ANALİTİK VE HARMONİK FONKSİYONLAR SINIFINDATANIMLANAN BAZI ÖZEL OPERATÖRLER

2012
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Tuğba YEĞİN

ANALİTİK VE HARMONİK FONKSİYONLAR SINIFINDA TANIMLANAN BAZI ÖZEL OPERATÖRLER

Tuğba YEĞİN

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

KARABÜK
Haziran 2012

Tuğba YEĞİN tarafından hazırlanan "ANALİTİK VE HARMONİK FONKSİYONLAR SINIFINDA TANIMLANAN BAZI ÖZEL OPERATÖRLER" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Hakan BOSTANCI ....
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN
Tez Danışmanı, Bülent Ecevit Üniversitesi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 29/06/2012

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan : Prof. Dr. Metin ÖZTÜRK (UÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Can Murat DİKMEN (BEÜ)	
Üye : Yrd. Doç. Dr. Hakan BOSTANCI (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Adil HÜSEYİN (KBÜ)	....

....../....../2012

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nizamettin KAHRAMAN ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Tuğba YEĞİN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ANALİTİK VE HARMONİK FONKSİYONLAR SINIFINDA TANIMLANAN BAZI ÖZEL OPERATÖRLER

Tuğba Yeğin

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Yrd.Doç. Dr. Hakan BOSTANCI

Haziran 2012, 40 sayfa

Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Çalışmanın birinci bölümü, çalışma hakkında bilgi verilen giriş bölümüdür. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler ispatsız olarak verildi. Üçüncü bölümde, ilk olarak analitik fonksiyonlar sınıfında önemli bir yeri olan S sınıfı ve bazı alt sınıflarının tanımları verildi. Sonra alt başlıklar altında S sınıfında tanımlanan Salagean, Ruscheweyh ve Sakaguchi operatörlerinin tanımları ve bu operatörler yardımıyla tanımlanan bazı sınıf örnekleri verildi. Son bölümde, ilk olarak harmonik fonksiyonlar sınıfında önemli bir yeri olan H sınıfı ve bazı alt sınıflarının tanımları verildi. Sonra alt başlıklar altında H sınıfı tanımlanan Salagean, Ruscheweyh ve Sakaguchi operatörlerinin tanımları ve bu operatörler yardımıyla tanımlanan bazı sınıf örnekleri verildi.

Anahtar Sözcükler : Harmonik fonksiyonlar, analitik fonksiyonlar, Salagean operatörü, Sakaguchi operatörü, Rusceheweyh operatörü.

Bilim Kodu : 204.6.026

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOME SPECIFIC OPERATORS ARE DEFINED ANALYTIC AND HARMONIC FUNCTIONS

Tuğba YEĞİN

Karabük University
Graduate School Of Natural and Applied Sciences
Department Of Mathematics

Thesis Advisor:
Assist. Prof. Dr. Hakan BOSTANCI

July 2012, 40 pages

This study consists of four sections. In the first section introduction, information was given about the study. The second section, the basic definitions and theorems that will be used in the other parts were given without proof. In the third section, at first, definition of class of S which plays an important role in the analytic functions, and some subclasses of this class were mentioned. Then definition of Salagean, Ruscheweyh and Sakaguchi operators which defined in the class of S were mentioned. After, some examples of classes that were defined by these operators were presented. In the last chapter, at first, definition of class of H which has an important place of the harmonic functions, and some subclasses of this class were given. Then definition of Salagean , Ruscheweyh and Sakaguchi operators which defined in the class of H was given. After, some examples of classes that were defined by these operators were given.

Key Word : Harmonic functions, analytic functions, Salagean operator, Sakaguchi operator, Ruscheweyh operator.

Science Code : 204.6.02

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Hakan BOSTANCI' ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sevgili aileme manevi hiçbir yardımı esirgemeden yanımda oldukları için tüm kalbimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa</u>

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\mathbb{C}$	: kompleks sayılar kümesi
D	: bölge
H	: yön koruyan harmonik yalınkat dönüşümlerin sınıfı
K	: konveks fonksiyonlar sınıfı
$K(\alpha)$	: α mertebeli konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{N}$	: doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: reel sayılar kümesi
$\Re e\{z\}$	: z karmaşık sayısının reel kısmı
S	: normalize edilmiş analitik ünivalent fonksiyonların sınıfı
S^*	: yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$S^*(\alpha)$	: α mertebeli yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathbb{U}$	: birim disk
$\lvert z\rvert$	: z karmaşık sayısının modülü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Son yıllarda analitik fonksiyonlar ve harmonik fonksiyonlar sınıfları ile ilgili birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalarda bir çok yeni operatör ve bu operatörler yardımıyla yeni sınıflar veya daha önceden tanımlanmış olan sınıfların ve operatörlerin genelleştirilmiş durumları tanımlanmıştır. Bu çalışmanın amacı, analitik fonksiyonlar ve harmonik fonksiyonlar sınıfında çalışanlara yardımcı olması adına, analitik fonksiyonlar ve harmonik fonksiyonlar sınıfında tanımlanmış olan önemli gördüğümüz operatörlerden Salagean, Ruscheweyh ve Sakaguchi türev operatörlerinin tanımlarını bir arada bulabilecekleri bir kaynak meydana getirmektir. Bunun yanında çalışmamızda araştırmacılara fikir vermesi için operatörler yardımıyla meydana getirilen birkaç sınıf örneğinede yer verilmiştir. Bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Çalışmanın birinci bölümü giriş bölümü olup, ikinci bölümde, diğer bölümlerde sıkça kullanacağımız bazı tanımlar ve sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm dört ana kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şeklinde normalize edilmiş, yön koruyan analitik ünivalent f fonksiyonların S sınıfı ve S sınıfının yıldızıl ve konveks alt sınıflarının tanımları verilmiştir. İkinci kısımda analitik fonksiyonlar sınıfında tanımlanan Salagean operatörünün tanımı ve bu operatör yardımıyla tanımlanan fonksiyon sınıfları ile elde edilen sonuçlar ispatsız olarak verilmiştir. Üçüncü kısımda analitik fonksiyonlar sınıfında tanımlanan Ruscheweyh operatörünün tanımı ve bu operatör yardımıyla tanımlanan fonksiyon sınıfları ile elde edilen sonuçlar ispatsız olarak verilmiştir. Dördüncü kısımda analitik fonksiyonlar sınıfında tanımlanan Sakaguchi operatörünün (Sakaguchi Tipli fonksiyonların) tanımı ve bu operatör yardımıyla tanımlanan fonksiyon sınıfları ile elde edilen sonuçlar ispatsız olarak verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise ilk olarak harmonik fonksiyonların sınıfının tanımı verilmiştir. h ve g fonksiyonları birim diskte analitik olmak üzere $h(0) = h'(0) - 1 = 0$ ve $g(0) = g'(0) - 1 = 0$ şeklinde normalize edilmiş, yön koruyan harmonik ünivalent $f = h + g$ tipindeki fonksiyonların H sınıfı ve H sınıfının yıldızıl ve konveks alt sınıflarının tanımları verilmiştir. Diğer kısımlarda üçüncü bölümde analitik fonksiyonlar sınıfı için tanımlanan operatörlerin harmonik fonksiyonlar sınıfındaki tanımları benzer şekilde aynı sırayla verilmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1 (İç Nokta) : $A \subset \mathbb{C}$ ve $z_0 \in A$ olsun. $z_0 \in A$ noktasının en az bir ε - komşuluğu tamamen A kümesine ait ise z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.2 (Açık Küme) : A kümesinin her noktası bir iç nokta ise, bu kümeye açık küme denir.

Tanım 2.3 (Kapalı Küme) : $A \subset \mathbb{C}$ olsun. A kümesinin tümleyeni açık ise A kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.4 (Bağlantılı Küme) : $A, B, C \subset \mathbb{C}$ altkümeleri verilsin. Eğer

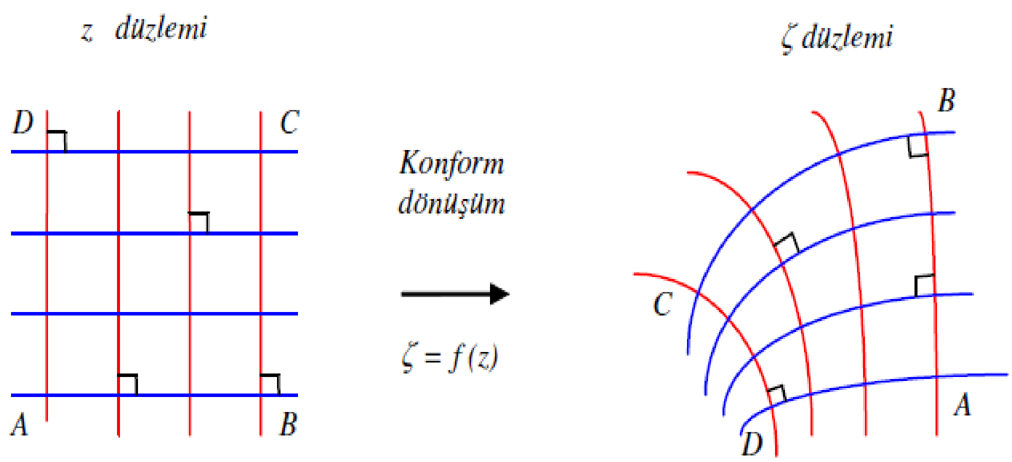
- $A \subset B \cup C$
- $A \cap B \neq \varnothing$, $A \cap C \neq \varnothing$
- $A \cap B \cap C = \varnothing$

olacak şekilde B ve C gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunmaz ise, $A \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir.

