# CAUCHY İNTEGRAL TEOREMİNİN UYGULAMALARI

2014
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

Suat BİLİR

# CAUCHY İNTEGRAL TEOREMİNİN UYGULAMALARI

**Suat BİLİR**

**Karabük Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalında**
**Yüksek Lisans Tezi**
**Olarak Hazırlanmıştır.**

**KARABÜK**
**Şubat 2014**

Suat BİLİR tarafından hazırlanan "CAUCHY İNTEGRAL TEOREMİNİN UYGULAMALARI" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Hakan BOSTANCI ..............................

Tez Danışmanı, Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 14/01/2014

| Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu) | İmzası |
| --- | --- |
| Başkan : Yrd.Doç. Dr. Hakan BOSTANCI (KBÜ) | .................... |
| Üye : Yrd.Doç. Dr. Murat DÜZ (KBÜ) | .................... |
| Üye : Yrd.Doç. Dr. A.Mustafa ERER (KBÜ) | .................... |

......../....../2014

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Mustafa Boz ..............................

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

*"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."*

Suat BİLİR

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**CAUCHY İNTEGRAL TEOREMİNİN UYGULAMALARI**

**Suat BİLİR**

**Karabük Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı:**
**Yrd. Doç. Dr. Hakan BOSTANCI**
**Şubat 2014, 47 sayfa**

Bu çalışmada, ilk olarak lokal Cauchy İntegral Teoremi ve uygulamaları hakkında bilgi ve örnekler verildi. Sonra global Cauchy İntegral Teoremi ve uygulamaları hakkında bilgi ve örnekler verildi.

**Anahtar Sözcükler :** Cauchy integral teoremi, cauchy integral formülü, cauchy türev formülü.

**Bilim Kodu :** 204

# ABSTRACT

**M. Sc. Thesis**

**CAUCHY İNTEGRAL TEOREMİNİN UYGULAMALARI**

**Suat BİLİR**

**Karabük Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı:**
**Yrd. Doç. Dr. Hakan BOSTANCI**
**Şubat 2014, 47 sayfa**

In this study, the first given information about the local Cauchy integral theorem and its applications. Examples were given. After then given information about the global Cauchy integral theorem and its applications. Examples were given.

**Key Word** : Cauchy Integral Theorem, Cauchy Integral Formula, Cauchy Derivative Formula.

**Science Code** : 204

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Hakan BOSTANCI ‘ya, Karabük Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sevgili aileme manevi hiçbir yardımı esirgemeden yanımda oldukları için tüm kalbimle teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

## ŞEKİLLER DİZİNİ

# BÖLÜM 1

# GİRİŞ

## 1.1. ÇALIŞMANIN AMACI

Kompleks Analiz soyut bir bilim alanı gibi görünse de sonuçları teknolojide, fizik ve mühendislikte çok sık kullanılmaktadır. Hatta kompleks analizde elde edilen sonuçlar, reel analizde çözümü imkansız olan problemlerin çözümünde güçlü biraraç olarak kullanılmaktadır. Ayrıca bir çok reel diferensiyel denklem sistemleri kompleks fonksiyonlar yardımıyla kolayca çözülebilmektedir. Bu nedenlerden dolayı Cauchy İntegral Teoremi ve uygulamaları hakkında bilgi verilmektedir. Bu konu tezin temelini oluşturmaktadır.

Bu tezde önce temel tanım ve teoremler, analitik fonksiyonların temel özellikleri, kompleks eğrisel integraller, Cauchy Teoremleri ve Özellikleri konuları verilmiştir. Daha sonra döngü kavramı ile Global Cauchy Teoremi ve Teoremlerinin en genel halleri verilmiştir.

# BÖLÜM 2

# TEMEL TANIM VE TEOREMLER

## 2.1. ANALİTİK FONKSİYONLAR VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde kompleks analizde önemli bir yer oynayan analitik fonksiyonların tanımı verildi. Daha sonra analitik fonksiyonların diğer bölümlerde ihtiyaç duyacağımız özellikleri verildi.

**Tanım 2.1.1:** $\mathbb{C}$ içinde bir $D$ kümesi verilsin. Eğer

$$D_1 = D \cap A_1 \neq \emptyset, D_2 = D \cap A_2 \neq \emptyset, ve\ D = D_1 \cup D_2$$

olacak şekilde $\mathbb{C}$ içinde ayrık ve açık $A_1$ ve $A_2$ kümeleri bulunamıyorsa $D$ kümesine bağlantılı küme denir. Bu tanıma denk başka bir ifadede şudur: Eğer

$$D_1 = D \cap A_1 \neq \emptyset, D_2 = D \cap A_2 \neq \emptyset, ve\ D = D_1 \cup D_2$$

Olacak şekilde $\mathbb{C}$ de ayrık ve açık $A_1$ ve $A_2$ kümeleri varsa $D$ bağlantısız kümedir denir. Bağlantılı açık kümeye bölge denir. Eğer bir bölgenin sınırı $n$ tane bağlantılı ayrık alt kümeden oluşuyorsa bölge ***n-bağlantılı*** dır denir.

**Tanım 2.1.2:** $f: D \subset \mathbb{C}$ ,

$$z \to w = f(z)$$

fonksiyonu verilsin. $f(z)$ fonksiyonu bir $z_0$ noktasının en az bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f\,(z) - f\,(z_0\,)}{z - z_0}$$

limiti varsa ***$f(z)$ fonksiyonu $z_0$ noktasında türevlenebilirdir*** denir. Bu limit değerine ***$f$'nin $z_0$ 'daki türevi*** denir ve $f\,'(z_0\,)$ ile gösterilir. Yani $f\,'(z_0\,)$ değeri,

$$f\,'(z_0\,) = \lim_{z \to z_0} \frac{f\,(z) - f\,(z_0\,)}{z - z_0}$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.1.3:** $f: D \to \mathbb{C}$ , $z \to w = f(z)$
fonksiyonu verilsin. Eğer,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f\ (z+h) - f\ (z)}{h}$$

limiti varsa $\boldsymbol{f(z)}$ ***fonksiyonu D bölgesinde türevlenebilirdir*** denir. Bu limit değeri $f\ '$(z) ile gösterilir ve $f\ '$(z) ifadesine ***f'nin*** **z*'deki türevi*** denir. Yani $f\ '$(z) değeri,

$$f\ '(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f\ (z+h) - f\ (\mathrm{z})}{h}$$

olarak tanımlanır.

**Teorem 2.1.1:** $f(z) = u(x, y) + \ iv(x, y)$ fonksiyonu her hangi bir $z = x + iy$ noktasında türevlenebilirse

$$f_x\ (x, y) = -if_y\ (x, y)$$

olacaktır. Buradan

$$f\ '(z) = u_x\ (x, y) + iv_x\ (x, y) = -iu_y\ (x, y) + v_y\ (x, y) \qquad (\mathbf{2.1.1})$$

dir.

**Sonuç 2.1.1:** (2.1.1) eşitliğinden

$$u_x\ - v_y\ = 0$$
$$u_y\ + v_x\ = 0$$

olduğu görülür. Buna ***Cauchy-Riemann sistemi*** denir.

**Sonuç 2.1.2:** $f(z) = u(x, y) + \ iv(x, y)$ olmak üzere $f\ '(z)$ türevi varsa $u$ ve $v$ Cauchy- Riemann sistemini sağlar. Ama bunun karşıtı doğru olmayabilir. Yani bir fonksiyon bir noktada Cauchy-Riemann sistemini sağladığı halde o noktada türevlenebilir olmayabilir.

