 3 & 3 & 2 & 8 & 6 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $(A \odot C)+(B \odot C)$ matrisi

$$(A \odot C)+(B \odot C) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 2 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & 0 & 4 & 6 & 2 & 4 \\ 12 & 24 & 10 & 20 & 6 & 5 & 10 & 20 & 5 \\ 18 & 6 & 15 & 5 & 12 & 10 & 15 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 0 & 6 & 2 & 8 & 6 \\ 6 & 24 & 5 & 20 & 1 & 15 & 5 & 20 & 15 \\ 6 & 12 & 8 & 16 & 3 & 4 & 12 & 24 & 6 \\ 9 & 3 & 12 & 4 & 6 & 8 & 18 & 6 & 12 \\ 3 & 12 & 4 & 16 & 9 & 12 & 6 & 24 & 18 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $(A+B) \odot C = (A \odot C)+(B \odot C)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede $(A \odot B)(C \odot D) = (AC) \odot (BD)$ özelliği olduğu verilmektedir.

Önerme 1.4.3 *A*, *B*, *C* ve *D* uygun boyutlu matrisler olmak üzere

$$(A \odot B)(C \odot D) = (AC) \odot (BD)$$

özelliği vardır (Zhour ve Kilicman, 2006).

Aşağıdaki örnekte $(A \odot B)(C \odot D) = (AC) \odot (BD)$ özelliği doğrulanmaktadır.

Örnek 1.4.5 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ve $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

olsun. A, B, C ve D matrisleri

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{11}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ C_{12}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},\ C_{21}=\begin{bmatrix}3 & 1\end{bmatrix},\ C_{22}=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

$$D_{11}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ D_{12}=\begin{bmatrix}2\\ 2\end{bmatrix},\ D_{21}=\begin{bmatrix}2 & 1\end{bmatrix},\ D_{22}=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayrılsın. Önce $(A\odot B)(C\odot D)$ çarpımını hesaplayalım.

$$A\odot B=\begin{bmatrix}A_{11}\otimes B & A_{12}\otimes B\\ A_{21}\otimes B & A_{22}\otimes B\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}\otimes B_{11} & A_{11}\otimes B_{12} & A_{12}\otimes B_{11} & A_{12}\otimes B_{12}\\ A_{11}\otimes B_{21} & A_{11}\otimes B_{22} & A_{12}\otimes B_{21} & A_{12}\otimes B_{22}\\ A_{21}\otimes B_{11} & A_{21}\otimes B_{12} & A_{22}\otimes B_{11} & A_{22}\otimes B_{12}\\ A_{21}\otimes B_{21} & A_{21}\otimes B_{22} & A_{22}\otimes B_{21} & A_{22}\otimes B_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 6 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 6 & 3 & 1 & 3 & 4 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 2 & 4 & 0\\ 2 & 3 & 6 & 9 & 1 & 3 & 4 & 6 & 2\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $C\odot D$ matrisi

$$C\odot D=\begin{bmatrix}C_{11}\otimes D & C_{12}\otimes D\\ C_{21}\otimes D & C_{22}\otimes D\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}C_{11}\otimes D_{11} & C_{11}\otimes D_{12} & C_{12}\otimes D_{11} & C_{12}\otimes D_{12}\\ C_{11}\otimes D_{21} & C_{11}\otimes D_{22} & C_{12}\otimes D_{21} & C_{12}\otimes D_{22}\\ C_{21}\otimes D_{11} & C_{21}\otimes D_{12} & C_{22}\otimes D_{11} & C_{22}\otimes D_{12}\\ C_{21}\otimes D_{21} & C_{21}\otimes D_{22} & C_{22}\otimes D_{21} & C_{22}\otimes D_{22}\end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Blok matrislerin çarpımı ile

$$C \odot D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 4 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 3 & 6 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 0 & 6 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 6 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 6 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 9 & 3 & 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir ve $(A \odot B)(C \odot D)$ matrisi

$$(A \odot B)(C \odot D) = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 28 & 28 & 36 & 63 & 20 & 20 & 45 \\ 4 & 12 & 7 & 21 & 24 & 42 & 5 & 15 & 30 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 45 & 45 & 16 & 16 & 36 \\ 5 & 15 & 5 & 15 & 30 & 30 & 4 & 12 & 24 \\ 16 & 24 & 28 & 42 & 52 & 91 & 20 & 30 & 65 \\ 20 & 30 & 20 & 30 & 65 & 65 & 16 & 24 & 52 \\ 28 & 28 & 40 & 40 & 63 & 90 & 32 & 32 & 72 \\ 7 & 21 & 10 & 30 & 42 & 60 & 8 & 24 & 48 \\ 28 & 42 & 40 & 60 & 91 & 130 & 32 & 48 & 104 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Şimdi ise $(AC) \odot (BD)$ hesaplayalım. AC ve BD matrisleri

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 5 & 5 & 4 \\ 7 & 10 & 8 \end{bmatrix},$$

$$BD = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 9 \\ 1 & 3 & 6 \\ 4 & 6 & 13 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. $AC = K$, $BD = L$ olmak üzere. K ve L matrisleri,

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}, K_{12} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}, K_{21} = \begin{bmatrix} 7 & 10 \end{bmatrix}, K_{22} = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, L_{12} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix}, L_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 6 \end{bmatrix}, L_{22} = \begin{bmatrix} 13 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayrılsın. $K \odot L$ matrisi

$$K \odot L = \begin{bmatrix} K_{11} \odot L & K_{12} \odot L \\ K_{21} \odot L & K_{22} \odot L \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11} \otimes L_{11} & K_{11} \otimes L_{12} & K_{12} \otimes L_{11} & K_{12} \otimes L_{12} \\ K_{11} \otimes L_{21} & K_{11} \otimes L_{22} & K_{12} \otimes L_{21} & K_{12} \otimes L_{22} \\ K_{21} \otimes L_{11} & K_{21} \otimes L_{12} & K_{22} \otimes L_{11} & K_{22} \otimes L_{12} \\ K_{21} \otimes L_{21} & K_{21} \otimes L_{22} & K_{22} \otimes L_{21} & K_{22} \otimes L_{22} \end{bmatrix}$$

ile

$$K \odot L = \begin{bmatrix} 16 & 16 & 28 & 28 & 36 & 63 & 20 & 20 & 45 \\ 4 & 12 & 7 & 21 & 24 & 42 & 5 & 15 & 30 \\ 20 & 20 & 20 & 20 & 45 & 45 & 16 & 16 & 36 \\ 5 & 15 & 5 & 15 & 30 & 30 & 4 & 12 & 24 \\ 16 & 24 & 28 & 42 & 52 & 91 & 20 & 30 & 65 \\ 20 & 30 & 20 & 30 & 65 & 65 & 16 & 24 & 52 \\ 28 & 28 & 40 & 40 & 63 & 90 & 32 & 32 & 72 \\ 7 & 21 & 10 & 30 & 42 & 60 & 8 & 24 & 48 \\ 28 & 42 & 40 & 60 & 91 & 130 & 32 & 48 & 104 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Böylece $(A \odot B)(C \odot D) = (AC) \odot (BD)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, matrislerin Tracy-Singh çarpımlarının transpozunun, matrislerin transpozlarının Tracy-Singh çarpımları olduğu verilmektedir

Önerme 1.4.4 A ve B herhangi boyutlu matrisler olmak üzere,

$$(A \odot B)^T = A^T \odot B^T$$

özelliği vardır (Zhour ve Kilicman, 2006).

Aşağıdaki örnekte, matrislerin Tracy-Singh çarpımlarının transpozunun, matrislerin transpozlarının Tracy-Singh çarpımları olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 1.4.6 $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. A ve B matrislerini

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},\ B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. İlk olarak $(A\odot B)^T$ matrisini hesaplayalım. $A\odot B$ matrisi,

$$A\odot B=\begin{bmatrix} A_{11}\odot B & A_{12}\odot B \\ A_{21}\odot B & A_{22}\odot B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}\otimes B_{11} & A_{11}\otimes B_{12} & A_{12}\otimes B_{11} & A_{12}\otimes B_{12} \\ A_{11}\otimes B_{21} & A_{11}\otimes B_{22} & A_{12}\otimes B_{21} & A_{12}\otimes B_{22} \\ A_{21}\otimes B_{11} & A_{21}\otimes B_{12} & A_{22}\otimes B_{11} & A_{22}\otimes B_{12} \\ A_{21}\otimes B_{21} & A_{21}\otimes B_{22} & A_{22}\otimes B_{21} & A_{22}\otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

ile

$$A\odot B=\begin{bmatrix} 12 & 4 & 3 & 1 & 16 & 4 & 9 & 3 & 12 \\ 12 & 4 & 3 & 1 & 4 & 1 & 9 & 3 & 3 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 12 & 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 9 & 0 \\ 4 & 6 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 6 & 2 & 12 & 8 & 6 & 2 & 8 \\ 9 & 3 & 6 & 2 & 3 & 2 & 6 & 2 & 2 \\ 6 & 9 & 4 & 6 & 3 & 2 & 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Bu matrisin transpozu ise

$$(A\odot B)^T=\begin{bmatrix} 12 & 12 & 6 & 6 & 8 & 4 & 9 & 9 & 6 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 12 & 6 & 3 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 6 & 6 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 6 \\ 16 & 4 & 8 & 2 & 4 & 2 & 12 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 2 \\ 9 & 9 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 6 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 9 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 12 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Şimdi

$$A^T=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ve } B^T=\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisleri için $A^T\odot B^T$ matrisini hesaplayalım. Bunun için

$$A_{11}^T=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A_{12}^T=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},\ A_{21}^T=\begin{bmatrix} 3 & 0 \end{bmatrix},\ A_{22}^T=\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{11}^T=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix},\ B_{12}^T=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix},\ B_{21}^T=\begin{bmatrix}4 & 1\end{bmatrix},\ B_{22}^T=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrisleri belirleyelim $A^T \odot B^T$ matrisi,

$$A^T \odot B^T=\begin{bmatrix}A_{11}^T \odot B^T & A_{12}^T \odot B^T\\ A_{21}^T \odot B^T & A_{22}^T \odot B^T\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_{11}^T\otimes B_{11}^T & A_{11}^T\otimes B_{12}^T & A_{12}^T\otimes B_{11}^T & A_{12}^T\otimes B_{12}^T\\ A_{11}^T\otimes B_{21}^T & A_{11}^T\otimes B_{22}^T & A_{12}^T\otimes B_{21}^T & A_{12}^T\otimes B_{22}^T\\ A_{21}^T\otimes B_{11}^T & A_{21}^T\otimes B_{12}^T & A_{22}^T\otimes B_{11}^T & A_{22}^T\otimes B_{12}^T\\ A_{21}^T\otimes B_{21}^T & A_{21}^T\otimes B_{22}^T & A_{22}^T\otimes B_{21}^T & A_{22}^T\otimes B_{22}^T\end{bmatrix}$$

ile

$$A^T \odot B^T=\begin{bmatrix}12 & 12 & 6 & 6 & 8 & 4 & 9 & 9 & 6\\ 4 & 4 & 2 & 2 & 12 & 6 & 3 & 3 & 9\\ 3 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 6 & 6 & 3\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 2 & 2 & 6\\ 16 & 4 & 8 & 2 & 4 & 2 & 12 & 3 & 3\\ 4 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 8 & 2 & 2\\ 9 & 9 & 0 & 0 & 6 & 0 & 6 & 6 & 4\\ 3 & 3 & 0 & 0 & 9 & 0 & 2 & 2 & 6\\ 12 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 8 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $(A\odot B)^T = A^T \odot B^T$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, $iz(A\odot B)=iz(A)iz(B)$ olduğu verilmektedir

Önerme 1.4.5 A ve B $n\times n$ tipinde matrisler olmak üzere,

$$iz(A\odot B)=iz(A)iz(B)$$

özelliği vardır (Zhour ve Kılicman, 2006).

Aşağıdaki örnekte, $iz(A\odot B)=iz(A)iz(B)$ olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 1.4.7 $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 1 & 4 & 0\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$ olsun. A ve B matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 2\end{bmatrix},A_{12}=\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix},A_{21}=\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix},A_{22}=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix},B_{12}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},B_{21}=\begin{bmatrix}1 & 2\end{bmatrix},B_{22}=\begin{bmatrix}2\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $A \odot B$ matrisi,

$$A \odot B = \begin{bmatrix} A_{11} \odot B & A_{12} \odot B \\ A_{21} \odot B & A_{22} \odot B \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} \otimes B_{11} & A_{11} \otimes B_{12} & A_{12} \otimes B_{11} & A_{12} \otimes B_{12} \\ A_{11} \otimes B_{21} & A_{11} \otimes B_{22} & A_{12} \otimes B_{21} & A_{12} \otimes B_{22} \\ A_{21} \otimes B_{11} & A_{21} \otimes B_{12} & A_{22} \otimes B_{11} & A_{22} \otimes B_{12} \\ A_{21} \otimes B_{21} & A_{21} \otimes B_{22} & A_{22} \otimes B_{21} & A_{22} \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

ile

$$A \odot B = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 4 & 6 & 3 & 2 & 8 & 12 & 4 \\ 3 & 12 & 2 & 8 & 0 & 0 & 4 & 16 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 8 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 6 & 4 & 4 & 8 & 8 \\ 1 & 2 & 2 & 4 & 2 & 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 2 & 0 & 6 & 9 & 3 \\ 2 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 12 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

$$iz(A \odot B) = (6+12+4+8+6+4+6+12+6) = 64$$

ve

$$iz(A) = (3+2+3) = 8, \; iz(B) = (2+4+2) = 8$$

$$iz(A)iz(B) = 8.8 = 64$$

olarak bulunur. Böylece

$$iz(A \odot B) = iz(A)iz(B)$$

olduğu görülür.

2. MATERYAL ve YÖNTEM

Tezin bu bölümünde, maksimum toplam cebiri üzerine tez çalışmasında gerekli olan temel tanım ve kavramlar verilmektedir. Daha sonra maksimum toplam matris cebirinde Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımları yeni kavramlar olarak tanımlanmakta, bu çarpımlar için sayısal örnekler verilmekte, çarpımların bazı cebirsel özellikleri ispatları ile birlikte sunulmakta ve her bir cebirsel özellik sayısal örnekle doğrulanmaktadır.

Bu bölümde $\otimes$ sembolü $\left(\mathbb{R}_{\max},\oplus,\otimes\right)$ cebirsel yapısındaki ikinci işlem için kullanılacaktır.

2.1 Maksimum Toplam Matris Cebiri ve Temel Özellikleri

Tanım 2.1.1 $\mathbb{R}_{\max}=\mathbb{R}\bigcup\{-\infty\}$ kümesi üzerinde $x\oplus y=\max\{x,y\}$ ve $x\otimes y=x+y$ işlemleri ile tanımlanmak üzere, $\left(\mathbb{R}_{\max}=\mathbb{R}\bigcup\{-\infty\},\oplus,\otimes\right)$ cebirsel yapısına maksimum toplam cebiri denir.

Önerme 2.1.1 $\left(\mathbb{R}_{\max},\oplus,\otimes\right)$ yapısı için aşağıdaki önermeler doğrudur (Butkovič, 2010).

i. $\left(\mathbb{R}_{\max},\oplus\right)$ yapısı değişmeli yarı gruptur.

ii. $\left(\mathbb{R}_{\max},\otimes\right)$ yapısı birleşmeli ve değişmelidir.

iii. $\mathbb{R}_{\max}$ yapısının çarpımsal birimi vardır.

iv. $\mathbb{R}_{\max}$ ta x,y ve $z\in\mathbb{R}_{\max}$ için

$$z\otimes(x\oplus y)=(z\otimes x)\oplus(z\otimes y)$$

ve

$$(x\oplus y)\otimes z=(x\otimes z)\oplus(y\otimes z)$$

şeklinde $\otimes$ işleminin $\oplus$ işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

v. Toplamsal birim $-\infty$ dur ve bu eleman çarpma işleminin yutan elemanıdır.

Tanım 2.1.2 $A=\left[a_{ij}\right],B=\left[b_{ij}\right]\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ için, A ve B ' nin toplamı

$$A\oplus B=\left[a_{ij}\oplus b_{ij}\right]$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1.1 $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{2\times 2}$ matrisleri verilsin. A ve B matrislerinin

toplamı;

$$A\oplus B=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\oplus 3 & 3\oplus 2\\ 2\oplus 4 & 5\oplus 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\max(4,3) & \max(3,2)\\ \max(2,4) & \max(5,6)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.1.3 $c\in\mathbb{R}_{\max}$ skaleri ile $A=[a_{ij}]\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ matrisinin çarpımı,

$$c\otimes A=\left[c\otimes a_{ij}\right]$$

ile tanımlanır.

Örnek 2.1.2 $c=4$ skaleri ile $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ matrisinin çarpımı,

$$4\otimes A=\begin{bmatrix}4\otimes 4 & 4\otimes 3\\ 4\otimes 2 & 4\otimes 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4+4 & 4+3\\ 4+2 & 4+5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 7\\ 6 & 9\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Tanım 2.1.4 $A\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times p}$ ve $B\in\mathbb{R}_{\max}^{p\times n}$ için A ve B matrislerinin çarpımı; elemanları

$$(A\otimes B)_{ij}=\left(a_{i1}\otimes b_{1j}\right)\oplus\left(a_{i2}\otimes b_{2j}\right)\oplus\cdots\oplus\left(a_{ip}\otimes b_{pj}\right)=\max_k\left(a_{ik}+b_{kj}\right)$$

şeklinde tanımlı $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ cebirinde bir matristir.

Örnek 2.1.3 $\mathbb{R}_{\max}^{2\times 2}$ de $A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. A ve B

matrislerinin çarpımı,

$$\begin{aligned}A\otimes B&=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}(4\otimes 3)\oplus(3\otimes 4) & (4\otimes 2)\oplus(3\otimes 6)\\ (2\otimes 3)\oplus(5\otimes 4) & (2\otimes 2)\oplus(5\oplus 6)\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}7\oplus 7 & 6\oplus 9\\ 5\oplus 9 & 4\oplus 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 9\\ 9 & 11\end{bmatrix}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Önerme 2.1.2 *A*, *B*, *C* ve *D* uygun boyutlu matrisler için,

$$A\otimes\left(B\otimes C\right)=\left(A\otimes B\right)\otimes C$$

birleşme özelliği vardır.

İspat: $(A\otimes B)\otimes C$ matrisinin i,l elemanları

$$\max_k\left(\left(\max_j\left(a_{ij}+b_{jk}\right)\right)+c_{kl}\right)=\max_{k,j}\left(a_{ij}+b_{jk}+c_{kl}\right)$$

ve $A\otimes\left(B\otimes C\right)$ matrisinin i,l elemanları

$$\max_j\left(a_{ij}+\left(\max_k\left(b_{jk}+c_{kl}\right)\right)\right)=\max_{j,k}\left(a_{ij}+b_{jk}+c_{kl}\right)$$

şeklindedir. Dolayısıyla $A\otimes\left(B\otimes C\right)=\left(A\otimes B\right)\otimes C$ olduğundan maksimum toplam cebirinde matris çarpımının birleşme özelliği vardır.

Örnek 2.1.4 $A=\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{2\times2}$ matrisleri için $\left(A\otimes B\right)\otimes C$ matrisi

$$\left(A\otimes B\right)\otimes C=\left(\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}\right)\otimes\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\oplus7&5\oplus9\\3\oplus6&4\oplus8\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&9\\6&8\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\oplus11&11\oplus12\\7\oplus10&10\oplus11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&12\\10&11\end{bmatrix}$$

ve $A\otimes\left(B\otimes C\right)$ matrisi

$$A\otimes\left(B\otimes C\right)=\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}\otimes\left(\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&4\\2&3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3\oplus5&6\oplus6\\4\oplus7&7\oplus8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&4\\1&3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}5&6\\7&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\oplus11&8\oplus12\\6\oplus10&7\oplus11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11&12\\10&11\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $\left(A\otimes B\right)\otimes C=A\otimes\left(B\otimes C\right)$ olduğu görülür.

Maksimum toplam cebirinde matris çarpımının değişme özelliği olmadığını bir örnekle açıklayalım.

Örnek 2.1.5 $A=\begin{bmatrix}3&4\\5&6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{2\times2}$ matrisleri verilsin. $A\otimes B$ matrisi

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 8\\ 7 & 10\end{bmatrix}$$

ve $B\otimes A$ matrisi

$$B\otimes A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8 & 9\\ 9 & 10\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $A\otimes B\neq B\otimes A$ olduğu görülür.

2.2. Maksimum Toplam Cebirinde Hadamard Matris Çarpımı ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.2.1 $A=\left[a_{ij}\right]$ ve $B=\left[b_{ij}\right]\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ matrisleri için, $a_{ij}\otimes b_{ij}$ ij. eleman olmak üzere,

$$A\bar{\bigcirc}B=\left[a_{ij}\otimes b_{ij}\right]$$

şeklinde $m\times n$ boyutlu $A\bar{\bigcirc}B$ matrisine A ve B matrislerinin maksimum toplam cebirinde Hadamard matris çarpımı denir.

Bu tanıma bir örnek verelim.