Tanım 2.5 (Bölge) : Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı olan bir kümeye $\mathbb{C}$ ' de bir bölge denir.

Tanım 2.6 (Basit Bağlantılı Bölge) : Eğer bir bölgenin $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genişletilmiş karmaşık düzlemine göre tümleyeni bağlantılı ise bu bölgeye basit bağlantılı bölge denir.

Tanım 2.7 : Karmaşık düzlemin bir D bölgesinde tanımlı $f : D \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı bulunan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrilerinin de w_0 noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı varsa, f fonksiyonuna z_0 noktasında konformdur denir ve eğer f fonksiyonu her $z_0 \in D$ noktasında konform ise f fonksiyonu D bölgesinde konformdur denir (Şekil 1.1.).



Şekil 1.1. Konform dönüşüm.

Tanım 2.8 (Diferansiyellenebilme) : $f : A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0 , A` nın bir iç noktası olsun.

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti varsa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 ' da diferansiyellenebilirdir denir. Bu limit değerine $f(z)$ 'nin z_0 'daki türevi denir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 2.9 (Analitik Fonksiyon): $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının uygun bir ε - komşuluğunda diferansiyellenebiliyorsa $f(z)$ 'ye z_0 noktasında analitiktir denir. Başka bir ifadeyle; z_0 noktasının uygun bir ε - komşuluğunda $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{n}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

formunda yazılabiliyorsa $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu bir D bölgesinin bütün noktalarında analitik ise $f(z)$ fonksiyonuna D bölgesinde analitiktir denir ve eğer $f(z)$ fonksiyonu $\mathbb{C}$ kompleks düzleminin tüm noktalarında analitik ise $f(z)$ fonksiyonuna tam fonksiyon denir.

Tanım 2.10 : Bir D bölgesinde analitik ve D bölgesindeki farklı z değerleri için farklı w değerlerini karşılık getiren f fonksiyonuna D bölgesinde ünivalent (yalınkattır) denir. Bu durumda, $w=f(z)$ denklemi, her w değeri için D bölgesinde en fazla bir köke sahiptir. Böyle fonksiyonlar, D bölgesini bire-bir ve konform olarak, w-düzlemindeki bir bölge üzerine dönüştürür.
Yukarıdaki tanıma eşdeğer olarak yalınkatlığı aşağıdaki şekilde de ifade edebiliriz.

Herhangi bir D bölgesinde ve en fazla bir kutup noktası hariç tüm düzlemde analitik bir f fonksiyonu için, $z_1, z_2 \in D$ olmak üzere,

$$z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

oluyorsa, f fonksiyonuna D bölgesinde yalınkattır (ünivalent) denir.

Teorem 2.11 (Rieamann Dönüşüm Teoremi) : D, $\mathbb{C}$ ’nin basit bağlantılı öz alt kümesi ve $z_0 \in D$ noktası verilmiş olsun. Bu takdirde $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$ özelliğinde D ’yi $\mathbb{U}=\{z:|z|<1\}$ birim daire üzerine konform olarak dönüştüren bir tek f fonksiyonu vardır.

Önceki sayfada verdiğimiz ünlü Riemann Dönüşüm Teoremi' nin sonucu olarak genelliği bozmayacağından birçok yazarında yaptığı gibi herhangi bir basit bağlantılı D bölgesi yerine $\mathbb{U}$ birim diskini alacağız.

Lemma 2.12 (Schwarz Lemması) : $|w(z)| = c_1 z + c_2 z + ...$ fonksiyonu $\mathbb{U}$ ’ da tanımlanmış ve analitik olsun. Ayrıca $w(0) = 0$ ve $w(z) < 1$ koşullarını gerçeklesin. Bu durumda

$$|w(z)| \leq |z| \text{ ve } |w(0)| \leq 1$$

eşitsizlikleri gerçeklenir. Eşitlik hali ancak ve ancak $|k| = 1$ olmak üzere, $w(z) = kz$ ve fonksiyonu için geçerlidir.

Tanım 2.13 (Subordinasyon) : $f(z)$ ve $g(z)$, D bölgesinde analitik iki fonksiyon olsun. $f(z) = g(v(z))$ olacak şekilde D bölgesinde $v(0) = 0$ ve $|v(z)| < 1$ şartlarını sağlayan bir $v(z)$ analitik (ünivalent değil)fonksiyonu varsa $f(z)$, $g(z)$ fonksiyonuna subordinatedir denir ve $f(z) \prec g(z)$ ile gösterilir (Pommerenke,1975).

BÖLÜM 3

ANALİTİK FONKSİYONLAR VE ALT SINIFLARI

Bu kesimde, ünivalent analitik fonksiyonların bazı özel alt sınıflarından söz edeceğiz.

$\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, yalınkat ve normalleştirilmiş yani, $f(0)=f'(0)-1=0$ koşulları ile normalize edilmiş fonksiyonların sınıfı S ile gösterilir. Her $f \in S$ fonksiyonu, $|z|<1$ için,

$$f(z)=z+a_2 z^2+\cdots=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

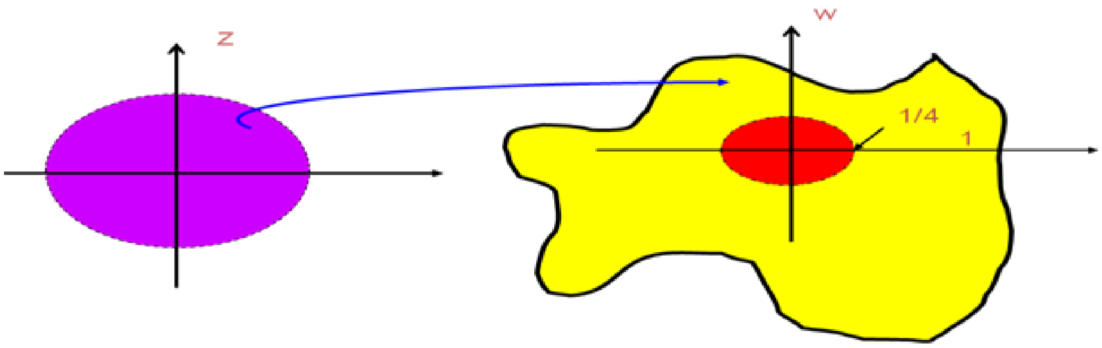
şeklinde bir Taylor serisi ile ifade edilebilir. Yani,

$S:=\{f \mid f:\mathbb{U}\to\mathbb{C}$,analitik ve ünivalent, $f(0)=f'(0)-1=0\}$
S sınıfındaki fonksiyonların en önemlisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} n z^n = z+2z^2+3z^3+\cdots$$

şeklinde Taylor serisi açılımına sahip olan $k(z)=z(1-z)^{-2}$ fonksiyonudur. Bu fonksiyona Koebe fonksiyonu adı verilir. Bu fonksiyon, $\mathbb{U}$ birim diskini $-\dfrac{1}{4}$ den $-\infty$ a kadar olan şeridi çıkarılmış tüm karmaşık düzlem üzerine konform olarak dönüştürür. Bunun bir diğer yorumu aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

Teorem 3.1 (Koebe Dörtte Bir Teoremi) : $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve normalleştirilmiş fonksiyonların S sınıfındaki her fonksiyonun değer kümesi, $\{w : |w| < 1/4\}$ diskini kapsar . Yani, $\forall f \in S$ için $\left\{w : |w| < \frac{1}{4}\right\} \subset f(\mathbb{U})$ dur(Şekil3.1.).



Şekil 3.1. Koebe dörtte bir teoremi.

Tanım 3.2 : Bir $D \subset \mathbb{C}$ kümesi ve bir $z_0 \in D$ noktasını alalım. z_0 noktasını, her $z \in D$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen D içinde kalıyorsa, D kümesine z_0 noktasına göre yıldızıl denir. f fonksiyonu yalınkat ve $f(\mathbb{U})$ görüntü bölgesi orijine göre yıldızıl ise f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon veya kısaca yıldızıl denir. Bu tanım S sınıfındaki fonksiyonlar için farklı biçimde verilebilmektedir. Şimdi vereceğimiz teorem bunu göstermektedir.

