DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK DEĞİŞKEN KATSAYILI KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEM ÇÖZÜMÜ

2013
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

Uğur İLTER

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK DEĞİŞKEN KATSAYILI KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEM ÇÖZÜMÜ

Uğur İLTER

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

KARABÜK
Ocak 2013

Uğur İLTER tarafından hazırlanan "DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK DEĞİŞKEN KATSAYILI KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEM ÇÖZÜMÜ" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ ....
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ ....
Tez Danışmanı, Bülent Ecevit Üniversitesi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 09/01/2013

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan: Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr.Hakan BOSTANCI (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr.Mustafa YILDIZ (BEÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr.Mustafa ERER (KBÜ)	....

....../....../2013

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nizamettin KAHRAMAN ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Uğur İLTER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK DEĞİŞKEN KATSAYILI KOMPLEKS KISMİ TÜREVLİ DENKLEM ÇÖZÜMÜ

Uğur İLTER

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ
Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ
Ocak 2013, 50 sayfa

Bu tezde, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak lineer ve lineer olmayan, sabit ve değişken katsayılı kompleks denklemler çözüldü. Bunu yaparken denklemler reel ve imajiner kısımlarına ayrılarak kısmi türevli denklem sistemi elde edildi. Bu sistemin çözümünden istenen fonksiyonun reel ve imajiner kısımları elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler **:** Diferansiyel dönüşüm metodu, kompleks denklem.
Bilim Kodu **:** 204.1.138

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

TRANSFORM METHOD FOR USING DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH VARIABLE COEFFICIENTS OF COMPLEX PARTIAL SOLUTION

Uğur İLTER

Karabük University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assist. Prof. Dr. Murat DÜZ
Assist. Prof. Dr. Mustafa YILDIZ

January 2013, 50 pages

In this thesis, using two dimensional differential transform method of linear and non-linear, complex equations with constant and variable coefficients is solved. To solve these equations, ıt is obtained partial equatıon system by seperating real and imaginary parts of these equations.It is obtained real and imaginary parts of the desired function which is the solutıon of this system.

**Key Word : ** Differential transform method, complex equation.
Science Code : 204.1.138

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Yrd.Doç. Dr. Murat DÜZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca BEÜ öğretim üyesi Yrd.Doç.Dr. Mustafa YILDIZ'a , KBÜ öğretim üyelerine ve tüm desteğinden dolayı eşim Esra İLTER'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$y(x)$	: başlangıç fonksiyonu
$Y(k)$	: dönüşüm fonksiyonu
$\frac{d^k}{dx^k}$	: x'e göre k. türevi
$U(k)$	: $u(x)$'in diferansiyel dönüşümü
$V(k)$	: $v(x)$'in diferansiyel dönüşümü
$W(k,h)$	: ters diferansiyel dönüşümü $w(x,y)$
$\bar{z}$	: z'nineşleniği
$\sum$	: toplam sembolü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Diferansiyel dönüşüm metodu diferansiyel denklemleri ya da diferansiyel denklem sistemlerini çözmek için kullanılan sayısal bir metoddur. Diferansiyel dönüşüm methodu teknik problemlerin çözümünde kullanılan bazı önemli uygulamalar sebebiyle son zamanlarda bilim adamların ilgisini çekmiştir.

Diferansiyel dönüşüm konusu ilk olarak Zahou tarafından ortaya atıldı [1]. Zahou bu metodu kullanarak lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemlere uygulamıştır. Bir boyutlu diferensiyel dönüşüm metodu kullanarak Chen ve Shing Huei Ho özdeğer problemlerini çözmek için kullandı.Daha sonra Chen ve Shing Huei Ho bu metodu kısmi türevli denklemler için geliştirdi [2]. Lineer ve lineer olmayan kapalı form seri çözümlerini elde etti.

İki boyutlu diferansiyel dönüşüm olarak adlandırılan dönüşüm metodu yüksek mertebeli Taylor serisi metodundan farklıdır. Bu metod başlangıç değeri kullanarak çözümün Taylor serisinin katsayılarının hesaplanmasından oluşan bir metoddur. Fakat Taylor serisi metodu büyük mertebeler için çok daha fazla hesaplama gerektirir. Jang bu metodun diferansiyel denklemlerin Taylor serisini çözümlerini elde etmek için iteratif bir metod olduğunu ifade eder. Bu metod hesaplamanın boyutunu indirger ve bir çok probleme uygulanabilir.

BÖLÜM 2

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

2.1. BİR BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

$y(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0} \tag{2.1}$$

ki burada $y(x)$ başlangıç fonksiyonu ve $Y(k)$ dönüşüm fonksiyonudur.

Burada $\frac{d^k}{dx^k}$, x'e göre k. mertebeden türevi gösterir. $Y(k)'$ nın ters diferansiyel dönüşümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır.

(2.1) ve (2.2) yi birleştirerek

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right] x^k{}_{x=0} \tag{2.3}$$

elde ederiz.

(2.1) ve (2.2) deki temel matematik işlemlerinin yardımı ile aşağıdaki teoremler elde edilir. $U(k)$, $u(x)$'in diferansiyel dönüşümü, $V(k)$ da $v(x)$'in diferansiyel dönüşümü olmak üzere;

Teorem 2.1: $y(x) = u(x) \pm v(x)\ ise\ \ Y(k) = U(k) \pm V(k)$
olur [3].

Teorem 2.2: $y(x) = c.u(x)\ ise\ \ Y(k) = c.U(k)$
olur [3].

Teorem 2.3: $y(x) = \frac{d^r u(x)}{dx^r}$ ise $Y(k) = \frac{(k+r)!}{k!} U(k+r)$

olur [3].

Teorem 2.4: $y(x) = u(x).v(x)$

ise

$$Y(k) = U(k) \otimes V(k) = \sum_{r=0}^{k} U(r).V(k-r)$$

olur [3].

Teorem 2.5: $y(x) = x^n$ ise $Y(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & diğeri \end{cases}$

olur [3].

Teorem 2.6: $y(x) = x^n u(x)$ ise $Y(k) = U(k-n)$

olur [3].

2.2. İKİ BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

$w(x, y)$ fonksiyonunun diferensiyel dönüşümü

$$W(k, h) = \frac{1}{k!h!} \quad [\frac{\partial^{k+h} w(x,y)}{\partial x^k \partial y^h}]_{(0,0)} \tag{2.4}$$

fonksiyonu olarak tanımlanır.

$W(k, h)$ fonksiyonunun ters diferensiyel dönüşümü olarak

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k, h) x^k y^h \tag{2.5}$$

gösterilir.

(2.4) ve (2.5) den

$$w(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \quad [\frac{\partial^{k+h} w(x,y)}{\partial x^k \partial x^y}]_{(0,0)} x^k y^h \tag{2.6}$$

elde edilir.

Teorem 2.7: Eğer

$$w(x, y) = u(x, y) \pm v(x, y)$$

ise

$$W(k, h) = U(k, h) \pm V(k, h)$$

olur [2,4].

İspat :

$$U(k, h) = \frac{1}{k!\,h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}},$$

$$V(k, h) = \frac{1}{k!\,h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x, y) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$W(k, h) = \frac{1}{k!\,h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [u(x, y) + v(x, y)] \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$W(k, h) = \frac{1}{k!\,h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [u(x, y)] \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}} + \frac{1}{k!\,h!} \left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [v(x, y)] \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

olduğundan

$$W(k,h) = U(k,h) \pm V(k,h)$$

elde edilir [2].

Teorem 2.8: Eğer

$$w(x,y) = \alpha u(x,y)$$

ise

$$W(k,h) = \alpha U(k,h)$$

α sabittir [2,4].

İspat:

$$U(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$W(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [\alpha u(x,y)]\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$W(k,h) = \alpha \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} [u(x,y)]\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

ve buradan

$$W(k,h) = \alpha U(k,h)$$

olur [2].

Teorem 2.9: Eğer

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

ise

$$W(k,h) = (k+1)U(k+1,h)$$

olur [2,4].

İspat:

$$W(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right]\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{(k+1)}{(k+1)!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^{k+1}\partial y^{h}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= (k+1).\frac{1}{(k+1)!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^{k+1}\partial y^{h}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olur. Buradan

$$W(k,h) = (k+1)U(k+1,h)$$

eşitliği elde edilir [2].