**Uyarı :** Örneğin;

$$f(z) = \begin{cases} 0 & , \quad z = 0 \\ e^{-1/z^4} & , \quad z \neq 0 \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon $z = 0$ noktasında Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar. Gerçekten,

$$f_x\,(z) = \frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}} + i\frac{\partial \mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{x}} \text{ve } f_x\,(0) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\; e^{-1/x^4} = 0$$

ve

$$f_y\,(z) = \frac{\partial \mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}} + i\frac{\partial \mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{y})}{\partial \mathrm{y}} \text{ve } f_y\,(0) = \lim_{y\to 0}\frac{1}{y}\; e^{-1/y^4} = 0$$

olduğundan $z = 0$ noktası için

$$u_x\,(0,0) = v_y\,(0,0) \quad , \quad u_y\,(0,0) = -v_x\,(0,0)$$

yazılabilir. Ancak $z = 0$ noktasında $f\,(z)$ fonksiyonunun türevi yoktur.

$$f'(0) = \lim_{z\to 0}\frac{f\,(z) - f\,(0)}{z - 0} = \lim_{z\to 0}\frac{e^{1/z^4} - 0}{z - 0}$$

limitinde, $y = x$ doğrusu üzerinden sıfıra yaklaşırsa, $z = x + ix$ olup

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{e^{1/x^4}}{x} = \infty$$

olacağından $f'(0)$ mevcut değildir.

**Tanım 2.1.4:** $f\,(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu bir $z_0$ noktasının en az bir komşuluğunun her noktasında türeve sahipse $f\,(z)$'ye $z_0$'da ***analitiktir*** veya ***holomorftur*** denir.

**Sonuç 2.1.3:** Bir $z_0$ noktasında $f\,'(z_0)$ türevinin mevcut olması $f\,(z)$'nin $z_0$ analitik olmasını gerektirmez.

**Örnek 2.1.1:**

$f\,(z) = |z|^2$ fonksiyonunu ele alalım. $z = 0$ için $f\,'(z)$ vardır. Fakat $z \neq 0$ için $f\,'(z)$ yoktur. Yani sıfırın hiçbir komşuluğundaki $z$ ler için türev mevcut değildir. Bu nedenle $f\,(z)$ analitik değildir.

**Not:** $f = u + iv$ olsun. $u$ ve $v$ 'nin kısmi türevlere sahip olması $f\,'(z)$ türevinin mevcut olmasını gerektirmez.

**Örnek 2.1.2:**

$f\,(z) = 3z\ + 2\bar{z}$ fonksiyonunu ele alalım. $f(z) = 3z + 2\bar{z} = 5x + iy$ olduğundan $u(x, y)\ =\ 5x$ ve $v(x, y) =\ y$ dir. $u$ ve $v$ her yerde her basamaktan kısmi türevlere sahip olduğu halde $f\,'(z)$ türevi yoktur.

## 2.2. $f_z$ ve $f_{\bar{z}}$KISMİ TÜREVLERİ

Cebirsel yapıları farklı olmakla birlikte $\mathbb{R}^2$ düzlemi, $\mathbb{C}$ kompleks düzlemine izomorftur. Bu iki düzlemin elemanları arasında bire bir eşleme vardır. $z = x + iy$ $ve\ \bar{z} = x - iy$ eşitliklerinden yararlanarak $x$ ve $y$ reel değişkenleri elde edilir. Yani,

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

olduğu açıktır. Bu nedenle iki reel değişkenli bir $f\,(x, y)$ fonksiyonu $z$ ve $\bar{z}$ kompleks değişkenlerinin fonksiyonu gibi düşünülebilir. Dolayısıyla $z$ ve $\bar{z}$ 'e göre kısmi türevlerden söz edilebilir. Eğer $f\,(x, y)$ fonksiyonunun $f_x$ ve $f_y$ kısmi türevleri var ve sürekli ise

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

eşitliklerinden yararlanarak

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

kısmi türev operatörleri elde edilir.

**Lemma2.2.1:** $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ olsun. $f(z)$ fonksiyonunun $f_x(z)$ ve $f_y(z)$ kısmi türevleri sürekli olsun $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ nin $D$ de analitik olması için gerek ve yeter koşul,

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

olmasıdır.

**İspat:**

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(u+iv) + i\frac{\partial}{\partial y}(u+iv)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[u_x + iv_x + \left(u_y + iv_y\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\left(u_x - v_y\right) + i\left(u_y + v_x\right)\right]$$

olduğundan

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \Leftrightarrow \quad u_x - v_y = 0, \quad u_y + v_x = 0$$

Cauchy-Riemann sistemi elde edilir.

**Örnek 2.2.1:**

$f(z) = x^3 - 3xy^2 + x + i(3x^2y - y^3 - y)$ ise $f_z$ ve $f_{\bar{z}}$ türevlerini bulalım.

$$f_z = \frac{1}{2}\left(f_x - if_y\right) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 3y^2 + 1 + i(6xy) - i\left(-6xy + i(3x^2 - 3y^2 - 1)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(6x^2 - 6y^2 + 12xyi)$$

$$= 3((x^2 - y^2) + 2xyi)$$

$$f_{\bar{z}} = \left(f_x + if_y\right) = \frac{1}{2}\left(3x^2 - 3y^2 + 1 + i(6xy) + i\left(-6xy + i(3x^2 - 3y^2 - 1)\right)\right)$$

$$=1$$

elde edilir. Diğer taraftan dikkat edilirse $z = x + iy$ için $f(z) = z^3 + \bar{z}$ olup $f_z = 3z^2$ ve $f_{\bar{z}} = 1$ dir.

## 2.3. KOMPLEKS DÜZLEMDE EĞRİLER

**Tanım 2.3.1:**

**(a)** $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir ***eğridir*** denir. Burada $\gamma\,(a)$ ve $\gamma\,(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin ***başlangıç*** ve ***bitiş noktaları*** denir.

**(b)** Bir $\gamma$eğrisi için $\gamma\,(a) = \gamma\,(b)$ ise $\gamma$ 'ya ***kapalı eğridir*** denir.

**(c)** Bir $\gamma$ eğrisi için $\gamma\,'$ türevi var ve sürekli ise $\gamma$ 'ya ***diferensiyellenebilir eğri*** denir.

**(d)** $\gamma$ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer $\forall\ t \in (a,b)$ için $\gamma\,'(t) \neq 0$ ise $\gamma$ 'ya ***düzgün eğri (regüler eğri)*** denir.

**(e)** $[a, b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç $\gamma$ eğrisi diferensiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda $\gamma$'nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar $\gamma'$'nün bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse $\gamma$ ***parçalı diferensiyellenebilir eğridir*** denir.

**(f)** $\gamma$ parçalı diferensiyellenebilir eğri olsun. Eğer $t \in [a, b]$ olmak üzere türevin mevcut olduğu her yerde $\gamma'(t) \neq 0$ eğriye ***parçalı düzgün eğridir*** denir.

**(g)** $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$t \to \gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

eğrisi verilsin. $\forall\, t_1, t_2 \in [a, b]$ için $t_1 \neq t_2$ olduğunda $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ ise $\gamma(t)$ 'ye ***basit eğri*** veya ***Jordan eğrisi*** denir. $\gamma$ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise $\gamma$ 'ya ***basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi)*** denir.

**Uyarı:(1)** Çoğu kez bir $\gamma$eğrisini belirtirken denklemi $z(t) = x(t) + iy(t)$ olan $\gamma$ eğrisi diye yazıp söyleyeceğiz.