Örnek 2.2.1 $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{2\times 2}$ matrislerinin Hadamard çarpımı

$$A\bar{\bigcirc}B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}\bar{\bigcirc}\begin{bmatrix}-2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\otimes(-2) & 4\otimes 3\\ 2\otimes 1 & 5\otimes 4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3+(-2) & 4+3\\ 2+1 & 5+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7\\ 3 & 9\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde matrislerin Hadamard çarpımlarının değişme özelliğinin olduğu verilmektedir

Önerme 2.2.1 $A=\left[a_{ij}\right],B=\left[b_{ij}\right]\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımları için

$$A\bar{\bigcirc}B=B\bar{\bigcirc}A$$

şeklinde değişme özelliği vardır.

İspat: $A=\left[a_{ij}\right],B=\left[b_{ij}\right]\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımı

$$A\bar{\bigcirc}B=\left[a_{ij}\otimes b_{ij}\right]=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]$$

olup buradan $\mathbb{R}$ deki toplama işleminin değişmeli olmasından

$$A\overline{\bigcirc}B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]=\left[b_{ij}+a_{ij}\right]=\left[b_{ij}\otimes a_{ij}\right]=B\overline{\bigcirc}A$$

eşitliğine ulaşılır.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde matrislerin Hadamard çarpımlarının değişme özelliğinin olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 2.2.2 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -5 & 3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{2\times 2}$ matrisleri verilsin. $A\overline{\bigcirc}B$ matrisi

$$A\overline{\bigcirc}B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\begin{bmatrix}3 & -4\\ -5 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -4 & 7\end{bmatrix}$$

ve $B\overline{\bigcirc}A$ matrisi,

$$B\overline{\bigcirc}A=\begin{bmatrix}3 & -4\\ -5 & 3\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -1\\ -4 & 7\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $A\overline{\bigcirc}B=B\overline{\bigcirc}A$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde matrislerin Hadamard çarpımlarının birleşme özelliğinin olduğu verilmektedir.

Önerme 2.2.2 A,B ve $C\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımları için

$$\left(A\overline{\bigcirc}B\right)\overline{\bigcirc}C=A\overline{\bigcirc}\left(B\overline{\bigcirc}C\right)$$

şeklinde birleşme özelliği vardır.

İspat: $\mathbb{R}$ kümesinin adi toplama işlemine göre değişmeli ve birleşmeli olduğu dikkate alınırsa A,B ve $C\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ matrislerinin Hadamard çarpım tanımından

$$\begin{aligned}\left(A\overline{\bigcirc}B\right)\overline{\bigcirc}C&=\left[a_{ij}\otimes b_{ij}\right]\overline{\bigcirc}\left[c_{ij}\right]=\left[\left(a_{ij}\otimes b_{ij}\right)\otimes c_{ij}\right]\\&=\left[\left(a_{ij}+b_{ij}\right)+c_{ij}\right]=\left[a_{ij}+\left(b_{ij}+c_{ij}\right)\right]\\&=\left[a_{ij}\otimes\left(b_{ij}\otimes c_{ij}\right)\right]=\left[a_{ij}\right]\overline{\bigcirc}\left[b_{ij}\otimes c_{ij}\right]\\&=A\overline{\bigcirc}\left(B\overline{\bigcirc}C\right)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde matrislerin Hadamard çarpımlarının birleşme özelliğinin olduğu gösterilmektedir.

Örnek 2.2.3 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -3 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}$ ve $C=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 5 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{3\times 3}$ matrisleri

verilsin. $\left(A\overline{\bigcirc}B\right)\overline{\bigcirc}C$ matrisi

$$\left(A\overline{\bigcirc}B\right)\overline{\bigcirc}C=\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -3 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\right)\overline{\bigcirc}\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 5 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 8 & 7 & 9\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 5 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 4 & 4\\ 6 & 2 & -1\\ 9 & 9 & 11\end{bmatrix}$$

ve $A\overline{\bigcirc}\left(B\overline{\bigcirc}C\right)$ matrisi

$$A\overline{\bigcirc}\left(B\overline{\bigcirc}C\right)=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\left(\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -3 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 5 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\begin{bmatrix}6 & 2 & 7\\ 2 & 4 & -2\\ 4 & 6 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 4 & 4\\ 6 & 2 & -1\\ 9 & 9 & 11\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $\left(A\overline{\bigcirc}B\right)\overline{\bigcirc}C=A\overline{\bigcirc}\left(B\overline{\bigcirc}C\right)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde matrislerin Hadamard çarpımlarının toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliğinin olduğu verilmektedir.

Önerme 2.2.3 A, B ve $C\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ matrisleri için

$$\left(A\oplus B\right)\overline{\bigcirc}C=\left(A\overline{\bigcirc}C\right)\oplus\left(B\overline{\bigcirc}C\right)$$

şeklinde Hadamard çarpımının toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliği ve

$$C\overline{\bigcirc}\left(A\oplus B\right)=\left(C\overline{\bigcirc}A\right)\oplus\left(C\overline{\bigcirc}B\right)$$

şeklinde Hadamard çarpımının toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliği vardır.

İspat: Maksimum cebirinde matrislerin toplamı ve Hadamard çarpımı tanımları ile $\left(A\oplus B\right)\overline{\bigcirc}C$ matrisi

$$\left(A\oplus B\right)\overline{\bigcirc}C=\left[a_{ij}\oplus b_{ij}\right]\overline{\bigcirc}\left[c_{ij}\right]=\left[\max\left(a_{ij},b_{ij}\right)\otimes c_{ij}\right]$$

$$=\left[\max\left(a_{ij},b_{ij}\right)+c_{ij}\right]=\left[\max\left(a_{ij}+\mathrm{c}_{ij},b_{ij}+c_{ij}\right)\right]$$

$$=\left[\left(a_{ij}+c_{ij}\right)\oplus\left(b_{ij}+c_{ij}\right)\right]$$

$$=\left[a_{ij}+c_{ij}\right]\oplus\left[b_{ij}+c_{ij}\right]=\left[a_{ij}\otimes c_{ij}\right]\oplus\left[b_{ij}\otimes c_{ij}\right]$$

$$=\left(A\bar{\bigcirc}C\right)\oplus\left(B\bar{\bigcirc}C\right)$$

ve $C\bar{\bigcirc}\left(A\oplus B\right)$ matrisi

$$C\bar{\bigcirc}\left(A\oplus B\right)=\left[\mathrm{c}_{ij}\right]\bar{\bigcirc}\left[a_{ij}\oplus b_{ij}\right]=\left[c_{ij}\otimes\max\left(a_{ij},b_{ij}\right)\right]$$

$$=\left[c_{ij}+\max\left(a_{ij},b_{ij}\right)\right]=\left[\max\left(c_{ij}+a_{ij},\mathrm{c}_{ij}+b_{ij}\right)\right]$$

$$=\left[c_{ij}+a_{ij}\right]\oplus\left[c_{ij}+b_{ij}\right]=\left[c_{ij}\otimes a_{ij}\right]\oplus\left[c_{ij}\otimes b_{ij}\right]$$

$$=\left(C\bar{\bigcirc}A\right)\oplus\left(C\bar{\bigcirc}B\right)$$

sonuçlarına ulaşılır.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde matrislerin Hadamard çarpımlarının toplama işlemi üzerine sağdan ve soldan dağılma özelliğinin olduğu gösterilmektedir.

Örnek 2.2.4 $A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\4&-2&1\\5&3&4\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&2&1\\3&4&5\end{bmatrix}$ ve $C=\begin{bmatrix}4&1&2\\5&2&-3\\1&2&2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{3\times3}$ matrisleri

için $\left(A\oplus B\right)\bar{\bigcirc}C$ matrisi

$$\left(A\oplus B\right)\bar{\bigcirc}C=\left(\begin{bmatrix}1&2&-3\\4&-2&1\\5&3&4\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&2&1\\3&4&5\end{bmatrix}\right)\bar{\bigcirc}\begin{bmatrix}4&1&2\\5&2&-3\\1&2&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&2&5\\4&2&1\\5&4&5\end{bmatrix}\bar{\bigcirc}\begin{bmatrix}4&1&2\\5&2&-3\\1&2&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&3&7\\9&4&-2\\6&6&7\end{bmatrix}$$

ve $\left(A\bar{\bigcirc}C\right)\oplus\left(B\bar{\bigcirc}C\right)$ matrisi,

$$\left(A\bar{\bigcirc}C\right)\oplus\left(B\bar{\bigcirc}C\right)=\left(\begin{bmatrix}1&2&-3\\4&-2&1\\5&3&4\end{bmatrix}\bar{\bigcirc}\begin{bmatrix}4&1&2\\5&2&-3\\1&2&2\end{bmatrix}\right)\oplus\left(\begin{bmatrix}2&1&5\\-3&2&1\\3&4&5\end{bmatrix}\bar{\bigcirc}\begin{bmatrix}4&1&2\\5&2&-3\\1&2&2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ 9 & 0 & -2\\ 6 & 5 & 6\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}6 & 2 & 7\\ 2 & 4 & -2\\ 4 & 6 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3 & 7\\ 9 & 4 & -2\\ 6 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $(A\oplus B)\overline{\bigcirc}C=(A\overline{\bigcirc}C)\oplus(B\overline{\bigcirc}C)$ olduğu görülür. Benzer olarak $C\overline{\bigcirc}(A\oplus B)$ matrisi,

$$C\overline{\bigcirc}(A\oplus B)=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 5 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\left(\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -3 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 5 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\begin{bmatrix}2 & 2 & 5\\ 4 & 2 & 1\\ 5 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3 & 7\\ 9 & 4 & -2\\ 6 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

ve $(C\overline{\bigcirc}A)\oplus(C\overline{\bigcirc}B)$ matrisi,

$$(C\overline{\bigcirc}A)\oplus(C\overline{\bigcirc}B)=\left(\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 5 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ 4 & -2 & 1\\ 5 & 3 & 4\end{bmatrix}\right)\oplus\left(\begin{bmatrix}4 & 1 & 2\\ 5 & 2 & -3\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\begin{bmatrix}2 & 1 & 5\\ -3 & 2 & 1\\ 3 & 4 & 5\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ 9 & 0 & -2\\ 6 & 5 & 6\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}6 & 2 & 7\\ 2 & 4 & -2\\ 4 & 6 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 3 & 7\\ 9 & 4 & -2\\ 6 & 6 & 7\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Böylece $C\overline{\bigcirc}(A\oplus B)=(C\overline{\bigcirc}A)\oplus(C\overline{\bigcirc}B)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde matrislerin Hadamard çarpımlarının transpozunun, matrislerin transpozlarının Hadamard çarpımları olduğu verilmektedir.

Önerme 2.2.4 A, $B\in\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımları için

$$(A\overline{\bigcirc}B)^T=A^T\overline{\bigcirc}B^T$$

özelliği vardır.

İspat: $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ deki matrislerin Hadamard çarpımı ve matrislerin transpozu tanımları ile

$$\begin{aligned}(A\overline{\bigcirc}B)^T&=\left[a_{ij}\otimes b_{ij}\right]^T=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]^T\\ &=\left[a_{ji}+b_{ji}\right]=\left[a_{ji}\otimes b_{ji}\right]\\ &=A^T\overline{\bigcirc}B^T\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde matrislerin Hadamard çarpımlarının transpozunun, matrislerin transpozlarının Hadamard çarpımları olduğu gösterilmektedir.

Örnek 2.2.5 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{3\times 3}$ matrisleri için $(A \overline{\bigcirc} B)^T$ matrisi

$$(A \overline{\bigcirc} B)^T = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 6 \\ 8 & 7 & 3 \end{bmatrix} \overline{\bigcirc} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \right)^T = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 6 \\ 10 & 10 & 8 \\ 12 & 10 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 12 \\ 7 & 10 & 10 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

ve $A^T \overline{\bigcirc} B^T$ matrisi,

$$A^T \overline{\bigcirc} B^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 3 \end{bmatrix} \overline{\bigcirc} \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 4 & 6 & 3 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 & 12 \\ 7 & 10 & 10 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $\left(A \overline{\bigcirc} B\right)^T = A^T \overline{\bigcirc} B^T$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde herhangi bir A matrisi ile tüm elemanları $-\infty$ olan $\boldsymbol{\varepsilon}$ matrisin Hadamard çarpımının $\boldsymbol{\varepsilon}$ matrisi olduğu verilmektedir.

Önerme 2.2.5 A ve $\boldsymbol{\varepsilon} \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımları için $A \overline{\bigcirc} \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}$ özelliği vardır.

İspat: $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ deki Hadamard çarpımı tanımı gereği

$$A \overline{\bigcirc} \boldsymbol{\varepsilon} = \left[a_{ij} \otimes (-\infty) \right] = \left[a_{ij} + (-\infty) \right] = [-\infty] = \boldsymbol{\varepsilon}$$

elde edilir.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde herhangi bir A matrisi ile tüm elemanları $-\infty$ olan $\boldsymbol{\varepsilon}$ matrisin Hadamard çarpımının $\boldsymbol{\varepsilon}$ matrisi olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 2.2.6 $A=\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{3\times 3}$ matrislerinin Hadamard

çarpımları,

$$A \overline{\bigcirc} \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \end{bmatrix} \overline{\bigcirc} \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \\ -\infty & -\infty & -\infty \end{bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}$$

olarak bulunur.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde herhangi bir matris ile tüm elemanları 0 olan matrisin Hadamard çarpımının A matrisi olduğu verilmektedir.

Önerme 2.2.6 A ve $\mathbf{0} \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ matrislerinin Hadamard çarpımları için $A\overline{\bigcirc}\mathbf{0} = A$ özelliği vardır.

İspat: $\mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$ deki Hadamard çarpım tanımı gereği

$$A\overline{\bigcirc}\mathbf{0} = \left[a_{ij} \otimes 0\right] = \left[a_{ij} + 0\right] = \left[a_{ij}\right] = A$$

A matrisine ulaşılır. **0** çarpımsal birim matris olur.

Aşağıdaki örnek, maksimum toplam cebirinde herhangi bir matris ile tüm elemanları 0 olan matrisin Hadamard çarpımı ile ilgilidir.

Örnek 2.2.7 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ ve $\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{3 \times 3}$ matrisleri için, $A\overline{\bigcirc}\mathbf{0}$ matrisi

$$A\overline{\bigcirc}\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -7 \end{bmatrix} \overline{\bigcirc} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -3 & 5 & -7 \end{bmatrix} = A$$

olarak bulunur. Buradan $A\overline{\bigcirc}\mathbf{0} = A$ olduğu görülür.

Önerme 2.2.7 a ve c, $m \times 1$ boyutlu vektörler, b ve d, $n \times 1$ boyutlu vektörler olmak üzere,

$$\left(a \otimes b^T\right)\overline{\bigcirc}\left(c \otimes d^T\right) = \left(a\overline{\bigcirc}c\right) \otimes \left(b\overline{\bigcirc}d\right)^T$$

eşitliği vardır.

İspat: $a \otimes b^{\,T} = E$ matrisinin elemanları,

$$e_{ij} = a_i + b_j,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$$

şeklinde olur. Benzer olarak $c \otimes d^{\,T} = F$ matrisinin elemanları

$$f_{ij} = c_i + d_j,\ 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n$$

şeklinde olurlar. Buradan

$$\left(a \otimes b^T\right)\overline{\bigcirc}\left(c \otimes d^T\right) = E\overline{\bigcirc}F = G$$

matrisinin elemanları ise

$$g_{ij} = e_{ij} \otimes f_{ij} = \left(a_i + b_j\right) \otimes \left(c_i + d_j\right)$$

$$= a_i + b_j + c_i + d_j = \left(a_i + c_i\right) + \left(b_j + d_j\right)$$

$$= \left(a_i + c_i\right) \otimes \left(b_j + d_j\right) = \left(a_i \otimes c_i\right) \otimes \left(b_j \otimes d_j\right)$$

$$= \left(a_i \overline{\bigcirc} c_{,}\right) \otimes \left(b_j \overline{\bigcirc} d_j\right)$$

şeklindedir. Böylece,

$$G = \left(a \overline{\bigcirc} c\right) \otimes \left(b \overline{\bigcirc} d\right)^T$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki örnekte $\left(a \otimes b^T\right) \overline{\bigcirc} \left(c \otimes d^T\right) = \left(a \overline{\bigcirc} c\right) \otimes \left(b \overline{\bigcirc} d\right)^T$ özelliği doğrulanmaktadır.

Örnek 2.2.8 $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $c = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ve $d = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$ vektörleri için, $a \otimes b^T$ matrisi

$$a \otimes b^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 7 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $c \otimes d^T$ matrisi

$$c \otimes d^T = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$\left(a \otimes b^T\right) \overline{\bigcirc} \left(c \otimes d^T\right) = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 6 & 4 & 8 \\ 4 & 2 & 6 \\ 8 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Benzer olarak,

$$a \overline{\bigcirc} c = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} \overline{\bigcirc} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

ve

$$b\overline{\bigcirc}d=\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}\overline{\bigcirc}\begin{bmatrix}-2\\-3\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}$$

olup, böylece

$$(a\overline{\bigcirc}c)\otimes(b\overline{\bigcirc}d)^T=\begin{bmatrix}5\\5\\3\\7\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 4 & 8\\6 & 4 & 8\\4 & 2 & 6\\8 & 6 & 10\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $a\otimes b^T\,\overline{\bigcirc}\,c\otimes d^T=(a\overline{\bigcirc}c)\otimes(b\overline{\bigcirc}d)^T$ olduğu görülür.

2.3 Maksimum Toplam Cebirinde Kronecker Matris Çarpımı ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.3.1 $A=\left[a_{ij}\right]$ ile $B=\left[b_{ij}\right]$ matrisleri sırasıyla $m\times n$ ile $s\times r$ tipinde matrisler ve $a_{ij}\otimes B$, $s\times r$ boyutlu ij. alt matris olmak üzere

$$A\overline{\otimes}B=\left[a_{ij}\otimes B\right]$$

şeklindeki $ms\times nr$ boyutlu $A\overline{\otimes}B$ matrisine A ve B matrislerinin maksimum toplam cebirinde Kronecker matris çarpımı denir.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde Kronecker çarpımına bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.3.1 $A=\begin{bmatrix}4 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{2\times2}$ ve $B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{2\times3}$ matrislerinin Kronecker

çarpımı,

$$A\overline{\otimes}B=\begin{bmatrix}4 & 2\\3 & 5\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\1 & 2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 7 & 8 & 4 & 5 & 6\\5 & 6 & 4 & 3 & 4 & 2\\5 & 6 & 7 & 7 & 8 & 9\\4 & 5 & 3 & 6 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Maksimum toplam cebirinde Kronecker matris çarpımı değişmeli değildir. Bir başka ifade ile,

$$A\overline{\otimes}B=B\overline{\otimes}A$$

olması gerekmez.

Aşağıdaki örnek, maksimum toplam cebirinde Kronecker matris çarpımı değişmeli olmadığı ile ilgilidir.

Örnek 2.3.2 $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{2\times 2}$ ve $B=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{2\times 3}$ matrisleri için, $A\overline{\otimes}B$ matrisi

$$A\overline{\otimes}B=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 7 & 5 & 3 & 6 & 4\\ 6 & 3 & 5 & 5 & 2 & 4\\ 5 & 8 & 6 & 2 & 5 & 3\\ 7 & 4 & 6 & 4 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir ve $B\overline{\otimes}A$ matrisi,

$$B\overline{\otimes}A=\begin{bmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 0 & 2\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3 & 7 & 6 & 5 & 4\\ 5 & 2 & 8 & 5 & 6 & 3\\ 6 & 5 & 3 & 2 & 5 & 4\\ 7 & 4 & 4 & 1 & 6 & 3\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $A\overline{\otimes}B\neq B\overline{\otimes}A$ olduğu görülür.

Önerme 2.3.1 Aşağıdaki önemeler doğrudur.

a. $\infty\,\overline{\otimes}A=A\overline{\otimes}\,\infty=\infty$ eşitliği vardır.

b. A ve B kare matrisler olmak üzere

$$\text{köş}(A\overline{\otimes}B)=\text{köş}(A)\overline{\otimes}\text{köş}(B),$$

eşitliği vardır.

İspat:

a. $\mathbb{R}_{\max}$'daki Kronecker matris çarpımı ve cebirsel işlemler hatırlanırsa

$$\infty\,\overline{\otimes}A=\left[\infty\otimes A\right]=\left[\infty\right]=\infty$$

ve

$$A\overline{\otimes}\,\infty=\left[a_{ij}\otimes\infty\right]=\left[\infty\right]=\infty$$

elde edilir.

b. A ve B $n\times n$ boyutlu kare matrisler olsun. Bu takdirde,

$$\text{köş}(A\overline{\otimes}B)=\text{köş}\begin{pmatrix}a_{11}\overline{\otimes}B & \dots & *\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ * & \dots & a_{nn}\overline{\otimes}B\end{pmatrix}$$

$$=\text{köş}\begin{pmatrix}a_{11}\otimes\text{köş}(B) & \dots & *\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ * & \dots & a_{nn}\overline{\otimes}\text{köş}(B)\end{pmatrix}$$

$$= \text{köş}(A)\overline{\otimes}\text{köş}(B)$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki örnekte, $\infty\,\overline{\otimes}\,A = A\,\overline{\otimes}\,\infty = \infty$ ve $\text{köş}(A\overline{\otimes}B) = \text{köş}(A)\overline{\otimes}\text{köş}(B)$ özellikleri doğrulanmaktadır.