Teorem 2.10: Eğer

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

ise

$$W(k,h) = (h+1)U(k,h+1)$$

olur [2,4].

İspat:

$$W(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^{k}\partial y^{h}}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{(h+1)}{k!\,(h+1)!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^{k}\partial y^{h+1}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{(h+1)}{k!\,(h+1)!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^{k}\partial y^{h+1}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= (h+1).\frac{1}{k!\,(h+1)!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^{k}\partial y^{h+1}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olur. Buradan

$$W(k,h) = (h+1)U(k,h+1)$$

eşitliği elde edilir [2].

Teorem 2.11: Eğer

$$w(x,y) = \frac{\partial^{r+s}u(x,y)}{\partial x^{r}\partial y^{s}}$$

ise

$W(k,h) = (k+1)(k+2) \ldots..(k+r)(h+1)(h+2) \ldots \ldots.(h+s)U(k+r,h+s)$

olur [2,4].

İspat:

$$W(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\left[\frac{\partial^{r+s}u(x,y)}{\partial x^r \partial y^s}\right]\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2) \ldots..(k+r)(h+1)(h+2) \ldots \ldots.(h+s)}{(k+r)!\,(h+s)!}\left[\frac{\partial^{k+h+r+s}}{\partial x^{k+r} \partial y^{h+s}} u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olur.Bu ise

$W(k,h) = (k+1)(k+2) \ldots..(k+r)(h+1)(h+2) \ldots \ldots.(h+s)U(k+r,h+s)$

olduğunu gösterir [2].

Teorem 2.12: Eğer

$$w(x,y) = u(x,y)v(x,y)$$

ise

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)V(k-r,s)$$

olur [2,4].

İspat: $w(x,y) = u(x,y)v(x,y)$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\ \left[\frac{\partial^{k+h}[u(x,y)v(x,y)]}{\partial x^k \partial y^h}\right]_{(0,0)}$$

tanımından

$$W(0,0) = \ [u(x,y)v(x,y)]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= U(0,0)V(0,0)$$

$$W(1,0) = \frac{1}{1!\,0!}\frac{\partial}{\partial x}[u(x,y)v(x,y)]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}v(x,y) + u(x,y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= U(1,0)V(0,0) + U(0,0)V(1,0)$$

$$W(2,0) = \frac{1}{2!\,0!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u(x,y)v(x,y)]_{\substack{x=0\\y=0}}$$
$$= U(2,0)V(0,0) + U(1,0)V(1,0) + U(0,0)V(2,0)$$

$$W(0,1) = U(0,1)V(0,0) + U(0,0)V(0,1)$$

$$W(1,1) = U(1,1)V(0,0) + U(1,0)V(0,1) + U(0,1)V(1,0) + U(0,0)V(1,1)$$

$$W(1,2) = U(1,2)V(0,0) + U(1,1)V(0,1) + U(1,0)V(0,2) + U(0,2)V(1,0) + U(0,1)V(1,1) + U(0,0)V(1,2)$$

$$W(0,2) = U(0,2)V(0,0) + U(0,1)V(0,1) + U(0,0)V(0,2)$$

$$W(2,1) = U(2,1)V(0,0) + U(2,0)V(0,1) + U(1,1)V(1,0) + U(1,0)V(1,1) + U(0,1)V(2,0) + U(0,0)V(2,1)$$

$$W(2,2) = U(2,2)V(0,0) + U(2,1)V(0,1) + U(2,0)V(0,2) + U(1,2)V(1,0) + U(1,1)V(1,1) + U(1,0)V(1,2) + U(0,2)V(2,0) + U(0,1)V(2,1) + U(0,0)V(2,2)$$

olur. Bu eşitlikleri genelleştirerek

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)V(k-r,s)$$

eşitliğini elde ederiz [2].

Teorem 2.13: Eğer

$$w(x,y) = x^m y^n$$

ise

$$W(k,h) = \delta(k-m,h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n)$$

dir. Burada

$$\delta(k-m,h-n)=\begin{cases}1, & k=m\ ve\ h=n\\ 0, & k\neq m\ ve\ h\neq n\end{cases}$$

olur [2,4].

İspat: Eğer

$$w(x,y)=x^m y^n$$

ise

$$\left[\frac{\partial w(x,y)^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=\begin{cases}k!\,h! & , \quad k=m\ ve\ h=n\\ 0 & , \quad k\neq m\ veya\ h\neq n\end{cases}$$

olduğundan

$$W(k,h)=\left[\frac{1}{k!\,h!}\frac{\partial w(x,y)^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$=\delta(k-m,h-n)=\delta(k-m)\delta(h-n)$$

$$\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$$

$$\delta(h-n)=\begin{cases}1, & h=n\\ 0, & h\neq n\end{cases}$$

olur [2].

Teorem 2.14: Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

ise

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)V(k-r+1,s)$$

dir [4,5].

İspat: $$W(0,0)=\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=U(1,0)V(1,0)$$

$$W(1,0) = \frac{1}{1!\,0!}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{1}{1!\,0!}\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= 2U(2,0)V(1,0) + 2U(1,0)V(2,0)$$

$$W(2,0) = \frac{1}{2!\,0!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= 3U(3,0)V(1,0) + 4U(2,0)V(2,0) + 3U(1,0)V(3,0)$$

$$W(0,1) = U(1,1)V(1,0) + U(1,0)V(1,1)$$

$$W(1,1) = 2U(2,1)V(1,0) + 2U(2,0)V(1,1) + 2U(1,1)V(2,0) + 2U(1,0)V(2,1)$$

$$\begin{aligned} W(2,2) = {} & 3U(3,2)V(1,0) + 3U(3,1)V(1,1) + 3U(3,0)V(1,2) + 4U(2,2)V(2,0) \\ & + 4U(2,1)V(2,1) + 4U(2,0)V(2,2) + 3U(1,2)V(3,0) \\ & + 3U(1,1)V(3,1) + 3U(1,0)V(3,2) \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri genelleştirerek

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)V(k-r+1,s)$$

olur [4,5].

Teorem 2.15: Eğer

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

ise

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+1)(s+1)U(r,h-s+1)V(k-r,s+1)$$

dir [4,5].

İspat: $$W(0,0)=\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}=U(0,1)V(0,1)$$

$$W(1,0)=\frac{1}{1!\,0!}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$
$$=\frac{1}{1!\,0!}\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$
$$=U(1,1)V(0,1)+U(0,1)V(1,1)$$

$$W(2,0)=\frac{1}{2!\,0!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$
$$=U(0,1)V(2,1)+U(1,1)V(1,1)+U(2,1)V(0,1)$$

$$W(0,1)=2U(0,2)V(0,1)+2U(0,1)V(0,2)$$

$$W(1,1)=\ 2U(0,2)V(1,1)+2U(0,1)V(1,2)+2U(1,2)V(0,1)+2U(1,1)V(0,2)$$

$$\begin{aligned}W(2,2)=\ &3U(0,3)V(2,1)+4U(0,2)V(2,2)+3U(0,1)V(2,3)+3U(1,3)V(1,1)\\&+4U(1,2)V(1,2)+3U(1,1)V(1,3)+3U(2,3)V(0,1)\\&+4U(2,2)V(0,2)+3U(2,1)V(0,3)\end{aligned}$$

Bu eşitlikleri genelleştirerek

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+1)(s+1)U(r,h-s+1)V(k-r,s+1)$$

olur [4,5].

Teorem 2.16: Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

ise

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)$$

olur [4].

İspat: $$W(0,0) = \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = U(1,0)V(0,1)$$

$$W(1,0) = \frac{1}{1!\,0!}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{1}{1!\,0!}\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= 2U(2,0)V(0,1) + U(1,0)V(1,1)$$

$$W(2,0) = \frac{1}{2!\,0!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= 3U(3,0)V(1,0) + 2U(2,0)V(1,1) + U(1,0)V(2,1)$$

$$W(0,1) = 2U(1,0)V(0,2) + U(1,1)V(0,1)$$

$$W(1,1) = 4U(2,0)V(0,2) + 2U(2,1)V(0,1) + 2U(1,0)V(1,2) + U(1,1)V(1,1)$$

$$\begin{aligned} W(2,2) = {} & 9U(3,0)V(0,3) + 6U(3,1)V(0,2) + 3U(3,2)V(0,1) + 6U(2,0)V(1,3) \\ & + 4U(2,1)V(1,2) + 2U(2,2)V(1,1) + 3U(1,0)V(2,3) \\ & + 2U(1,1)V(2,2) + U(1,2)V(2,1) \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri genelleştirerek

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)$$

olur [4].