**(2)** Bir $\gamma$ eğrisi verilsin. $z'(t_0) = \gamma'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$ var ve $z'(t_0) \neq 0$ ise eğri $z_0 = z(t_0)$ noktasında bir teğete sahiptir. Teğet, $z_0$ noktasından geçer ve $x$ ekseni ile pozitif yönde $\theta = arg z'(t_0)$ açısı yapar. Böylece görülüyor ki düzgün eğriler her noktada, diferensiyellenebilir eğriler ise türevin sıfırdan farklı olduğu noktalarda, teğete sahiptirler.

$\gamma_1, \gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$t \to \gamma_1(t) = x(t) + iy(t)$$

$$\gamma_2(t) = x^*(t) + iy^*(t)$$

düzgün eğrileri verilsin.$z_1$ ve $z_2$ parametre değerine karşılık gelen noktada teğete sahip iseler teğetler arasındaki açı

$$arg z_2{}'(t_0) - arg z_1{}'(t_0)$$

dır.

**Örnek 2.3.1:**

**(a)** $z = z(t) = cost + i\, sin\, t, 0 \leq t \leq 2\pi$ eğrisi birim çember olup basit kapalı bir eğridir.

**(b)** $x(t) = t, y(t) = t^2, 0 \leq t \leq 1$ parametrik gösterimi ile verilen bir $\gamma$ eğrisi $z = z(t) = t + it^2, 0 \leq t \leq 1$ gösterimi ile de belirtilebilir. Bu eğri basit eğridir fakat kapalı eğri değildir.

**(c)** $z\,(t\,) = 1 + \,it\,,\; z\,(t\,) = e^{-1\pi t}\,,\; z\,(t\,) = \;3e^{2\pi it}\,,\; 0\; \leq \; t\; \leq 1$

fonksiyonları birer eğri belirtirler.

$z(t)\; = \;1 + \;it$ eğrisi basit eğridir, fakat kapalı eğri değildir.

$z\,(t\,)\; = \;e^{-1\pi t}cos\pi\,t\; - \;i\,sin\pi\,t$ eğrisi basit eğridir, fakat $0\; \leq \; t\; \leq 1$ için kapalı eğri değildir.

$z\,(t\,)\; = \;3e^{2\pi it}\; = \;3(cos\;2\pi\;t\; + \;i\;sin\;2\pi\;t\,)$ eğrisi basit kapalı bir eğridir.

**Tanım 2.3.2: (a)** $\gamma_1 : [a, b] \to \;\mathbb{C}$

$$t\; \to \gamma_1(t)\; = \;x(t)\; + \;iy(t) \text{ ve}$$

$$\gamma_2 : [c, d] \to \;\mathbb{C}$$

$$t\; \to \gamma_2(t)\; = \;x^*(t)\; + iy^*(t)$$

şeklinde iki eğri verilsin.$\gamma_1 + \;\gamma_2$ birleşimi

$$\gamma(t)\; = (\gamma_1\; + \;\gamma_2)(t)\; = \;\begin{cases} \gamma_1(t), & t \in [a, b] \\ \gamma_2(t), & t \in [c, d] \end{cases}$$

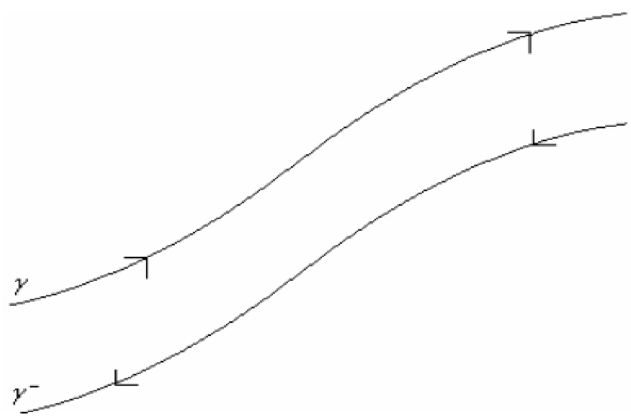
biçiminde tanımlanır. $\gamma_1$ ve $\gamma_2$ uç uca eklenmiş olmayabilir. Bu durumda eğriye ***parçalı eğri*** denir.

**(b)** $\mathbb{C}$ düzleminde

$$\gamma\; : [a, b] \to \;\mathbb{C}$$

$$t \to \gamma\;\,(t)\; = \;x(t)\; + \;iy(t)$$

eğrisi verilsin. Bu durumda $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(a + b - t)\,, a \leq t \leq b$ eğrisine ***$\gamma$ 'nın tersi*** denir ve $\gamma^-(t)$ ile gösterilir.




Şekil 2.1. Eğrinin tersi gösterimi.

**Uyarı:** Bir eğriyi belirten fonksiyon bir tek değildir. Eğer bir $h$ fonksiyonu , $h'(t) > 0$, $h(c) = a$, $h(d) = b$ olacak biçimde , $[c,d]$ aralığını $[a,b]$ aralığı üzerine dönüştürüyorsa $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ile $\tilde{\gamma} = \gamma \, o \, h: [c,d] \to \mathbb{C}$ aynı eğriyi belirtirler. Bu durumda $\tilde{\gamma} = \gamma \, o \, h$ eğrisine ***γ eğrisinin yeni bir parametrik gösterimi*** denir.

Bu nedenle genelde, eğrinin tanım kümesi olarak [0,1] aralığı alınır. Çünkü $h(t) = tb + (1-t)a, t \in [0,1]$ fonksiyonu [0,1] aralığını $[a,b]$ aralığı üzerine İstenilen biçimde dönüştürür. Böylece,

$\gamma(s) = x(s) + iy(s), a \leq s \leq b$ ile

$\tilde{\gamma}(t) = \gamma\big(h(t)\big) = x(tb + (1-t)a) + iy(tb + (1-t)a), 0 \leq t \leq 1$

aynı eğriyi belirtirler. O halde $\tilde{\gamma}(0)$ ve $\tilde{\gamma}(1)$ sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitiş noktası olurlar.

**Örnek 2.3.2:**

$z(t) = t^2 + it^4, 0 \leq t \leq 1$ eğrisi , $z(t) = t + it^2$, $0 \leq t \leq 1$ eğrisinden $t = u^2$ parametre dönüşümü yapılarak elde edilmiştir.

**Tanım 2.3.3:** Eğer $\gamma = \gamma(t)$ eğrisi sınırlı değişimli ise $\gamma$ eğrisine ***doğrultulabilir (rektiflenebilir) eğri*** denir veya bir başka ifade ile bir çembere homomorf olarak dönüştürülebilen sınırlı değişimli bir eğriye ***rektiflenebilir eğri*** denir.

**Örnek 2.3.3:**

$z(t) = x(t) + iy(t), 0 \leq t \leq 4$ eğrisini

| | $0 \leq t \leq 1$ | $1 \leq t \leq 2$ | $2 \leq t \leq 3$ | $3 \leq t \leq 4$ |
|---|---|---|---|---|
| $x(t)$ | $t$ | 1 | $3-t$ | 0 |
| $y(t)$ | 0 | $t-1$ | 1 | $4-t$ |

tablo olarak şeklinde tanımlayalım. Bu eğri bir karenin çevresini verir ve parçalı düzgün bir eğridir.

$z\,(t\,) = \,sin\,t + i\,sin\,2t\,, 0 \leq\, t\, \leq\, \pi$ eğrisi doğrultulabilir eğridir. Fakat $z(0)\, = \,i$ olmak üzere $z\,(t\,)\, = \, t\,sin(\frac{1}{t}) + \,ie^{t}, 0 \leq t \leq 1$ eğrisi rektiflenemez bir eğridir.