Örnek 2.3.3

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda

$$\infty\,\overline{\otimes}\,A = \begin{bmatrix} \infty\otimes A & \infty\otimes A \\ \infty\otimes A & \infty\otimes A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \infty & \infty \\ \infty & \infty \end{bmatrix} = \infty$$

ve

$$A\,\overline{\otimes}\,\infty = \begin{bmatrix} 1\otimes\infty & 2\otimes\infty & 3\otimes\infty \\ 2\otimes\infty & 1\otimes\infty & 4\otimes\infty \end{bmatrix} = \infty$$

olduğu görülür.

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ olsun. Buradan,

$$\text{köş}\left(A\overline{\otimes}B\right) = \text{köş}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) = \text{köş}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

ve

$$\text{köş}(A)\overline{\otimes}\text{köş}(B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\otimes 2 & 1\otimes 3 & 2\otimes 2 & 2\otimes 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $\text{köş}(A\overline{\otimes}B) = \text{köş}(A)\overline{\otimes}\text{köş}(B)$ olduğu görülür.

Önerme 2.3.2

a. A_1 ve A_2 aynı boyutlu ve B herhangi boyutlu matrisler olmak üzere,

$$(A_1 \oplus A_2)\overline{\otimes}B = (A_1\overline{\otimes}B) \oplus (A_2\overline{\otimes}B),$$

b. B_1 ve B_2 aynı boyutlu ve A herhangi boyutlu matrisler olmak üzere,

$$A\overline{\otimes}(B_1 \oplus B_2) = (A\overline{\otimes}B_1) \oplus (A\overline{\otimes}B_2),$$

c. α ve β skalerler, A ve B herhangi boyutlu matrisler olmak üzere

$$(\alpha \otimes A)\overline{\otimes}(\beta \otimes B) = (\alpha \otimes \beta) \otimes (A\overline{\otimes}B)$$

özellikleri vardır.

İspat:

a. $A_1 \oplus A_2 = A$ olsun. $A\overline{\otimes}B$ matrisinin ij. blok alt matrisinin $a_{ij} \otimes B$ olduğu hatırlanırsa, $(A_1 \oplus A_2)\overline{\otimes}B$ matrisinin ij. blok alt matrisinin $\left((A_1)_{ij} \oplus (A_2)_{ij}\right) \otimes B$ olacağı görülür.

Buradan,

$$\begin{aligned}\left((A_1 \oplus A_2)\overline{\otimes}B\right)_{ij} &= \left((A_1)_{ij} \oplus (A_2)_{ij}\right) \otimes B \\ &= \left((A_1)_{ij} \otimes B\right) \oplus \left((A_2)_{ij} \otimes B\right)\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$(A_1 \oplus A_2)\overline{\otimes}B = (A_1\overline{\otimes}B) \oplus (A_2\overline{\otimes}B)$$

sonucuna ulaşılır.

b. $B_1 \oplus B_2 = B$ olsun. $A\overline{\otimes}B$ matrisinin bir blok alt matrisi $a_{ij} \otimes B$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}a_{ij} \otimes B &= a_{ij} \otimes \left(B_1 \oplus B_2\right) \\ &= \left(a_{ij} \otimes B_1\right) \oplus \left(a_{ij} \otimes B_2\right)\end{aligned}$$

elde edilir ve

$$A\overline{\otimes}(B_1 \oplus B_2) = (A\overline{\otimes}B_1) \oplus (A\overline{\otimes}B_2)$$

olduğu görülür.

c. Maksimum toplam cebirinde Kronecker matris çarpımı tanımından

$$\begin{aligned}(\alpha \otimes A)\overline{\otimes}(\beta \otimes B) &= (\alpha \otimes \beta) \otimes \left(a_{ij} \otimes B\right) \\ &= (\alpha \otimes \beta) \otimes \left(A\overline{\otimes}B\right)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Örnek 2.3.4

a. $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri için, $A_1 \oplus A_2$ matrisi

$$A_1 \oplus A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. $\left(A_1 \oplus A_2\right)\overline{\otimes}B$ matrisi

$$\left(A_1 \oplus A_2\right)\overline{\otimes}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $A_1\overline{\otimes}B$ ve $A_2\overline{\otimes}B$ matrisleri

$$A_1\overline{\otimes}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix},$$

$$A_2\overline{\otimes}B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix},$$

şeklinde elde edilir. $\left(A_1\overline{\otimes}B\right)\oplus\left(A_2\overline{\otimes}B\right)$ matrisi,

$$\left(A_1\overline{\otimes}B\right)\oplus\left(A_2\overline{\otimes}B\right) = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 & 4 & 2 \\ 5 & 6 & 4 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 5 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $\left(A_1 \oplus A_2\right)\overline{\otimes}B = \left(A_1\overline{\otimes}B\right)\oplus\left(A_2\overline{\otimes}B\right)$ olduğu görülür.

b. $A = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ ve $B_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{2\times 2}$ matrisleri için, $B_1 \oplus B_2$ matrisi

$$B_1 \oplus B_2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

olarak hesaplanır. $A\overline{\otimes}\left(B_1 \oplus B_2\right)$ matrisi

$$A\overline{\otimes}\left(B_1 \oplus B_2\right) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $A\overline{\otimes}B_1$ ve $A\overline{\otimes}B_2$ matrisleri

$$A\overline{\otimes}B_1 = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 8 \\ 0 & -5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ -1 & -6 & 4 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A\overline{\otimes}B_2=\begin{bmatrix}-2&4\\-3&2\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}2&4\\2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&2&6&8\\0&1&6&7\\-1&1&4&6\\-1&0&4&5\end{bmatrix},$$

şeklinde elde edilir. $\left(A\overline{\otimes}B_1\right)\oplus\left(A\overline{\otimes}B_2\right)$ matrisi,

$$\left(A\overline{\otimes}B_1\right)\oplus\left(A\overline{\otimes}B_2\right)=\begin{bmatrix}1&2&7&8\\0&-5&6&1\\0&1&5&6\\-1&-6&4&-1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}0&2&6&8\\0&1&6&7\\-1&1&4&6\\-1&0&4&5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&2&7&8\\0&1&6&7\\0&1&5&6\\-1&0&4&5\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu takdirde, $A\overline{\otimes}\left(B_1\oplus B_2\right)=\left(A\overline{\otimes}B_1\right)\oplus\left(A\overline{\otimes}B_2\right)$ eşitliği sağlanır

c. $A=\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-3&2\\-4&5\end{bmatrix}$, $\alpha=3$ ve $\beta=5$ olsun. Buradan,

$$\left(3\otimes A\right)\overline{\otimes}\left(5\otimes B\right)=\begin{bmatrix}5&6\\6&8\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}2&7\\1&10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&12&8&13\\6&15&7&16\\8&13&10&15\\7&16&9&18\end{bmatrix}$$

ve

$$\left(3\otimes 5\right)\otimes\left(A\overline{\otimes}B\right)=\left(3\otimes 5\right)\otimes\left(\begin{bmatrix}2&3\\3&5\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}-3&2\\-4&5\end{bmatrix}\right)$$

eşitliği ile

$$\left(3\otimes 5\right)\otimes\left(A\overline{\otimes}B\right)=8\otimes\begin{bmatrix}-1&4&0&5\\-2&7&-1&8\\0&5&2&7\\-1&8&1&10\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7&12&8&13\\6&15&7&16\\8&13&10&15\\7&16&9&18\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Her α, β skaleri için $(\alpha \otimes A)\overline{\otimes}(\beta \otimes B) = (\alpha \otimes \beta)\otimes\left(A\overline{\otimes}B\right)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, $\left(A\overline{\otimes}B\right)\otimes\left(C\overline{\otimes}D\right) = (A\otimes C)\overline{\otimes}(B\otimes D)$ özelliğinin olduğu verilmektedir.

Önerme 2.3.3 $A \in \mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{r\times s}$, $C \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times p}$ ve $D \in \mathbb{R}_{\max}^{s\times t}$ olsun. Bu durumda

$$\left(A\overline{\otimes}B\right)\otimes\left(C\overline{\otimes}D\right) = (A\otimes C)\overline{\otimes}(B\otimes D)$$

özelliği vardır.

İspat: Matrislerin Kronecker çarpımı ve $\mathbb{R}_{\max}$ ' daki cebirsel işlemler ile

$$\begin{aligned}
\left(A\overline{\otimes}B\right)\otimes\left(C\overline{\otimes}D\right) &= \begin{pmatrix} a_{11}\otimes B & \dots & a_{1n}\otimes B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\otimes B & \dots & a_{mn}\otimes B \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} c_{11}\otimes D & \dots & c_{1p}\otimes D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1}\otimes D & \dots & c_{np}\otimes D \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}\left(a_{1k}\otimes c_{k1}\right)\otimes(B\otimes D) & \cdots & \sum_{k=1}^{n}\left(a_{1k}\otimes c_{kp}\right)\otimes(B\otimes D) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n}\left(a_{mk}\otimes c_{k1}\right)\otimes(B\otimes D) & \cdots & \sum_{k=1}^{n}\left(a_{mk}\otimes c_{kp}\right)\otimes(B\otimes D) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (A\otimes C)_{11}\otimes(B\otimes D) & \cdots & (A\otimes C)_{1p}\otimes(B\otimes D) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ (A\otimes C)_{m1}\otimes(B\otimes D) & \cdots & (A\otimes C)_{mp}\otimes(B\otimes D) \end{pmatrix} \\
&= (A\otimes C)\overline{\otimes}(B\otimes D)
\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

Aşağıdaki örnekte $\left(A\overline{\otimes}B\right)\otimes\left(C\overline{\otimes}D\right) = (A\otimes C)\overline{\otimes}(B\otimes D)$ özelliği doğrulanmaktadır.

Örnek 2.3.5 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ olsun. Bu matrisler için

$$A\overline{\otimes}B = \begin{bmatrix} 2\otimes B & 3\otimes B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix},$$

$$C\overline{\otimes}D=\begin{bmatrix}3\otimes D\\2\otimes D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&7\\5&8\\5&6\\4&7\end{bmatrix}$$

ve

$$\left(A\overline{\otimes}B\right)\otimes\left(C\overline{\otimes}D\right)=\begin{bmatrix}4&5&5&6\\6&4&7&5\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}6&7\\5&8\\5&6\\4&7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4\otimes6\oplus5\otimes5\oplus5\otimes5\oplus6\otimes4 & 4\otimes7\oplus5\otimes8\oplus5\otimes6\oplus6\otimes7\\6\otimes6\oplus4\otimes5\oplus7\otimes5\oplus5\otimes4 & 6\otimes7\oplus4\otimes8\oplus7\otimes6\oplus5\otimes7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10\oplus10\oplus10\oplus10 & 11\oplus13\oplus11\oplus13\\12\oplus9\oplus12\oplus9 & 13\oplus12\oplus13\oplus12\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}10&13\\12&13\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$A\otimes C=\begin{bmatrix}2&3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\otimes3\oplus3\otimes2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\oplus5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\end{bmatrix},$$

$$B\otimes D=\begin{bmatrix}2&3\\4&2\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}3&4\\2&5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\otimes3\oplus3\otimes2 & 2\otimes4\oplus3\otimes5\\4\otimes3\oplus2\otimes2 & 4\otimes4\oplus2\otimes5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5\oplus5 & 6\oplus8\\7\oplus4 & 8\oplus7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&8\\7&8\end{bmatrix}$$

ve

$$\left(A\otimes C\right)\overline{\otimes}\left(B\otimes D\right)=\begin{bmatrix}5\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}5&8\\7&8\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}5\otimes5&5\otimes8\\5\otimes7&5\otimes8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10&13\\12&13\end{bmatrix}$$

matrisleri bulunur. Böylece $\left(A\overline{\otimes}B\right)\otimes\left(C\overline{\otimes}D\right)=\left(A\otimes C\right)\overline{\otimes}\left(B\otimes D\right)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde matrislerin Kronecker çarpımlarının birleşme özelliğinin olduğu verilmektedir

Önerme 2.3.4 $A=\left[a_{ij}\right]$, $m\times n$ boyutlu matris, B ve C herhangi boyutlu iki matris olmak üzere,

$$A\overline{\otimes}\left(B\overline{\otimes}C\right)=\left(A\overline{\otimes}B\right)\overline{\otimes}C$$

şeklinde birleşme özelliği vardır.

İspat: $\mathbb{R}_{\max}$ daki adi çarpım tanımı, matrislerin Kronecker çarpımı tanımı ve $\mathbb{R}_{\max}$ da var olan birleşme özelliği ile

$$\left(A\overline{\otimes}B\right)\overline{\otimes}C=\begin{pmatrix} a_{11}\otimes B & \dots & a_{1n}\otimes B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\otimes B & \dots & a_{mn}\otimes B \end{pmatrix}\overline{\otimes}C$$

$$=\begin{pmatrix} \left(a_{11}\otimes B\right)\overline{\otimes}C & \dots & \left(a_{1n}\otimes B\right)\overline{\otimes}C \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(a_{m1}\otimes B\right)\overline{\otimes}C & \dots & \left(a_{mn}\otimes B\right)\overline{\otimes}C \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}\otimes\left(B\overline{\otimes}C\right) & \dots & a_{1n}\otimes\left(B\overline{\otimes}C\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\otimes\left(B\overline{\otimes}C\right) & \dots & a_{mn}\otimes\left(B\overline{\otimes}C\right) \end{pmatrix}$$

$$=A\overline{\otimes}\left(B\overline{\otimes}C\right)$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde matrislerin Kronecker çarpımlarının birleşme özelliğinin olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 2.3.6 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. $\left(A\overline{\otimes}B\right)\overline{\otimes}C$ matrisi;

$$A\overline{\otimes}B=\begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2\otimes 2 & 2\otimes 3 & 3\otimes 2 & 3\otimes 3 \\ 2\otimes 4 & 2\otimes 2 & 3\otimes 4 & 3\otimes 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

matrisi ile

$$\left(A\overline{\otimes}B\right)\overline{\otimes}C=\begin{bmatrix} 4\otimes C & 5\otimes C & 5\otimes C & 6\otimes C \\ 6\otimes C & 4\otimes C & 7\otimes C & 5\otimes C \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 8 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 7 & 8 \\ 9 & 7 & 10 & 8 \\ 8 & 6 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

şeklinde ve $A\overline{\otimes}\left(B\overline{\otimes}C\right)$ matrisi de

$$B\overline{\otimes}C=\begin{bmatrix}2\otimes C & 3\otimes C\\ 4\otimes C & 2\otimes C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 4 & 5\\ 7 & 5\\ 6 & 4\end{bmatrix},$$

matrisi ile

$$A\overline{\otimes}\left(B\overline{\otimes}C\right)=\left[2\otimes\left(B\overline{\otimes}C\right)\quad 3\otimes\left(B\overline{\otimes}C\right)\right]=\begin{bmatrix}7 & 8 & 8 & 9\\ 6 & 7 & 7 & 8\\ 9 & 7 & 10 & 8\\ 8 & 6 & 9 & 7\end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur. Buradan $A\overline{\otimes}\left(B\overline{\otimes}C\right)=\left(A\overline{\otimes}B\right)\overline{\otimes}C$ olduğu görülür.

Önerme 2.3.5

a. Her α skaleri için

$$\alpha\overline{\otimes}A=\alpha\otimes A=A\overline{\otimes}\alpha\,,$$

b. $A\otimes B$ tanımlı ise her b vektörü için

$$\left(A\overline{\otimes}b\right)\otimes B=\left(A\otimes B\right)\overline{\otimes}b$$

özellikleri vardır.

İspat:

a. $\mathbb{R}_{\max}$ ’ da skaler ve matris Kronecker çarpımı ile

$$\alpha\overline{\otimes}A=\alpha\otimes A$$

ve

$$A\overline{\otimes}\alpha=\left[a_{ij}\otimes\alpha\right]=A\otimes\alpha=\alpha\otimes A$$

olur.

b. $\mathbb{R}_{\max}$ ’ da matrislerin Kronecker çarpım tanımından ve Önerme 2.3.3 den

$$\begin{aligned}\left(A\overline{\otimes}b\right)\otimes B&=\left(A\overline{\otimes}b\right)\otimes\left(B\overline{\otimes}1\right)\\ &=\left(A\otimes B\right)\overline{\otimes}\left(b\otimes 1\right)\\ &=\left(A\otimes B\right)\overline{\otimes}b\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki örnekte, $\alpha\overline{\otimes}A=A\overline{\otimes}\alpha$ ve $\left(A\overline{\otimes}b\right)\otimes B=\left(A\otimes B\right)\overline{\otimes}b$ özellikleri doğrulanmaktadır.

Örnek 2.3.7

a. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ve $\alpha=5$ olsun. Bu durumda

$$5\overline{\otimes}A=\begin{bmatrix} 5\otimes 2 & 5\otimes 3 \\ 5\otimes 4 & 5\otimes 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

ve

$$A\overline{\otimes}5=\begin{bmatrix} 2\otimes 5 & 3\otimes 5 \\ 4\otimes 5 & 2\otimes 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $\alpha\overline{\otimes}A=A\overline{\otimes}\alpha$ olduğu görülür.

b. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$, $b=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. Bu durumda,

$$\left(A\overline{\otimes}b\right)\otimes B=\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ -1 & 5 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

ve

$$\left(A\otimes B\right)\overline{\otimes}b=\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\right)\overline{\otimes}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 9 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $\left(A\overline{\otimes}b\right)\otimes B=\left(A\otimes B\right)\overline{\otimes}b$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, $a\overline{\otimes}b^T=a\otimes b^T=b^T\overline{\otimes}a$ özelliğinin olduğu verilmektedir.

Önerme 2.3.6 Herhangi iki *a* ve *b* vektörleri için

$$a\overline{\otimes}b^T=a\otimes b^T=b^T\overline{\otimes}a$$

özelliği vardır.

İspat: $a=\begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_m \end{bmatrix}^T$ ve $b=\begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T$ olmak üzere $\mathbb{R}_{\max}$' da matrislerin Kronecker çarpım tanımından,

$$a\overline{\otimes}b^T=\begin{bmatrix} a_1\otimes b^T \\ \vdots \\ a_m\otimes b^T \end{bmatrix}=a\otimes b^T=\begin{bmatrix} b_1\otimes a & \cdots & b_n\otimes a \end{bmatrix}=b^T\overline{\otimes}a$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki örnekte, $a\overline{\otimes}b^T = a\otimes b^T = b^T\overline{\otimes}a$ özelliğinin olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 2.3.8: $a=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$**,** $b^T=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $a\overline{\otimes}b^T$ matrisi

$$a\overline{\otimes}b^T=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 6\\5 & 7\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $a\otimes b^T$ matrisi

$$a\otimes b^T=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 6\\5 & 7\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir ve $b^T\overline{\otimes}a$ matrisi

$$b^T\overline{\otimes}a=\begin{bmatrix}2 & 4\end{bmatrix}\overline{\otimes}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 5\\4 & 6\\5 & 7\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $a\overline{\otimes}b^T = a\otimes b^T = b^T\overline{\otimes}a$ olduğu görülür.

Önerme 2.3.7 Aşağıdaki önermeler doğrudur.

a. Herhangi boyutlu A ve B matrisleri için, $\left(A\overline{\otimes}B\right)^T = A^T\overline{\otimes}B^T$ eşitliği vardır.

b. A ve B karesel matrisleri için, $iz\left(A\overline{\otimes}B\right)=iz\left(A\right)\otimes iz\left(B\right)$ eşitliği vardır.

c. A ve B karesel matrisleri simetrik ise $A\overline{\otimes}B$ de simetriktir.

İspat: a. $\mathbb{R}_{\max}^{m\times n}$ deki matrislerin Kronecker çarpım tanımı ve matrislerin transpozu tanımları ile

$$\begin{aligned}\left(A\overline{\otimes}B\right)^T &= \begin{pmatrix}a_{11}\otimes B & \dots & a_{1n}\otimes B\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}\otimes B & \dots & a_{mn}\otimes B\end{pmatrix}^T\\ &= \begin{pmatrix}a_{11}\otimes B^T & \dots & a_{m1}\otimes B^T\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{1n}\otimes B^T & \dots & a_{mn}\otimes B^T\end{pmatrix}\\ &= A^T\overline{\otimes}B^T\end{aligned}$$

olduğu görülür.

b. A ve B sırasıyla $n\times n$ ve $m\times m$ boyutlu matrisler olsun. Bu durumda

$$iz\left(A\overline{\otimes}B\right)=iz\begin{pmatrix} a_{11}\otimes B & \dots & a_{1n}\otimes B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\otimes B & \dots & a_{nn}\otimes B \end{pmatrix}$$

$$=iz\left(a_{11}\otimes B\right)\oplus\cdots\oplus iz\left(a_{nn}\otimes B\right)$$

$$=\left(a_{11}\oplus\cdots\oplus a_{nn}\right)\otimes iz\left(B\right)$$

$$=iz\left(A\right)\otimes iz\left(B\right)$$

olduğu görülür.

c. A ve B simetrik kare matrisler olsun. Önerme 2.3.7.a. dan

$$\left(A\overline{\otimes}B\right)^T = A^T\overline{\otimes}B^T$$

$$= A\overline{\otimes}B$$

elde edilir. Böylece, $A\overline{\otimes}B$ de simetriktir.