BÖLÜM 3

3.1. KOMPLEKS DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

Bu kısımda $w = w(z, \bar{z})$ kompleks fonksiyonun birinci mertebeden türevlerini vereceğiz.

$w(z, \bar{z})$ fonksiyonunun z ve $\bar{z}$ değişkenlerine göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{3.2}$$

dir.

$$w(z, \bar{z}) = u(x, y) + iv(x, y)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \tag{3.4}$$

olduğundan

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{3.6}$$

elde edilir.

3.2. KOMPLEKS DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU İLE İLGİLİ TEOREMLER

Bu bölümde $w = w(z, \bar{z})$ fonksiyonunun ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri ile bu türevlerin diferansiyel dönüşümünü vereceğiz.

Teorem 3.1: $w(z, \bar{z})$ fonksiyonunun z ve $\bar{z}$ değişkenlerine göre
ikinci mertebeden türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{4}\Delta w \tag{3.9}$$

İspat:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{z}}\right) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}}\right) - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}} - \mathrm{i}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}^2} - \mathrm{i}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} - \mathrm{i}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} - \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}^2} - 2\mathrm{i}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} - \frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{y}^2}\right)$$

elde edilir. Benzer olarak (3.8) ve (3.9) eşitlikleri de elde edilebilir.

Teorem 3.2: $w(z, \bar{z})$ üçüncü mertebeden türevi aşağıdaki gibidir ;

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3i\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + i\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right) \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \bar{z}^3} = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + 3i\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - i\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right) \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \bar{z}^2 \partial z} = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} + i\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + i\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right) \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \bar{z} \partial z^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - i\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - i\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right) \tag{3.13}$$

İspat:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 2i\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}\right) - \frac{i}{8}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} - 2i\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} - 3i\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)$$

bulunur. Benzer olarak (3.11), (3.12) , (3.13) eşitlikleride bulunabilir.

Teorem 3.3: Eğer

$$w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

kompleks fonksiyonun diferansiyel dönüşümü $W_z(k, h)$ ise

$$W_z(k,h) = \frac{1}{2}[(k+1)U(k+1,h) + (h+1)V(k,h+1)]$$
$$+ \frac{i}{2}[(k+1)V(k+1,h) - (h+1)U(k,h+1)]$$

dir.

İspat : $w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ ve (3.6)' den

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]$$

ve böylece

$$W_z(k,h) = \frac{1}{2}[(k+1)U(k+1,h) + (h+1)V(k,h+1)]$$
$$+ \frac{i}{2}[(k+1)V(k+1,h) - (h+1)U(k,h+1)]$$

elde edilir.

Teorem 3.4: Eğer

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

kompleks fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$W_{\bar{z}}(k,h)$$

ise

$$W_{\bar{z}}(k,h) = \frac{1}{2}[(k+1)U(k+1,h) + (h+1)V(k,h+1)]$$
$$+\frac{i}{2}[(k+1)V(k+1,h) + (h+1)U(k,h+1)]$$

olur.

İspat : $\quad w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$

fonksiyonunun $\bar{z}$ değişkenine göre türevi (3.5) den

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

dir. Bu eşitliğin diferansiyel dönüşümünden

$$W_{\bar{z}}(k,h) = \frac{1}{2}[(k+1)U(k+1,h) - (h+1)V(k,h+1)]$$
$$+\frac{i}{2}[(k+1)V(k+1,h) + (h+1)U(k,h+1)]$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 3.5: Eğer

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

kompleks fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$W_{zz}(k,h)$$

ise

$$W_{zz}(k,h) = \frac{1}{4}[(k+1)(k+2)U(k+2,h) + 2(k+1)(h+1)V(k+1,h+1)$$
$$-(h+1)(h+2)U(k,h+2)]$$
$$+\frac{i}{4}[(k+1)(k+2)V(k+2,h) - 2(k+1)(h+1)U(k+1,h+1)$$
$$-(h+1)(h+2)V(k,h+2)]$$

dir.

İspat : $w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ ve (3.7) eşitliklerinden

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$

dir.Bu son eşitliğin diferansiyel dönüşümünden

$$\begin{aligned} W_{zz}(k,h) = \frac{1}{4}[&(k+1)(k+2)U(k+2,h) + 2(k+1)(h+1)V(k+1,h+1) \\ &- (h+1)(h+2)U(k,h+2)] \\ &+ \frac{i}{4}[(k+1)(k+2)V(k+2,h) - 2(k+1)(h+1)U(k+1,h+1) \\ &- (h+1)(h+2)V(k,h+2)] \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.6: Eğer

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

kompleks fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$W_{\bar{z}\bar{z}}(k,h)$$

ise

$$\begin{aligned} W_{\bar{z}\bar{z}}(k,h) = \frac{1}{4}[&(k+1)(k+2)U(k+2,h) - 2(k+1)(h+1)V(k+1,h+1) \\ &- (h+1)(h+2)U(k,h+2)] \\ &+ \frac{i}{4}[(k+1)(k+2)V(k+2,h) + 2(k+1)(h+1)U(k+1,h+1) \\ &- (h+1)(h+2)V(k,h+2)] \end{aligned}$$

olur.

İspat : $w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ ve (3.8) eşitliklerinden

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$

sonuç olarak

$$W_{\bar{z}\bar{z}}(k,h) = \frac{1}{4}[(k+1)(k+2)U(k+2,h) - 2(k+1)(h+1)V(k+1,h+1) - (h+1)(h+2)U(k,h+2)] + \frac{i}{4}[(k+1)(k+2)V(k+2,h) + 2(k+1)(h+1)U(k+1,h+1) - (h+1)(h+2)V(k,h+2)]$$

dır.

Teorem 3.7: Eğer

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

kompleks fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$W_{\bar{z}z}(k,h)$$

ise

$$W_{\bar{z}z}(k,h) = \frac{1}{4}[(k+1)(k+2)U(k+2,h) + (h+1)(h+2)U(k,h+2) + i(k+1)(k+2)V(k+2,h) + i(h+1)(h+2)V(k,h+2)]$$

dir.

İspat : $w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ ve (3.9) eşitliklerinden

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$

dir. Bu son eşitliğin diferansiyel dönüşümünden

$$W_{\bar{z}z}(k,h) = \frac{1}{4}[(k+1)(k+2)U(k+2,h) + (h+1)(h+2)U(k,h+2) + i(k+1)(k+2)V(k+2,h) + i(h+1)(h+2)V(k,h+2)]$$

elde edilir.

Teorem 3.8: Eğer

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ise

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3}$$

kompleks fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$W_{zzz}(k,h)$$

ise

$$\begin{aligned}W_{zzz}(k,h) = \frac{1}{8}[&(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3,h)\\ &- 3(k+1)(h+1)(h+2)U(k+1,h+2)\\ &+ 3(k+1)(k+2)(h+1)V(k+2,h+1)\\ &- (h+1)(h+2)(h+3)V(k,h+3)\\ &+ i(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3,h)\\ &- 3i(k+1)(h+1)(h+2)V(k+1,h+2)\\ &- 3i(k+1)(k+2)(h+1)U(k+2,h+1)\\ &+ i(h+1)(h+2)(h+3)U(k,h+3)]\end{aligned}$$

dir.