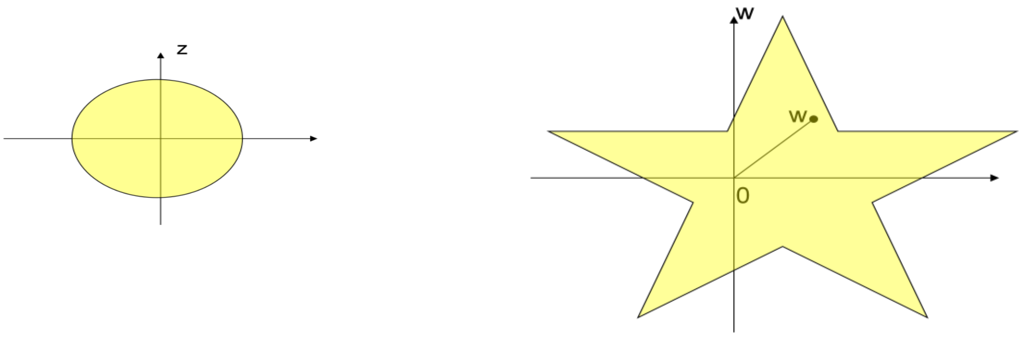
Teorem 3.3 : $f \in S$ fonksiyonunun yıldızıl olması için gerek ve yeter şart

$0 < |z| < 1$ için,

$$\Re e\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \tag{3.1}$$

olmasıdır. Bu tip fonksiyonların sınıfı S^* ile gösterilir.

Yani, $\forall f \in S$ olmak üzere, $z = re^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$ ve $0 \le r \le 1$ için, $\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\arg f(re^{i\theta})\right) > 0$ dır (Şekil 3.2.).



Şekil 3.2. Yıldızıl fonksiyon.

Daha genel olarak; $f(z) \in S$, $0 < |z| = r < 1$ olmak üzere

$$\Re e\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha$$

şartını sağlayan $f(z) \in S$ fonksiyonuna α mertebeli yıldızıl fonksiyon denir ve bu tip fonksiyonların sınıfı $S^*(\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 3.4 : D kompleks düzlemde bir bölge olsun. Farklı herhangi $z, w \in D$ noktaları ve $0 \le t \le 1$ için $tz + (1-t)w$ doğru parçası D ’ de kalıyorsa D ’ ye konveks bölge denir. Başka bir ifadeyle, D bölgesinin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası tamamen D kümesinde kalıyorsa, D bölgesine konvekstir denir.

Tanım 3.5 : $f : D \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu için $f(D)$ konveks bir bölge ise f fonksiyonuna konvekstir denir. Yani bir f fonksiyonu yalınkat ve $f(D)$ görüntü bölgesi konveks ise, f fonksiyonuna konveks fonksiyon denilmektedir.

Herhangi bir konveks bölge her noktasına göre yıldızıl olduğundan bir konveks fonksiyon aynı zamanda bir yıldızıl fonksiyondur. Ancak tersi doğru değildir.

Teorem 3.6 : $f \in S$ olsun. Bu taktirde $f(\mathbb{U})$'nun konveks olması için gerek ve yeter şart her $r \in (0,1)$ için $f(D_r)$ 'nin konveks olmasıdır.

Teorem 3.7 : $f \in S$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart $|z| < 1$ için,

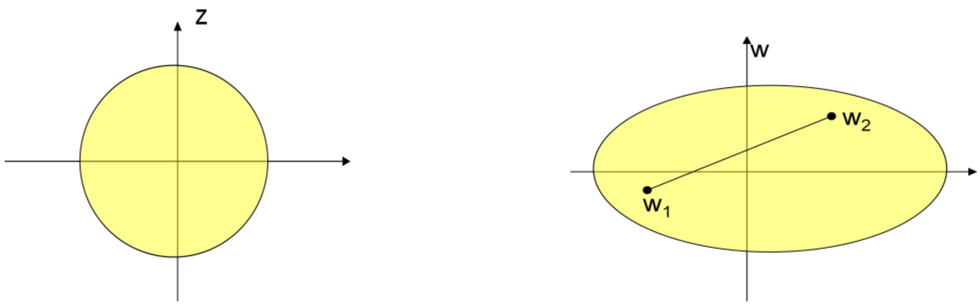
$$\Re e\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0 \tag{3.2}$$

olmasıdır. Bu tip fonksiyonların sınıfı K ile gösterilir. Yani, $f \in S$ olmak üzere,

$z = re^{i\theta}, 0 \le \theta \le 2\pi$ ve $0 \le r \le 1$ için;

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg f(re^{i\theta})\right)\right)\right\} > 0$$

dır (Şekil 3.3.).



Şekil 3.3. Konveks fonksiyon.

Daha genel olarak; $f(z) \in S$, $0 < |z| = r < 1$ olmak üzere,

$$\Re e\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

şartını sağlayan $f(z) \in S$ fonksiyonuna α mertebeli konveks fonksiyon denir ve bu tip fonksiyonların sınıfı $K(\alpha)$ ile gösterilir.

Şimdi ünivalent fonksiyonların S sınıfının yıldızıl ve konveks alt sınıfları arasındaki ilişkiyi veren Alexander Teoremi'ni verelim.

Teorem 3.8 (Alexander Teoremi) : f fonksiyonu, $\mathbb{U}$ birim diskinde $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ koşulları ile normalleştirilmiş analitik bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonun konveks olması için gerek ve yeter şart zf' fonksiyonunun yıldızıl olmasıdır.

İspat : *f* fonksiyonu konveks olsun. Bu durumda,

$$0 < \Re e\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} = \Re e\left\{\frac{z\left(f'(z) + zf''(z)\right)}{zf'(z)}\right\} = \Re e\left\{\frac{z\left(zf'(z)\right)'}{zf'(z)}\right\}$$

olduğundan $zf'(z)$ fonksiyonu yıldızıldır. Tersine $zf'(z)$ fonksiyonu yıldızıl ise

$$\Re e\left\{\frac{z\left(zf'\right)'}{zf'}\right\} = 1 + \Re e\left\{\frac{zf''}{f'}\right\} > 0$$

dır. Üstelik $zf'(z) = z + 2a_1z^2 + \cdots \in S$ olduğundan *f* fonksiyonu konvekstir.

3. 1. ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN SALAGEAN OPERATÖRÜ VE BAZI ÖZEL SINIFLARI

Tanım 3.1.1 : Ünivalent bir f fonksiyonu için Salagean (1981) tarafından,

$$D^0 f(z) = f(z) \quad , \quad D^1 f(z) = zf'(z)$$

ve $m \geq 2$ için

$$D^m f(z) = D(D^{m-1} f(z))$$

şeklinde bir türev operatörü tanımlanmıştır. Bu operatör, Salagean operatörü adıyla bilinmektedir. Bu durumda $\mathbb{U}$ birim diskinde analitik ve

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$$

formundaki f fonksiyonları için Salagean operatörü

$$D^m f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^m a_k z^k, \qquad m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

şeklinde elde edilir .

Şimdi tanımlanan bir sınıf için genel olarak katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon teoremi ve yarıçap tahmini gibi teoremler çalışılmaktadır. Bunların ispatları nasıl yapılır bir fikir vermesi adına Silverman (1975) ` ın çalışmasından bahsedeceğiz. Daha sonra operatörler yardımıyla oluşturulmuş sınıflar içinde benzer çalışmalar ve sonuçlar elde edilmiş olduğundan diğerleri ispatsız verildi.

Tanım 3.1.2 : Silverman (1975) 'ın çalışmasında

$$f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}\left|a_n\right|z^n$$

formundaki S sınıfının, sıfırdan farklı negatif katsayılı fonksiyonların oluşturduğu sınıfı T, α mertebeli yıldızıl negatif katsayılı fonksiyonların oluşturduğu sınıfı $T^*(\alpha)$, α mertebeli konveks negatif katsayılı fonksiyonların oluşturduğu sınıfı $C(\alpha)$ olarak tanımlamıştır.

Teorem 3.1.3 : $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ fonksiyonu için $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)\left|a_n\right|z^n \le 1-\alpha$ eşitsizliği sağlanıyorsa $f\in S^*(\alpha)$ dır (Silverman, 1975).

İspat: $f\in S^*(\alpha)$ göstermek için, $\dfrac{zf'}{f}$ değerinin merkezi $w=1$ ve yarı çapı $1-\alpha$ olan çember içinde olduğunu göstermemiz yeterlidir.

Eğer $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,|\,a_n\,|\le(1-\alpha)\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}|\,a_n\,|\right)$ ise

$$\left|\frac{zf'}{f}-1\right|=\left|\frac{zf'-f}{f}\right|=\left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n z^n}{z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n}\right|\le\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,|\,a_n\,\|\,z\,|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|\,a_n\,\|\,z\,|^{n-1}}\le\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\,|\,a_n\,|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|\,a_n\,|}$$

eşitsizliğin son ifadesi $1-\alpha$ ile sınırlıdır. Denk olarak

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)\,|\,a_n\,|\le(1-\alpha)$$

dır. Böylece

$\left|\dfrac{zf'}{f}-1\right| \leq 1-\alpha$ eşitsizliği elde edilir ve teorem ispatlanmış olur.

Sonuç 3.1.4 : $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu için $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$ ise $f \in K(\alpha)$ dır.

Teorem 3.1.5 : $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| z^n \in T^*(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır. (Silverman, 1975).