Örnek 2.3.9

a. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri verilsin. $A\overline{\otimes}B$ matrisi

$$A\overline{\otimes}B=\begin{bmatrix} 2\otimes B & 3\otimes B \\ 2\otimes B & 4\otimes B \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 7 & 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Bu matrisin transpozu ise

$$\left(A\overline{\otimes}B\right)^T=\begin{bmatrix} 6 & 7 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. $A^T=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ve $B^T=\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ matrislerinden $A^T\overline{\otimes}B^T$ matrisi

$$A^T\overline{\otimes}B^T=\begin{bmatrix} 2B^T & 2B^T \\ 3B^T & 4B^T \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır ve buradan

$$A^T \overline{\otimes} B^T = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $\left(A \overline{\otimes} B\right)^T = A^T \overline{\otimes} B^T$ olduğu görülür.

b. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ matrisleri için, $A \overline{\otimes} B$ matrisi

$$\begin{aligned} A \overline{\otimes} B &= \begin{bmatrix} 2 \otimes B & 3 \otimes B \\ 2 \otimes B & 4 \otimes B \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 6 & 4 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \\ 6 & 4 & 8 & 6 \\ 7 & 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. $iz\left(A \overline{\otimes} B\right)$ hesaplanırsa

$$iz\left(A \overline{\otimes} B\right) = 6 \oplus 5 \oplus 5 \oplus 8 \oplus 7 = 8$$

sonucuna ulaşılır ve

$$iz(A) \otimes iz(B) = (2 \oplus 4) \otimes (4 \oplus 3) = 4 \otimes 4 = 8$$

olarak bulunur. Buradan

$$iz\left(A \overline{\otimes} B\right) = iz(A) \otimes iz(B)$$

olduğu görülür.

c. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ matrisleri için $A \overline{\otimes} B$ matrisi

$$A \overline{\otimes} B = \begin{bmatrix} 4 \otimes B & 2 \otimes B \\ 2 \otimes B & 3 \otimes B \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır ve

$$A \overline{\otimes} B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 0 & 5 \\ 7 & 8 & 5 & 6 \\ 0 & 5 & 1 & 6 \\ 5 & 6 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. A ve B matrisleri simetrik ise $A \overline{\otimes} B$ simetrik olduğu görülür.

2.4. Maksimum Toplam Cebirinde Khatri-Rao Matris Çarpımı ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.4.1 $A=\left[a_{ij}\right]$ ve $B=\left[b_{ij}\right]$ matrisleri sırasıyla $m\times n$ ve $s\times r$ tipinde herhangi iki matris olsun. A_{ij} ile B_{ij} sırasıyla A ile B matrislerinin $m_i\times n_j$ ve $s_i\times r_j$ boyutlu alt matrisleri ve $A_{ij}\bar{\otimes}B_{ij}$ de $m_is_i\times n_jr_j$ boyutlu matrisi için

$$(A\bar{*}B)=\left[A_{ij}\bar{\otimes}B_{ij}\right]_{ij}$$

şeklinde tanımlanan $\sum m_is_i\times\sum n_jr_j$ boyutlu $A\bar{*}B$ matrisine A ve B matrislerinin maksimum toplam cebirinde Khatri-Rao matris çarpımı denir.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde Khatri-Rao çarpımına bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.4.1 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{3\times3}$ olsun. A ve B matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1&2\\4&5\end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix}3\\6\end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix}7&8\end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix}9\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}1&4\\2&5\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}3&6\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}9\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayırırsak $A\bar{*}B$ matrisi

$$A\bar{*}B=\begin{bmatrix}A_{11}\bar{\otimes}B_{11}&A_{12}\bar{\otimes}B_{12}\\A_{21}\bar{\otimes}B_{21}&A_{22}\bar{\otimes}B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\otimes B_{11}&2\otimes B_{11}&3\otimes B_{12}\\4\otimes B_{11}&5\otimes B_{11}&6\otimes B_{12}\\7\otimes B_{21}&8\otimes B_{21}&9\otimes B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&5&3&6&10\\3&6&4&7&11\\5&8&6&9&13\\6&9&7&10&14\\10&13&11&14&18\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

Maksimum toplam cebirinde matrislerin Khatri-Rao çarpımı değişmeli değildir. Bir başka ifade ile

$$A\bar{*}B=B\bar{*}A$$

olması gerekmez.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde Khatri-Rao çarpımının değişme özelliği olmadığını gösteren bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.4.2 $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{3\times 4}$ olsun. Bu durumda,

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayrılan *A* ve *B* matrisleri için $A \bar{*} B$ matrisi

$$A \bar{*} B = \begin{bmatrix} A_{11} \bar{\otimes} B_{11} & A_{12} \bar{\otimes} B_{12} \\ A_{21} \bar{\otimes} B_{21} & A_{22} \bar{\otimes} B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\otimes B_{11} & 3\otimes B_{11} & -2\otimes B_{12} & 4\otimes B_{12} \\ 5\otimes B_{11} & 1\otimes B_{11} & 0\otimes B_{12} & 2\otimes B_{12} \\ 3\otimes B_{21} & 2\otimes B_{21} & 1\otimes B_{22} & 4\otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 3 & 4 & 4 & 0 & -5 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 3 & 0 & 9 & 6 \\ 6 & 6 & 2 & 2 & 2 & -3 & 4 & -1 \\ 9 & 8 & 5 & 4 & 5 & 2 & 7 & 4 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $B \bar{*} A$ matrisi ise

$$B \bar{*} A = \begin{bmatrix} B_{11} \bar{\otimes} A_{11} & B_{12} \bar{\otimes} A_{12} \\ B_{21} \bar{\otimes} A_{21} & B_{22} \bar{\otimes} A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\otimes A_{11} & 1\otimes A_{11} & 2\otimes A_{12} & -3\otimes A_{12} \\ 4\otimes A_{11} & 3\otimes A_{11} & 5\otimes A_{12} & 2\otimes A_{12} \\ 3\otimes A_{21} & 1\otimes A_{21} & 1\otimes A_{22} & 0\otimes A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 4 & 0 & 6 & -5 & 1 \\ 6 & 2 & 6 & 2 & 2 & 4 & -3 & -1 \\ 6 & 7 & 5 & 6 & 3 & 9 & 0 & 6 \\ 9 & 5 & 8 & 4 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bundan dolayı $A * B \neq B * A$ olduğu görülür.

Önerme 2.4.1 A, B, C, D uygun boyutlu matrisler ise

$$(A \oplus C)\bar{*}(B \oplus D) = \left(A \bar{*} B\right) \oplus \left(A \bar{*} D\right) \oplus \left(C \bar{*} B\right) \oplus \left(C \bar{*} D\right)$$

eşitliği vardır.

İspat: Matrislerin Khatri-Rao ve Kronecker çarpımı tanımları ile

$$\begin{aligned}(A\otimes C)\,\overline{*}\,(B\oplus D) &= \left[(A\oplus C)_{ij}\,\overline{\otimes}\,(B\oplus D)_{ij}\right]_{ij}\\
&= \left[\left((a_{kl}\oplus c_{kl})\otimes(B\oplus D)_{ij}\right)_{kl}\right]_{ij}\\
&= \left[\left(\left(a_{kl}\otimes(B\oplus D)_{ij}\right)\oplus\left(c_{kl}\otimes(B\oplus D)_{ij}\right)\right)_{kl}\right]_{ij}\\
&= \left[\left(a_{kl}\otimes B_{ij}\oplus a_{kl}\otimes D_{ij}\oplus c_{kl}\otimes B_{ij}\oplus c_{kl}\otimes D_{ij}\right)_{kl}\right]_{ij}\\
&= \left[A_{ij}\overline{\otimes}B_{ij}\right]_{ij}\oplus\left[A_{ij}\overline{\otimes}D_{ij}\right]_{ij}\oplus\left[C_{ij}\overline{\otimes}B_{ij}\right]_{ij}\oplus\left[C_{ij}\overline{\otimes}D_{ij}\right]_{ij}\\
&= \left(A\overline{*}B\right)\oplus\left(A\overline{*}D\right)\oplus\left(C\overline{*}B\right)\oplus\left(C\overline{*}D\right)\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Örnek 2.4.3 $A=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\4&1&-2&5\\-3&4&1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&2&1&-2\\0&3&2&1\\4&-2&1&3\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}1&4&5&2\\3&1&-2&-1\\6&2&1&0\end{bmatrix}$,

$D=\begin{bmatrix}2&1&0&4\\-2&5&4&3\\6&2&1&-4\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{3\times4}$ olsun. $A\oplus C$ ve $B\oplus D$ matrisleri

$$A\oplus C=\begin{bmatrix}1&0&2&3\\4&1&-2&5\\-3&4&1&2\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}1&4&5&2\\3&1&-2&-1\\6&2&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&4&5&3\\4&1&-2&5\\6&4&1&2\end{bmatrix}$$

ve

$$B\oplus D=\begin{bmatrix}3&2&1&-2\\0&3&2&1\\4&-2&1&3\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}2&1&0&4\\-2&5&4&3\\6&2&1&-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2&1&4\\0&5&4&3\\6&2&1&3\end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. $A\oplus C=K$, $B\oplus D=L$ olmak üzere K ve L matrislerini

$$K_{11}=\begin{bmatrix}1&4\\4&1\end{bmatrix},\ K_{12}=\begin{bmatrix}5&3\\-2&5\end{bmatrix},\ K_{21}=\begin{bmatrix}6&4\end{bmatrix},\ K_{22}=\begin{bmatrix}1&2\end{bmatrix}$$

$$L_{11}=\begin{bmatrix}3&2\\0&5\end{bmatrix},\ L_{12}=\begin{bmatrix}1&4\\4&3\end{bmatrix},\ L_{21}=\begin{bmatrix}6&2\end{bmatrix},\ L_{22}=\begin{bmatrix}1&3\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. İlk olarak $K\overline{*}L$ matrisini hesaplayalım. $K\overline{*}L$ matrisi

$$K \overline{*} L = \begin{bmatrix} K_{11} \overline{\otimes} L_{11} & K_{12} \overline{\otimes} L_{12} \\ K_{21} \overline{\otimes} L_{21} & K_{22} \overline{\otimes} L_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \otimes L_{11} & 4 \otimes L_{11} & 5 \otimes L_{12} & 3 \otimes L_{12} \\ 4 \otimes L_{11} & 1 \otimes L_{11} & -2 \otimes L_{12} & 5 \otimes L_{12} \\ 6 \otimes L_{21} & 4 \otimes L_{21} & 1 \otimes L_{22} & 2 \otimes L_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 & 6 & 6 & 9 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 4 & 9 & 9 & 8 & 7 & 6 \\ 7 & 6 & 4 & 3 & -1 & 2 & 6 & 9 \\ 4 & 9 & 1 & 6 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 12 & 8 & 10 & 6 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. A, B, C ve D matrislerini,

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, \; A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \; A_{21} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}, \; A_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \; B_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \; B_{21} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \end{bmatrix}, \; B_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \; C_{12} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \; C_{21} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix}, \; C_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, \; D_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \; D_{21} = \begin{bmatrix} 6 & 2 \end{bmatrix}, \; D_{22} = \begin{bmatrix} 1 & -4 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. Buradan

$$A \overline{*} B = \begin{bmatrix} A_{11} \overline{\otimes} B_{11} & A_{12} \overline{\otimes} B_{12} \\ A_{21} \overline{\otimes} B_{21} & A_{22} \overline{\otimes} B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \otimes B_{11} & 0 \otimes B_{11} & 2 \otimes B_{12} & 3 \otimes B_{12} \\ 4 \otimes B_{11} & 1 \otimes B_{11} & -2 \otimes B_{12} & 5 \otimes B_{12} \\ -3 \otimes B_{21} & 4 \otimes B_{21} & 1 \otimes B_{22} & 2 \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 2 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 3 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 4 & 3 & -1 & -4 & 6 & 3 \\ 4 & 7 & 1 & 4 & 0 & -1 & 7 & 6 \\ 1 & -5 & 8 & 2 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

$$A \bar{*} D = \begin{bmatrix} A_{11} \bar{\otimes} D_{11} & A_{12} \bar{\otimes} D_{12} \\ A_{21} \bar{\otimes} B_{21} & A_{22} \bar{\otimes} D_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \otimes D_{11} & 0 \otimes D_{11} & 2 \otimes D_{12} & 3 \otimes D_{12} \\ 4 \otimes D_{11} & 1 \otimes D_{11} & -2 \otimes D_{12} & 5 \otimes D_{12} \\ -3 \otimes D_{21} & 4 \otimes D_{21} & 1 \otimes D_{22} & 2 \otimes D_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 & 2 & 6 & 3 & 7 \\ -1 & 6 & -2 & 5 & 6 & 5 & 7 & 6 \\ 6 & 5 & 3 & 2 & -2 & 2 & 5 & 9 \\ 2 & 9 & -1 & 6 & 2 & 1 & 9 & 8 \\ 3 & -1 & 10 & 6 & 2 & -3 & 3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$C \bar{*} B = \begin{bmatrix} C_{11} \bar{\otimes} B_{11} & C_{12} \bar{\otimes} B_{12} \\ C_{21} \bar{\otimes} B_{21} & C_{22} \bar{\otimes} B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \otimes B_{11} & 4 \otimes B_{11} & 5 \otimes B_{12} & 2 \otimes B_{12} \\ 3 \otimes B_{11} & 1 \otimes B_{11} & -2 \otimes B_{12} & -1 \otimes B_{12} \\ 6 \otimes B_{21} & 2 \otimes B_{21} & 1 \otimes B_{22} & 0 \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 3 & 7 & 6 & 6 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & 7 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & -1 & 4 & 0 & -3 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 10 & 4 & 6 & 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix},$$

$$C \bar{*} D = \begin{bmatrix} C_{11} \bar{\otimes} D_{11} & C_{12} \bar{\otimes} D_{12} \\ C_{21} \bar{\otimes} D_{21} & C_{22} \bar{\otimes} D_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \otimes D_{11} & 4 \otimes D_{11} & 5 \otimes D_{12} & 2 \otimes D_{12} \\ 3 \otimes D_{11} & 1 \otimes D_{11} & -2 \otimes D_{12} & -1 \otimes D_{12} \\ 6 \otimes D_{21} & 2 \otimes D_{21} & 1 \otimes D_{22} & 0 \otimes D_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 6 & 5 & 5 & 9 & 2 & 6 \\ -1 & 6 & 2 & 9 & 9 & 8 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & -2 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 8 & -1 & 6 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 12 & 8 & 8 & 4 & 2 & -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Böylece $(A \bar{*} B) \oplus (A \bar{*} D) \oplus (C \bar{*} B) \oplus (C \bar{*} D)$ matrisi

$$(A\overline{*}B)\oplus(A\overline{*}D)\oplus(C\overline{*}B)\oplus(C\overline{*}D)=\begin{bmatrix}4&3&7&6&6&9&4&7\\1&6&4&9&9&8&7&6\\7&6&4&3&-1&2&6&9\\4&9&1&6&2&1&9&8\\12&8&10&6&2&4&3&5\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $\left(A\oplus C\right)\overline{*}\left(B\oplus D\right)=\left[(A\overline{*}B)\oplus(A\overline{*}D)\right]\oplus\left[(C\overline{*}B)\oplus(C\overline{*}D)\right]$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde matrislerin Khatri-Rao çarpımlarının transpozunun, matrislerin transpozlarının Khatri-Rao çarpımları olduğu verilmektedir.

Önerme 2.4.2 A ve B herhangi boyutlu matrisler ise

$$\left(A\overline{*}B\right)^T=A^T\overline{*}B^T$$

özelliği vardır.

İspat: Matrislerin Khatri-Rao ve Kronecker çarpımları ve matrisin transpozu tanımlarından,

$$\begin{aligned}\left(A\overline{*}B\right)^T&=\left[A_{ij}\overline{\otimes}B_{ij}\right]^T=\left[\left(a_{kl}\otimes B_{ij}\right)_{kl}\right]^T_{ij}\\&=\left[\left(a_{lk}\otimes B_{ji}\right)_{kl}\right]_{ij}=\left[A_{ji}\overline{\otimes}B_{ji}\right]_{ij}\\&=A^T\overline{*}B^T\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Örnek 2.4.4 $A=\begin{bmatrix}-2&-1&3&1\\4&2&5&0\\3&1&0&2\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}1&1&2&2\\4&3&0&1\\5&1&-3&2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times4}_{\max}$ olsun. A ve B matrislerini,

$$A_{11}=\begin{bmatrix}-2&-1\\4&2\end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix}3&1\\5&0\end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix}3&1\end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix}0&2\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}1&1\\4&3\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}2&2\\0&1\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}5&1\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}-3&2\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $A\overline{*}B$ matrisi

$$A\overline{*}B=\begin{bmatrix}A_{11}\overline{\otimes}B_{11}&A_{12}\overline{\otimes}B_{12}\\A_{21}\overline{\otimes}B_{21}&A_{22}\overline{\otimes}B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\otimes B_{11}&-1\otimes B_{11}&3\otimes B_{12}&1\otimes B_{12}\\4\otimes B_{11}&2\otimes B_{11}&5\otimes B_{12}&0\otimes B_{12}\\3\otimes B_{21}&1\otimes B_{21}&0\otimes B_{22}&2\otimes B_{22}\end{bmatrix}$$

ile

$$A\bar{*}B=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2\\ 5 & 5 & 3 & 3 & 7 & 7 & 2 & 2\\ 8 & 7 & 6 & 5 & 5 & 6 & 0 & 1\\ 8 & 4 & 6 & 2 & -3 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Bu matrisin transpozu

$$(A\bar{*}B)^T=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 3 & 3\\ 2 & 1 & 3 & 2 & 3 & 4 & 1 & 2\\ 5 & 5 & 3 & 3 & 7 & 7 & 2 & 2\\ 8 & 7 & 6 & 5 & 5 & 6 & 0 & 1\\ 8 & 4 & 6 & 2 & -3 & 2 & -1 & 4\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}-1 & 2 & 5 & 8 & 8\\ -1 & 1 & 5 & 7 & 4\\ 0 & 3 & 3 & 6 & 6\\ 0 & 2 & 3 & 5 & 2\\ 5 & 3 & 7 & 5 & -3\\ 5 & 4 & 7 & 6 & 2\\ 3 & 1 & 2 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi $A^T=\begin{bmatrix}-2 & 4 & 3\\ -1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$ ve $B^T=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & -3\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ matrislerini

$$A_{11}^T=\begin{bmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\end{bmatrix},\ A_{12}^T=\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix},\ A_{21}^T=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ A_{22}^T=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$$

$$B_{11}^T=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ B_{12}^T=\begin{bmatrix}5\\ 1\end{bmatrix},\ B_{21}^T=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix},\ B_{22}^T=\begin{bmatrix}-3\\ 2\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $A^T\bar{*}B^T$ matrisi Khatri-Rao çarpımı ile

$$A^T\bar{*}B^T=\begin{bmatrix}A_{11}^T\bar{\otimes}B_{11}^T & A_{12}^T\bar{\otimes}B_{12}^T\\ A_{21}^T\bar{\otimes}B_{21}^T & A_{22}^T\bar{\otimes}B_{22}^T\end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır. Buradan blok matrislerin Kronecker çarpımı ile $A^T\bar{*}B^T$ matrisi

$$A^T\bar{*}B^T=\begin{bmatrix}-2\otimes B_{11}^T & 4\otimes B_{11}^T & 3\otimes B_{12}^T\\ -1\otimes B_{11}^T & 2\otimes B_{11}^T & 1\otimes B_{12}^T\\ 3\otimes B_{21}^T & 5\otimes B_{21}^T & 0\otimes B_{22}^T\\ 1\otimes B_{21}^T & 0\otimes B_{21}^T & 2\otimes B_{22}^T\end{bmatrix}$$

şeklini alır. Böylece

$$A^T \bar{*} B^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 5 & 8 & 8 \\ -1 & 1 & 5 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 5 & -3 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan $(A \bar{*} B)^T = A^T \bar{*} B^T$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde matrislerin Khatri-Rao çarpımlarının toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliğinin olduğu verilmektedir.

Önerme 2.4.3 Matrislerin Khatri-Rao çarpımlarının toplama işlemi üzerine

$$(A \oplus B) \bar{*} C = (A \bar{*} C) \oplus (B \bar{*} C)$$

şeklinde sağdan dağılma özelliği vardır.