İspat: Eğer

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ve (3.10) eşitliğinden

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = \frac{1}{8}\left[\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u+iv) - 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}(u+iv) - 3i\frac{\partial^3}{\partial y \partial x^2}(u+iv) + i\frac{\partial^3}{\partial y^3}(u+iv)\right]$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = \frac{1}{8}\Bigg[&\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + 3\frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\\ &+ i\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)\Bigg]\end{aligned}$$

olur. Bu son elde ettiğimiz denklemin diferansiyel dönüşümünden

$$\begin{aligned}W_{zzz}(k,h) = \frac{1}{8}[&(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3,h)\\ &- 3(k+1)(h+1)(h+2)U(k+1,h+2)\\ &+ 3(k+1)(k+2)(h+1)V(k+2,h+1)\\ &- (h+1)(h+2)(h+3)V(k,h+3)\\ &+ i(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3,h)\\ &- 3i(k+1)(h+1)(h+2)V(k+1,h+2)\\ &- 3i(k+1)(k+2)(h+1)U(k+2,h+1)\\ &+ i(h+1)(h+2)(h+3)U(k,h+3)]\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.9: Eğer

$$w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

ise

$\frac{\partial^3 \mathrm{w}}{\partial \bar{\mathrm{z}}^3}$ kompleks fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$W_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}(k, h)$$

ise

$$\begin{aligned} W_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}(k, h) = \frac{1}{8}[&(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3, h) \\ &- 3(k+1)(h+1)(h+2)U(k+1, h+2) \\ &+ 3(k+1)(k+2)(h+1)V(k+2, h+1) \\ &- (h+1)(h+2)(h+3)V(k, h+3) \\ &+ i(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3, h) \\ &- 3i(k+1)(h+1)(h+2)V(k+1, h+2) \\ &- 3i(k+1)(k+2)(h+1)U(k+2, h+1) \\ &+ i(h+1)(h+2)(h+3)U(k, h+3)] \end{aligned}$$

İspat : $w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ ve (3.11) eşitliğinden

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \bar{z}^3} = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u + iv) - 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}(u + iv) + 3i\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}(u + iv) - i\frac{\partial^3}{\partial y^3}(u + iv)\right)$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = \frac{1}{8}\Bigg[&\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - 3\frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} \\ &+ i\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + 3\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)\Bigg] \end{aligned}$$

olur. Bu son elde ettiğimiz denklemin diferansiyel dönüşümünden

$$
\begin{aligned}
W_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}(k,h) = \frac{1}{8}[&(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3,h) \\
&- 3(k+1)(h+1)(h+2)U(k+1,h+2) \\
&- 3(k+1)(k+2)(h+1)V(k+2,h+1) \\
&+ (h+1)(h+2)(h+3)V(k,h+3) \\
&+ i(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3,h) \\
&- 3i(k+1)(h+1)(h+2)V(k+1,h+2) \\
&+ 3i(k+1)(k+2)(h+1)U(k+2,h+1) \\
&- i(h+1)(h+2)(h+3)U(k,h+3)]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Teorem 3.10:Eğer

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ise $\frac{\partial^3 w}{\partial \bar{z}^2 \partial z}$ kompleks fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$W_{\bar{z}\bar{z}z}(k,h)$$

ise

$$
\begin{aligned}
W_{\bar{z}\bar{z}z}(k,h) = \frac{1}{8}[&(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3,h) \\
&+ (k+1)(h+1)(h+2)U(k+1,h+2) \\
&- (k+1)(k+2)(h+1)V(k+2,h+1) \\
&- (h+1)(h+2)(h+3)V(k,h+3) \\
&+ i(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3,h) \\
&+ i(k+1)(h+1)(h+2)V(k+1,h+2) \\
&+ i(k+1)(k+2)(h+1)U(k+2,h+1) \\
&+ i(h+1)(h+2)(h+3)U(k,h+3)]
\end{aligned}
$$

dir.

İspat : $w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ ve (3.12) eşitliğinden

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \bar{z}^2 \partial z} = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u+iv) + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}(u+iv) + i\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}(u+iv) + i\frac{\partial^3}{\partial y^3}(u+iv)\right)$$

olur ve buradan

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = \frac{1}{8}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + i\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)\right]$$

olur. Bu son elde ettiğimiz denklemin diferansiyel dönüşümünden

$$W_{\bar{z}\bar{z}z}(k,h) = \frac{1}{8}[(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3,h)$$
$$+ (k+1)(h+1)(h+2)U(k+1,h+2)$$
$$- (k+1)(k+2)(h+1)V(k+2,h+1)$$
$$- (h+1)(h+2)(h+3)V(k,h+3)$$
$$+ i(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3,h)$$
$$+ i(k+1)(h+1)(h+2)V(k+1,h+2)$$
$$+ i(k+1)(k+2)(h+1)U(k+2,h+1)$$
$$+ i(h+1)(h+2)(h+3)U(k,h+3)]$$

elde edilir.

Teorem 3.11: Eğer

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ise $\frac{\partial^3 w}{\partial \bar{z} \partial z^2}$ kompleks fonksiyonun diferansiyel dönüşümü

$$W_{\bar{z}zz}(k,h)$$

ise

$$W_{\bar{z}zz}(k,h) = \frac{1}{8}[(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3,h)$$
$$+ (k+1)(h+1)(h+2)U(k+1,h+2)$$
$$+ (k+1)(k+2)(h+1)V(k+2,h+1)$$
$$+ (h+1)(h+2)(h+3)V(k,h+3)$$
$$+ i(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3,h)$$
$$+ i(k+1)(h+1)(h+2)V(k+1,h+2)$$
$$- i(k+1)(k+2)(h+1)U(k+2,h+1)$$
$$- i(h+1)(h+2)(h+3)U(k,h+3)]$$

dir.

İspat : $w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ ve (3.13) eşitliğinden

$$\frac{\partial^3 w}{\partial \bar{z} \partial z^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3}{\partial x^3}(u+iv) + \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}(u+iv) - i\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}(u+iv) - i\frac{\partial^3}{\partial y^3}(u+iv)\right)$$

olur ve buradan

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} = \frac{1}{8}\left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + i\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right)\right]$$

olur. Bu son elde ettiğimiz denklemin diferansiyel dönüşümünden

$$\begin{aligned} W_{\bar{z}zz}(k,h) = \frac{1}{8}[&(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3,h) \\ &+ (k+1)(h+1)(h+2)U(k+1,h+2) \\ &+ (k+1)(k+2)(h+1)V(k+2,h+1) \\ &+ (h+1)(h+2)(h+3)V(k,h+3) \\ &+ i(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3,h) \\ &+ i(k+1)(h+1)(h+2)V(k+1,h+2) \\ &- i(k+1)(k+2)(h+1)U(k+2,h+1) \\ &- i(h+1)(h+2)(h+3)U(k,h+3)] \end{aligned}$$

elde edilir.

BÖLÜM 4

UYGULAMALAR

Bu bölümde üçüncü bölümde verilen kompleks bir fonksiyonun kısmi türevlerinin diferansiyel dönüşümü yardımıyla kısmi türevli denklemler çözüldü.

ÖRNEK 4.1:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = 4$$

$$w(x,0) = 5x^2 + 3x + 2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,0) = i(2x-1)$$

Başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm:

$w = u + iv$, (3.9) eşitliğinden

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 4$$

olur. Bu eşitliğin reel ve imajiner kısımlarının eşitliğinden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 16$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

elde edilir. Bu eşitliklerin diferansiyel dönüşümünden

$$(k+1)(k+2)U(k+2,h) + (h+1)(h+2)U(k,h+2) = 16\delta(k,h) \tag{4.1}$$

$$(k+1)(k+2)V(k+2,h) + (h+1)(h+2)V(k,h+2) = 0 \tag{4.2}$$

elde edilir.

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} W(k,h)x^k y^h$$

ve

$$w(x,0) = 5x^2 + 3x + 2$$

olduğundan

$U(0,0) = 2, U(1,0) = 3, U(2,0) = 5, U(i,0) = 0(i = 3,4,5,\dots),$

$V(i,0) = 0(i = 0,1,2,\dots)$ (4.3)

elde edilir.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} W(k,h)x^k y^{h-1}$$

ve

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,0) = i(2x-1)$$

olduğundan

$V(0,1) = -1, V(1,1) = 2, V(i,1) = 0(i = 2,3,4,\dots), U(i,1) = 0(i = 0,1,2,\dots)$

(4.4)

bulunur.

(4.1) eşitliğinde $h = 0$ yazılırsa

$(k+1)(k+2)U(k+2,0) + 2U(k,2) = 16\delta(k,0)$ (4.5)

olur.

(4.5) eşitliğinde $k = 0$ yazılırsa $2U(2,0) + 2U(0,2) = 16$, $U(2,0) = 5$ olduğundan $U(0,2) = 3$ elde edilir.

(4.3) de $k \geq 1$ için $U(k+2,0) = 0$ olduğundan (4.1.5) den $k \geq 1$ için

$U(k,2) = 0$ (4.6)

olur.