İspat. Teorem baktığımızda sadece ancak kısmını göstermek yeterlidir. $|z|<1$ için

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'}{f}\right\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{z-\sum_{n=2}^{\infty} n\,|a_n|\,z^n}{z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\,z^n}\right\} > \alpha$$

olsun. z değerleri reel seçildiğinde zf'/f reeldir. Yukarıdaki eşitsizlikte z ler 1'e reel eksen boyunca yaklaştığında

$$1-\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq \alpha\left(1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\right)$$

elde edilir. Böylece $\sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)|a_n| \leq 1-\alpha$ dir ve ispat tamamlanır

Sonuç 3.1.6 : Eğer $f \in T^*(\alpha)$ ise $|a_n| \leq \dfrac{1-\alpha}{n-\alpha}$ dır. Eşitlik $f_n(z) = z - \dfrac{(1-\alpha)z^n}{n-\alpha}$ fonksiyonu için sağlanır (Silverman, 1975).

Sonuç 3.1.7 : $f(z)=z-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|z^n \in C(\alpha)$ dır ancak ve ancak $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-\alpha)|a_n|\leq 1-\alpha$ dır (Silverman, 1975).

Teorem 3.1.8 : $f \in T$ ise $\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leq 1$ dır (Silverman, 1975).

Sonuç 3.1.9 : $T=T^*(0)$ dır (Silverman, 1975).

Teorem 3.1.10 : Eğer $f \in T^*(\alpha)$ ise $|z|=r$ için

$$r-\frac{(1-\alpha)r^2}{2(2-\alpha)}\leq |f| \leq r+\frac{(1-\alpha)r^2}{2(2-\alpha)}$$

dır ve eşitlik, $f(z)=z-\frac{(1-\alpha)z^2}{2(2-\alpha)}$ fonksiyonu için sağlanır. (Silverman, 1975)

İspat: Teorem 3.1.5 den

$$(2-\alpha)\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|\leq \sum_{n=2}^{\infty}(n-\alpha)\,|\,a_n\,|\leq 1-\alpha$$

eşitsizliği açıktır. Böylece

$$|\,f(z)\,|\leq r+\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \leq r+r^2\sum_{n=2}^{\infty}|\,a_n\,|\leq r+\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$|\,f(z)\,|\geq r-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n|r^n \geq r-r^2\sum_{n=2}^{\infty}|\,a_n\,|\geq r-\frac{1-\alpha}{2-\alpha}r^2$$

elde edilir.

Teorem 3.1.11 : Herhangi bir $f \in T^{*}(\alpha)$ fonksiyonu $|z|<1$ diskini $|w| < \dfrac{1}{2-\alpha}$ diskinin bulunduran bir bölge üzerine resmedilir ve herhangi bir $f \in C(\alpha)$ fonksiyonu ise $|w| < \dfrac{3-\alpha}{2(2-\alpha)}$ diskini bulunduran bir bölge üzerine resmeder. Ekstrem fonksiyonlar $z - \dfrac{(1-\alpha)z^2}{(2-\alpha)} \in T^{*}(\alpha)$ ve $z - \dfrac{(1-\alpha)z^2}{(2-\alpha)} \in C(\alpha)$ dır.

Teorem 3.1.12 : $f \in T^{*}(\alpha)$ ise $|z| = r$ için,

$$1 - \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)} r \leq |f'| \leq 1 + \frac{2(1-\alpha)}{(2-\alpha)} r\,,$$

dır ve eşitlik $f(z) = z - \dfrac{(1-\alpha)z^2}{2(2-\alpha)}$, $(z = \pm r)$ fonksiyonu için sağlanır.

İspat: f' fonksiyonunun modülü için

$$|f'(z)| \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \leq 1 + r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n|$$

elde edilir. Teorem 3.1.5 den

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \leq 1-\alpha+\alpha\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| \leq 1-\alpha+\frac{\alpha(1-\alpha)}{2-\alpha} = \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$|f'(z)| \geq 1 - \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n||z|^{n-1} \geq 1 - r\sum_{n=2}^{\infty} n|a_n| \geq 1 - \frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha} r$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 3.1.13 : Owa vd. (1989) tarafından ; $0 \leq \alpha < 1$ ve $n \in \mathbb{N}_0$ için ;

$$\Re e\left\{\frac{D^{n+1} f(z)}{D^n f(z)}\right\} \geq \alpha \quad , \quad z \in \mathbb{U}$$

koşulunu sağlayan $f(z) \in S$ fonksiyonlarının sınıfı $S_n(\alpha)$ ile tanımlanmıştır.

Özel olarak $n = 0$ ve $0 \leq \alpha < 1$ için;

$$\alpha \leq \Re e\left\{\frac{D^1 f(z)}{D^0 f(z)}\right\} = \Re e\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}$$

α - yıldızıl fonksiyonların $S^*(\alpha)$ sınıfı elde edilir. Yine aynı şekilde; $n = 1$ ve $0 \leq \alpha < 1$ için;

$$\alpha \leq \Re e\left\{\frac{D^2 f(z)}{D^1 f(z)}\right\} = \Re e\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}$$

α - konveks fonksiyonların $K(\alpha)$ sınıfı elde edilir.

3.2. ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN RUSCHEWEYH OPERATÖRÜ VE BAZI ÖZEL SINIFLARI

Tanım 3.2.1 (Hadamard Çarpımı): $f, g \in S$ olsun.

$$f(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı;

$$(g * f)(z) = (f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n \quad , \quad z \in \mathbb{U}$$

dır.

Tanım 3.2.2 : Ruscheweyh (1975) tarafından ,

$$D^0 f(z) = f(z) \quad \text{ve} \quad D^1 f(z) = f'(z) \tag{3.12}$$

$$D^n f(z) = \frac{z\left(z^{n-1} f(z)\right)^{(n)}}{n!} \quad , \; n \in \mathbb{N}_0 \tag{3.13}$$

biçiminde bir operatör tanımlanmıştır ve $D^n f(z)$, $f\,'$ in n. Ruscheweyh türevi olarak adlandırılır.

$D^n f(z)$ operatörünün, Hadamard çarpımı yardımıyla,

$$D^\alpha f(z) = \frac{z}{(1-z)^{\alpha+1}} * f(z) \qquad (\alpha \geq -1) \tag{3.14}$$

ifadesine denk olduğu gösterilmiştir (Ruscheweyh, 1975).

Tanım 3.2.3 : Ruscheweyh (1975) tarafından

$$\mathcal{A} := \left\{ f(z) \middle| \, f \; analitik \; ve \; f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \right\} \text{ olmak üzere } f(z) \in \mathcal{A}$$

fonksiyonlarının

$$\Re e\left\{ \frac{\left(z^n f\right)^{n+1}}{\left(z^{n-1} f\right)^n} \right\} > \frac{n+1}{2} \tag{3.15}$$

eşitsizliğini sağlayanlarının ünivalent olduğu gösterilmiş ve (3.15) eşitsizliğini sağlayan fonksiyonların $\mathbb{K}_n$ sınıfı tanımlanmıştır. Bu sınıfta $(n = 0,1,2,...)$ için

$$\mathbb{K}_{n+1} \subset \mathbb{K}_n \tag{3.16}$$

dır. (3.15) eşitsizliğinden $n=0$ için $\Re e\left\{\frac{zf'}{f}\right\} > \frac{1}{2}$ olacağından $\mathbb{K}_0$, $\frac{1}{2}$ etrafında yıldızıl ünivalent fonksiyonların sınıfı $S^*(1/2)$ sınıfına karşılık gelir (Ruscheweyh , 1975).

$f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu için,

$$f(z) \in \mathbb{K}_n \Leftrightarrow \Re e\left(D^{n+1} f / D^n f\right) > 1/2 \qquad , \quad z \in \mathbb{U}$$

dır (Ruscheweyh, 1975). Bu tanımın özel halleri olarak,

$n=0$ ise

$$f(z) \in S^*(1/2) \Leftrightarrow \Re e\left(D^1 f / D^0 f\right) > 1/2 \qquad , \quad z \in \mathbb{U} \tag{3.18}$$

$n=1$ ise

$$f(z) \in K(1/2) \Leftrightarrow \Re e\left(D^2 f / D^1 f\right) > 1/2 \qquad , \quad z \in \mathbb{U} \tag{3.19}$$

sınıfları elde edilir.

3.3. ANALİTİK FONKSİYONLAR İÇİN SAKAGUCHİ OPERATÖRÜ VE BAZI ÖZEL SINIFLARI

Tanım 3.3.1 : $f(z) \in S$ olmak üzere,

$$\Re e\left\{\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(-z)}\right\} > 0, |z| < 1$$

eşitsizliğini sağlayan $f(z) \in S$ fonksiyonuna simetrik noktaya göre yıldızıldır denir ve bu şartı sağlayan $f(z) \in S$ fonksiyonlarının sınıfı S_S^* ile gösterilir (Sakaguchi ,1959). Bu tanıma benzer olarak birçok yazar aşağıdaki şekilde farklı tanımlamalar yapmıştır.