İspat: Matrislerin Khatri-Rao ile Kronecker çarpımları tanımları ve çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinden,

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \bar{*} C &= \left[(A \oplus B)_{ij} \bar{\otimes} C_{ij} \right]_{ij} \\ &= \left[(a_{kl} \oplus b_{kl}) \otimes C_{ij} \right]_{ij} \\ &= \left[\left((a_{kl} \otimes C_{ij}) \oplus (b_{kl} \otimes C_{ij}) \right)_{kl} \right]_{ij} \end{aligned}$$

eşitliğine ve matris toplamından

$$\begin{aligned} (A \oplus B) \bar{*} C &= \left[(a_{kl} \otimes C_{ij})_{kl} \right]_{ij} \oplus \left[(b_{kl} \otimes C_{ij})_{kl} \right]_{ij} \\ &= \left[A_{ij} \bar{\otimes} C_{ij} \right]_{ij} \oplus \left[B_{ij} \bar{\otimes} C_{ij} \right]_{ij} \\ &= (A \bar{*} C) \oplus (B \bar{*} C) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde matrislerin Khatri-Rao çarpımlarının toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliğinin olduğu verilmektedir

Örnek 2.4.5 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 6 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 1 \\ 6 & 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{3\times 4}$

olsun. A, B ve C matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix}5&6\\1&4\end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix}0&2\end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix}-3&-2\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}1&2\\0&2\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}2&3\\0&-1\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}4&6\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}$$

$$C_{11}=\begin{bmatrix}2&1\\3&-2\end{bmatrix},\ C_{12}=\begin{bmatrix}5&0\\4&1\end{bmatrix},\ C_{21}=\begin{bmatrix}6&1\end{bmatrix},\ C_{22}=\begin{bmatrix}-4&2\end{bmatrix}$$

şeklinde ve $A\oplus B=D=\begin{bmatrix}3&4&5&6\\2&3&1&4\\4&6&3&2\end{bmatrix}$ matrisini de

$$\mathrm{D}_{11}=\begin{bmatrix}3&4\\2&3\end{bmatrix},\ \mathrm{D}_{12}=\begin{bmatrix}5&6\\1&4\end{bmatrix},\ \mathrm{D}_{21}=\begin{bmatrix}4&6\end{bmatrix},\ \mathrm{D}_{22}=\begin{bmatrix}3&2\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. İlk olarak $\left(A\oplus B\right)\bar{*}C=D\bar{*}C$ matrisi

$$D\bar{*}C=\begin{bmatrix}D_{11}\bar{\otimes}C_{11} & D_{12}\bar{\otimes}C_{12}\\ D_{21}\bar{\otimes}C_{21} & D_{22}\bar{\otimes}C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\otimes C_{11} & 4\otimes C_{11} & 5\otimes C_{12} & 6\otimes C_{12}\\ 2\otimes C_{11} & 3\otimes C_{11} & 1\otimes C_{12} & 4\otimes C_{12}\\ 4\otimes C_{21} & 6\otimes C_{21} & 3\otimes C_{22} & 2\otimes C_{22}\end{bmatrix}$$

ile

$$D\bar{*}C=\begin{bmatrix}5&4&6&5&10&5&11&6\\6&1&7&2&9&6&10&7\\4&3&5&4&6&1&9&4\\5&0&6&1&5&2&8&5\\10&5&12&7&-1&5&-2&4\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$A\bar{*}C=\begin{bmatrix}A_{11}\bar{\otimes}C_{11} & A_{12}\bar{\otimes}C_{12}\\ A_{21}\bar{\otimes}C_{21} & A_{22}\bar{\otimes}C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\otimes C_{11} & 4\otimes C_{11} & 5\otimes C_{12} & 6\otimes C_{12}\\ 2\otimes C_{11} & 3\otimes C_{11} & 1\otimes C_{12} & 4\otimes C_{12}\\ 0\otimes C_{21} & 2\otimes C_{21} & -3\otimes C_{22} & -2\otimes C_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5&4&6&5&10&5&11&6\\6&1&7&2&9&6&10&7\\4&3&5&4&6&1&9&4\\5&0&6&1&5&2&8&5\\6&1&8&3&-7&-1&-6&0\end{bmatrix},$$

$$B\bar{*}C=\begin{bmatrix}B_{11}\bar{\otimes}C_{11} & B_{12}\bar{\otimes}C_{12}\\ B_{21}\bar{\otimes}C_{21} & B_{22}\bar{\otimes}C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\otimes C_{11} & 2\otimes C_{11} & 2\otimes C_{12} & 3\otimes C_{12}\\ 0\otimes C_{11} & 2\otimes C_{11} & 0\otimes C_{12} & -1\otimes C_{12}\\ 4\otimes C_{21} & 6\otimes C_{21} & 3\otimes C_{22} & 2\otimes C_{22}\end{bmatrix}$$

$$B \bar{*} C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 & 7 & 2 & 8 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 0 & 6 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 12 & 7 & -1 & 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisleri ve bu matrisler ile

$$(A \bar{*} C) \oplus (B \bar{*} C) = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 5 & 10 & 5 & 11 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 9 & 6 & 10 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 9 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 1 & 5 & 2 & 8 & 5 \\ 6 & 1 & 8 & 3 & -7 & -1 & -6 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 3 & 7 & 2 & 8 & 3 \\ 4 & -1 & 5 & 0 & 6 & 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 5 & 0 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & 0 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 10 & 5 & 12 & 7 & -1 & 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 4 & 6 & 5 & 10 & 5 & 11 & 6 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 9 & 6 & 10 & 7 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 6 & 1 & 9 & 4 \\ 5 & 0 & 6 & 1 & 5 & 2 & 8 & 5 \\ 10 & 5 & 12 & 7 & -1 & 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Buradan $\left(A \oplus B\right) \bar{*} C = \left(A \bar{*} C\right) \oplus \left(B \bar{*} C\right)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde matrislerin Khatri-Rao çarpımlarının toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliğinin olduğu verilmektedir.

Önerme 2.4.4 Matrislerin Khatri-Rao çarpımının toplama işlemi üzerine

$$A \bar{*} \left(B \oplus C\right) = \left(A \bar{*} B\right) \oplus \left(A \bar{*} C\right)$$

şeklinde soldan dağılma özelliği vardır.

İspat: Matrislerin Khatri-Rao çarpımı ve Kronecker çarpımı tanımları ve çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğinden,

$$\begin{aligned}
\left[A_{ij} \bar{\otimes} \left(B \oplus C\right)_{ij}\right]_{ij} &= \left[\left(a_{kl} \otimes \left(B \oplus C\right)_{ij}\right)_{kl}\right]_{ij} \\
&= \left[\left(\left(a_{kl} \otimes B_{ij}\right) \oplus \left(a_{kl} \otimes C_{ij}\right)\right)_{kl}\right]_{ij} \\
&= \left[\left(a_{kl} \otimes B_{ij}\right)_{kl} \oplus \left(a_{kl} \otimes C_{ij}\right)_{kl}\right]_{ij} \\
&= \left[\left(a_{kl} \otimes B_{ij}\right)_{kl}\right]_{ij} \oplus \left[\left(a_{kl} \otimes C_{ij}\right)_{kl}\right]_{ij} \\
&= \left[A_{ij} \bar{\otimes} B_{ij}\right]_{ij} \oplus \left[A_{ij} \bar{\otimes} C_{ij}\right]_{ij}
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece

$$A\bar{*}(B\oplus C)=(A\bar{*}B)\oplus(A\bar{*}C)$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde matrislerin Khatri-Rao çarpımlarının toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliğinin olduğu doğrulanmaktadır.

Örnek 2.4.6 $A=\begin{bmatrix}5&4&4&3\\2&3&1&2\\-2&6&3&0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0&4&6&1\\3&7&1&0\\4&2&5&1\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-3&2&1&-1\\4&3&3&2\\5&1&0&-3\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{3\times4}$

olsun. A, B ve C matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix}5&4\\2&3\end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix}4&3\\1&2\end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix}-2&6\end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix}3&0\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}0&4\\3&7\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}6&1\\1&0\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}4&2\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}5&1\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{C}_{11}=\begin{bmatrix}-3&2\\4&3\end{bmatrix},\ \mathrm{C}_{12}=\begin{bmatrix}1&-1\\3&2\end{bmatrix},\ \mathrm{C}_{21}=\begin{bmatrix}5&1\end{bmatrix},\ \mathrm{C}_{22}=\begin{bmatrix}0&-3\end{bmatrix}$$

şeklinde ve $B\oplus C=D=\begin{bmatrix}0&4&6&1\\4&7&3&2\\5&2&5&1\end{bmatrix}$ matrisini

$$D_{11}=\begin{bmatrix}0&4\\4&7\end{bmatrix},\ D_{12}=\begin{bmatrix}6&1\\3&2\end{bmatrix},\ D_{21}=\begin{bmatrix}5&2\end{bmatrix},\ D_{22}=\begin{bmatrix}5&1\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. İlk olarak $A\bar{*}(B\oplus C)=A\bar{*}D$ matrisi

$$A\bar{*}D=\begin{bmatrix}A_{11}\bar{\otimes}D_{11}&A_{12}\bar{\otimes}D_{12}\\A_{21}\bar{\otimes}D_{21}&A_{22}\bar{\otimes}D_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\otimes D_{11}&4\otimes D_{11}&4\otimes D_{12}&3\otimes D_{12}\\2\otimes D_{11}&3\otimes D_{11}&1\otimes D_{12}&2\otimes D_{12}\\-2\otimes D_{21}&6\otimes D_{21}&3\otimes D_{22}&0\otimes D_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5&9&4&8&10&5&9&4\\9&12&8&11&7&6&6&5\\2&6&3&7&7&2&8&3\\6&9&7&10&4&3&5&4\\3&0&11&8&8&4&5&1\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Şimdi ise $(A\bar{*}B)\oplus(A\bar{*}C)$ matrisini hesaplayalım. $A\bar{*}B$ matrisi

$$A \overline{*} B = \begin{bmatrix} A_{11} \overline{\otimes} B_{11} & A_{12} \overline{\otimes} B_{12} \\ A_{21} \overline{\otimes} B_{21} & A_{22} \overline{\otimes} B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \otimes B_{11} & 4 \otimes B_{11} & 4 \otimes B_{12} & 3 \otimes B_{12} \\ 2 \otimes B_{11} & 3 \otimes B_{11} & 1 \otimes B_{12} & 2 \otimes B_{12} \\ -2 \otimes B_{21} & 6 \otimes B_{21} & 3 \otimes B_{22} & 0 \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 & 8 & 10 & 5 & 9 & 4 \\ 8 & 12 & 7 & 11 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 7 & 2 & 8 & 3 \\ 5 & 9 & 6 & 10 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 10 & 8 & 8 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

ve $A \overline{*} C$ matrisi

$$A \overline{*} C = \begin{bmatrix} A_{11} \overline{\otimes} C_{11} & A_{12} \overline{\otimes} C_{12} \\ A_{21} \overline{\otimes} C_{21} & A_{22} \overline{\otimes} C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \otimes C_{11} & 4 \otimes C_{11} & 4 \otimes C_{12} & 3 \otimes C_{12} \\ 2 \otimes C_{11} & 3 \otimes C_{11} & 1 \otimes C_{12} & 2 \otimes C_{12} \\ -2 \otimes C_{21} & 6 \otimes C_{21} & 3 \otimes C_{22} & 0 \otimes C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 8 & 7 & 7 & 6 & 6 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 5 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 11 & 7 & 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

şeklinde ve böylece $(A \overline{*} B) \oplus (A \overline{*} C)$ matrisi

$$(A \overline{*} B) \oplus (A \overline{*} C) = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 & 8 & 10 & 5 & 9 & 4 \\ 8 & 12 & 7 & 11 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 7 & 2 & 8 & 3 \\ 5 & 9 & 6 & 10 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 10 & 8 & 8 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 6 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 8 & 7 & 7 & 6 & 6 & 5 \\ -1 & 4 & 0 & 5 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 6 & 5 & 7 & 6 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 11 & 7 & 3 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

maksimum toplamı ile

$$(A \overline{*} B) \oplus (A \overline{*} C) = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 & 8 & 10 & 5 & 9 & 4 \\ 9 & 12 & 8 & 11 & 7 & 6 & 6 & 5 \\ 2 & 6 & 3 & 7 & 7 & 2 & 8 & 3 \\ 6 & 9 & 7 & 10 & 4 & 3 & 5 & 4 \\ 3 & 0 & 11 & 8 & 8 & 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Buradan

$$A \overline{*} (B \oplus C) = (A \overline{*} B) \oplus (A \overline{*} C)$$

olduğu görülür.

2.5 Maksimum Toplam Cebirinde Tracy-Singh Matris Çarpımı ve Bazı Özellikleri

Tanım 2.5.1 $A=\left[a_{ij}\right]$ ve $B=\left[b_{pq}\right]$ matrisleri sırasıyla $m\times n$ ve $s\times r$ tipinde herhangi iki matris olsun. A_{ij} ile B_{pq} sırasıyla, A ile B matrislerinin $m_i\times n_j$ $(m=\sum m_i, n=\sum n_j)$ ve $s_p\times r_q$ $\left(s=\sum s_p, r=\sum r_q\right)$ boyutlu ij. ve pq. blok alt matrisleri olmak üzere

$$A\bar{\odot}B=\left[A_{ij}\bar{\odot}B\right]_{ij}=\left[\left(A_{ij}\bar{\otimes}B_{pq}\right)_{pq}\right]_{ij}$$

şeklinde tanımlanan $ms\times nr$ boyutlu $A\bar{\odot}B$ matrisine maksimum toplam cebirinde A ve B matrislerinin Tracy-Singh çarpımı denir.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde Tracy-Singh çarpımına bir örnek verilmiştir.

Örnek 2.5.1 $A=\begin{bmatrix}3&0&1\\0&3&2\\4&0&0\end{bmatrix}$ ve $B=\begin{bmatrix}0&1&3\\2&5&1\\0&2&1\end{bmatrix}\in\mathbb{R}_{\max}^{3\times 3}$ olsun A ve B matrisleri

$$A_{11}=\begin{bmatrix}3&0\\0&3\end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, A_{21}=\begin{bmatrix}4&0\end{bmatrix}, A_{22}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}0&1\\2&5\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}, B_{21}=\begin{bmatrix}0&2\end{bmatrix}, B_{22}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayrılsın. Böylece $A\bar{\odot}B$ matrisi,

$$A\bar{\odot}B=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{bmatrix}\bar{\odot}\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}\bar{\otimes}B_{11}&A_{11}\bar{\otimes}B_{12}&A_{12}\bar{\otimes}B_{11}&A_{12}\bar{\otimes}B_{12}\\A_{11}\bar{\otimes}B_{21}&A_{11}\bar{\otimes}B_{22}&A_{12}\bar{\otimes}B_{21}&A_{12}\bar{\otimes}B_{22}\\A_{21}\bar{\otimes}B_{11}&A_{21}\bar{\otimes}B_{12}&A_{22}\bar{\otimes}B_{11}&A_{12}\bar{\otimes}B_{12}\\A_{21}\bar{\otimes}B_{21}&A_{21}\bar{\otimes}B_{22}&A_{22}\bar{\otimes}B_{21}&A_{22}\bar{\otimes}B_{22}\end{bmatrix}$$

,

$$=\begin{bmatrix}3\otimes B_{11}&0\otimes B_{11}&3\otimes B_{12}&0\otimes B_{12}&1\otimes B_{11}&1\otimes B_{12}\\0\otimes B_{11}&3\otimes B_{11}&0\otimes B_{12}&3\otimes B_{12}&2\otimes B_{11}&2\otimes B_{12}\\3\otimes B_{21}&0\otimes B_{21}&3\otimes B_{22}&0\otimes B_{22}&1\otimes B_{21}&1\otimes B_{22}\\0\otimes B_{21}&3\otimes B_{21}&0\otimes B_{22}&3\otimes B_{22}&2\otimes B_{21}&2\otimes B_{22}\\4\otimes B_{11}&0\otimes B_{11}&4\otimes B_{12}&0\otimes B_{12}&0\otimes B_{11}&0\otimes B_{12}\\4\otimes B_{21}&0\otimes B_{21}&4\otimes B_{22}&0\otimes B_{22}&0\otimes B_{21}&0\otimes B_{22}\end{bmatrix}$$

eşitliği ile

$$A \bar{\odot} B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 & 1 & 6 & 3 & 1 & 2 & 4 \\ 5 & 8 & 2 & 5 & 4 & 1 & 3 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 6 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 5 & 5 & 8 & 1 & 4 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 5 & 0 & 2 & 4 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 1 & 4 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 0 & 1 & 7 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 6 & 9 & 2 & 5 & 5 & 1 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 0 & 2 & 5 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir.

Maksimum toplam cebirinde matrislerin Tracy-Singh çarpımı değişmeli değildir. Bir başka ifade ile

$$A \bar{\odot} B = B \bar{\odot} A$$

olması gerekmez.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde Tracy-Singh çarpımının her zaman değişmeli olmadığı gösterilmektedir.

Örnek 2.5.2 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{3\times 3}$ olsun. A ve B matrislerini

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \ A_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \end{bmatrix}, A_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}, B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $A \bar{\odot} B$ matrisi

$$A \bar{\odot} B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \bar{\odot} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \bar{\otimes} B_{11} & A_{11} \bar{\otimes} B_{12} & A_{12} \bar{\otimes} B_{11} & A_{12} \bar{\otimes} B_{12} \\ A_{11} \bar{\otimes} B_{21} & A_{11} \bar{\otimes} B_{22} & A_{12} \bar{\otimes} B_{21} & A_{12} \bar{\otimes} B_{22} \\ A_{21} \bar{\otimes} B_{11} & A_{21} \bar{\otimes} B_{12} & A_{22} \bar{\otimes} B_{11} & A_{22} \bar{\otimes} B_{12} \\ A_{21} \bar{\otimes} B_{21} & A_{21} \bar{\otimes} B_{22} & A_{22} \bar{\otimes} B_{21} & A_{22} \bar{\otimes} B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \otimes B_{11} & 0 \otimes B_{11} & 2 \otimes B_{12} & 0 \otimes B_{12} & 0 \otimes B_{11} & 0 \otimes B_{12} \\ 0 \otimes B_{11} & 1 \otimes B_{11} & 0 \otimes B_{12} & 1 \otimes B_{12} & 2 \otimes B_{11} & 2 \otimes B_{12} \\ 2 \otimes B_{21} & 0 \otimes B_{21} & 2 \otimes B_{22} & 0 \otimes B_{22} & 0 \otimes B_{21} & 0 \otimes B_{22} \\ 0 \otimes B_{21} & 1 \otimes B_{21} & 0 \otimes B_{22} & 1 \otimes B_{22} & 2 \otimes B_{21} & 2 \otimes B_{22} \\ 4 \otimes B_{11} & 3 \otimes B_{11} & 4 \otimes B_{12} & 3 \otimes B_{12} & 0 \otimes B_{11} & 0 \otimes B_{12} \\ 4 \otimes B_{21} & 3 \otimes B_{21} & 4 \otimes B_{22} & 3 \otimes B_{22} & 0 \otimes B_{21} & 0 \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

eşitliği ile

$$A \,\overline{\odot}\, B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 2 & 5 & 3 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 3 & 4 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 6 & 2 & 4 & 2 & 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 0 & 1 & 4 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 4 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 7 & 5 & 7 & 6 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 5 & 7 & 4 & 3 & 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak ve $B \,\overline{\odot}\, A$ matrisi

$$B \,\overline{\odot}\, A = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \overline{\odot} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11} \overline{\otimes} A_{11} & B_{11} \overline{\otimes} A_{12} & B_{12} \overline{\otimes} A_{11} & B_{12} \overline{\otimes} A_{12} \\ B_{11} \overline{\otimes} A_{21} & B_{11} \overline{\otimes} A_{22} & B_{12} \overline{\otimes} A_{21} & B_{12} \overline{\otimes} A_{22} \\ B_{21} \overline{\otimes} A_{11} & B_{21} \overline{\otimes} A_{12} & B_{22} \overline{\otimes} A_{11} & B_{22} \overline{\otimes} A_{12} \\ B_{21} \overline{\otimes} A_{21} & B_{21} \overline{\otimes} A_{22} & B_{22} \overline{\otimes} A_{21} & B_{22} \overline{\otimes} A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \otimes A_{11} & 3 \otimes A_{11} & 1 \otimes A_{12} & 3 \otimes A_{12} & 0 \otimes A_{11} & 0 \otimes A_{12} \\ 4 \otimes A_{11} & 2 \otimes A_{11} & 4 \otimes A_{12} & 2 \otimes A_{12} & 3 \otimes A_{11} & 3 \otimes A_{12} \\ 1 \otimes A_{21} & 3 \otimes A_{21} & 1 \otimes A_{22} & 3 \otimes A_{22} & 0 \otimes A_{21} & 0 \otimes A_{22} \\ 4 \otimes A_{21} & 2 \otimes A_{21} & 4 \otimes A_{22} & 2 \otimes A_{22} & 3 \otimes A_{21} & 3 \otimes A_{22} \\ 2 \otimes A_{11} & 4 \otimes A_{11} & 2 \otimes A_{12} & 4 \otimes A_{12} & 0 \otimes A_{11} & 0 \otimes A_{12} \\ 2 \otimes A_{21} & 4 \otimes A_{21} & 2 \otimes A_{22} & 4 \otimes A_{22} & 0 \otimes A_{21} & 0 \otimes A_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 3 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 3 & 5 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 4 & 2 & 4 & 2 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 6 & 4 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 3 & 4 & 3 & 0 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 2 & 7 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & 6 & 4 & 2 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 4 & 6 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 8 & 7 & 2 & 4 & 4 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $A \,\overline{\odot}\, B \neq B \,\overline{\odot}\, A$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde matrislerin Tracy-Singh çarpımının toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliğinin olduğu verilmektedir.

Önerme 2.5.1 Matrislerin Tracy-Singh çarpımının toplama işlemi üzerine

$$(A \oplus B)\bar{\odot} C = (A \bar{\odot} C) \oplus (B \bar{\odot} C)$$

şeklinde sağdan dağılma özelliği ve

$$C \bar{\odot} (A \oplus B) = (C \bar{\odot} A) \oplus (C \bar{\odot} B)$$

şeklinde soldan dağılma özelliği vardır.