Benzer biçimde (4.1) da $h = 2$ yazılırsa

$$(k+1)(k+2)U(k+2,2) + 12U(k,4) = 0$$

(4.6) den dolayı $\forall\, k \geq 1$ için $U(k,4) = 0$ olur.Bu işlemler devam ettirilerek $\forall\, k \geq 1$ için $U(k,2n) = 0$ elde edilir.

(4.1) eşitliğinde $h = 1$ yazılırsa

$(k+1)(k+2)U(k+2,1) + 6U(k,3) = 0$ (4.7)

olur.

(4.4) dan $\forall\, k \geq 1$ için $U(k,1) = 0$ olduğundan

$U(k,3) = 0$ (4.8)

elde edilir.

Benzer biçimde (4.1) da $h = 3$ yazılırsa

$(k+1)(k+2)U(k+2,3) + 20U(k,5) = 0$ (4.9)

olur.

(4.8) ve (4.9) eşitliklerinden $\forall\, k \geq 1$ için $U(k,5) = 0$ elde edilir.Bu işlemlere devam edilerek $\forall\, k \geq 1$ için $U(k,2n+1) = 0$ elde edilir.O halde

$$U(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$
$$= U(0,0) + U(1,0)x + U(2,0)x^2 + U(0,2)y^2$$
$$= 2 + 3x + 5x^2 + 3y^2$$

olur.

(4.2) eşitliğinde $h = 0$ yazılırsa

$$(k+1)(k+2)V(k+2,0) + 2V(k,2) = 0$$

(4.3) dan $\forall\, k$ için $V(k,0) = 0$ olduğundan

$V(k,2) = 0$ (4.10)

olur.

(4.2) eşitliğinde $h = 2$ yazılırsa

$$(k+1)(k+2)V(k+2,2) + 12V(k,4) = 0$$

(4.10) den $V(k+2,2) = 0$ olduğundan

$V(k,4) = 0$ (4.11)

olur.

Bu işlemlere devam edilerek $\forall\, n \varepsilon N^+$ için

$V(k,2n) = 0$ (4.12)

elde edilir.

(4.2) eşitliğinde $h = 1$ yazılırsa

$$(k+1)(k+2)V(k+2,1) + 6V(k,3) = 0$$

olur.

(4.4) dan $\forall\, k \geq 0$ için $V(k+2,1) = 0$ olduğundan

$$V(k,3) = 0 \tag{4.13}$$

olur.

(4.2) eşitliğinde $h = 3$ yazılırsa

$$(k+1)(k+2)V(k+2,3) + 20V(k,5) = 0$$

(4.13) den $V(k+2,3) = 0$ olduğundan $V(k,5) = 0$ olur.

Bu işlemlere devam edilerek $\forall\, k \geq 0$ için $V(k, 2n+3) = 0$ elde edilir.O halde

$$\begin{aligned} V(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V(k,h)x^k y^h \\ &= V(0,1)y + V(1,1)xy \\ &= -y + 2xy \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} W(x,y) &= U(x,y) + iV(x,y) \\ &= 5x^2 + 3y^2 + 3x + 2 + i(2xy - y) \\ &= 4x^2 + 4y^2 + x^2 - y^2 + 2ixy + 2x + 2 + x - iy \\ &= 4|z|^2 + z^2 + z + \bar{z} + 2 + \bar{z} \\ &= 4z\bar{z} + z^2 + z + 2\bar{z} + 2 \end{aligned}$$

bulunur.

ÖRNEK 4.2:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+3\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=12z+18\bar{z}+9$$

$$w(x,0)=2x^3+3x^2+8x$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,0)=i(6x^2-6x+2)$$

Başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm:

$w=u+iv$, (3.7) ve (3.5) eşitlikleri kullanılarak

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2i\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+i\frac{\partial w}{\partial y}\right)=12(x+iy)+18(x-iy)+9$$

$$\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2i\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}\right)-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right]+\frac{3}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)$$
$$=30x+9-6iy$$

olur.Bu eşitliğin reel ve imajiner kısımlarına ayrılarak

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial v}{\partial y}\right)=30x+9$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+6\frac{\partial v}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-6y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+6\frac{\partial u}{\partial x}-6\frac{\partial v}{\partial y}=120x+36$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+6\frac{\partial v}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=-24y$$

elde edilir.Bu eşitliklerin diferansiyel dönüşümünden

$$(k+1)(k+2)U(k+2,h)+2(k+1)(h+1)V(k+1,h+1)-(h+1)$$
$$(h+2)U(k,h+2)+6(k+1)U(k+1,h)-6(h+1)V(k,h+1)=$$
$$120\delta(k-1,h)+36\delta(k,h) \tag{4.14}$$

$$(k+1)(k+2)V(k+2,h)-2(k+1)(h+1)U(k+1,h+1)-(h+1)$$
$$(h+2)V(k,h+2)+6(k+1)V(k+1,h)+6(h+1)U(k,h+1)=$$
$$-24\delta(k,h-1) \tag{4.15}$$

elde edilir.

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} W(k,h)x^k y^h$$

ve $$w(x,0) = 2x^3 + 3x^2 + 8x$$

olduğundan

$U(0{,}0) = 0, U(1{,}0) = 8, U(2{,}0) = 3, U(3{,}0) = 2,$

$U(i,0) = 0(i = 4{,}5{,}6, \dots)\, , V(i,0) = 0(i = 0{,}1{,}2, \dots)$ (4.16)

elde edilir.

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=1}^{\infty} h[U(k,h) + iV(k,h)]\, x^k y^{h-1}$$

ve

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,0) = i(6x^2 - 6x + 2)$$

olduğundan

$V(0{,}1) = 2, V(1{,}1) = -6, V(2{,}1) = 6, V(i,1) = 0(i = 3{,}4{,}5, \dots),$

$U(i,1) = 0(i = 0{,}1{,}2, \dots)$ (4.17)

bulunur.

(4.14) denkleminde h=0 yazılırsa

$(k+1)(k+2)U(k+2{,}0) + 2(k+1)V(k+1{,}1) - 2U(k,2) +$

$6(k+1)U(k+1{,}0) - 6V(k,1) = 120\delta(k-1{,}0) + 36\delta(k,0)$ (4.18)

bulunur ve k=0 yazalım,

$$2U(2{,}0) + 2V(1{,}1) - 2U(0{,}2) + 6U(1{,}0) - 6V(0{,}1) = 36$$

(4.16) ve (4.17) eşitliklerinden

$U(0{,}2) = -3$ (4.19)

olur.

(4.18) de $k = 1$ yazalım.

$$6U(3{,}0) + 4V(2{,}1) - 2U(1{,}2) + 12U(2{,}0) - 6V(1{,}1) = 12$$

$U(1,2) = -6$ (4.20)

bulunur.(4.18) de $k = 2$ yazalım.

$$12U(4,0) + 6V(3,1) - 2U(2,2) + 18U(3,0) - 6V(2,1) = 0$$

$U(2,2) = 0$ (4.21)

elde edilir.

$k > 2$ için $U(k+2,0) = V(k+1,1) = U(k+1,0) = V(k,1) = 0$

olduğundan

$U(k,2) = 0$ (4.22)

olur.

Benzer olarak (4.15) denkleminde $h = 0$ yazılırsa

$(k+1)(k+2)V(k+2,0) - 2(k+1)U(k+1,1) - 2V(k,2) +$

$6(k+1)V(k+1,0) + 6U(k,1) = 0$ (4.23)

ve $\forall\, k$ için $U(k+2,0) = U(k+1,1) = V(k+1,0) = U(k,1) = 0$

olduğundan $V(k,2) = 0$ olur.

(4.14) denkleminde $h = 1$ yazılırsa

$(k+1)(k+2)U(k+2,1) + 4(k+1)V(k+1,2) - 6U(k,3) +$

$6(k+1)U(k+1,1) - 12V(k,2) = 0$ (4.24)

(4.24) de $\forall\, k$ için $U(k+2,1) = V(k+1,2) = U(k+1,1) = V(k,2) = 0$

olduğundan

$U(k,3) = 0$ (4.25)

olur.

Benzer olarak (4.14) da $h = 2$ yazarsak

$$(k+1)(k+2)V(k+2,2) - 6(k+1)U(k+1,3) - 12V(k,4) + 6(k+1)V(k+1,2) + 18U(k,3) = 0$$

$\forall\, k$ için $U(k+2,2) = U(k+1,3) = V(k+1,2) = U(k,3) = 0$

olduğundan

$V(k,4) = 0$ (4.26)

elde edilir.