**Not:** Noktaların ardışık olarak birbirini takip etmesiyle oluşan kümeye eğri diyebiliriz. Bir $(t\,)\, = \,z\,(t\,)\, = \,x\,(t\,)\, + \,iy\,(t\,), 0\, \leq\, t\, \leq 1$ eğrisini ele alalım. Bu eğrinin uç noktaları $z_0 = z(0)$ ve $z_1 = \,z(1)$ olsun. Eğer $t$ sıfırdan bire doğru değişirken eğri de $z_0$ 'dan $z_1$ 'e doğru saatin tersi yönünde çiziliyorsa eğriye pozitif yönde yönlendirilmiştir denir. Eğer eğri saat yönünde çiziliyorsa eğriye negatif yönde yönlendirilmiştir denir. Negatif yön $\gamma^{-}$ ile gösterilir. Dolayısıyla $\gamma$ eğrisi $z\, = \,z\,(t\,)\,, 0\, \leq\, t\, \leq 1$ fonksiyonu ile $\gamma^{-}$ eğrisi de $z\, = \,z\,(-t\,), -1 \leq\, t\, \leq\, 0$ fonksiyonu ile belirtilir.

**Tanım 2.3.4:** Sonlu sayıda $\gamma_j$, $\mathrm{j} = 1,2, \dots, \mathrm{n}$ düzgün eğrileri verilmiş olsun. Eğer bütün $j = 1,2, \dots, n-1$ değerleri için $\gamma_j$' nin bitim noktası $\gamma_{j+1}$ ' in başlangıç noktası ile çakışıyorsa bu $\gamma_j$ eğrilerinin birleşimi olan $\gamma$ eğrisine ***çevre (parçalı düzgün eğri)*** denir.

Özel olarak $\gamma_1$ ' in başlangıç noktası $\gamma_n$ 'nin bitiş noktası ile çakışıyorsa ***kapalı çevre*** denir. Örneğin; bir dikdörtgen çevresi, üçgen çevresi parçalı düzgün kapalı eğrilerdir. Kendisini kesmeyen çevreye ***basit çevre***, kendisini kesmeyen kapalı çevreye de ***basit kapalı çevre*** denir.

**Not:** Çevrelerin yönlendirilmesi, eğrilerin yönlendirilmesi gibidir.

**Örnek 2.3.4:**

**(a)** Eğer $a$ bir kompleks sayı ve $r\, > 0$ olmak üzere

$$z\,(t\,) = \,a\, + re^{it}\,, \qquad 0\, \leq\, t\, \leq\, 2\pi$$

fonksiyonu $a$ merkezli $r$ yarıçaplı çember olup pozitif yönlü düzgün kapalı bir çevre belirtir.

**(b)** Eğer $a$ ve $b$ kompleks sayılar olmak üzere

$$z(t) = a + (b-a)\,t\ , \qquad 0 \le t \le 1$$

fonksiyonu $a$ noktasını $b$ noktasına birleştiren doğru parçasıdır. Yönü de $a$ noktasından $b$ noktasına doğrudur. Şimdi de ispatını vermeyeceğimiz ancak sonuçlarını kullanacağımız bir teorem verelim.

**Teorem 2.3.1(Kapalı Jordan Eğrisi Teoremi):** Basit kapalı bir eğri (Kapalı jordan eğrisi) kompleks düzlemi üç kümeye ayırır, birisi kapalı Jordan eğrisinin iç kısmındaki noktalardan oluşmuş açık küme, diğeri kapalı Jordan eğrisinin üzerindeki noktaların (sınır noktaları) oluşturduğu kapalı küme ve bir diğeri de Jordan eğrisinin dışındaki noktaların oluşturduğu açık kümedir. Bu teoremin ifadesi geometrik olarak açık gibi görülse de ispatı oldukça zordur. Uygulamalarda çok sık karşılaşılan bu teoremden aşağıdaki sonuçları çıkarabiliriz.

**(a)** Bir iç noktayı bir dış noktaya birleştiren her Jordan eğrisi bir sınır noktası bulundurur.

**(b)** İç noktaların her çifti tamamen iç noktalardan oluşan bir Jordan eğrisi ile birleştirilebilir.

**(c)** Dış noktaların her çifti tamamen dış noktalardan oluşan bir Jordan eğrisi ile birleştirilebilir.

**(d)** İç noktaların kümesi sınırlı, dış noktaların kümesi sınırsızdır.

**Örnek 2.3.5:**

$a$ bir kompleks sayı olmak üzere $z(t) = a + re^{it}$ , $0 \le t \le 2\pi$ bir kapalı Jordan eğrisidir. Burada iç noktalar kümesi $\left|z(t) - a\right| < r$ sınır kümesi $\left|z(t) - a\right| = r$ ve dış noktalar kümesi ise $\left|z(t) - a\right| > r$ özelliğindeki $z$ noktalarının oluşturduğu kümedir.

**Tanım 2.3.5:** $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlanan sürekli $f(z)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer bir $\gamma(t)\,, a \le t \le b$ eğrisi tamamen $D$ bölgesinde bulunuyorsa bu takdirde $w(t) = f(\gamma(t))$ ifadesine $\boldsymbol{\gamma(t)}$ **' nin *f altındaki görüntüsü*** denir.

**Örnek 2.3.6:**

$A = \{ z : z = x_0 + iy , x_0 \in \mathbb{R}\}$ ve $B = \{ z : z = x + iy_0 , y_0 \in \mathbb{R}\}$ kümelerinin $f(z) = sinz$ fonksiyonu altındaki görüntüsünü bulalım.

**Çözüm:**

$A = \{ z : z = x_0 + iy , x_0 \in \mathbb{R}\}$ nin resmine bakalım.

$$w = sinz = \sin(x_0 + iy) = sinx_0 \cos(iy) + cosx_0 \sin(iy)$$
$$= sinx_0 \, cos\, hy + icosx_0 sinhy = u + iv$$
$$u = sinx_0 \, cos\, hy \, , v = cosx_0 sinhy$$

den

$$\frac{u^2}{sin^2 x_0} - \frac{v^2}{cos^2 x_0} = 1$$

elde edilir. Yani *uv*-düzleminde bir hiperbol elde edilir.

$B = \{ z : z = x + iy_0 , y_0 \in \mathbb{R}\}$ için benzer işlemler yapıldığında

$$w = sinz = \sin(x + iy_0) = sinxcoshy_0 + cosxsinhy_0 = u + iv$$
$$u = sinxcoshy_0 \, , v = cosxsinhy_0$$

olup

$$\frac{u^2}{cosh^2 y_0} + \frac{v^2}{sinh^2 y_0} = 1$$

elipsi elde edilir.

**Lemma 2.3.1:** $\gamma(t)$ düzgün bir eğri ve $f$ analitik ise $w(t) = f(\gamma(t))$ düzgün eğridir ve $w'(t) = f'(\gamma(t))\, \gamma'((t))$ dir.

**İspat:**

$\gamma(t)$ 'nin $f$ altındaki görüntüsü $w(t) = f(\gamma(t))$ olsun $f$ analitik olduğundan türevi vardır. Diğer taraftan ; $\gamma(t)$ düzgün olduğundan $\gamma'(t)$ mevcut ve $\gamma'(t) \neq 0$ dir. $w , f$ ve $\gamma$ 'nın bileşkesi olup iki türevlenebilir fonksiyonun bileşkesi türevlenebilir olduğundan $w$ türevlenebilirdir ve $w'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ olur.

**Not:** $\gamma$ düzgün eğri ve $f$ analitik olduğu sürece $w(t)$ eğrisi de düzgün eğridir.

**Not:** Kendisini kesmeyen eğrinin görüntüsü kendisini kesebilir.

**Tanım 2.3.6 :** $\gamma$ düzgün eğrisinin grafiğine eğrinin izi veya yörüngesi denir ve $|\gamma|$ şeklinde gösterilir.