$f(z) \in S$ olmak üzere;

$$\Re e\left\{\frac{2zf'(z)}{f(z)+\overline{f((\overline{z}))}}\right\} > 0 \qquad , \qquad z \in \mathbb{U}$$

eşitsizliğini sağlayan $f(z) \in S$ fonksiyonuna eşlenik noktaya göre yıldızıldır denir ve bu şartı sağlayan $f(z) \in S$ fonksiyonlarının sınıfı S_K^* ile gösterilir.

$f(z) \in S$ olmak üzere;

$$\Re e\left\{\frac{2zf'(z)}{f(z)-\overline{f(-\overline{z})}}\right\} > 0 \qquad , \qquad z \in \mathbb{U}$$

eşitsizliğini sağlayan $f(z) \in S$ fonksiyonuna simetrik eşlenik noktaya göre yıldızıldır denir ve bu şartı sağlayan $f(z) \in S$ fonksiyonlarının sınıfı S_{SK}^{*} ile gösterilir.

Tanım 3.3.2 : Sakaguchi (1959)tarafından $0 \le \alpha < 1$ ve $z \in \mathbb{U}$ olmak üzere;

$$\Re e\left\{ \frac{(1-t)zf'(z)}{f(z)-f(tz)} \right\} > \alpha \quad |t| \le 1, t \ne 1 \tag{3.22}$$

şartını sağlayan $f(z) \in S$ fonksiyonlarının sınıfı $S(\alpha,t)$ ile tanımlanmıştır.

İlk olarak Cho, Kwan ve Owa (1993)' nın bulduğu iki teoremi vereceğiz.

Teorem 3.3.3 : Eğer $f(z) \in \mathcal{A}$ olmak üzere, $0 \le \alpha < 1$ için;

$$\sum_{n=2}^{\infty} \{|n-u_n| + (1-\alpha)|u_n|\}|a_n| \le 1-\alpha \quad , \quad u_n = 1+t+t^2+...+t^{n-1} \tag{3.23}$$

ise $f(z) \in S(\alpha,t)$ dir. Ayrıca $zf'(z) \in S(\alpha,t)$ olan $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{T}(\alpha,t)$ ile gösterilir. Yani,

$f(z) \in \mathcal{T}(\alpha,t)$ ise $zf'(z) \in S(\alpha,t)$ dır.

Teorem 3.3.4 : Eğer $f(z) \in \mathcal{A}$ olmak üzere, $0 \le \alpha < 1$ için;

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\{|n-u_n| + (1-\alpha)|u_n|\}|a_n| \le 1-\alpha \quad , \quad u_n = 1+t+t^2+...+t^{n-1} \tag{3.24}$$

ise $f(z) \in \mathcal{T}(\alpha,t)$ dir.

Tanım 3.3.5 : Owa vd. (2006) tarafından,

$\mathcal{S}_O(\alpha,t)=\{f(z)\in\mathcal{A}: f(z)$, (3.23) ile verildiğinde }

ve

$\mathcal{T}_O(\alpha,t)=\{f(z)\in\mathcal{A}: f(z)$, (3.24) ile verildiğinde }

sınıflarını tanımlanmıştır.

Tanım 3.3.6 : $f(z)\in S$ olmak üzere,

$$\Re e\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)-f(-z)}\right\}>\alpha \quad , \quad 0\le\alpha<\frac{1}{2} \ , \ z\in\mathbb{U} \tag{3.25}$$

koşulunu sağlayan $f(z)\in S$ fonksiyonu α mertebeli Sakaguchi fonksiyonu olarak adlandırılır ve bu koşulu sağlayan fonksiyonların sınıfı $S(\alpha)$ ile gösterilir (Owa vd., 2005). Ayrıca $zf'(z)\in S(\alpha)$ olan $f(z)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathbb{T}(\alpha)$ ile gösterilir. Yani,

$f(z)\in\mathbb{T}(\alpha)$ ise $zf'(z)\in S(\alpha)$ dır.

Owa vd. (2005) bu çalışmalarında 1993 yılındaki makalelerinde vermiş aşağıdaki iki lemmayı kullanmışlardır.

Lemma 3.3.7 : Eğer $f(z)\in S$ fonksiyonu, $0\le\alpha<\frac{1}{2}$ olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty}\{2(n-1)|a_{2n-2}|+(2n-1-2\alpha)|a_{2n-1}|\}\le 1-2\alpha \tag{3.26}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f(z)\in S(\alpha)$ dır.

Lemma 3.3.8 : Eğer $f(z) \in S$ fonksiyonu, $0 \le \alpha < \dfrac{1}{2}$ olmak üzere

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left\{ 4(n-1)^2 |a_{2n-2}| + (2n-1)(2n-1-2\alpha)|a_{2n-1}| \right\} \le 1-2\alpha \tag{3.27}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f(z) \in \mathbb{T}(\alpha)$ dır.

BÖLÜM 4

HARMONİK FONKSİYONLAR VE ALT SINIFLARI

Bir D bölgesinde tanımlı reel değerli $u(x,y)$ veya $u(z)$ fonksiyonu D de ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve Laplace denklemi denilen

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

denklemini sağlıyorsa u fonksiyonuna D' de reel harmonik fonksiyon denir. Eğer, $u = u(x,y)$ ve $v = v(x,y)$ reel harmonik fonksiyonları xy-düzlemindeki bir D ' de bölgesini uv-düzleminde bir B bölgesine bire bir ve harmonik olarak dönüştürüyorsa, $f(z) = u(z) + iv(z)$ fonksiyonuna D' de kompleks değerli harmonik ünivalent fonksiyon denir. Buna göre, kompleks değerli harmonik ünivalent bir fonksiyon, reel ve imajiner kısımları reel harmonik olan ve bir bölgeyi bire bir harmonik olarak dönüştüren bir fonksiyondur. Bu fonksiyonlar analitik olmak zorunda olmadığından analitik ünivalent fonksiyonlar için geçerli olan bazı özellikler harmonik ünivalent fonksiyonlar için geçerli değildir. Örneğin analitik fonksiyonlar bileşke altında korunmasına rağmen, harmonik fonksiyonlar korunmaz. Yani, f harmonik φ analitik fonksiyonu için $f \circ \varphi$ harmonik olmasına rağmen, $\varphi \circ f$ fonksiyonunun harmonik olması gerekmez.

Analitik fonksiyonların sınıfı bir cebir oluşturmasına rağmen, harmonik fonksiyonların sınıfı oluşturmaz. Ayrıca bir harmonik yalınkat dönüşümün tersi de harmonik olmak zorunda değildir. Üstelik harmonik dönüşümlerin sınır davranışları konform dönüşüm denilen analitik yalınkat fonksiyonlardan çok daha karmaşıktır. Bununla birlikte, konform dönüşümlerin bilinen teorisi bir şekilde harmonik dönüşümlere taşınabilir (Duren, 2004). $\mathbb{C}$ kompleks düzleminde basit bağlantılı her hangi bir bölgede harmonik ünivalent dönüşümleri çalışmak yerine, birim diskte çalışmak genelliği bozmaz. Çünkü f, basit bağlantılı bir $\mathrm{D}\subset\mathbb{C}$ bölgesinden G bölgesi üzerine harmonik ünivalent bir dönüşüm ve φ de $\mathbb{U}=\{z:|z|<1\}$ açık birim diskini D bölgesi üzerine konform olarak resmeden bir dönüşümü ise $F=f\circ\varphi$, $\mathbb{U}$ diskini G üzerine resmeden harmonik ünivalent bir dönüşüm olur. Bu durumda esas dönüşüm ise $f=F\circ\varphi^{-1}$ biçimindedir.

$f=u+iv$ fonksiyonunu kompleks düzlemde bir B bölgesinde diferansiyellenebilir olsun.

$$J_f(z)=\begin{vmatrix} u_x(z) & v_x(z) \\ u_y(z) & v_y(z)\end{vmatrix}=u_x(z)v_y(z)-u_y(z)v_x(z)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun Jakobiyeni denir.

$z=x+iy$ olmak üzere

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}-i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}+i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

diferansiyel operatörleri yardımıyla $f(z)=u(z)+iv(z)$ fonksiyonu için

$$f_z=\frac{1}{2}(f_x-if_y)=\frac{1}{2}[(u_x+v_y)-i\ (u_y-v_x)],$$

ve

$$f_{\bar{z}}=\frac{1}{2}(f_x+if_y)=\frac{1}{2}[(u_x-v_y)+i\ (u_y+v_x)]$$

olup, f fonksiyonunun Jakobiyeni $J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2$ biçiminde yazılabilir. Eğer $f(z)$ fonksiyonu analitikse $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ olacağından $J_f(z) = |f'(z)|^2$ olur. Kompleks değerli bir $f(z)$ fonksiyonu için $\partial f / \partial \bar{z} = 0$ eşitliği Cauchy–Riemann denklemlerinin bir başka biçimde ifadesinden ibarettir. Gerekli hesaplamalar sonunda f fonksiyonunun Laplasyeni adı verilen $\Delta f = f_{xx} + f_{yy}$ ifadesinin

$$\Delta f = 4\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 f_{z\bar{z}}$$

olduğu görülür. Buna göre, "ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir f fonksiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter şart $f_{z\bar{z}} = 0$ veya $\partial f / \partial z$ fonksiyonunun analitik olmasıdır" sonucu çıkarılabilir.