Benzer olarak (4.14) da $h = 3$ yazarsak

$$(k+1)(k+2)U(k+2,3) + 8(k+1)V(k+1,4) - 20U(k,5)$$
$$+ 6(k+1)U(k+1,3) - 24V(k,4) = 0$$

$\forall\, k$ için $U(k+2,3) = V(k+1,4) = U(k+1,3) = V(k,4) = 0$

olduğundan

$U(k,5) = 0$ (4.27)

elde edilir.

Bu işlemlere devam edilerek $\forall\, n \geq 1$ için

$$U(k,2n+1) = V(k,2n) = 0$$

olur.

(4.15) denkleminde $h = 1$ yazılırsa

$(k+1)(k+2)V(k+2,1) - 4(k+1)U(k+1,2) - 6V(k,3) +$

$6(k+1)V(k+1,1) + 12U(k,2) = -24\delta(k,0)$ (4.28)

(4.28) de $k = 0$ yazalım.

$$2V(2,1) - 4U(1,2) - 6V(0,3) + 6V(1,1) + 12U(0,2) = -24$$
$$V(0,3) = -2$$

Bu işlemlere devam edilerek $U\ ve\ V$ nin diğer bütün bileşenleri sıfır elde edilir.

$$u(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U(k,h)x^k y^h$$

ve

$$v(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V(k,h)x^k y^h$$

olduğundan

$$u(x,y) = 2x^3 + 3x^2 + 8x - 3y^2 - 6xy^2$$

$$v(x,y) = 2y - 6xy + 6x^2y - 2y^3$$

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$= 2x^3 + 3x^2 + 8x - 3y^2 - 6xy^2 + i(2y - 6xy + 6x^2y - 2y^3)$$

$$= 2(x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3) + 3(x^2 - 2ixy - y^2) + 5(x + iy) + 3(x - iy)$$

$$= 2z^3 + 3(\bar{z})^2 + 5z + 3\bar{z}$$

bulunur.

ÖRNEK 4.3:

$$z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\bar{z}\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}\partial z}+2\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}=12-4\bar{z}$$
$$w(0,y)=y^2+i(y^3+4y)$$
$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,y)=4+y^2-6iy$$

Başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: (3.7), (3.8) ve (3.9) den

$$(x+iy)\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-2i\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)-(x-iy)\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+2i\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)=12-4x+4iy$$

$w=u+iv$ olduğundan

$$\frac{(x+iy)}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-2i\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$
$$-\frac{(x-iy)}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2i\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)$$
$$=12-4x+4iy$$

Bu eşitliği reel ve imajiner kısımlarına ayırırsak

$$(2x-4)\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}-(2x+2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2y\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2y\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=48-16x \quad (4.29)$$

$$2y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(4-2x)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(2x+2)\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+2y\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}+2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=16y \quad (4.30)$$

Denklemlerini elde ederiz. (4.29) ve (4.30) eşitliklerinin iki ile bölümünün diferansiyel dönüşümünden

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-s)(k-r+1)(s+1)V(k-r+1,s+1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-s-1)(k-r+1)(k-r+2)V(k-r+2,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-s)(s+1)(s+2)U(k-r,s+2)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-s-1)(k-r+1)(s+1)U(k-r+1,s+1)-$$
$$-2(k+1)(h+1)V(k+1,h+1)-(h+1)(h+2)U(k,h+2)$$
$$+(k+1)(k+2)U(k+2,h)$$
$$=24\delta(k,h)-8\delta(k-1,h) \qquad (4.31)$$

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-s-1)(k-r+1)(k-r+2)U(k-r+2,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-s)(k-r+1)(s+1)U(k-r+1,s+1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-s)(s+1)(s+2)V(k-r,s+2)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-s-1)(k-r+1)(s+1)V(k-r+1,s+1)$$
$$+2(k+1)(h+1)U(k+1,h+1)-(h+1)(h+2)V(k,h+2)$$
$$+(k+1)(k+2)V(k+2,h)=8\delta(k,h-1) \qquad (4.32)$$

eşitlikleri elde edilir.

$$w(0,y)=y^2+i(y^3+4y)$$

Şartından dolayı

$$U(0,2)=1, V(0,3)=1, V(0,1)=4, U(0,i)=0, (i=0,1,3,4,5,\dots),$$
$$V(0,i)=0, (i=0,2,4,5,6,\dots)$$

elde edilir.

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{h=0}^{n}k[U(k,h)+iV(k,h)]\,x^{k-1}y^{h}$$

ve

$$\frac{\partial w}{\partial x}(0,y)=4+y^2-6iy$$

şartından dolayı

$$U(1,0)=4, V(1,1)=-6, U(1,2)=1, U(1,i)=0, (i=1,3,4,5,6,\dots),$$
$$V(1,i)=0, (i=0,2,3,4,\dots)$$

elde edilir. (4.31) da $k=h=0$ yazılırsa

$$U(2,0)=7$$

elde edilir. (4.32) de $k=h=0$ yazılırsa

$$V(2,0)=0$$

bulunur. (4.31) da $k=0, h=1$ yazılırsa

$$U(2,1)=0$$

elde edilir. (4.31) da $k=1, h=0$ için

$$-8V(2,1)+12U(3,0)=4$$

bulunur. (4.32) de $k=0, h=1$ için

$$V(2,1)=1$$

olur ve buradan

$$U(3,0)=1$$

elde edilir.

(4.32) de $k=1, h=0$ yazılırsa

$$V(3,0)=0$$

elde edilir. U ile V nin diğer bütün bileşenleri sıfırdır. U ve V nin bulunan değerleri yerine yazılırsa

$$u(x,y)=x^3+7x^2+xy^2+y^2+4x$$
$$v(x,y)=x^2y+y^3-6xy+4y$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}w(x,y)&=u(x,y)+iv(x,y)\\&=x^3+7x^2+xy^2+y^2+4x+i(x^2y+y^3-6xy+4y)\\&=(x^2+2ixy-y^2)(x-iy)+3(x^2-2ixy-y^2)+4(x^2+y^2)+4(x+iy)\\&=z^2\bar{z}+3(\bar{z})^2+4z\bar{z}+4z\end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

ÖRNEK 4.4:

$$w\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = z^2 + \bar{z}$$

$$w(x,0) = x^2 + x$$

Başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm:

$$w = u + iv$$

$$\frac{(u+iv)}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right] = (x+iy)^2 + x - iy$$

$$u\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) - v\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 2x^2 - 2y^2 + 2x$$

$$v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = 4xy - 2y$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)\,(k-r+1)U(k-r+1,s) \\
&-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)\,(s+1)V(k-r,s+1) \\
&-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V(r,h-s)\,(s+1)U(k-r,s+1) \\
&-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V(r,h-s)\,(k-r+1)V(k-r+1,s) \\
&= 2\delta(k-2,h) - 2\delta(k,h-2) + 2\delta(k-1,h)
\end{aligned} \tag{4.33}$$

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V(r,h-s)\,(k-r+1)U(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V(r,h-s)\,(s+1)V(k-r,s+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)\,(s+1)U(k-r,s+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)\,(k-r+1)V(k-r+1,s)$$
$$= 4\delta(k-1,h-1) - 2\delta(k,h-1) \qquad (4.34)$$

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} W(k,h)x^k y^h$$

ve

$$w(x,0) = x^2 + x$$

olduğundan

$U(0,0) = 0, U(1,0) = 1, U(2,0) = 1, U(i,0) = 0 (i = 3,4,5,\dots),$

$V(i,0) = 0 (i = 0,1,2,\dots)$ (4.35)

elde edilir.

(4.34) de $h = 0$ yazılırsa

$\sum_{r=0}^{k} U(r,0)U(k-r,1) = 0$ (4.36)

elde edilir.

(4.36) de $k = 1$ yazılırsa $U(0,1) = 0$ bulunur. (4.36) de $k = 2$ yazılırsa $U(1,1) = 0$ bulunur. (4.36) de $k = 2$ yazılırsa $U(2,1) = 0$ elde edilir ve bu işlemlere devam edilerek $k = n$ yazılarak $U(n,1) = 0$ olur.