## 2.4. KOMPLEKS İNTEGRALLER

**Tanım 2.4.1:** $f$ ve $F$ bir $D$ bölgesinde analitik olsunlar. Eğer

$$\frac{d}{dz}F(z) = f(z)$$

İse $F(z)$ ' ye $f(z)$ 'nin bir ***belirsiz integrali*** denir ve

$$F(z) = \int f(z)dz$$

şeklinde gösterilir. Diğer taraftan $c$ keyfi bir kompleks sabit olmak üzere

$$\frac{d}{dz}(F(z) + c) = F'(z) = f(z)$$

olması nedeniyle $f(z)$ 'nin belirsiz integrali $F(z) + c$ şeklindedir. Böylece

$$\int f(z)dz = F(z) + c$$

yazılabilir.

**Tanım 2.4.2:** $h : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$t \to h(t) = u(t) + iv(t)$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $u$ ve $v$, $[a,b]$ aralığı üzerinde integrallenebilirse $h$ fonksiyonunun $[a,b]$ 'deki belirli integrali

$$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

olarak tanımlanır.

**Tanım 2.4.3:** $f$ fonksiyonu $D \subset \mathbb{C}$ açık bölgesinde tanımlı ve sürekli olsun.

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$
$$t \to \gamma(t) \in D$$

eğrisinin

$$\gamma([a,b]) \subset D$$

olacak şekilde düzgün bir eğri olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f\,(z)dz = \int_{a}^{b} f\,(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

ifadesine, ***f* fonksiyonunun $\gamma$ eğrisi boyunca kompleks integrali** denir.

**Sonuç 2.4.1:** $\gamma$ , $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlanmış parçalı düzgün bir eğri olsun. Ayrıca

$$\gamma_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{C}$$
$$t \rightarrow \gamma_i(t)\,, i \;=\; 0,1, \dots, n-1$$

düzgün eğriler olmak üzere $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 + \cdots + \gamma_{n-1}$ eğrisi boyunca $f\,(z)$ 'nin kompleks eğrisel integrali

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} f\,(z)dz = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f\,(\gamma_i(t))\gamma_i'(t)dt$$

olarak tanımlanır.

**Not :** **(1)** Eğer $f\,(z) = u(x,y) + \, iv(x,y)$ ise düzgün $\gamma$ eğrisi boyunca olan integral

$$\int_{\gamma} f = \int_{\gamma} [u(x,y)dx - v(x,y)dy] + i \int_{\gamma} [u(x,y)dy + v(x,y)dx]$$

şeklinde de verilebilir.

**(2)** $\gamma$ 'nın çevre olması halinde de aynı tanım geçerlidir.

**Örnek 2.4.1:**

**(a)** $\gamma$ eğrisi, $\gamma(t) = 2t + 3ti$ , $1 \leq t \leq 2$ olarak verilsin. Bu durumda

$$\int_{\gamma} z^2\,dz = \int_{1}^{2} (2t+3it)^2(2+3i)dt = (2+3i)^3 \int_{1}^{2} t^2 dt = \frac{322}{3} + 21i$$

olarak bulunur.

**(b)** $\gamma$: $|z - z_0| \;=\;$ R tam çemberinin pozitif yönde yönlendirilmiş hali olsun. Bu durumda

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0}$$

integralini hesaplayalım. Verilen $\gamma$ eğrisi

$$z - z_0 = |z - z_0| e^{it} = Re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$$

formunda yazılabilir. Bu durumda $dz = i\, Re^{it}\, dt$ olup

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}}{Re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

elde edilir.

**Lemma 2.4.1:** $f$ ve $g$ , sürekli iki fonksiyon olsun. $\gamma$,$\gamma_1$ve $\gamma_2$'de parçalı düzgün eğriler olarak verilsin. Buna göre $c_1$ve $c_2$ kompleks iki sabit olmak üzere

(**a**) $\displaystyle\int_\gamma (c_1 f + c_2 g) = c_1 \int_\gamma f + c_2 \int_\gamma g$

(**b**) $\displaystyle\int_{\gamma^-} f = -\int_\gamma f$

(**c**) $\displaystyle\int_{\gamma_1 + \gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$

dir. Ayrıca (a) ve (c) ifadeleri

$$\int_\gamma \left( \sum_{i=1}^{n} c_i f_i \right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \int_\gamma f_i$$

*ve*

$$\int_{\gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n} f = \sum_{i=1}^{n} \int_{\gamma_i} f$$

şeklinde genelleştirilebilir.

**Not:** $\int_\gamma f_i$ integrallerinin hepsi mevcutsa o zaman toplamla integral yer değiştirir.

**İspat:**

**(a)** $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)\, , g(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$

$c_1 = c_{12} + ic_{12}, c_2 = c_{21} + ic_{22}$ ve $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ olsun. Buna göre Tanım 2.4.3 ve belirli integrallerin özellikleri kullanılarak bu Lemma nın doğruluğu görülebilir.

**(c)** Tanım 2.4.3 gereği

$$\int_{\gamma^-} f = \int_a^b f\left(\gamma^-(t)\right)\frac{d\gamma^-}{dt}dt$$

yazılabilir. Tanım 2.3.2'deki (b)'den

$$= \int_a^b f\big(\gamma(a+b-t)\big)\,\gamma'(a+b-t)dt$$

dir. $s = a + b - t$ değişken değiştirmesi yaparsak

$$= \int_b^a f\left(\gamma(s)\right)\left(-\gamma'(s)\right)(-ds)$$

$$= -\int_a^b f\left(\gamma(s)\right)\left(\gamma'(s)\right)ds = -\int_\gamma f$$

elde edilir.

**(d)** $\gamma_1 : [a\ , a_1] \to \mathbb{C}\ ,\ \gamma_2 : [a_1, b] \to \mathbb{C}$

düzgün eğrilerini göz önüne alalım. Bu durumda

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1\,, & t \in [a, a_1] \\ \gamma_2\,, & t \in [a_1, b] \end{cases}$$

olup Tanım 2.4.3'den dolayı

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_a^b f\left((\gamma_1+\gamma_2)(t)\right)(\gamma_1+\gamma_2)'(t)dt$$

yazılır. Riemann anlamındaki integral özelliğinden $\gamma$ 'nın sürekli olması nedeniyle yukarıdaki integralin sağ tarafı

$$\int_a^b f\left((\gamma_1+\gamma_2)(t)\right)(\gamma_1+\gamma_2)'(t)dt = \int_a^{a_1} f\left((\gamma_1+\gamma_2)(t)\right)(\gamma_1+\gamma_2)'(t)dt +$$

$$+ \int_{a_1}^b f\left((\gamma_1+\gamma_2)(t)\right)(\gamma_1+\gamma_2)'(t)dt$$

şeklinde yazılır.

$$\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_a^{a_1} f\,(\gamma_1)\gamma_1{}'(t)dt + \int_{a_1}^b f\,(\gamma_2)\gamma_2{}'(t)dt = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$$

elde edilir.

**Lemma 2.4.2:** $\tilde{\gamma}\ :[\tilde{a},\tilde{b}]\rightarrow\mathbb{C}$ eğrisi , $\gamma:[a,b]\rightarrow\mathbb{C}$ eğrisinin yeni parametrik gösterilimi olsun. Bu durumda

$$\int_{\gamma} f=\int_{\tilde{\gamma}} f$$

dir.