Analitik bir f fonksiyonunun bir z noktasında yerel olarak ünivalent olması için gerek ve yeter şart $J_f(z) \neq 0$ olması bilinen bir sonuçtur. Lewy (1936), bu sonucun harmonik dönüşümler için de geçerli olduğunu gösterdi

Teorem 4.1 (Lewy Teoremi) : Kompleks değerli harmonik bir f fonksiyonu bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde yerel olarak ünivalent ise her $z \in D$ için $J_f(z)$ sıfırdan farklıdır. (Lewy, 1936).

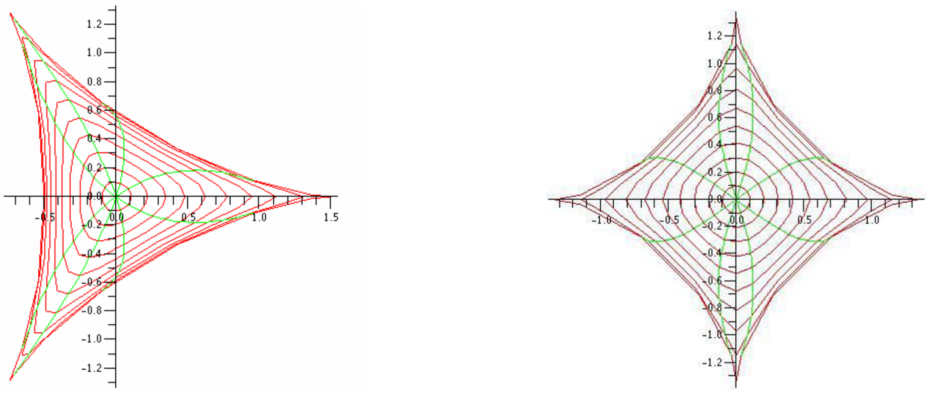
Lewy (1936)' nın bu sonucuna göre bir D bölgesinde ünivalent harmonik dönüşümler ya $J_f(z) > 0$ veya $|f_z(z)| > |f_{\bar{z}}(z)|$ olup yön koruyandır yada $J_f(z) < 0$ veya $|f_z(z)| < |f_{\bar{z}}(z)|$ olup yönü ters çevirendir. Eğer f yön koruyan ise $\bar{f}$ yönü ters çevirendir. Sonuç olarak $|f_z(z)| > |f_{\bar{z}}(z)|$ ise f yerel olarak ünivalent ve yön koruyan, $|f_z(z)| < |f_{\bar{z}}(z)|$ ise f yönü ters çeviren bir fonksiyondur. $J_f(z) > 0$ olduğu yerlerde $f(z) \neq 0$ olduğuna dikkat ediniz.

En basit ünivalent harmonik dönüşüm örneği $f(z) = \alpha z + \gamma + \beta \bar{z}$, $|\alpha| \neq |\beta|$ biçiminde konform olması gerekmeyen Afin dönüşümlerdir. Eğer bu dönüşümde $\gamma = 0$ ise Afin dönüşüm lineer olur. Bir Afin dönüşüm ile bir ünivalent harmonik dönüşümün bileşkesi yine bir harmonik dönüşüm olması önemli bir sonuçtur. Yani f ünivalent harmonik dönüşüm ise $\alpha f + \gamma + \beta \bar{f}$ de ünivalent harmonik dönüşümdür.

Diğer bir önemli örnek $\mathbb{U}$ açık birim dairesini $|w| = \frac{3}{2}$ çemberi ile çevrelenmiş üç uçlu bir eğrisel üçgen (hypocycloid) içine resmeden $f(z) = z + \frac{1}{2}\bar{z}^2$ fonksiyonudur (Şekil 3.1.a). Şimdi bu fonksiyonun ünivalent olduğunu gösterelim; $z_1,\ z_2 \in \mathbb{D}$ için

$$f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 + \tfrac{1}{2}\bar{z}_1^2 = z_2 + \tfrac{1}{2}\bar{z}_2^2 \Rightarrow 2(z_1 - z_2) = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)(\bar{z}_2 + \bar{z}_1)$$

olur. $|z_1 + z_2| < 2$ olduğundan son eşitlik ancak $z_1 = z_2$ olması durumunda geçerli olur. Benzer düşünce ile her $n \geq 2$ için $f(z) = z + \frac{1}{n}\bar{z}^n$ fonksiyonunun da ünivalent olduğu söylenebilir. Bu dönüşüm altında birim dairenin görüntüsü Matematica programı kullanılarak şekil 3.1.b de gösterilmiştir. Genelde bu dönüşüm altında $\mathbb{U}$ dairesinin resmi $|w| = (n+1)/n$ çemberi içinde kalan $n+1$ köşeli eğrisel üçgen (hypocycloid) tarafından sınırlandırılmıştır (Duren, 1984).



a) $n = 2$ b) $n = 3$

Şekil 3.1 Harmonik ünivalent dönüşümler.

Şimdi harmonik fonksiyonlar teorisinde oldukça önemli bir yere sahip olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4.2 (Kanonik Gösterim) : h ve g fonksiyonları basit bağlantılı bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. D ' de kompleks değerli harmonik bir f fonksiyonu $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ biçiminde bir gösterimine sahiptir. Bu gösterim sabit farkıyla tektir (Duren, 1984).

İspat. u ve v basit bağlantılı bir D bölgesinde harmonik fonksiyonlar olduğundan

$$u = \Re e F = \frac{F + \overline{F}}{2} \quad \text{ve} \quad v = \operatorname{Im} G = \frac{G - \overline{G}}{2i}$$

olacak şekilde D de analitik F ve G fonksiyonları vardır. Böylece

$$f = u + iv = \Re e F + i \operatorname{Im} G = \left(\frac{F + G}{2} \right) + \overline{\left(\frac{F - G}{2} \right)} = h + \overline{g}$$

elde edilir. $f = h + \overline{g}$ temsiline f fonksiyonunun kanonik temsili denilir.

Sonuç 4.3 : $\mathbb{U}$ birim dairesinde $f = h + \overline{g}$ fonksiyonunun yön koruyan olması için gerek ve yeter şart

$$J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2 = |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2 > 0$$

olmasıdır. Başka bir ifadeyle,

$$\frac{|g'(z)|}{|h'(z)|} < 1$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Clunie, 1984).

$\mathbb{U}$ diskinde h ve g analitik fonksiyonlarının seri açılımları

$$h(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad \text{ve} \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

olmak üzere $\mathbb{U}$ `da yön koruyan $f = h + \overline{g}$ harmonik yalınkat fonksiyonu için

$$|\, g'(z) \,| < |\, h'(z) \,|$$

dir. Bu durum $h'(z) \neq 0$ olduğunu gösterir. Bu yüzden $h(0) = 0$ ve $h'(0) = 1$ almak genelliği bozmayacaktır. Böylece $\mathbb{U}$ diskinde

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n} \tag{4.1}$$

özelliğinde yön koruyan harmonik yalınkat dönüşümlerinin H sınıfı oluşturulmuş olur. Buna göre H sınıfının, analitik yalınkat fonksiyonların bilinen S sınıfını kapsadığı açıktır.

Analitik fonksiyonlar için (3.1)` de verdiğimiz yıldızıllık şartı harmonik fonksiyonlarda ise aşağıdaki gibidir.

$f(z) \in H$ fonksiyonunun yıldızıl olması için gerek ve yeter şart
$0 < |z| < 1$ için,

$$\Re e \left\{ \frac{zh'(z) - \overline{zg'(z)}}{h(z) + \overline{g(z)}} \right\} > 0$$

olmasıdır. Bu tip $f(z) \in H$ fonksiyonlarının sınıfı H^* ile gösterilir. Yine aynı şekilde analitik fonksiyonlar için (3.2)` de verdiğimiz konvekslik şartı harmonik fonksiyonlarda aşağıdaki gibidir.
$f(z) \in H$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter şart
$|z| < 1$ için ,

$$\Re e\left\{\frac{z^2h''(z)+zh'(z)+\overline{z^2g''(z)+zg'(z)}}{zh'(z)-\overline{zg'(z)}}\right\}>0$$

olmasıdır. Bu tip $f(z)\in H$ fonksiyonlarının sınıfı H_K ile gösterilir.

4.1. HARMONİK FONKSİYONLAR İÇİN SALAGEAN OPERATÖRÜ VE BAZI ÖZEL SINIFLARI

Tanım 4.1.1 : Salagean (1981) tarafından analitik fonksiyonlar için tanımlanan Salagean operatörü harmonik fonksiyonlara ilk defa Jahangiri tarafından 2002 yılında aşağıdaki biçimde uyarlanmıştır.