(4.33) de $h = 0$ yazılırsa

$\sum_{r=0}^{k} U(r,0)(k-r+1,0)U(k-r+1,0) - \sum_{r=0}^{k} U(r,0)V(k-r,1) =$

$2\delta(k-2,0) + 2\delta(k-2,0)$ (4.37)

(4.37) de $k = 1$ yazılırsa $V(0,1) = -1$ bulunur.

(4.37) de $k = 2$ yazılırsa $V(1,1) = 2$ olur.

(4.37) de $k = 3$ yazılırsa $V(2,1) = 0$ olur.

(4.37) de $k = 4$ yazılırsa $V(3,1) = 0$ elde edilir.

Bu işlemlere devam edilerek $n \geq 2$ olmak üzere $V(n,1) = 0$ bulunur.

(4.33) de $k = h = 1$ yazılırsa $U(0,2) = -1$ olup U ile V nin diğer bütün bileşenleri sıfırdır.

$$u(x,y) = x^2 - y^2 + x$$

$$v(x,y) = 2xy - y$$

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$= x^2 - y^2 + x + i(2xy - y)$$

$$= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + \frac{z+\bar{z}}{2} + i\left[2\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\right] = z^2 + \bar{z}$$

çözümü elde edilir [6].

ÖRNEK 4.5:

$$w\frac{\partial w}{\partial z}+\overline{w}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}=2z+2\bar{z}$$

$$w(x,0)=2x$$

Başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm: (3.5) ve (3.6) eşitliklerinden

$$\frac{(u+iv)}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]+\frac{(u-iv)}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial y}\right]=4x$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=4x$$

$$u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)\,(k-r+1)U(k-r+1,s)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V(r,h-s)\,(s+1)U(k-r,s+1)$$
$$=4\delta(k-1,h) \qquad (4.38)$$

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)\,(k-r+1)V(k-r+1,s)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}V(r,h-s)\,(s+1)V(k-r,s+1)=0 \qquad (4.39)$$

$$w(x,0)=2x$$

olduğundan

$U(0,0)=0, U(1,0)=2, U(i,0)=0(i=2,3,4,\dots), V(i,0)=0(i=0,1,2,\dots)$

elde edilir.

(4.39) da $h = 1$ yazılırsa

$$\sum_{r=0}^{k} U(r,0)(k-r+1)V(k-r+1,1) - \sum_{r=0}^{k} V(r,1)\,V(k-r,1)$$
$$= 0 \qquad (4.40)$$

elde edilir. (4.40) de $k = 0$ yazılırsa

$$U(0,0)V(1,1) - V(0,1)V(0,1) = 0$$

elde edilir ki buradan $V(0,1) = 0$ olur.

Benzer olarak (4.40) de $k = 1$ yazılırsa

$$U(0,0)2V(2,1) - V(0,1)V(1,1) + U(1,0)V(1,1) - V(1,1)V(0,1) = 0$$

elde edilir ki buradan $V(1,1) = 0$ elde edilir. Bu işlemlere devam edilerek $\forall n \geq 0$ için $V(n,1) = 0$ elde edilir.

(4.39) da $h = 2$ yazılırsa

$$\sum_{r=0}^{k} U(0,0)(k-r+1)V(k-r+1,2) = 0$$

olur. Burada $k = 0$ yazılırsa $V(1,2) = 0$ bulunur.Aynı denklemde $k = 1$ yazılırsa $V(2,2) = 0$, $k = 2$ yazılırsa $V(3,2) = 0$ olur. Bu işlemler devam edilerek $\forall n \geq 1$ için $V(n,2) = 0$ elde edilir.

(4.39) da $h = 3$ için

$$\sum_{r=0}^{k} U(r,0)(k-r+1)V(k-r+1,3) = 0$$

olur. Burada $k = 1$ için $V(1,3) = 0$, $k = 2$ için $V(2,3) = 0$, benzer olarak bu işleme devam edilirse $\forall n \geq 1$ için $V(n,3) = 0$ elde edilir. (4.39) da $k = n$, $h = m$ yazılırsa $V(n,m) = 0$ elde edilir.

(4.38) de $h = 1$ yazılırsa

$$\sum_{r=0}^{k} U(r,1)(k-r+1)U(k-r+1,0) = 0$$

olur. $k = 0$ yazılırsa $U(0,1) = 0, k = 1$ yazılırsa $U(1,1) = 0,$ $k = 2$ yazılırsa $U(2,1) = 0,$ $k = n$ yazılırsa $U(n, 1) = 0$ elde edilir.

(4.38) de $h = 2$ yazılırsa

$$\sum_{r=0}^{k} U(r, 2)(k - r + 1)U(k - r + 1,0) + \sum_{r=0}^{k} U(r, 0)(k - r + 1)U(k - r + 1,2) = 0$$

bulunur. Burada $k = 0$ yazılırsa $U(0,2) = 0,$ $k = 1$ yazılırsa $U(1,2) = 0,$ $k = 2$ yazılırsa $U(2,2) = 0,$ $k = n$ yazılırsa $U(n, 2) = 0$ elde edilir. (4.38) de $k = n,$ $h = m$ yazılırsa $U(n, m) = 0$

elde edilir. Bulduğumuz bu değerler

$$w(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} w(x, y) &= u(x, y) + iv(x, y) \\ &= 2x \\ &= 2\left(\frac{z + \bar{z}}{2}\right) \\ &= z + \bar{z} \end{aligned}$$

çözümü elde edilir.

ÖRNEK 4.6:

$$\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 4z$$

$$w(x,0) = x^2 + 2x$$

Başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm:

$w = u + iv$ ve (3.5) ve (3.6) eşitliklerinden

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right]\left[\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right] = 16(x + iy) \tag{4.41}$$

elde edilir. (4.41) reel ve imajiner kısımlarına ayrılırsa

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} = 16x \tag{4.42}$$

$$2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} = 16y \tag{4.43}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.42) ve (4.43) eşitliklerinin diferansiyel dönüşümünden

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)\,U(r+1,h-s)(k-r+1)U(k-r+1,s) \\
&+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+1)\,U(r,h-s+1)(s+1)U(k-r,s+1) \\
&-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+1)\,V(r,h-s+1)(s+1)V(k-r,s+1) \\
&-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)\,V(r+1,h-s)(k-r+1)V(k-r+1,s) \\
&= 16\delta(k-1,h)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)\,U(r+1,h-s)(k-r+1)V(k-r+1,s)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+1)\,U(r,h-s+1)(s+1)V(k-r,s+1)$$
$$=8\delta(k,h-1) \tag{4.45}$$

$$w(x,0)=x^2+2x$$

olduğundan

$$U(0,0)=0, U(1,0)=2, U(2,0)=1,$$
$$U(i,0)=0(i=3,4,5,\dots), V(i,0)=0(i=0,1,2,\dots)$$

olur.

(4.44) de $h=k=0$ yazılırsa

$$\big(V(0,1)\big)^2-\big(U(0,1)\big)^2=4 \tag{4.46}$$

olur. (4.44) de $k=1, h=0$ yazılırsa

$$U(1,1).U(0,1)-V(0,1).V(1,1)=4 \tag{4.47}$$

olur.(4.45) de $k=h=0$ yazılırsa

$$U(0,1).V(0,1)=0 \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.45) de $k=1$ $h=0$ yazılırsa

$$U(1,1).V(0,1)=0 \tag{4.49}$$

bulunur.

(4.46), (4.48), (4.49) dan

$$U(0,1)=0, U(1,1)=0, \big(V(0,1)\big)^2=4 \tag{4.50}$$

elde edilir.

(4.45) de $k=2, h=0$ yazılırsa

$$U(0,1).V(2,1)+U(1,1)V(1,1)+U(2,1)V(0,1)=0 \tag{4.51}$$

olur. Buradan

$$U(2,1)=0$$

$k=3, h=0$ yazılırsa

$$U(0,1).V(3,1)+U(1,1)V(2,1)+U(2,1)V(1,1)+U(3,1).V(0,1)=0 \tag{4.52}$$

olur. Buradan

$$U(3,1)=0$$

$k=4, h=0$ yazılırsa

$U(0,1).V(4,1) + U(1,1)V(3,1) + U(2,1)V(2,1) + U(3,1).V(1,1)$

$+U(4,1)V(0,1) = 0$ (4.53)

olur. Buradan

$$U(4,1) = 0$$

$k = n, h = 0$ yazılırsa

$U(0,1)V(n,1) + U(1,1)V(n-1,1) + U(2,1)V(n-2,1) + \cdots + U(n,1)V(0,1) = 0$ (4.54)

olur. Buradan

$$U(n,1) = 0$$

olur.