**İspat:**

Tanım 2.4.3 gereği

$$\int_{\gamma} f=\int_{a}^{b} f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)dt$$

yazılır. Kesim 2.3'deki ikinci uyarı gereği $\gamma\ (t)=\tilde{\gamma}(h(t))$ olduğundan

$$\gamma'(t)=\frac{d\tilde{\gamma}((ht))dh}{dh\qquad dt}$$

dir.

$h:[a,b]\rightarrow\ [\tilde{a},\tilde{b}]$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$\int_{\gamma} f=\int_{a}^{b} f\left(\tilde{\gamma}\big(h(t)\big)\right)\frac{d\tilde{\gamma}\ (h(t))dh}{dh\qquad dt}dt$$

$t=a$ için $s=\tilde{a}\ =\ h(a)$ ve $t=b$ için $s=\tilde{b}=h(b)$ olmak üzere $s=h(t)$ yeni bir değişken olsun. O halde

$$=\int_{a}^{b} f\left(\tilde{\gamma}(s)\right)\frac{d\tilde{\gamma}\ (h(t))dh}{dh\qquad dt}dt$$

$$=\int_{\tilde{\gamma}} f(\tilde{\gamma}\big(h(t)\big))\frac{d\tilde{\gamma}}{dh}dt=\int_{\tilde{\gamma}} f$$

elde edilir.

**Örnek 2.4.2:**

$\gamma$ eğrisi, orjini $1+i$ noktasına birleştiren doğru parçası olsun. Bu durumda,

$$\int_{\gamma} x\ dz$$

integralini bulalım. 0 ile $1+i$ noktasını birleştiren doğru parçası $z(t)=t+it$ , $0 \le t \le 1$, Böylece $z(t)=t+it$ ve $dz = dt + idt = (1+\ i)dt$ dir. Buradan;

$$\int_{\gamma} xdz = \int_{0}^{1} t(1+\ i)dt = (1+\ i)\int_{0}^{1} t\,dt = \frac{1+i}{2}$$

olarak bulunur.

**Tanım 2.4.4:** $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$

$$t \to \gamma\ (t) = x(t) + iy(t)$$

düzgün bir eğri olsun. Bu eğrinin yay uzunluğu,

$$\int_{a}^{b} |\gamma'(t)|\, dt = \int_{a}^{b} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

şeklinde tanımlanır ve $L(\gamma)$ ile gösterilir.

**Örnek 2.4.3:**

$\gamma(t) = e^t(sint\ +\ icost)$ ,$0 \le\ t\ \le \pi\,/\,2$, eğrisinin uzunluğunu hesaplayalım.

$$x = e^t sint \ \Rightarrow \qquad x' = e^t sint + e^t cost$$

$$y = e^t cost \ \Rightarrow \qquad y' = e^t cost\ -\ e^t sint$$

olduğundan

$$L(\gamma) = \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{(e^t sint + e^t cost)^2 + (e^t cost\ -\ e^t sint)^{\,2}}\, dt$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{2}\, e^t dt$$

$$= \sqrt{2}(e^{\pi/2} - 1)$$

dir.

**Lemma 2.4.3:** $\tilde{\gamma}$, $\gamma$ eğrisinin farklı parametrik gösterimi olsun. $L(\gamma\,) = L(\tilde{\gamma})$ 'dir. Yani eğrinin uzunluğu eğrinin gösterilim şeklinden bağımsızdır.

**İspat:** $h'(t) > 0$ olsun. Kesim 2.3'deki ikinci uyarı gereği $\gamma\,(t) = \tilde{\gamma}\,(h(t))$ olduğundan,

$$\gamma'(t) = \frac{d\tilde{\gamma}(ht))dh}{dh\ \ dt}$$

dir. $h : [a,b] \to [\tilde{a},\tilde{b}]$ sürekli ve türetilebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt = \int_a^b \left|\frac{d\tilde{\gamma}\,(ht))dh}{dh\, dt}\right| dt = \int_a^b \left|\frac{d\tilde{\gamma}\,(ht))dh}{dh}\right| \frac{dh}{dt} dt$$

$t = a$ için $s = \tilde{a} = h(a)$ ve $t = b$ için $s = \tilde{b} = h(b)$ olmak üzere $s = h(t)$ yeni bir bağımsız değişken olsun. O halde

$$L(\gamma) = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left|\frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds}\right| \frac{ds}{dt} dt = \int_{\tilde{a}}^{\tilde{b}} \left|\frac{d\tilde{\gamma}(s)}{ds}\right| ds = L(\tilde{\gamma})$$

elde edilir.

**Lemma 2.4.4:** $g : [a,b] \to \mathbb{C}$ eğrisi verilsin. Bu durumda

$$\textbf{(a)}\ Re \int_a^b g(t)dt = \int_a^b Re(g(t))dt$$

$$\textbf{(b)} \left|\int_a^b g(t)dt\right| \leq \int_a^b |g(t)|\, dt$$

dir.

**İspat:**

**(a)** Bu Lemmanın ispatı kompleks eğrisel integrallerin tanımı ve özellikleri kullanılarak çok basit bir şekilde elde edilebilir.

**(b)** Sabit $r$ ve $\theta$ değerleri için,

$$\int_a^b g(t)dt = re^{i\theta}$$

olsun. Böylece,

$$r = e^{-i\theta} \int_a^b g(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta} g(t)dt$$

olur. Bu eşitlikten, her iki yanın reel kısımlarının eşitliği yazılırsa,

$$r = Re \int_a^b e^{-i\theta} g(t)dt = \int_a^b Re\big[e^{-i\theta} g(t)\big]dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta} g(t)|\, dt = \int_a^b |g(t)|\, dt$$

bulunur. Tanım gereği,

$$\left|\int_a^b g(t)dt\right| = \left|\, re^{i\theta} \right| = r$$

olur. Böylece,

$$\left|\int_a^b g(t)dt\right| < \int_a^b |g(t)|\, dt$$

elde edilir.

**Lemma 2.4.5:** $D, \mathbb{C}$ ’de bir bölge ve $f : D \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $D$ bölgesinde bulunan parçalı düzgün bir $\gamma$ eğrisinin üzerindeki her $z$noktası için$|f\ (z)| \ \leq\ M$ olacak şekilde bir $M \geq\ 0$ sabiti varsa bu taktirde

$$\left|\int_\gamma f\right| \leq ML(\gamma)$$

eşitsizliği sağlanır.

**İspat:**

Bu Lemmanın ispatı

$$\int_\gamma |f|\, |dz| = \int_a^b |f(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|\, dt$$

olduğunun da göz önüne alınmasıyla Tanım 2.4.3, Lemma 2.3.4 ve Tanım 2.4.4 kullanılarak eşitsizlik elde edilebilir

**Teorem 2.4.1:** Bir $f :\ D \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin ve $\gamma$ eğrisi $D$ bölgesinde bulunan, $z_1$ noktasını, $z_2$ noktasına birleştiren parçalı düzgün bir eğri olsun. $D$ ’de $F' = f$ olacak şekilde bir $F: D \to \mathbb{C}$ analitik fonksiyonu varsa,

$$\textbf{(a)} \int_\gamma f = F(z_2) - F(z_1)$$

$$\textbf{(b)}\ z_1 = z_2 \text{ ise } \int_\gamma f = 0$$

dir.

**İspat:** **(a)** $\gamma(a) = z_1$ ve $\gamma(b) = z_2$ Tanım 2.4.3 gereği

$$\int_\gamma f = \int_a^b f\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)dt = \int_a^b F'\left(\gamma(t)\right)\gamma'(t)dt = \int_a^b \frac{dx}{dt}\left[F\left(\gamma(t)\right)\right]dt$$

$$= F(\gamma(t))\Big|_a^b = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) = F(z_2) - F(z_1)$$

elde edilir.