$\mathbb{U}$ birim diskinde harmonik $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ fonksiyonu için Salagean operatörü

$$D^\circ f(z)=f(z)=h(z)+\overline{g(z)} \qquad , \qquad Df(z)=Dh(z)-\overline{Dg(z)}=zh'(z)-\overline{zg'(z)}$$

ve $n=2,3,\ldots$ için;

$$D^n f(z)=D^nh(z)+(-1)^n\overline{D^ng(z)} \tag{4.2}$$

$$D^nh(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}k^na_kz^k \qquad , \qquad D^ng(z)=\sum_{k=1}^{\infty}k^nb_kz^k$$

olmak üzere

$$D^n f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}k^na_kz^k \quad +(-1)^n\overline{\sum_{k=1}^{\infty}k^nb_kz^k}$$

biçiminde tanımlanır (Jahangiri vd., 2002).

Tanım 4.1.2 : Salagean (1983), Abdul Halim (1992) ve Darus (2004) tarafından çalışılan sınıflar;

- $S_o = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} : \Re e\left\{ \dfrac{f(z)}{z} \right\} > 0,\ z \in \mathbb{U} \right\}$
- $\mathcal{B}(\alpha) = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} : \Re e\left\{ \dfrac{f(z)}{z} \right\} > \alpha, 0 \le \alpha < 1,\ z \in \mathbb{U} \right\}$
- $\delta(\alpha) = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} : \Re e\{ f'(z) \} > \alpha, 0 \le \alpha < 1,\ z \in \mathbb{U} \right\}$
- $\mathcal{B}_n(\beta) = \left\{ f(z) \in \mathcal{A} : \Re e\left\{ \dfrac{D^n f(z)^\beta}{z^\beta} \right\} > 0,\ z \in \mathbb{U}, n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}, \beta > 0 \right\}$

dır.

Opoola (1994);

$$\Re e\left\{ \frac{D^n f(z)^\beta}{z^\beta} \right\} > \alpha \ , \quad z \in \mathbb{U}, n \in \mathbb{N}_0, \beta > 0\ , 0 \le \alpha < 1 \tag{4.3}$$

koşulunu sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu $\mathcal{T}_n^\beta(\alpha)$ sınıfını tanımlamıştır.

Al-Shaqsi vd. (2010) S_o, $\mathcal{B}(\alpha)$, $\delta(\alpha)$, $\mathcal{B}_n(\alpha)$ fonksiyonlarının geneli olan $\mathcal{T}_n^\beta(\alpha)$ üzerinde çalışmışlardır. Burada h ve g ,

$$h(z)^\beta = z^\beta + \sum_{k=2}^{\infty} \beta a_k z^{\beta+k-1} \quad , \quad g(z)^\beta = \sum_{k=2}^{\infty} \beta b_k z^{\beta+k-1} \tag{4.4}$$

olmak üzere;

$$f(z)^\beta = h(z)^\beta + \overline{g(z)^\beta} \tag{4.5}$$

dır. $f(z)^{\beta}$ ' nın Salagean operatörü ise;

$$D^n f(z)^{\beta} = D^n h(z)^{\beta} + (-1)^n \overline{D^n g(z)^{\beta}}$$

$$D^n h(z)^{\beta} = z^{\beta} + \sum_{k=2}^{\infty} \beta k^n a_k z^{\beta+k-1} \tag{4.6}$$

$$D^n g(z)^{\beta} = \sum_{k=2}^{\infty} \beta k^n b_k z^{\beta+k-1}$$

dır. (Al-Shaqsi vd., 2010)

Al-Shaqsi vd. (2010) $D^n f(z)^{\beta}$ (4.6) ile tanımlı olmak üzere

$$\Re e\left\{\frac{D^{n+1} f(z)^{\beta}}{D^n f(z)^{\beta}}\right\} > \alpha \quad z \in \mathbb{U}, n \in \mathbb{N}_0, \beta \geq 1, 0 \leq \alpha < 1 \tag{4.7}$$

şartını sağlayan (4.5) formundaki harmonik fonksiyonların ailesi olarak $\mathcal{H}(n,\beta,\alpha)$ sınıfını tanımlamışlardır. $\mathcal{H}(n,\beta,\alpha)$ sınıfı H sınıfının iyi bilinen altsınıflarını içerir. Mesela $\mathcal{H}(0,1,\alpha) \equiv H^*(\alpha)$ sınıfı $\mathbb{U}$ birim diskinde

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg f(re^{i\theta})\right\} > \alpha$$

şartını sağlayan α- yıldızıl harmonik ünivalent ve yön koruyan f fonksiyonlarının bir sınıfıdır ve yine aynı şekilde

$\mathcal{H}(1,1,\alpha) \equiv H_K(\alpha)$ sınıfı $\mathbb{U}$ birim diskinde

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\arg \frac{\partial}{\partial\theta} f(re^{i\theta})\right\} > \alpha$$

şartını sağlayan α - konveks harmonik ünivalent ve yön koruyan f fonksiyonlarının sınıfıdır. (Khalifa vd., 2010)

$H^*(\alpha)$ ve $H_K(\alpha)$ sınıfları Jahangiri (1999) tarafından çalışılmıştır.

Tanım 4.1.3 : Rosy vd. (2001) aşağıdaki koşulu sağlayan $f(z)$ harmonik ünivalent fonksiyonların oluşturduğu $G_H(\gamma) \subset H$ sınıfını tanımlamıştır :

$$\Re e\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)} - e^{i\alpha}\right\} > \gamma \qquad , \quad \alpha \in \mathbb{R} \tag{4.8}$$

Dixit vd. (2009) bu çalışmalarında Rosy vd. (2001) çalışmalarından yararlanarak (4.8)'i geliştirerek $D^k f$ (4.2) formunda olmak üzere ;

$$\Re e\left\{\left(1+pe^{i\alpha}\right)\frac{D^{k+q} f(z)}{D^k f(z)} - pe^{i\alpha}\right\} > \gamma \qquad , \; 0 \le \gamma \le 1, \; \alpha \in \mathbb{R}, \; p \ge 0 \; , \; q \in \mathbb{N}_0 \tag{4.9}$$

koşulunu sağlayan (4.1) formundaki fonksiyonların sınıfı olarak $R_H(k,\gamma,p,q)$ sınıfını tanımlamışlardır.

Teorem 4.1.4 : $f = h + \overline{g}$ (4.1) ile verilen fonksiyon olsun. Eğer $a_1 = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$, $0 \le \gamma \le 1, \; p \ge 0$, $q \in \mathbb{N}$ için;

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left\{n^q (p+1) - (\gamma+p)\right\}|a_n| + \sum_{n=1}^{\infty} n^k \left\{n^q (p+1) - (-1)^q (\gamma+p)\right\}|b_n| \le 2(1-\gamma)$$

ise f , $\mathbb{U}$'da harmonik ünivalent ve yön koruyan fonksiyondur ve $f \in R_H(k,\gamma,p,q)$ dır (Dixit vd., 2009).

4.2. HARMONİK FONKSİYONLAR İÇİN RUSCHEWEYH OPERATÖRÜ VE BAZI ÖZEL SINIFLARI

Tanım 4.2.1 : $f = h + \overline{g} \in H$ (4.1) formunda olsun. Bu takdirde f ' in Ruscheweyh türevi;

$$C(\lambda,k) = \begin{pmatrix} k+\lambda-1 \\ \lambda \end{pmatrix}$$ için;

$$D_\lambda^n h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} k^n C(\lambda,k) a_k z^k \qquad D_\lambda^n g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k^n C(\lambda,k) b_k z^k$$

olmak üzere,

$$D_\lambda^n f(z) = D_\lambda^n h(z) + (-1)^n \overline{D_\lambda^n g(z)} \quad n,\lambda \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{U}$$

dir. Şimdi bu operatör ile çalışılmış sınıf örneği verelim.

Tanım 4.2.2 : $f \in \mathrm{H}$ fonksiyonlarından oluşan S. Juma (2007) tarafından $\mathrm{AS_H}(\lambda,\alpha,k,\gamma)$ yeni bir sınıf tanımlanmıştır. Burada,

$z = re^{i\theta}$ için ; γ , α , θ , $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \gamma < 1$, $0 \le r < 1$, $0 \le k < 1$ olmak üzere

$$\Re e\left\{ \left(1 + ke^{i\gamma}\right) \frac{z^2\left(D^\lambda h(z)\right)'' + z\left(D^\lambda h(z)\right)' + \overline{z^2\left(D^\lambda g(z)\right)'' + z\left(D^\lambda g(z)\right)'}}{z\left(D^\lambda h(z)\right)' - \overline{z\left(D^\lambda g(z)\right)'}} + 1 \right\} \ge \alpha$$

(4.10)

koşulu sağlanıyorsa $f \in \mathrm{AS_H}(\lambda,\alpha,k,\gamma)$ dir.