İspat: Matrislerin Tracy-Singh matris çarpım tanımı ve matrislerin çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği ile

$$\begin{aligned}
(A \oplus B)\bar{\odot} C &= \left[(A \oplus B)_{ij} \bar{\odot} C \right]_{ij} \\
&= \left[\left((A \oplus B)_{ij} \bar{\otimes} C_{kl} \right)_{kl} \right]_{ij} \\
&= \left[\left((A_{ij} \bar{\otimes} C_{kl}) \oplus (B_{ij} \bar{\otimes} C_{kl}) \right)_{kl} \right]_{ij} \\
&= \left[(A_{ij} \bar{\otimes} C_{kl})_{kl} \oplus (B_{ij} \bar{\otimes} C_{kl})_{kl} \right]_{ij} \\
&= \left[(A_{ij} \bar{\otimes} C_{kl})_{kl} \right]_{ij} \oplus \left[(B_{ij} \otimes C_{kl})_{kl} \right]_{ij} \\
&= (A \bar{\odot} C) \oplus (B \bar{\odot} C)
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

Benzer şekilde maksimum toplam cebirinde matrislerin Tracy-Singh çarpımının toplama işlemi üzerine soldan dağılma özelliğinin $C \bar{\odot} (A \oplus B) = (C \bar{\odot} A) \oplus (C \bar{\odot} B)$ olduğu da gösterilebilir.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde matrislerin Tracy-Singh çarpımının toplama işlemi üzerine sağdan dağılma özelliğinin olduğu verilmektedir

Örnek 2.5.3 $A = \left[\begin{array}{cc|c} -3 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ \hline 0 & -1 & -2 \end{array} \right]$, $B = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ \hline 4 & 0 & -3 \end{array} \right]$, $C = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ \hline 4 & 0 & 0 \end{array} \right] \in \mathbb{R}_{\max}^{3\times 3}$ şeklinde tanımlansın ve $A \oplus B = K = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 \\ \hline 4 & 0 & -2 \end{array} \right]$ olsun. A, B, C ve K matrisleri

$$A_{11} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} -2 \end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix}4 & 0\end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix}-3\end{bmatrix}$$

$$C_{11}=\begin{bmatrix}2 & -4\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ C_{12}=\begin{bmatrix}1\\ -3\end{bmatrix},\ C_{21}=\begin{bmatrix}4 & 0\end{bmatrix},\ \mathrm{C}_{22}=\begin{bmatrix}0\end{bmatrix}$$

$$K_{11}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix},\ K_{12}=\begin{bmatrix}0\\ 3\end{bmatrix},\ K_{21}=\begin{bmatrix}4 & 0\end{bmatrix},\ K_{22}=\begin{bmatrix}-2\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayrılsın. $(A\oplus B)\bar{\odot}C=K\bar{\odot}C$ matrisi

$$K\bar{\odot}C=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix}\bar{\odot}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11}\bar{\otimes}C_{11} & K_{11}\bar{\otimes}C_{12} & K_{12}\bar{\otimes}C_{11} & K_{12}\bar{\otimes}C_{12}\\ K_{11}\bar{\otimes}C_{21} & K_{11}\bar{\otimes}C_{22} & K_{12}\bar{\otimes}C_{21} & K_{12}\bar{\otimes}C_{22}\\ K_{21}\bar{\otimes}C_{11} & K_{21}\bar{\otimes}C_{12} & K_{22}\bar{\otimes}C_{11} & K_{22}\bar{\otimes}C_{12}\\ K_{21}\bar{\otimes}C_{21} & K_{21}\bar{\otimes}C_{22} & K_{22}\bar{\otimes}C_{21} & K_{22}\bar{\otimes}C_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\otimes C_{11} & 2\otimes C_{11} & 3\otimes C_{12} & 2\otimes C_{12} & 0\otimes C_{11} & 0\otimes C_{12}\\ 1\otimes C_{11} & 3\otimes C_{11} & 1\otimes C_{12} & 3\otimes C_{12} & 3\otimes C_{11} & 3\otimes C_{12}\\ 3\otimes C_{21} & 2\otimes C_{21} & 3\otimes C_{22} & 2\otimes C_{22} & 0\otimes C_{21} & 0\otimes C_{22}\\ 1\otimes C_{21} & 3\otimes C_{21} & 1\otimes C_{22} & 3\otimes C_{22} & 3\otimes C_{21} & 3\otimes C_{22}\\ 4\otimes C_{11} & 0\otimes C_{11} & 4\otimes C_{12} & 0\otimes C_{12} & -2\otimes C_{11} & -2\otimes C_{12}\\ 4\otimes C_{21} & 0\otimes C_{21} & 4\otimes C_{22} & 0\otimes C_{22} & -2\otimes C_{21} & -2\otimes C_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & -1 & 4 & -2 & 4 & 3 & 2 & -4 & 1\\ 3 & 5 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3\\ 3 & -3 & 5 & -1 & 2 & 4 & 5 & -1 & 4\\ 1 & 3 & 3 & 5 & -2 & 0 & 3 & 5 & 0\\ 7 & 3 & 6 & 2 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0\\ 5 & 1 & 7 & 3 & 1 & 3 & 7 & 3 & 3\\ 6 & 0 & 2 & -4 & 5 & 1 & 0 & -6 & -1\\ 4 & 6 & 0 & 2 & 1 & -3 & -2 & 0 & -5\\ 8 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & -2 & -2\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $A\bar{\odot}C$ matrisi

$$A\bar{\odot}C=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\bar{\odot}\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}\bar{\otimes}C_{11} & A_{11}\bar{\otimes}C_{12} & A_{12}\bar{\otimes}C_{11} & A_{12}\bar{\otimes}C_{12}\\ A_{11}\bar{\otimes}C_{21} & A_{11}\bar{\otimes}C_{22} & A_{12}\bar{\otimes}C_{21} & A_{12}\bar{\otimes}C_{22}\\ A_{21}\bar{\otimes}C_{11} & A_{21}\bar{\otimes}C_{12} & A_{22}\bar{\otimes}C_{11} & A_{22}\bar{\otimes}C_{12}\\ A_{21}\bar{\otimes}C_{21} & A_{21}\bar{\otimes}C_{22} & A_{22}\bar{\otimes}C_{21} & A_{22}\bar{\otimes}C_{22}\end{bmatrix}$$

ile

$$A \mathbin{\bar{\odot}} C = \begin{bmatrix} -3\otimes C_{11} & 0\otimes C_{11} & -3\otimes C_{12} & 0\otimes C_{12} & -2\otimes C_{11} & -2\otimes C_{12} \\ 1\otimes C_{11} & 3\otimes C_{11} & 1\otimes C_{12} & 3\otimes C_{12} & -4\otimes C_{11} & -4\otimes C_{12} \\ -3\otimes C_{21} & 0\otimes C_{21} & -3\otimes C_{22} & 0\otimes C_{22} & -2\otimes C_{21} & -2\otimes C_{22} \\ 1\otimes C_{21} & 3\otimes C_{21} & 1\otimes C_{22} & 3\otimes C_{22} & -4\otimes C_{21} & -4\otimes C_{22} \\ 0\otimes C_{11} & -1\otimes C_{11} & 0\otimes C_{12} & -1\otimes C_{12} & -2\otimes C_{11} & -2\otimes C_{12} \\ 0\otimes C_{21} & -1\otimes C_{21} & 0\otimes C_{22} & -1\otimes C_{22} & -2\otimes C_{21} & -2\otimes C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -7 & 2 & -4 & -2 & 1 & 0 & -6 & -1 \\ -3 & -1 & 0 & 2 & -6 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 3 & -3 & 5 & -1 & 2 & 4 & -2 & -8 & -3 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & -2 & -7 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & -3 & 0 & 2 & -2 & -2 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 1 & 3 & 0 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 1 & -5 & 1 & 0 & 0 & -6 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & -3 & -4 & -2 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

ve $B \mathbin{\bar{\odot}} C$ matrisi

$$B \mathbin{\bar{\odot}} C = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \bar{\odot} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{11} & B_{11} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{12} & B_{12} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{11} & B_{12} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{12} \\ B_{11} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{21} & B_{11} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{22} & B_{12} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{21} & B_{12} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{22} \\ B_{21} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{11} & B_{21} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{12} & B_{22} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{11} & B_{22} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{12} \\ B_{21} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{21} & B_{21} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{22} & B_{22} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{21} & B_{22} \mathbin{\bar{\otimes}} C_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3\otimes C_{11} & 2\otimes C_{11} & 3\otimes C_{12} & 2\otimes C_{12} & 0\otimes C_{11} & 0\otimes C_{12} \\ -2\otimes C_{11} & 1\otimes C_{11} & -2\otimes C_{12} & 1\otimes C_{12} & 3\otimes C_{11} & 3\otimes C_{12} \\ 3\otimes C_{21} & 2\otimes C_{21} & 3\otimes C_{22} & 2\otimes C_{22} & 0\otimes C_{21} & 0\otimes C_{22} \\ -2\otimes C_{21} & 1\otimes C_{21} & -2\otimes C_{22} & 1\otimes C_{22} & 3\otimes C_{21} & 3\otimes C_{22} \\ 4\otimes C_{11} & 0\otimes C_{11} & 4\otimes C_{12} & 0\otimes C_{12} & -3\otimes C_{11} & -3\otimes C_{12} \\ 4\otimes C_{21} & 0\otimes C_{21} & 4\otimes C_{22} & 0\otimes C_{22} & -3\otimes C_{21} & -3\otimes C_{22} \end{bmatrix}$$

eşitliği ile

$$B \bar{\odot} C = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 & -2 & 4 & 3 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -6 & 3 & -3 & -1 & 2 & 5 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 3 & -5 & -2 & 3 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 5 & 1 & -2 & 1 & 7 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 2 & -4 & 5 & 1 & -1 & -7 & -2 \\ 4 & 6 & 0 & 2 & 1 & -3 & -3 & -1 & -6 \\ 8 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece $(A \bar{\odot} C) \oplus (B \bar{\odot} C)$ matrisi

$$(A \bar{\odot} C) \oplus (B \bar{\odot} C) = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 4 & -2 & 4 & 3 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 0 & -1 & 0 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 5 & -1 & 2 & 4 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 5 & -2 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 7 & 3 & 6 & 2 & 3 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 7 & 3 & 1 & 3 & 7 & 3 & 3 \\ 6 & 0 & 2 & -4 & 5 & 1 & 0 & -6 & -1 \\ 4 & 6 & 0 & 2 & 1 & -3 & -2 & 0 & -5 \\ 8 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 & 2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan

$$(A \oplus B) \bar{\odot} C = (A \bar{\odot} C) \oplus (B \bar{\odot} C)$$

olduğu görülür.

Önerme 2.5.2 A, B, C ve D uygun boyutlu matrisler olmak üzere

$$(A \bar{\odot} B) \otimes (C \bar{\odot} D) = (A \otimes C) \bar{\odot} (B \otimes D)$$

eşitliği vardır.

İspat: Matrislerin Tracy-Singh çarpımı ve maksimum matris çarpımı tanımları hatırlanırsa

$$\left[\left(A \bar{\odot} B \right) \otimes \left(C \bar{\odot} D \right) \right]_{ij} = \sum_{l} \left[\left(A_{ik} \bar{\otimes} B_{pq} \right)_{pq} \right]_{ik} \otimes \left[\left(C_{kj} \bar{\otimes} D_{sr} \right)_{sr} \right]_{kj}$$

eşitliği yazılır. Böylece matrislerin Kronecker çarpımı tanımı ve Kronecker çarpım ile maksimum matris çarpımı arasındaki bağıntının kullanılması ile

$$\left(A \bar{\odot} B \right) \otimes \left(C \bar{\odot} D \right) = \left(A \otimes C \right) \bar{\odot} \left(B \otimes D \right)$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 2.5.4 $A=\left[\begin{array}{cc:c} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ \hdashline 3 & -2 & 0 \end{array}\right]$, $B=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, $C=\left[\begin{array}{cc:c} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ \hdashline -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$ ve

$D=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 0 \\ \hdashline 4 & 2 & 1 \end{array}\right]\in\mathbb{R}_{\max}^{3\times 3}$ matrisleri tanımlansın. A ve B matrislerini

$$A_{11}=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},\ A_{12}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix} 3 & -2 \end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. İlk olarak $(A\,\bar{\odot}\,B)\otimes(C\,\bar{\odot}\,D)$ matrisini hesaplayalım. $A\,\bar{\odot}\,B$ matrisi

$$\begin{aligned}
A\,\bar{\odot}\,B &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\bar{\odot}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
A_{11}\,\bar{\otimes}\,B_{11} & A_{11}\,\bar{\otimes}\,B_{12} & A_{12}\,\bar{\otimes}\,B_{11} & A_{12}\,\bar{\otimes}\,B_{12} \\
A_{11}\,\bar{\otimes}\,B_{21} & A_{11}\,\bar{\otimes}\,B_{22} & A_{12}\,\bar{\otimes}\,B_{21} & A_{12}\,\bar{\otimes}\,B_{22} \\
A_{21}\,\bar{\otimes}\,B_{11} & A_{21}\,\bar{\otimes}\,B_{12} & A_{22}\,\bar{\otimes}\,B_{11} & A_{22}\,\bar{\otimes}\,B_{12} \\
A_{21}\,\bar{\otimes}\,B_{21} & A_{21}\,\bar{\otimes}\,B_{22} & A_{22}\,\bar{\otimes}\,B_{21} & A_{22}\,\bar{\otimes}\,B_{22}
\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}
-2\otimes B_{11} & 3\otimes B_{11} & -2\otimes B_{12} & 3\otimes B_{12} & -1\otimes B_{11} & -1\otimes B_{12} \\
0\otimes B_{11} & -4\otimes B_{11} & 0\otimes B_{12} & -4\otimes B_{12} & 1\otimes B_{11} & 1\otimes B_{12} \\
-2\otimes B_{21} & 3\otimes B_{21} & -2\otimes B_{22} & 3\otimes B_{22} & -1\otimes B_{21} & -1\otimes B_{22} \\
0\otimes B_{21} & -4\otimes B_{21} & 0\otimes B_{22} & -4\otimes B_{22} & 1\otimes B_{21} & 1\otimes B_{22} \\
3\otimes B_{11} & -2\otimes B_{11} & 3\otimes B_{12} & -2\otimes B_{12} & 0\otimes B_{11} & 0\otimes B_{12} \\
3\otimes B_{21} & -2\otimes B_{21} & 3\otimes B_{22} & -2\otimes B_{22} & 0\otimes B_{21} & 0\otimes B_{22}
\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

eşitliği ile

$$A\,\bar{\odot}\,B=\begin{bmatrix}
-1 & 0 & 4 & 5 & 1 & 6 & 0 & 1 & 2 \\
-2 & 1 & 3 & 6 & -4 & 1 & 1 & 2 & -3 \\
1 & 2 & -3 & -2 & 3 & -1 & 2 & 3 & 4 \\
0 & 3 & -4 & -1 & -2 & -6 & 1 & 4 & -1 \\
-2 & -2 & 3 & 3 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & -4 & -4 & 1 & -3 & 1 & 1 & 2 \\
4 & 5 & -1 & 0 & 6 & 1 & 1 & 2 & 3 \\
3 & 6 & -2 & 1 & 1 & -4 & 0 & 3 & -2 \\
3 & 3 & -2 & -2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. C ile D matrislerini,

$$C_{11}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}, C_{12}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix},\ C_{21}=\begin{bmatrix}-3 & 0\end{bmatrix},\ C_{22}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

$$D_{11}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix},\ D_{12}=\begin{bmatrix}3\\ 0\end{bmatrix},\ D_{21}=\begin{bmatrix}4 & 2\end{bmatrix},\ D_{22}=\begin{bmatrix}1\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayırırsak,

$$C \,\bar{\odot}\, D=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & C_{22}\end{bmatrix}\bar{\odot}\begin{bmatrix}D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & D_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}C_{11}\,\bar{\otimes}\,D_{11} & C_{11}\,\bar{\otimes}\,D_{12} & C_{12}\,\bar{\otimes}\,D_{11} & C_{12}\,\bar{\otimes}\,D_{12}\\ C_{11}\,\bar{\otimes}\,D_{21} & C_{11}\,\bar{\otimes}\,D_{22} & C_{12}\,\bar{\otimes}\,D_{21} & C_{12}\,\bar{\otimes}\,D_{22}\\ C_{21}\,\bar{\otimes}\,D_{11} & C_{21}\,\bar{\otimes}\,D_{12} & C_{22}\,\bar{\otimes}\,D_{11} & C_{22}\,\bar{\otimes}\,D_{12}\\ C_{21}\,\bar{\otimes}\,D_{21} & C_{21}\,\bar{\otimes}\,D_{22} & C_{22}\,\bar{\otimes}\,D_{21} & C_{22}\,\bar{\otimes}\,D_{12}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}4\otimes D_{11} & 1\otimes D_{11} & 4\otimes D_{12} & 1\otimes D_{12} & 0\otimes D_{11} & 0\otimes D_{12}\\ 2\otimes D_{11} & 3\otimes D_{11} & 2\otimes D_{12} & 3\otimes D_{12} & 2\otimes D_{11} & 2\otimes D_{12}\\ 4\otimes D_{21} & 1\otimes D_{21} & 4\otimes D_{22} & 1\otimes D_{22} & 0\otimes D_{21} & 0\otimes D_{22}\\ 2\otimes D_{21} & 3\otimes D_{21} & 2\otimes D_{22} & 3\otimes D_{22} & 2\otimes D_{21} & 2\otimes D_{22}\\ -3\otimes D_{11} & 0\otimes D_{11} & -3\otimes D_{12} & 0\otimes D_{12} & 1\otimes D_{11} & 1\otimes D_{12}\\ -3\otimes D_{21} & 0\otimes D_{21} & -3\otimes D_{22} & 0\otimes D_{22} & 1\otimes D_{21} & 1\otimes D_{22}\end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$C \,\bar{\odot}\, D=\begin{bmatrix}5 & 5 & 2 & 2 & 7 & 4 & 1 & 1 & 3\\ 6 & 4 & 3 & 1 & 4 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 4 & 4 & 5 & 6 & 3 & 3 & 5\\ 4 & 2 & 5 & 3 & 2 & 3 & 4 & 2 & 2\\ 8 & 6 & 5 & 3 & 5 & 2 & 4 & 2 & 1\\ 6 & 4 & 7 & 5 & 3 & 4 & 6 & 4 & 3\\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 4\\ -1 & -3 & 2 & 0 & -3 & 0 & 3 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 4 & 2 & -2 & 1 & 5 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Buradan $(A \,\bar{\odot}\, B)\otimes(C \,\bar{\odot}\, D)=E$ matrisi

$$E=\begin{bmatrix}-1&0&4&5&1&6&0&1&2\\-2&1&3&6&-4&1&-1&2&-3\\1&2&-3&-2&3&-1&2&3&4\\0&3&-4&-1&-2&-6&1&4&-1\\-2&-2&3&3&-1&4&-1&-1&0\\0&0&-4&-4&1&-3&1&1&2\\4&5&-1&0&6&1&1&2&3\\3&6&-2&1&1&-4&0&3&-2\\3&3&-2&-2&4&-1&0&0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}5&5&2&2&7&4&1&1&3\\6&4&3&1&4&1&2&0&0\\3&3&4&4&5&6&3&3&5\\4&2&5&3&2&3&4&2&2\\8&6&5&3&5&2&4&2&1\\6&4&7&5&3&4&6&4&2\\-2&-2&1&1&0&3&2&2&4\\-1&-3&2&0&-3&0&3&1&1\\1&-1&4&2&-2&1&5&3&2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12&10&13&11&9&10&12&10&9\\10&8&11&9&8&9&10&8&8\\11&9&8&6&8&5&9&7&6\\9&7&6&4&7&4&7&5&5\\10&8&11&9&8&9&10&8&8\\9&7&6&4&7&4&7&5&5\\14&12&11&9&11&8&10&8&7\\12&10&9&7&10&7&8&6&6\\12&10&9&7&10&7&8&6&6\end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Şimdi ise $(A\otimes C)\,\bar{\odot}\,(B\otimes D)$ matrisini elde edelim. $A\otimes C$ ve $B\otimes D$ matrisleri sırasıyla

$$A\otimes C=\begin{bmatrix}-2&3&-1\\0&-4&1\\3&-2&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}4&1&0\\2&3&2\\-3&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&6&5\\4&1&2\\7&4&3\end{bmatrix}$$

ve

$$B\otimes D=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&3&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&1&3\\2&0&0\\4&2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&5&4\\5&3&3\\5&3&3\end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Buradan $A\otimes C=K$, $B\otimes D=L$ matrislerini

$$K_{11}=\begin{bmatrix}5&6\\4&1\end{bmatrix},\ K_{12}=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix},\ K_{21}=\begin{bmatrix}7&4\end{bmatrix},\ K_{22}=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$$

$$L_{11}=\begin{bmatrix}7&5\\5&3\end{bmatrix},\ L_{12}=\begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix},\ L_{21}=\begin{bmatrix}5&3\end{bmatrix},\ L_{22}=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayırırsak, $K\,\bar{\odot}\,L$

$$K \bar{\odot} L = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \bar{\odot} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11} \bar{\otimes} L_{11} & K_{11} \bar{\otimes} L_{12} & K_{12} \bar{\otimes} L_{11} & K_{12} \bar{\otimes} L_{12} \\ K_{11} \bar{\otimes} L_{21} & K_{11} \bar{\otimes} L_{22} & K_{12} \bar{\otimes} L_{21} & K_{12} \bar{\otimes} L_{22} \\ K_{21} \bar{\otimes} L_{11} & K_{21} \bar{\otimes} L_{12} & K_{22} \bar{\otimes} L_{11} & K_{22} \bar{\otimes} L_{12} \\ K_{21} \bar{\otimes} L_{21} & K_{21} \bar{\otimes} L_{22} & K_{22} \bar{\otimes} L_{21} & K_{22} \bar{\otimes} L_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \otimes L_{11} & 6 \otimes L_{11} & 5 \otimes L_{12} & 6 \otimes L_{12} & 5 \otimes L_{11} & 5 \otimes L_{12} \\ 4 \otimes L_{11} & 1 \otimes L_{11} & 4 \otimes L_{12} & 1 \otimes L_{12} & 2 \otimes L_{11} & 2 \otimes L_{12} \\ 5 \otimes L_{21} & 6 \otimes L_{21} & 5 \otimes L_{22} & 6 \otimes L_{22} & 5 \otimes L_{21} & 5 \otimes L_{22} \\ 4 \otimes L_{21} & 1 \otimes L_{21} & 4 \otimes L_{22} & 1 \otimes L_{22} & 2 \otimes L_{21} & 2 \otimes L_{22} \\ 7 \otimes L_{11} & 4 \otimes L_{11} & 7 \otimes L_{12} & 4 \otimes L_{12} & 3 \otimes L_{11} & 3 \otimes L_{12} \\ 7 \otimes L_{21} & 4 \otimes L_{21} & 7 \otimes L_{22} & 4 \otimes L_{22} & 3 \otimes L_{21} & 3 \otimes L_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 10 & 13 & 11 & 9 & 10 & 12 & 10 & 9 \\ 10 & 8 & 11 & 9 & 8 & 9 & 10 & 8 & 8 \\ 11 & 9 & 8 & 6 & 8 & 5 & 9 & 7 & 6 \\ 9 & 7 & 6 & 4 & 7 & 4 & 7 & 5 & 5 \\ 10 & 8 & 11 & 9 & 8 & 9 & 10 & 8 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 4 & 7 & 4 & 7 & 5 & 5 \\ 14 & 12 & 11 & 9 & 11 & 8 & 10 & 8 & 7 \\ 12 & 10 & 9 & 7 & 10 & 7 & 8 & 6 & 6 \\ 12 & 10 & 9 & 7 & 10 & 7 & 8 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $(A \bar{\odot} B) \otimes (C \bar{\odot} D) = (A \otimes C) \bar{\odot} (B \otimes D)$ olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede, maksimum toplam cebirinde matrislerin Tracy-Singh çarpımlarının transpozunun, matrislerin transpozlarının Tracy-Singh çarpımları olduğu verilmektedir.