**(b)** $z_1 = z_2$ ise $F(z_2) = F(z_1)$ olacağından

$$\int_\gamma \mathrm{f} = 0$$

olur.

**Lemma 2.4.6:** $\gamma$ , $r$ yarıçaplı ve $a \in \mathbb{C}$ merkezli bir çember olsun. $n \in \mathbb{N}$ alalım. Bu durumda,

$$\int_\gamma (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 \quad , & n \neq -1 \\ 2\pi i \,, & n = -1 \end{cases}$$

dir.

**İspat:**

Önce $n \geq 0$ olsun. Bu durumda $f(z) = (z-a)^n, \mathbb{C}$ 'de analitik olduğundan Teorem 2.4.1 gereği sonuç görülür.

$n \leq -2$ olsun. Bu durumda $f(z) = (z-a)^n, \mathbb{C} - \{a\}$ ' da analitik olduğundan Teorem 2.4.1 gereği sonuç görülür.

Son olarak, $n = -1$ olsun. Bu durumda $\gamma(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ ,ve $\gamma'(t) = ire^{it}dt$ olup

$$\int_\gamma (z-a)^{-1}dz = \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}dt}{re^{it}+a-a} = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

elde edilir.

## 2.5. CAUCHY İNTEGRAL TEOREMİ VE SONUÇLARI

Kompleks analizin temelini oluşturan ve analitik fonksiyonları karakterize eden önemli teoremlerden birisi de Cauchy İntegral Teoremi'dir. Ayrıca bu teoremin sonuçları uygulama açısından çok önemlidir. Örneğin, hesaplanması çok zor olan bazı integraller bu sonuçlar yardımıyla kolayca hesaplanabilir. Cauchy tipi integraller yardımıyla analitik bir fonksiyonun sınırdaki değeri verilmesi halinde başka bir noktadaki değerini hesaplayabiliriz.

**Teorem 2.5.1 (Cauchy İntegral Teoremi):** $D$ bir bölge ve $\partial D, D$ ' sınırı olsun. Eğer $f$ fonksiyonu, $D$'nin içinde ve $\partial D$ 'de analitik ise

$$\int_{\partial D} f(z)dz = 0$$

dir.

**Örnek 2.5.1:**

**(a)** $\gamma$ eğrisi birim karenin çevresi ve $f(z) = \sin(z^2)$ olsun. Bu durumda

$$\int_{\gamma} f = 0$$

olur. Gerçekten, $f$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan,$\gamma$ eğrisi üzerinde ve içinde analitik ve Teorem 2.5.1 gereği integral sıfırdır.

**(b)** $\gamma$ birim çember olsun. Bu durumda

$$\int_{\gamma} \frac{z^2}{z-2} dz$$

integralini ele alalım.

$$f(z) = \frac{z^2}{z-2}$$

fonkiyonunun singüler noktası olan $z = 2$ noktası birim çemberinin dışında olduğundan, $f(z)$ fonksiyonu $\gamma$ eğrisinin içinde ve üzerinde analitiktir. Cauchy integral teoremi gereği integral sıfırdır.

**Not:** Bazen $f$ fonksiyonu bir $\gamma$ eğrisinin içindeki bazı noktalarda analitik olmayabilir. Bu durumda, integral değerinin sıfır olması gerekmez. Örneğin, $\gamma$ birim çember olsun.

$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z}$$

integralini ele alalım.

$$f\,(z) = \frac{1}{z}$$

fonksiyonun singüler noktası $z = 0$ birim çember içinde olup Lemma 2.4.6 dan

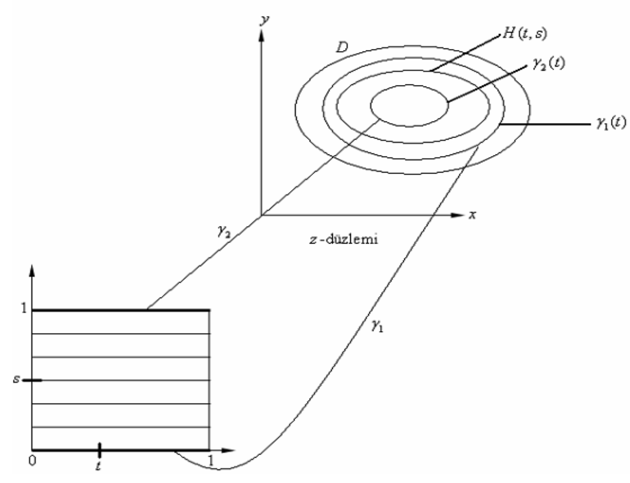
$$\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

bulunur.

**Tanım 2.5.1:** $D \subset \mathbb{C}$ bir alt bölge ve $\gamma_1 : [0,1] \to D$ , $\gamma_2 : [0,1] \to D$ kapalı iki eğri olsun. Eğer; Her bir $s \in [0,1]$ için, $t \to H(t,s)$ kapalı bir eğridir.

$$H\,(t,0) = \gamma_1(t), \qquad H\,(t,1) = \gamma_2(t), \qquad 0 \le t \le 1$$

bu iki koşulu gerçekleyen sürekli bir $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ fonksiyonu bulunabilirse $\gamma_1$ ve $\gamma_2$ eğrilerine ***homotopiktirler*** denir: (Bakınız Şekil 2.2)




Şekil 2.2. Eğrilerde homotopik gösterim.

**Not:** $\gamma_1$ ve $\gamma_2$ iki homotopik eğri ise, bu genellikle $\gamma_1 \simeq \gamma_2$ şeklinde yazılır.

**Tanım 2.5.2:** $\gamma_2(t) = d$ (sabit), yani $\gamma_2$ belli bir nokta olsun. Bu durumda $\gamma_1$, $\gamma_2$'ye homotop ise $\gamma_1$, $D$ bölgesinde bir ***d* noktasına büzülebiliyor (deforme edilebiliyor)** denir.

**Tanım 2.5.3:** $D$ bölgesinin sınırı olan $\partial D$ kapalı eğrisi $D$*'nin* her noktasına büzülebiliyorsa $D$ bölgesine ***basit bağlantılıdır*** denir.

**Not:** Homotopi, kapalı eğriler kümesinde bir denklik bağıntısıdır.

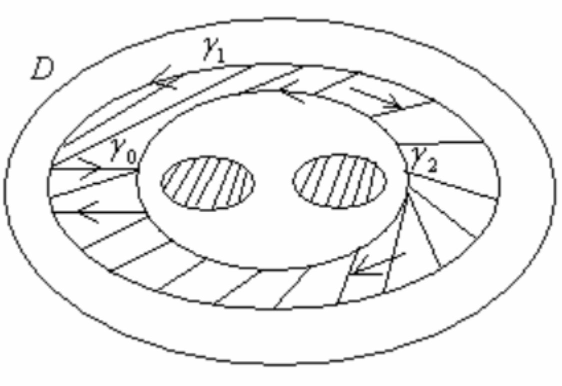
**Lemma 2.5.1:** $f$ bir $D$ bölgesinde analitik ve $\gamma_1$, $\gamma_2$, $D$'de basit kapalı iki eğri olsun. Eğer $\gamma_1$, $\gamma_2$'ye $D$'de homotopikse,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

dir.

**İspat:**

Bir $\gamma_0$ doğru parçası ile $\gamma_1$ ve $\gamma_2$ eğrilerini birleştirelim.