$D^\lambda f(z)$, f fonksiyonunun ruscheweyh türevi, $\lambda > -1$ için;

$$\mathrm{B}_n(\lambda) = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)...(\lambda+n-1)}{(n-1)!} \quad \text{olmak üzere,}$$

$$D^{\lambda} h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n(\lambda) \mathrm{c}_n z^n$$

dır. Aynı zamanda

$$D^{\lambda} f(z) = D^{\lambda} h(z) + (-1)^{\lambda} \overline{D^{\lambda} g(z)} \tag{4.11}$$

şeklinde gösterilebilir (S. Juma, 2007).

Teorem 4.2.3 : $f = h + \overline{g}$ ve $f \in \mathrm{H}$ olmak üzere,
$a_1 = 1$ ve $0 \leq \alpha < 1$, $\lambda > -1$, $0 \leq k < 1$ için;

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n(n(1+k)+(1-\alpha))}{2-\alpha+k} |a_n| + \frac{n(n(1+k)-(1-\alpha))}{2-\alpha+k} |b_n| \right) \mathrm{B}_n(\lambda) \leq 2 \quad , \quad \mathrm{B}_n(\lambda) \leq 2 \tag{4.12}$$

olsun. Bu takdirde f, $\mathbb{U}$'da harmonik ünivalent fonksiyondur ve $f \in \mathrm{AS_H}(\lambda, \alpha, k, \gamma)$ dır.

4.3. HARMONİK FONKSİYONLAR İÇİN SAKAGUCHİ OPERATÖRÜ VE BAZI ÖZEL SINIFLARI

Tanım 4.3.1. Simetrik noktaya göre harmonik yıldızıl fonksiyonlar sınıfı benzer şekilde tanımlanabilir. Bu durumda $f = h + \overline{g}$ harmonik fonksiyonu

$$\mathcal{R}e\left\{ \frac{2(zf_z(z) - \overline{zf_{\bar{z}}(z)})}{f(z) - f(-z)} \right\} > 0$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f = h + \overline{g}$ fonksiyonuna simetrik noktaya göre harmonik yıldızıl fonksiyon denir.

$$h(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \ , \ g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k$$

olmak üzere $f = h + \overline{g}$ fonksiyonları için

$$\Re e\left\{\frac{zf'(z)}{f(z) - f(-z)}\right\} > \alpha \quad , \quad 0 \le \alpha < \frac{1}{2} \ , \ z \in \mathbb{U} \tag{4.13}$$

biçiminde genişletilmiştir.

Salagean oparatörü gibi Sakaguchi tarafından tanımlanan bu operatörler farklı çalışmalara zemin hazırlamıştır. Bu operatörler yardımıyla yeni operatörler ve harmonik fonksiyonların yeni alt sınıfları tanımlanmış ve çalışılmıştır. Şimdi bunlardan bir örnek vereceğiz.

Tanım 4.3.2 : Güney (2007) tarafından bildirildiğine göre Ahuja ve Jahangiri (2004),

$z = re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$ ve $0 \le \theta < 2\pi$ için;

$$\operatorname{Im}\left(\frac{2\frac{\partial}{\partial\theta} f\left(re^{i\theta}\right)}{f\left(re^{i\theta}\right) - f\left(-re^{i\theta}\right)}\right) \ge \alpha$$

şartını sağlayan (4.1)formundaki harmonik yıldızıl, kompleks değerli, yön koruyan $f \in H$ fonksiyonların sınıfını $SH(\alpha)$ olarak ifade etmişlerdir. Güney (2007) , $SH(\alpha)$ sınıfı üzerinde h ve g fonksiyonlarını ;

$$h(z)=z-\sum_{m=2}^{\infty}a_m z^m \quad , \quad g(z)=\sum_{m=1}^{\infty}b_m z^m \quad , \quad a_{m,}b_m \geq 0 \tag{4.14}$$

formunda alarak $FH(\alpha)\subset SH(\alpha)$ altsınıfını tanımlamıştır.

Teorem 4.3.3 : h ve g (4.1)tipinde olmak üzere, $f=h+\overline{g}$ harmonik fonksiyonu, $a_1=1$ ve $0\leq\alpha<1$ için;

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\begin{pmatrix}2(n-1)\\1-\alpha\end{pmatrix}\left(|a_{2n-2}|+|b_{2n-2}|\right)+\begin{pmatrix}2n-1-\alpha\\1-\alpha\end{pmatrix}|a_{2n-1}|+\begin{pmatrix}2n-1+\alpha\\1-\alpha\end{pmatrix}|b_{2n-1}|\right\}\leq 2 \tag{4.15}$$

şartını sağlasın. Bu takdirde f , $\mathbb{U}$ 'da yön koruyan harmonik ünivalent fonksiyondur ve $f\in FH(\alpha)$ dır.

KAYNAKLAR

Ahuja , Om P. ve Jahangiri , J. M, “Sakaguchi-typeharmonic univalent functions”, ***Scientiae Math.Japonica,*** 59 (1): 239-244 (2004)

Al-Shaqsi, K., Darus, M. and Fadipe-Joseph, O. A.,“A new subclass of salagean type harmonic univalent functions”, ***Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis***, 2 (1): 81-92 (2010)

Clunie, J. and Sheil-Small, T., “Harmonic univalent functions”, ***Ann. Acad.Sci.Fenn. Ser. A IMath.,*** 9:3–25 (1984)

Darus, M., “Fekete-Szego functional for functions in $\beta_n(\beta)$”, ***Institute of Mathematics & Computer Sciences. Mathematics Series***, 17 (2) : 129-135 (2004)

Dixit, K. K., Pathak, A. L., Porwal, S. andAgarwal, R., “ A new subclass of harmonic univalent functions defined by salagean operator”, ***Int. J. Contemp. Math*. Sciences**, 4 (8): 371-383 (2009)

Duren, P., “Harmonic Mappings in The Plane”, ***Cambridge University Pres***, Cambridge, USA, 212 (2004)

Eker Sümer, S. and Owa, S., “Certain classes of analytic functions involving the Salagean Operator”, ***Journal of Inequalities in Pure and Applied Math.,*** 10 (1): 22 (2008)

Güney, H. Ö., “Sakaguchi- type Harmonic univalent functions with negative coefficients”***, Int. J. Contemp. Math. Sci,*** 2 (10): 459-463 (2007)

Halim, S. A., “ On a class of analytic functions involving the salagean differantial operator”, ***Tamkang journal of Mathematics***.***,*** 23 (1): 51-58 (1992)

Hams, S. S, Kulkarni, S. R. and Jahangiri, J. M., “ Classes of uniformly starlike and convex functions”, ***Journal of Inequalities and Applications***, 55: 2959-2961 (2004)

Lewy, H., “ On the non-vanishing of the Jacobian in certain one-to-one mappings”, ***Bull. Amer. Math. Soc***. 42: 689-692, (1936)

Opoola , T. O., “On a new subclass of univalent functions ”, ***Mathematica***, 36 (56): 195-200 (1994)

Owa, S., Sekine, T. and Yamakawa, R., “ Notes on Sakaguchi type functions”, ***Kokyuroku*** 1414 : 76-82 (2005)

Owa, S., Sekine, T. and Yamakawa, R., " On Sakaguchi type functions", ***Applied mathematics and Computation***, 187 (1): 356-361 (2007)

Pommerenke, Ch., "Univalent Functions", ***Vandenhoeck and Ruprecht Company***, Göttingen, Berlin, 376 (1975)

Ponnusamy, S., Rasila, A., "Planar Harmonic Mappings", ***Mathematic Newsletter.***, 17: 40-57 (2007)

Rosy, T., Adolph Stephen, B. and K.G. Subramanian, "Goodman Ronning type harmonic univalent functions", ***Kyungpook Math. J.,*** 41: 45–54 (2001)

Rusceheweyh, St., "New criteria for univalent functions**", Proc. Amer. Math. Soc,** 49 :109-115 (1975)

Sakaguchi, K., "On a certain univalent mapping.", ***J. Math. Soc. Japan.***, 11 (1): 72-75 (1959)

Salagean, G. S, " Subclasses of univalent functions", ***Part 1, Complex analysis - Proc.5th Rom.-Finn. Semin. Lect. Notes Math.,*** Bucharest, 1013: 362–372 (1983)

Shams, S., Kulkarni, S. R and Jahangiri, J. R, "Classes of uniformly starlike and convex functions", ***Internat. J. Math. Math. Sci.,***55 : 2959–2961 (2004)

Şeker, B., "Harmonik yalınkat ve harmonik çok katlı fonksiyonların bazı altsınıfları", Doktora Tezi, ***Dicle Üniversitesi*** , Diyarbakır, 2-12 (2008)

ÖZGEÇMİŞ

Tuğba YEĞİN 1988 yılında Karabük'te doğdu; ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı. Demir Çelik Lisesi'nden mezun oldu. 2005 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenime başlayıp 2009 yılında iyi derece ile mezun oldu. 2009 yılında Sakarya Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü'nde formasyon eğitimine (tezsiz yüksek lisans) başlayıp 2010 yılında iyi derece ile mezun oldu 2010 yılında Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda başlamış olduğu yüksek lisans programını tamamladı.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Balıklarkayası Mevkii / KARABÜK

Tel : (542) 459 1391
E-posta : t_ygn@windowslive.com