Önerme 2.5.3 Matrislerin Tracy-Singh çarpımının,

$$(A \bar{\odot} B)^T = A^T \bar{\odot} B^T$$

şeklinde özelliği vardır.

İspat: Matrislerin Tracy-Singh çarpımı ve matrislerin transpozu tanımları ile,

$$\left(A \bar{\odot} B\right)^T = \left[A_{ij} \bar{\odot} B\right]_{ij}^T = \left[\left(A_{ij} \bar{\otimes} B_{kl}\right)_{kl}\right]_{ij}^T = \left[\left(A_{ji} \bar{\otimes} B_{lk}\right)_{kl}\right]_{ij} = A^T \bar{\odot} B^T$$

eşitliği elde edilir.

Aşağıdaki örnekte, maksimum toplam cebirinde matrislerin Tracy-Singh çarpımlarının transpozunun, matrislerin transpozlarının Tracy-Singh çarpımları olduğu verilmektedir.

Örnek 2.5.5 $A=\left[\begin{array}{cc:c} 4 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ \hdashline 1 & 4 & 2 \end{array}\right]$, $B=\left[\begin{array}{cc:c} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \\ \hdashline -2 & 0 & -1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}_{\max}^{3\times 3}$ olsun.İlk olarak $(A \,\bar{\odot}\, B)^T$ matrisini elde eldim. A ve B matrisleri

$$A_{11}=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, A_{12}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ A_{21}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix},\ A_{22}=\begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{11}=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix},\ B_{12}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ B_{21}=\begin{bmatrix} -2 & 0 \end{bmatrix},\ B_{22}=\begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayrılırsa

$$A \,\bar{\odot}\, B=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \bar{\odot} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11} \bar{\otimes} B_{11} & A_{11} \bar{\otimes} B_{12} & A_{12} \bar{\otimes} B_{11} & A_{12} \bar{\otimes} B_{12} \\ A_{11} \bar{\otimes} B_{21} & A_{11} \bar{\otimes} B_{22} & A_{12} \bar{\otimes} B_{21} & A_{12} \bar{\otimes} B_{22} \\ A_{21} \bar{\otimes} B_{11} & A_{21} \bar{\otimes} B_{12} & A_{22} \bar{\otimes} B_{11} & A_{22} \bar{\otimes} B_{12} \\ A_{21} \bar{\otimes} B_{21} & A_{21} \bar{\otimes} B_{22} & A_{22} \bar{\otimes} B_{21} & A_{22} \bar{\otimes} B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 4 \otimes B_{11} & 2 \otimes B_{11} & 4 \otimes B_{12} & 2 \otimes B_{12} & 1 \otimes B_{11} & 1 \otimes B_{12} \\ -3 \otimes B_{11} & -2 \otimes B_{11} & -3 \otimes B_{12} & -2 \otimes B_{12} & 0 \otimes B_{11} & 0 \otimes B_{12} \\ 4 \otimes B_{21} & 2 \otimes B_{21} & 4 \otimes B_{22} & 2 \otimes B_{22} & 1 \otimes B_{21} & 1 \otimes B_{22} \\ -3 \otimes B_{21} & -2 \otimes B_{21} & -3 \otimes B_{22} & -2 \otimes B_{22} & 0 \otimes B_{21} & 0 \otimes B_{22} \\ 1 \otimes B_{11} & 4 \otimes B_{11} & 1 \otimes B_{12} & 4 \otimes B_{12} & 2 \otimes B_{11} & 2 \otimes B_{12} \\ 1 \otimes B_{21} & 4 \otimes B_{21} & 1 \otimes B_{22} & 4 \otimes B_{22} & 2 \otimes B_{21} & 2 \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$A \,\bar{\odot}\, B=\begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 & 3 & 5 & 3 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 0 & 4 & -2 & 7 & 5 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & -7 & 0 & -6 & 0 & 1 & 2 & -4 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 2 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -5 & -3 & -4 & -2 & -4 & -3 & -2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 7 & 5 & 2 & 5 & 5 & 3 & 3 \\ 3 & -3 & 6 & 0 & 4 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir. Bu matrisin transpozu

$$(A \bar{\odot} B)^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 & -1 & 2 & -5 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 & -7 & 4 & -3 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & -4 & 7 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -6 & 2 & -2 & 5 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & -2 & 0 & 3 & -4 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 1 & -3 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & -1 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -4 & 1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & -1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Şimdi ise $A^T \bar{\odot} B^T$ matrisini hesaplayalım.

$$A^T = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ \hdashline 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \text{ ve } B^T = \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 0 \\ \hdashline 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \in \mathbb{R}_{\max}^{3\times 3}$$

matrislerini

$$A_{11}^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix},\ A_{12}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix},\ A_{21}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix},\ A_{22}^T = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$B_{11}^T = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix},\ B_{12}^T = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_{21}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix},\ B_{22}^T = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bloklara ayırırsak $A^T \bar{\odot} B^T$ matrisi için

$$A^T \bar{\odot} B^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T & A_{12}^T \\ A_{21}^T & A_{22}^T \end{bmatrix} \bar{\odot} \begin{bmatrix} B_{11}^T & B_{12}^T \\ B_{21}^T & B_{22}^T \end{bmatrix}$$

yazılır. Buradan

$$A^T \bar{\odot} B^T = \begin{bmatrix} A_{11}^T \bar{\otimes} B_{11}^T & A_{11}^T \bar{\otimes} B_{12}^T & A_{12}^T \bar{\otimes} B_{11}^T & A_{12}^T \bar{\otimes} B_{12}^T \\ A_{11}^T \bar{\otimes} B_{21}^T & A_{11}^T \bar{\otimes} B_{22}^T & A_{12}^T \bar{\otimes} B_{21}^T & A_{12}^T \bar{\otimes} B_{22}^T \\ A_{21}^T \bar{\otimes} B_{11}^T & A_{21}^T \bar{\otimes} B_{12}^T & A_{22}^T \bar{\otimes} B_{11}^T & A_{22}^T \bar{\otimes} B_{12}^T \\ A_{21}^T \bar{\otimes} B_{21}^T & A_{21}^T \bar{\otimes} B_{22}^T & A_{22}^T \bar{\otimes} B_{21}^T & A_{22}^T \bar{\otimes} B_{22}^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \otimes B_{11}^T & -3 \otimes B_{11}^T & 4 \otimes B_{12}^T & -3 \otimes B_{12}^T & 1 \otimes B_{11}^T & 1 \otimes B_{12}^T \\ 2 \otimes B_{11}^T & -2 \otimes B_{11}^T & 2 \otimes B_{12}^T & -2 \otimes B_{12}^T & 4 \otimes B_{11}^T & 4 \otimes B_{12}^T \\ 4 \otimes B_{21}^T & -3 \otimes B_{21}^T & 4 \otimes B_{22}^T & -3 \otimes B_{22}^T & 1 \otimes B_{21}^T & 1 \otimes B_{22}^T \\ 2 \otimes B_{21}^T & -2 \otimes B_{21}^T & 2 \otimes B_{22}^T & -2 \otimes B_{22}^T & 4 \otimes B_{21}^T & 4 \otimes B_{22}^T \\ 1 \otimes B_{11}^T & 0 \otimes B_{11}^T & 1 \otimes B_{12}^T & 0 \otimes B_{12}^T & 2 \otimes B_{11}^T & 2 \otimes B_{12}^T \\ 1 \otimes B_{21}^T & 0 \otimes B_{21}^T & 1 \otimes B_{22}^T & 0 \otimes B_{22}^T & 2 \otimes B_{21}^T & 2 \otimes B_{22}^T \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilen matrisin elemanları hesaplanırsa

$$A^T \overline{\odot} B^T = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 0 & -1 & 2 & -5 & 4 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & -2 & -7 & 4 & -3 & 2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 & 0 & 0 & -4 & 7 & 6 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -6 & 2 & -2 & 5 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & -2 & 0 & 3 & -4 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 1 & -3 & 5 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 3 & 2 & -1 & -2 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & -4 & 1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 & -1 & 3 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece $\left(A \overline{\odot} B\right)^T = A^T \overline{\odot} B^T$ olduğu görülür.

Önerme 2.5.4 A, B, C ve D uygun boyutlu matrisler olmak üzere,

$$(A \oplus C) \overline{\odot} (B \oplus D) = (A \overline{\odot} B) \oplus A \overline{\odot} B) \oplus (C \overline{\odot} B) \oplus (C \overline{\odot} D)$$

özelliği vardır.

İspat: Matrislerin Tracy-Singh çarpımı tanımı ile,

$$\begin{aligned} \left(A \oplus C\right) \overline{\odot} \left(B \oplus D\right) &= \left[\left(A \oplus C\right)_{ij} \overline{\odot} \left(B \oplus D\right)\right]_{ij} \\ &= \left[\left(\left(A \oplus C\right)_{ij} \overline{\otimes} \left(B \oplus D\right)_{kl}\right)_{kl}\right]_{ij} \\ &= \left[\left(\left(A_{ij} \oplus C_{ij}\right) \overline{\otimes} \left(B_{kl} \oplus D_{kl}\right)\right)_{kl}\right]_{ij} \\ &= \left[\left(A_{ij} \overline{\otimes} \left(B \oplus D\right)_{kl} \oplus C_{ij} \overline{\otimes} \left(B \oplus D\right)_{kl}\right)_{kl}\right]_{ij} \\ &= \left[\left(A_{ij} \overline{\otimes} B_{kl} \oplus A_{ij} \overline{\otimes} D_{kl}\right)_{kl} \oplus \left(C_{ij} \overline{\otimes} B_{kl} \oplus C_{ij} \overline{\otimes} D_{kl}\right)_{kl}\right]_{ij} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve buradan

$$\begin{aligned} \left(A \oplus C\right) \overline{\odot} \left(B \oplus D\right) &= \left[\left(A_{ij} \overline{\otimes} B_{kl}\right)_{kl} \oplus \left(A_{ij} \overline{\otimes} D_{kl}\right)_{kl} \oplus \left(C_{ij} \overline{\otimes} B_{kl}\right)_{kl} \oplus \left(C_{ij} \overline{\otimes} D_{kl}\right)_{kl}\right]_{ij} \\ &= \left[A_{ij} \overline{\odot} B\right]_{ij} \oplus \left[A_{ij} \overline{\odot} D\right]_{ij} \oplus \left[C_{ij} \overline{\odot} B\right]_{ij} \oplus \left[C_{ij} \overline{\odot} D\right]_{ij} \\ &= \left(A \overline{\odot} B\right) \oplus \left(A \overline{\odot} D\right) \oplus \left(C \overline{\odot} B\right) \oplus \left(C \overline{\odot} D\right) \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 2.5.6 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

$$D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{3\times 3}$$ olsun. $A \oplus C$ ve $B \oplus D$ matrisleri

$$A \oplus C = \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ \hdashline 5 & 1 & 4 \end{array}\right], \quad B \oplus D = \left[\begin{array}{cc:c} 4 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ \hdashline 3 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

olarak elde edilir. $A \oplus C = K$, $B \oplus D = L$ matrislerini

$$K_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \; K_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \; K_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}, \; K_{22} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

$$L_{11} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, \; L_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \; L_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix}, \; L_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. İlk olarak, $(A \oplus C) \bar{\odot} (B \oplus D) = K \bar{\odot} L$ matrisi

$$K \bar{\odot} L = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \bar{\odot} \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11} \bar{\otimes} L_{11} & K_{11} \bar{\otimes} L_{12} & K_{12} \bar{\otimes} L_{11} & K_{12} \bar{\otimes} L_{12} \\ K_{11} \bar{\otimes} L_{21} & K_{11} \bar{\otimes} L_{22} & K_{12} \bar{\otimes} L_{21} & K_{12} \bar{\otimes} L_{22} \\ K_{21} \bar{\otimes} L_{11} & K_{21} \bar{\otimes} L_{12} & K_{22} \bar{\otimes} L_{11} & K_{22} \bar{\otimes} L_{12} \\ K_{21} \bar{\otimes} L_{21} & K_{21} \bar{\otimes} L_{22} & K_{22} \bar{\otimes} L_{21} & K_{22} \bar{\otimes} L_{22} \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$K \bar{\odot} L = \begin{bmatrix} 3 \otimes L_{11} & 2 \otimes L_{11} & 3 \otimes L_{12} & 2 \otimes L_{12} & 3 \otimes L_{11} & 3 \otimes L_{12} \\ 2 \otimes L_{11} & 3 \otimes L_{11} & 2 \otimes L_{12} & 3 \otimes L_{12} & 4 \otimes L_{11} & 4 \otimes L_{12} \\ 3 \otimes L_{21} & 2 \otimes L_{21} & 3 \otimes L_{22} & 2 \otimes L_{22} & 3 \otimes L_{21} & 3 \otimes L_{22} \\ 2 \otimes L_{21} & 3 \otimes L_{21} & 2 \otimes L_{22} & 3 \otimes L_{22} & 4 \otimes L_{21} & 4 \otimes L_{22} \\ 5 \otimes L_{11} & 1 \otimes L_{11} & 5 \otimes L_{12} & 1 \otimes L_{12} & 4 \otimes L_{11} & 4 \otimes L_{12} \\ 5 \otimes L_{21} & 1 \otimes L_{21} & 5 \otimes L_{22} & 1 \otimes L_{22} & 4 \otimes L_{21} & 4 \otimes L_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 3 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 5 & 6 & 8 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 9 & 4 & 5 & 0 & 8 & 4 & 8 & 3 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 5 & 1 & 7 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 4 & 3 & 7 & 3 & 7 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Şimdi ise $(A \bar{\odot} B) \oplus A \bar{\odot} B) \oplus (C \bar{\odot} B) \oplus (C \bar{\odot} D)$ matrisini elde edelim. A, B, C ve D matrislerini

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -4 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix},\ B_{21} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ C_{12} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix},\ C_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix},\ C_{22} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix},\ D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \end{bmatrix},\ D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım $A \bar{\odot} B$ matrisi

$$A \bar{\odot} B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \bar{\odot} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_{11} \bar{\otimes} B_{11} & A_{11} \bar{\otimes} B_{12} & A_{12} \bar{\otimes} B_{11} & A_{12} \bar{\otimes} B_{12} \\ A_{11} \bar{\otimes} B_{21} & A_{11} \bar{\otimes} B_{22} & A_{12} \bar{\otimes} B_{21} & A_{12} \bar{\otimes} B_{22} \\ A_{21} \bar{\otimes} B_{11} & A_{21} \bar{\otimes} B_{12} & A_{22} \bar{\otimes} B_{11} & A_{22} \bar{\otimes} B_{12} \\ A_{21} \bar{\otimes} B_{21} & A_{21} \bar{\otimes} B_{22} & A_{22} \bar{\otimes} B_{21} & A_{22} \bar{\otimes} B_{22} \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$A \bar{\odot} B = \begin{bmatrix} 3 \otimes B_{11} & 2 \otimes B_{11} & 3 \otimes B_{12} & 2 \otimes B_{12} & 3 \otimes B_{11} & 3 \otimes B_{12} \\ -2 \otimes B_{11} & -1 \otimes B_{11} & -2 \otimes B_{12} & -1 \otimes B_{12} & 4 \otimes B_{11} & 4 \otimes B_{12} \\ 3 \otimes B_{21} & 2 \otimes B_{21} & 3 \otimes B_{22} & 2 \otimes B_{22} & 3 \otimes B_{21} & 3 \otimes B_{22} \\ -2 \otimes B_{21} & -1 \otimes B_{21} & -2 \otimes B_{22} & -1 \otimes B_{22} & 4 \otimes B_{21} & 4 \otimes B_{22} \\ 0 \otimes B_{11} & -4 \otimes B_{11} & 0 \otimes B_{12} & -4 \otimes B_{12} & 3 \otimes B_{11} & 3 \otimes B_{12} \\ 0 \otimes B_{21} & -4 \otimes B_{21} & 0 \otimes B_{22} & -4 \otimes B_{22} & 3 \otimes B_{21} & 3 \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 4 & 3 & 3 & 2 & 5 & 4 & 3 \\ 2 & -3 & 3 & -2 & 1 & 2 & 8 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 6 & 5 & 4 \\ 6 & -1 & 5 & -2 & 5 & 4 & 6 & -1 & 5 \\ 1 & -6 & 2 & -5 & 0 & 1 & 7 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 0 & -5 & 3 & -1 & 7 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & -2 & -3 & 0 & -4 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -8 & 2 & -2 & 6 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. $A\,\bar{\odot}\,D$ matrisi

$$A\,\bar{\odot}\,D=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\bar{\odot}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} A_{11}\,\bar{\otimes}\,D_{11} & A_{11}\,\bar{\otimes}\,D_{12} & A_{12}\,\bar{\otimes}\,D_{11} & A_{12}\,\bar{\otimes}\,D_{12} \\ A_{11}\,\bar{\otimes}\,D_{21} & A_{11}\,\bar{\otimes}\,D_{22} & A_{12}\,\bar{\otimes}\,D_{21} & A_{12}\,\bar{\otimes}\,D_{22} \\ A_{21}\,\bar{\otimes}\,D_{11} & A_{21}\,\bar{\otimes}\,D_{12} & A_{22}\,\bar{\otimes}\,D_{11} & A_{22}\,\bar{\otimes}\,D_{12} \\ A_{21}\,\bar{\otimes}\,D_{21} & A_{21}\,\bar{\otimes}\,D_{22} & A_{22}\,\bar{\otimes}\,D_{21} & A_{22}\,\bar{\otimes}\,D_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 3\otimes D_{11} & 2\otimes D_{11} & 3\otimes D_{12} & 2\otimes D_{12} & 3\otimes D_{11} & 3\otimes D_{12} \\ -2\otimes D_{11} & -1\otimes D_{11} & -2\otimes D_{12} & -1\otimes D_{12} & 4\otimes D_{11} & 4\otimes D_{12} \\ 3\otimes D_{21} & 2\otimes D_{21} & 3\otimes D_{22} & 2\otimes D_{22} & 3\otimes D_{21} & 3\otimes D_{22} \\ -2\otimes D_{21} & -1\otimes D_{21} & -2\otimes D_{22} & -1\otimes D_{22} & 4\otimes D_{21} & 4\otimes D_{22} \\ 0\otimes D_{11} & -4\otimes D_{11} & 0\otimes D_{12} & -4\otimes D_{12} & 3\otimes D_{11} & 3\otimes D_{12} \\ 0\otimes D_{21} & -4\otimes D_{21} & 0\otimes D_{22} & -4\otimes D_{22} & 3\otimes D_{21} & 3\otimes D_{22} \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$A\,\bar{\odot}\,D=\begin{bmatrix} 5 & 2 & 4 & 1 & 4 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & -1 & -2 & 6 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & -6 & -5 & 7 & 5 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 4 & 3 & 2 & 3 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 1 & -2 & -1 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & -1 & -2 & -5 & 1 & -3 & 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -3 & -4 & -8 & 6 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & -4 & -2 & 0 & -4 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $C\,\bar{\odot}\,B$ matrisi