(4.44) de $k = 0, h = 1$ yazılırsa (4.50) den

$$V(0,2) = 0$$

$k = 1, h = 1$ yazılırsa

$$V(1,2) = 0$$

$k = 2, h = 1$ yazılırsa

$$V(2,2) = 0$$

ve bu işlemlere devam edilerek $k = n, h = 0$ yazılırsa

$$V(n,2) = 0$$

bulunur.

(4.45) de $k = 0, h = 2$ yazılarak

$$U(0,3) = 0$$

$k = 1, h = 2$ yazılırsa

$$U(1,3) = 0$$

bulunur. Bu işlemlere devam edilerek

$$U(n,3) = 0$$

bulunur. Bu işlemler sonucunda

$$u(x,y) = x^2 + 2x - y^2$$

$$v(x,y) = 2xy - 2y$$

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$= x^2 + 2x - y^2 + i(2xy - 2y)$$

$$= \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + 2\frac{z+\bar{z}}{2} - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 + 2i\left[\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\right]$$

$$= \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} + z + \bar{z} - \left(\frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{-4}\right) + \frac{z^2 - \bar{z}^2}{2} - z + \bar{z}$$

$$= z^2 + 2\bar{z}$$

çözümü elde edilir.

ÖRNEK 4.7:

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + 2\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = 18$$

$$w(x,0) = x^3 + 3x^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,0) = i(3x^2 - 6x)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,0) = -6x - 6$$

Başlangıç değer problemini çözünüz.

Çözüm:

$$w = u + iv$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 18$$

$$\frac{1}{8}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} - 3\frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) = 0$$

$$(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3,h) + 3(k+1)(k+2)(h+1)V(k+2,h+1) - 3(k+1)(h+1)(h+2)U(k+1,h+2) - (h+1)(h+2)(h+3)V(k,h+3) + 4(k+1)(k+2)U(k+2,h) - 8(k+1)(h+1)V(k+1,h+1) - 4(h+1)(h+2)U(k,h+2) = 144\delta(k,h) \quad (4.55)$$

$$(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3,h) - 3(k+1)(k+2)(h+1)U(k+2,h+1) - 3(k+1)(h+1)(h+2)V(k+1,h+2) + (h+1)(h+2)(h+3)U(k,h+3) + 4(k+1)(k+2)V(k+2,h) + 8(k+1)(h+1)U(k+1,h+1) - 4(h+1)(h+2)V(k,h+2) = 0 \quad (4.56)$$

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} W(k,h)x^k y^h$$

ve

$$w(x,0) = x^3 + 3x^2$$

olduğundan

$$U(0,0)=0, U(1,0)=0, U(2,0)=3, U(3,0)=1,$$
$$U(i,0)=0(i=4,5,\dots), \quad V(i,0)=0(i=0,1,2,3,\dots),$$

bulunur.

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} h.W(k,h)x^k y^{h-1}$$

ve

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x,0)=i(3x^2-6x)$$

olduğundan

$$V(0,1)=0, V(1,1)=-6, V(2,1)=3, V(i,1)=0(i=3,4,5,\dots),$$
$$U(i,1)=0(i=0,1,2,\dots)$$

bulunur.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} h.(h-1).W(k,h)x^k y^{h-2}$$

ve

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}(x,0)=-6x-6$$

olduğundan

$$U(0,2)=-3, U(1,2)=-3, U(i,2)=0(i=2,3,4,\dots), V(i,2)=0(i=0,1,2,\dots)$$

elde edilir.

(4.55) denkleminde $k=0, h=0$ yazılırsa

$$6U(3,0)+6V(2,1)-6U(1,2)-6V(0,3)+8U(2,0)-8V(1,1)-8U(0,2) = 144$$

$$6.1+6.3-6.(-3)-6V(0,3)+8.3-8.(-6)-8.(-3)=144$$

buradan $V(0,3)=-1$ bulunur.

(4.56) denkleminde *h=0* yazılırsa

$$(k+1)(k+2)(k+3)V(k+3,0)-3(k+1)(k+2)U(k+2,1) - 6(k+1)V(k+1,2)+6U(k,3)+4(k+1)(k+2)V(k+2,0) + 8(k+1)U(k+1,1)-8V(k,2)=0$$

$\forall k \geq 0$ için $V(k,0)=0$, $V(k,2)=0, U(k,1)=0$ olduğundan $\forall k \geq 0$ $U(k,3)=0$ olur.

(4.55) denkleminde h=0 yazılırsa

$$(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3,0)+3(k+1)(k+2)V(k+2,1) - 6(k+1)U(k+1,2)-6V(k,3)+4(k+1)(k+2)U(k+2,0) - 8(k+1)V(k+1,1)-8U(k,2)=144\delta(k,0)$$

$k=1$ ise

$$-6V(1,3)+24U(3,0)-16V(2,1)-8U(1,2)=0$$
$$-6V(1,3)+24-48+24=0$$

Buradan V(1,3)=0 elde edilir.

$k\geq 2$ ise

$-6V(k,3)=0$, yani $V(k,3)=0$

elde edilir.

(4.55) denkleminde $h=1$ yazılırsa

$(k+1)(k+2)(k+3)U(k+3,1)+6(k+1)(k+2)V(k+2,2)-18(k+1)U(k+1,3)-24V(k,4)+4(k+1)(k+2)U(k+2,1)-16(k+1)V(k+1,2)-24U(k,3)=144\delta(k,1)$ (4.57)

elde edilir. (4.57) de $k=0$ ise

$$6U(3,1)+12V(2,2)-18U(1,3)-24V(0,4)+8U(2,1)-16V(1,2)-24U(0,3) = 0$$

$-24V(0,4)=0$ buradan $V(0,4)=0$ elde edilir.

(4.57) de $k=1$ ise

$$24U(4,1)+36V(3,2)-36U(2,3)-24V(1,4)+24U(3,1)-32V(2,2) - 24U(1,3)=0$$

olur. Bu eşitlikten $V(1,4)=0$ elde edilir. Benzer biçimde (4.57) de $k=n$ yazılırsa $V(n,4)=0$ bulunur. Bu işlemlere devam edilerek $\forall n\geq 0$, $\forall m>3$ için $U(n,m)=V(n,m)=0$ elde edilir. Bulduğumuz bu değerler

$$w(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}W(k,h)x^k y^h$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$w(x,y)=x^3-3xy^2+3x^2-3y^2+i(3x^2y-y^3-6xy) = z^3+3(\bar{z})^2$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

1. J.K.Zhou, “Differential transformation and ıts applications for electrical circuits” ***Huazhong Univ.*** **Press,** Wuhan, China, 1-120 (1986).

2. C.K. Chen and S.H. Ho, “ Solving partial differential equations by two dimensional differential transform method”, ***Applied Mathematics and Computation,*** 106 : 171-179 (1999).

3. Y.Keskin and G.Oturanç., “ The differential transform methods for nonlinear functions and its applications “ ***Selcuk J. Appl. Math.,*** 9 (1): 69-76 (2008).

4. Ayaz, F. “ On the two dimensional differential transform method ”, ***Applied Mathematics and Computation,*** 143 : 361-374 (2003).

5. C.K. Chen and S.H. Ho, “ Application of differential transformation to eigenvalue problems” , ***Appl. Math. Comput.,*** 79 : 173-188 (1996).

6. Düz, M. “On Solving First Order Linear Complex Partial Derivative Equations by two dimensional differential transform method“ ***CUJSE,*** 9 (1): 23-24 (2012).

ÖZGEÇMİŞ

Uğur İlter 1981 yılında Karabük'de doğdu; ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı. 1999 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenime başlayıp 2004 yılında mezun oldu. 2004-2006 yılında Karaelmas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik öğretmenliği tezsiz yüksek lisansını tamamladı. 2004-2012 yılları arası Safranbolu Final Dergisi Dershanesinde çalıştı.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Esentepe mah. Cankent sitesi e blok daire 1
Safranbolu / KARABÜK

Tel : (505) 5427192
E-posta : ugur_ilter78@hotmail.com