$$C\,\bar{\odot}\,B=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}\bar{\odot}\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} C_{11}\,\bar{\otimes}\,B_{11} & C_{11}\,\bar{\otimes}\,B_{12} & C_{12}\,\bar{\otimes}\,B_{11} & C_{12}\,\bar{\otimes}\,B_{12} \\ C_{11}\,\bar{\otimes}\,B_{21} & C_{11}\,\bar{\otimes}\,B_{22} & C_{12}\,\bar{\otimes}\,B_{21} & C_{12}\,\bar{\otimes}\,B_{22} \\ C_{21}\,\bar{\otimes}\,B_{11} & C_{21}\,\bar{\otimes}\,B_{12} & C_{22}\,\bar{\otimes}\,B_{11} & C_{22}\,\bar{\otimes}\,B_{12} \\ C_{21}\,\bar{\otimes}\,B_{21} & C_{21}\,\bar{\otimes}\,B_{22} & C_{22}\,\bar{\otimes}\,B_{21} & C_{22}\,\bar{\otimes}\,B_{22} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Kronecker çarpımların yapılması sonucu $C\,\bar{\odot}\,B$ matrisi

$$C \,\bar{\odot}\, B = \begin{bmatrix} 1\otimes B_{11} & 1\otimes B_{11} & 1\otimes B_{12} & 1\otimes B_{12} & 2\otimes B_{11} & 2\otimes B_{12} \\ 2\otimes B_{11} & 3\otimes B_{11} & 2\otimes B_{12} & 3\otimes B_{12} & -2\otimes B_{11} & -2\otimes B_{12} \\ 1\otimes B_{21} & 1\otimes B_{21} & 1\otimes B_{22} & 1\otimes B_{22} & 2\otimes B_{21} & 2\otimes B_{22} \\ 2\otimes B_{21} & 3\otimes B_{21} & 2\otimes B_{22} & 3\otimes B_{22} & -2\otimes B_{21} & -2\otimes B_{22} \\ 5\otimes B_{11} & 1\otimes B_{11} & 5\otimes B_{12} & 1\otimes B_{12} & 4\otimes B_{11} & 4\otimes B_{12} \\ 5\otimes B_{21} & 1\otimes B_{21} & 5\otimes B_{22} & 1\otimes B_{22} & 4\otimes B_{21} & 4\otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 4 & 4 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 2 & 1 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 5 & 6 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 4 & 2 & 3 & 0 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & 4 & -3 & 3 & 3 & 5 & -2 & 4 \\ 5 & -2 & 6 & -1 & 4 & 5 & 1 & -6 & 0 \\ 9 & 4 & 5 & 0 & 8 & 4 & 8 & 3 & 7 \\ 7 & 6 & 3 & 2 & 5 & 1 & 6 & 5 & 4 \\ 8 & 1 & 4 & -3 & 7 & 3 & 7 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

biçiminde elde edilir. $C \,\bar{\odot}\, D$ matrisi

$$C \,\bar{\odot}\, D = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \bar{\odot} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix}$$

çarpımından

$$C \,\bar{\odot}\, D = \begin{bmatrix} C_{11} \,\bar{\otimes}\, D_{11} & C_{11} \,\bar{\otimes}\, D_{12} & C_{12} \,\bar{\otimes}\, D_{11} & C_{12} \,\bar{\otimes}\, D_{12} \\ C_{11} \,\bar{\otimes}\, D_{21} & C_{11} \,\bar{\otimes}\, D_{22} & C_{12} \,\bar{\otimes}\, D_{21} & C_{12} \,\bar{\otimes}\, D_{22} \\ C_{21} \,\bar{\otimes}\, D_{11} & C_{21} \,\bar{\otimes}\, D_{12} & C_{22} \,\bar{\otimes}\, D_{11} & C_{22} \,\bar{\otimes}\, D_{12} \\ C_{21} \,\bar{\otimes}\, D_{21} & C_{21} \,\bar{\otimes}\, D_{22} & C_{22} \,\bar{\otimes}\, D_{21} & C_{22} \,\bar{\otimes}\, D_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1\otimes D_{11} & 1\otimes D_{11} & 1\otimes D_{12} & 1\otimes D_{12} & 2\otimes D_{11} & 2\otimes D_{12} \\ 2\otimes D_{11} & 3\otimes D_{11} & 2\otimes D_{12} & 3\otimes D_{12} & -2\otimes D_{11} & -2\otimes D_{12} \\ 1\otimes D_{21} & 1\otimes D_{21} & 1\otimes D_{22} & 1\otimes D_{22} & 2\otimes D_{21} & 2\otimes D_{22} \\ 2\otimes D_{21} & 3\otimes D_{21} & 2\otimes D_{22} & 3\otimes D_{22} & -2\otimes D_{21} & -2\otimes D_{22} \\ 5\otimes D_{11} & 1\otimes D_{11} & 5\otimes D_{12} & 1\otimes D_{12} & 4\otimes D_{11} & 4\otimes D_{12} \\ 5\otimes D_{21} & 1\otimes D_{21} & 5\otimes D_{22} & 1\otimes D_{22} & 4\otimes D_{21} & 4\otimes D_{22} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Sayı-matris maksimum çarpımlarının yapılması sonucu $C \,\bar{\odot}\, D$ matrisi

$$C \bar{\odot} D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 0 & 2 & 2 & 4 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 2 & -3 & -3 & 4 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 4 & 0 & -3 & -1 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & -2 & -1 & 1 & -1 & -6 \\ 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 2 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 7 & 4 & 3 & 0 & 6 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 1 & -3 & 7 & 5 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 5 & 1 & 4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Buradan $(A \bar{\odot} B) \oplus (A \bar{\odot} B) \oplus (C \bar{\odot} B) \oplus (C \bar{\odot} D) = P$ matrisi

$$P = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 6 & 1 & 6 & 5 & 7 & 2 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 3 & 2 & 6 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 5 & 6 & 8 & 3 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 4 & 2 & 3 & 7 & 5 & 4 \\ 6 & 5 & 5 & 4 & 5 & 4 & 6 & 5 & 5 \\ 5 & 4 & 6 & 5 & 4 & 5 & 7 & 6 & 6 \\ 9 & 4 & 5 & 0 & 8 & 4 & 8 & 3 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 5 & 1 & 7 & 5 & 4 \\ 8 & 7 & 4 & 3 & 7 & 3 & 7 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

şeklinde hesaplanır. Sonuç olarak,

$$(A \oplus C) \bar{\odot} (B \oplus D) = (A \bar{\odot} B) \oplus A \bar{\odot} B) \oplus (C \bar{\odot} B) \oplus (C \bar{\odot} D)$$

olduğu görülür.

Aşağıdaki önermede; matrislerin Tracy-Singh çarpımının izinin, matrislerin ayrı ayrı izlerinin çarpımı olduğu verilmektedir.

Önerme 2.5.5 A ve B $n \times n$ tipinde matrisler olmak üzere

$$iz\left(A \bar{\odot} B\right) = iz\left(A\right) \otimes iz\left(B\right)$$

özelliği vardır.

İspat: $A \bar{\odot} B$ matrisinin izi, temel köşegen üzerindeki elemanları

$$\left(A_{11} \bar{\otimes} B_{kl}\right)_{kl}, \left(A_{22} \bar{\otimes} B_{kl}\right)_{kl}, \ldots, \left(A_{nn} \bar{\otimes} B_{kl}\right)_{kl,}$$

şeklindeki $kl.$ blok alt matrislerinin

$$iz\left[\left(A_{11} \bar{\otimes} B_{kl}\right)_{kl}\right] = a_{11} \otimes b_{11} \oplus a_{11} \otimes b_{22} \oplus \cdots \oplus a_{11} \otimes b_{nn}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$iz\left[\left(A_{nn} \bar{\otimes} B_{kl}\right)_{kl}\right] = a_{nn} \otimes b_{11} \oplus a_{nn} \otimes b_{22} \oplus \cdots \oplus a_{nn} \otimes b_{nn}$$

şeklindeki izlerinin toplamları olur. Böylece

$$iz\left[A \bar{\odot} B\right] = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{t=1}^{n} a_{ss} \otimes b_{tt}\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{n} a_{ss} \otimes \sum_{t=1}^{n} b_{tt}$$

$$= iz(A) \otimes iz(B)$$

sonucu elde edilir.

Matrislerin Tracy-Singh çarpımının izinin, matrislerin ayrı ayrı izlerinin çarpımı olduğu aşağıdaki örnekle doğrulanmaktadır.

Örnek 2.5.7: $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ve $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}_{\max}^{3\times 3}$ olsun. A ve B matrislerini

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 0 & -3 \end{bmatrix},\ A_{12} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \end{bmatrix},\ A_{22} = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

$$B_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ B_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix},\ B_{21} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \end{bmatrix},\ B_{22} = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}$$

şeklinde alt matrislere ayıralım. $A \bar{\odot} B$ matrisi

$$A \bar{\odot} B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \bar{\odot} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} \bar{\otimes} B_{11} & A_{11} \bar{\otimes} B_{12} & A_{12} \bar{\otimes} B_{11} & A_{12} \bar{\otimes} B_{12} \\ A_{11} \bar{\otimes} B_{21} & A_{11} \bar{\otimes} B_{22} & A_{12} \bar{\otimes} B_{21} & A_{12} \bar{\otimes} B_{22} \\ A_{21} \bar{\otimes} B_{11} & A_{21} \bar{\otimes} B_{12} & A_{22} \bar{\otimes} B_{11} & A_{22} \bar{\otimes} B_{12} \\ A_{21} \bar{\otimes} B_{21} & A_{21} \bar{\otimes} B_{22} & A_{22} \bar{\otimes} B_{21} & A_{22} \bar{\otimes} B_{22} \end{bmatrix}$$

eşitliğinden

$$A \bar{\odot} B = \begin{bmatrix} 3 \otimes B_{11} & -4 \otimes B_{11} & 3 \otimes B_{12} & -4 \otimes B_{12} & -1 \otimes B_{11} & -1 \otimes B_{12} \\ 0 \otimes B_{11} & -3 \otimes B_{11} & 0 \otimes B_{12} & -3 \otimes B_{12} & 2 \otimes B_{11} & 2 \otimes B_{12} \\ 3 \otimes B_{21} & -4 \otimes B_{21} & 3 \otimes B_{22} & -4 \otimes B_{22} & -1 \otimes B_{21} & -1 \otimes B_{22} \\ 0 \otimes B_{21} & -3 \otimes B_{21} & 0 \otimes B_{22} & -3 \otimes B_{22} & 2 \otimes B_{21} & 2 \otimes B_{22} \\ 5 \otimes B_{11} & 0 \otimes B_{11} & 5 \otimes B_{12} & 0 \otimes B_{12} & -1 \otimes B_{11} & -1 \otimes B_{12} \\ 5 \otimes B_{21} & 0 \otimes B_{21} & 5 \otimes B_{22} & 0 \otimes B_{22} & -1 \otimes B_{21} & -1 \otimes B_{22} \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Sayı-matris maksimum çarpımlarının yapılması sonucu $A \bar{\odot} B$ matrisi

$$A \,\overline{\odot}\, B = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 & -3 & 6 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 6 & -2 & -1 & 4 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 & 3 & 0 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 1 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 7 & 7 & 0 & 0 & 5 & -2 & 3 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 1 & 1 & 2 & -1 & 6 & 6 & 4 \\ 6 & 6 & 1 & 1 & 8 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 8 & 2 & 3 & 6 & 1 & 1 & 3 & 0 \\ 9 & 9 & 4 & 4 & 7 & 2 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $iz(A \,\overline{\odot}\, B)$ ise

$$iz(A \,\overline{\odot}\, B) = \max[4 \oplus 6 \oplus (-2) + (0) + (5) + (-1) + (0) + (3) + 1] = 6$$

olarak hesaplanır. Ayrıca

$$iz(A) = \max[3 \oplus (-3) \oplus 2] = 3$$

ve

$$iz(B) = \max[1 \oplus 3 \oplus 2] = 3$$

olup

$$iz(A) \otimes iz(B) = 3 + 3 = 6$$

olur. Buradan $iz(A \,\overline{\odot}\, B) = iz(A) \otimes iz(B)$ olduğu görülür.

3. SONUÇ

Tez çalışmasında, maksimum toplam cebiri üzerinde Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımları tanımlandı. Bu cebir üzerinde Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımlarının bazı cebirsel özellikleri ispatları ile birlikte sunuldu. İspatı verilen her bir cebirsel özellik için sayısal örnekler verildi.

Reel matris cebirinde çok sayıda uygulaması olan Hadamard, Kronecker, Khatri-Rao ve Tracy-Singh çarpımlarının maksimum toplam cebirine taşınmış olmalarının bilime önemli bir katkı olduğu düşünülmektedir.

4. KAYNAKLAR

Al Zhour, Z. ve Kilicman, A. 2006. Matrix equalities and inequalities involving Khatri-Rao and Tracy-Singh sums. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics (JIPAM)*, 7(1), Article 34.

Barnett, S., 1990. Matrices: Methods and Applications, *Oxford University Press*, UK, 1

Bernstein, D. S., 2005. Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas with Application to Linear Systems Theory, *Princeton University Press*, Princeton and Oxford,

Berman, A., Neumann, M. ve Stern, R.J., 1989. Nonnegative Matrices in Dynamic Systems, *Wiley-Interscience*, Chichester, UK,

Browne, M.W., 1974. Generalized least squares estimators in the analysis of covariance structures, *South African Statist. J.*, 8, 1-24.

Butkovič, P. 2010. Max-linear systems: theory and algorithms. *Springer Science & Business Media.*

Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J. P. ve Viot, M. 1984. Linear system theory for discrete event systems. In Decision and Control, 1984. *The 23rd IEEE Conference on (pp. 539-544). IEEE.*

Dembo, A. ve Zeitouni O., 1993. Large Deviation Techniques and Applications. *Jones and Barlett.*

Faliva, M., 1983. Identificazione e Stima nel Modello Lineare ad Equazioni Simultanee, *Vita e Pensiero*, Milan, Italy.

Heidergott, B., Olsder, G. J. ve Van der Woude, J. 2014. Max Plus at work: modeling and analysis of synchronized systems: a course on Max-Plus algebra and its applications. *Princeton University Press.*

Hogben, L. (Ed.), 2006. Handbook of Linear Algebra, Chapman & HallCRC, Boca Raton, USA.

Horn, R.A., 1990. The Hadamard product, Proc. Symp. Appl. Math., 40 87-169.

Horn, R. A. ve Johnson, C. R. 1991. Topics in matrix analysis. *Cambridge UP*, New York.

Horn, R.A. ve Mathias, R., 1992. Block-matrix generalizations of Schur's basic theorems on Hadamard products, *Linear Algebra and Its Appl.*, 172, 337-346.

Hyland, D.C. ve Collins, E.G., 1989. Block Kronecker products and block norm matrices in large-scale systems analysis, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 10, 18-29.

Khatri, C.G. ve Rao, C.R., 1968. Solutions to some functional equations and their applications to characterization of probability distributions, *Sankhya*, 30, 167-180.

Koning, R.H., Neudecker, H. ve Wansbeek, T., 1991. Block Kronecker products and the vecb operator, *Linear Algebra and Its Appl.*, 149, 165-184.

Leung, H., 1991. Limitedness theorem on finite automata with distance function: an algebraic proof. *Theoret. Comput. Sci*, 81:137–145.

Liu, S., 2000. On matrix trace Kantorovich-type inequalities, In: Innovations in Multivariate Statistical Analysis-A Festschrift for Heinz Neudecker (Ed. R.D.H. Heijmans, D.S.G. Pollock and A. Satorra), *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, (2000a) pp. 39-50.

Liu, S.. 2000. Inequalities involving Hadamard products of positive semidefinite matrices, *J. Math. Ana. Appl.*, 243 (2000b) 458-463.

Liu, S., 1995. Contributions to Matrix Calculus and Applications in Econometrics, *Tinbergen Institute Research Series*, no. 106, Thesis Publishers, Amsterdam, The Netherlands.

Liu, S., 1999. Matrix results on the Khatri-Rao and Tracy-Singh products, *Linear Algebra and Its Appl.*, 289, 267-277.

Liu, S., 2002. Several inequalities involving Khatri-Rao products of positive semidefinite matrices. Ninth special issue on linear algebra and statistics, *Linear Algebra and Its Appl.*, 354 (2002a) 175-186.

Liu, S. ve Trenkler, G. 2008. Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products. *Int. J. Inf. Syst. Sci*, 4(1), 160-177.

Magnus, J.R. ve Neudecker, H., 1999. Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, revised edition, *Wiley*, Chichester, UK.

Maslov, V. ve Samborskii, S., 1992. Idempotent analysis, *volume 13 of Adv. in Sov. Math. AMS*, RI.

Neudecker, H. ve Liu, S., 1995. A Kronecker matrix inequality with a statistical application, *Econometric Theory*, 11, 655.

Neudecker, H. ve Satorra, 1995. A., A Kronecker matrix inequality with a statistical application, *Econometric Theory*, 11, 654.

Neudecker, H. ve Trenkler, G., 2005. Estimation of the Kronecker and inner products of two mean vectors in multivariate analysis, *Discuss. Math. Probab. Stat.*, 25, no. 2, 207-215.

Neudecker, H. ve Trenkler, G., 2006. Estimation of the Hadamard and cross products of two mean vectors in multivariate analysis, *Statist. Papers*, 47 (2006a), no. 3, 481.

Lütkepohl, H., 1996. Handbook of Matrices, *Wiley*, Chichester, UK.

M. Plus. 1990. Linear systems in (max,+)-algebra. *In Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*, Honolulu, Dec..

Pukelsheim, F., 1977. On Hsu's model in regression analysis, *Statistics*, 8, 323-331.

Rao, C.R., 1970. Estimation of heteroscedastic variances in linear models, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 65, 161-172.

Rao, C.R. ve Kleffee, J., 1988. Estimation of Variance Components and Applications, *North- Holland*, Amsterdam, The Netherlands.

Rao, C.R. ve Rao, M.B., 1998. Matrix Algebra and Its Applications to Statistics and Econometrics, *World Scientific*, Singapore.

Schmidt, K. ve Trenkler, G., 2006. EinfÄuhrung in die Moderne Matrix-Algebra: Mit Anwendungen in der Statistik, *Springer*, 2nd ed..

Schott, J.R., 1997. Matrix Analysis for Statistics, *Wiley*, New York.

Singh, R.P., 1972. Some Generalizations in Matrix Differentiation with Applications in Multivariate Analysis, *Ph.D. Thesis, University of Windsor*.

Styan, G.P.H., 1973. Hadamard products and multivariate statistical analysis, *Linear Algebra and Its Appl.*, 6, 217-240.

Tracy, D.S. ve Singh, R.P., 1972. A new matrix product and its applications in matrix differentiation, *Statistics*, Neerlandica, 26, 143-157.

Tracy, D.S. ve Jinadasa, K.G., 1989. Partitioned Kronecker products of matrices and applications, *Canada J. Statistics.*, 17, 107-120.

Trenkler, G., 1995. A Kronecker matrix inequality with a statistical application, *Econometric Theory*, 11, 654-655.

Trenkler, G., 2001. The vector cross product from an algebraic point of view, *Discuss. Math. Gen. Algebra Appl.*, 21, no. 1, 67-82.

Trenkler, G., 2002. The Moore-Penrose inverse and the vector product, *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, 33, no. 3, 431-436.

Van Trees, H.L., 2002. Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part IV, Optimum Array Processing, *Wiley*.

Yang, Z.P., 2002. Some partial orders for the inverse of block Schur complements on the Khatri-Rao products of positive definite matrices, *(Chinese) J. Math. Study*, 35 (2002a), no. 1, 86-97.

Yang, Z.P., 2002. Some inequalities involving the Khatri-Rao product of a finite number of Hermitian matrices, *(Chinese) J. Math. Study*, 35 (2002b) no. 4, 429-434.

Yang, Z.P., 2003. Strengthening of a matrix inequality on the inverse of a particular product, *(Chinese) Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. A*, 18 no. 4, 473-479.

Yang, Z.P., 2005. A note on matrix inequality involving the Khatri-Rao product of positive semidefinite matrices, *(Chinese) J. Math. (Wuhan)*, 25, no.4, 458-462.

Zhang, F.-Z., 1999. Matrix theory. Basic results and techniques, *Springer*, New York.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	:Mustafa TEKE
Doğum Tarihi ve Yer	:1972 / BOZKIR
Medeni Hali	:Evli
Yabancı Dili	:Fransızca
Telefon	:
e-mail	:mustafafaik42@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans		
Lisans	Gazi Üniversitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü	1996
Lise	Bozkır Lisesi	1989

İş Deneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2000-2003	Cihanbeyli Günyüzü İO	Öğretmen
2003-2004	Cihanbeyli Anadolu Lisesi	Öğretmen
2004-2005	Bor Akın Gönen Anadolu lisesi	Öğretmen
2004-2005	Cihanbeyli Lisesi	Öğretmen
2005-…	Karaman TOBB Fen Lisesi	Öğretmen