Şekil 2.3. Basit bağlantılı bölge

Böylece sınırı $\gamma_1 + \gamma_0 - \gamma_2 - \gamma_0$ olan basit bağlantılı bir bölge elde edilir.(Bakınız Şekil 2.3.). Cauchy teoremi gereği

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_0} f(z)dz - \int_{\gamma_2} f(z)dz - \int_{\gamma_0} f(z)dz = 0$$

ve böylece de

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = \int_{\gamma_2} f(z)dz$$

bulunur.

**Sonuç 2.5.1:** $f$, bir $D$ bölgesinde analitik ve $\gamma_1$ kapalı eğrisi $D$ içinde bir noktaya homotopik olsun. Bu durumda,

$$\int_{\gamma_1} f(z)dz = 0$$

dir.

**Lemma 2.5.2:** Eğer $f$, basit bağlantılı bir $D$ bölge üzerinde analitik ise her $z_1$, $z_2 \in D$ sabit noktaları için

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$$

integrali bu bölge içinde, $z_1$'i $z_2$'ye birleştirilen yoldan bağımsızdır.

## 2.6. Cauchy İntegral ve Türev Formülleri

Cauchy integral formülü, bazı kompleks integralleri hesaplamamızda kolaylıklar sağlar. Ayrıca, Cauchy türev fomülü ile analitik bir fonksiyonun sonsuz kere türevlenebileceğini elde edebiliriz.

**Teorem 2.6.1 (Cauchy İntegral Formülü):** $\gamma$, $D$ bölgesinin içinde basit kapalı bir eğri olsun. Eğer $z_0$ , $\gamma$ eğrisi içinde bir nokta ve $f(z), D$'de analitik ise

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

dir.

**Örnek 2.6.1:**

$\gamma, |z| = 2$ çemberi olmak üzere

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz$$

intergralini hesaplayalım.

**Çözüm:**

$f(z) = z^2 - 4z + 4$ fonksiyonu $\gamma$ eğrisi üzerinde ve içinde analitik olduğundan Cauchy integral formülü gereği

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 - 4z + 4}{z + i} dz = 2\pi i f(-i) = 2\pi i(3 + 4i) = \pi(-8 + 6i)$$

elde edilir.

**Örnek 2.6.2:**

$\gamma, |z - 2i| = 4$ çemberi olmak üzere

$$\int_{\gamma} \frac{z}{z^2 + 9} dz$$

integralini hesaplayalım.

**Çözüm:**

İntegrant fonksiyonun singüler noktaları $z^2 + 9 = (z - 3i)(z + 3i) = 0 \Longrightarrow$ $z = 3i$ ve $z = -3i$ olup sadece $3i$ noktası $\gamma$ eğrisi içinde kalır. İntegrantı yeniden yazdığımızda

$$\frac{z}{z^2 + 9} = \frac{\frac{z}{z+3i}}{z - 3i}$$

elde edilir.

$$f(z) = \frac{z}{z + 3i}$$

olarak tanımlanırsa, $f$ fonksiyonu $\gamma$ üzerinde ve içindeki tüm noktalarda analitik olduğundan Cauchy integral formülü gereği

$$\int_{\gamma} \frac{z}{z^2+9}dz = \int_{\gamma} \frac{\frac{z}{z+3i}}{z-3i}dz = 2\pi i f(3i) = 2\pi i \frac{3i}{6i} = \pi i$$

elde edilir.

**Teorem 2.6.2 (Cauchy Türev Formülü):** $w(z) = f(z)$ fonksiyonu basit kapalı bir $\gamma$ eğrisinin içinde ve üzerinde analitik olsun. Eğer $z_0$ , $\gamma$'nın içinde bir nokta ise

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta \ , n = 0,1,2, \ldots$$

dir.

**Örnek 2.6.3:**

$\gamma, |z| = 1$ çemberi olmak üzere

$$\int_{\gamma} \frac{z+1}{z^4+2iz^3}dz$$

integralini hesaplayalım.

**Çözüm:**

İntegrant fonksiyonun singüler noktaları $z = 0$ ve $z = -2i$ dir. Fakat sadece $z = 0$ noktası kapalı eğrinin içindedir. İntegrant yeniden yazılırsa

$$\frac{z+1}{z^4+2iz^3} = \frac{\frac{z+1}{z+2i}}{z^3}$$

elde edilir. $z_0 = 0, n = 2$ ve $f(z) = z + 1/(z + 2i)$ seçilirse

$$f''(0) = \frac{(2i-1)}{4i}$$

olup, Cauchy türev formülü gereği

$$\int_{\gamma} \frac{z+1}{z^4+2iz^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''(0) = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}i$$

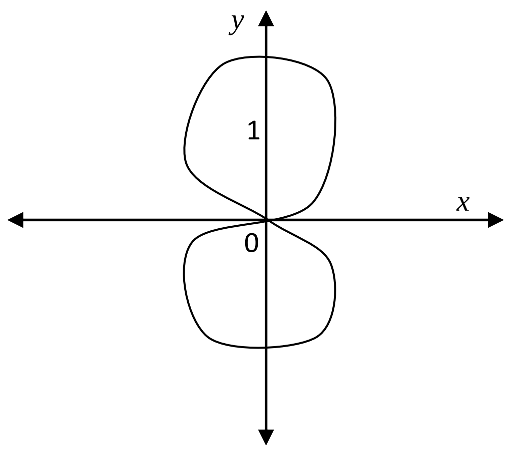
elde edilir.

**Örnek 2.6.4:**

$C$ yanda verilen eğri olmak üzere ,

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz$$

integralini hesaplayalım.




**Çözüm:**

$C$ basit kapalı eğri olmadığından yukarıdaki şekilde $C_1$ ve $C_2$ gibi basit kapalı iki eğrinin birleşimi olarak düşünebiliriz. $C_1$ saat yönünde yani negatif yönde iken tersi olan -$C_1$ pozitif yöne sahiptir. Böylece

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = \int_{C_1} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz + \int_{C_2} \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz$$

$$= -\int_{-C_1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}dz + \int_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}dz = -\,\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$$

yazılabilir ve (1) ve (2) formüllerini kullanmak için yönlendirilebilir. $\mathrm{I}_1$ yi hesaplamak için $\mathrm{z}_0 = 0\,, f(z) = (z^3+3)/\,(z-i)^2$ ve $f(0) = -3$ olarak tanımlayalım, Cauchy integral formülü gereği

$$\mathrm{I}_1 = \int_{-C_1} \frac{\frac{z^3+3}{(z-i)^2}}{z}dz = 2\pi i\, f(0) = 2\pi i(-3) = -6\pi i$$

elde edilir.

$\mathrm{I}_2$ yi hesaplamak için $\mathrm{z}_0 = i, n = 1\,, f(z) = (z^3+3)/z, f'(z) = (2z^3-3)/z^2$ ve $f'(i) = 3+2i$ olarak tanımlayalım. Cauchy türev formülünden

$$\mathrm{I}_2 = \int_{C_2} \frac{\frac{z^3+3}{z}}{(z-i)^2}dz = \frac{2\pi i}{1!}f'(i) = 2\pi i(3+2i) = -4\pi + 6\pi i$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\int_C \frac{z^3+3}{z(z-i)^2}dz = -\mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = 6\pi i + (-4\pi + 6\pi i) = -4\pi + 12\pi i$$

elde edilir.

**Sonuç 2.6.1:** Cauchy Türev Formülü'ne dikkat edersek, $f\ (z)$'nin her basamaktan türevinin de analitik bir fonksiyon olduğunu söyleyebiliriz.

**Sonuç 2.6.2:** Eğer $w = f\ (z) = u(x,y) + iv(x,y)$ fonksiyonu bir noktada analitik ise bu noktada $u, v$ fonksiyonları her basamaktan sürekli türevlere sahiptir.

**Teorem 2.6.3 (Cauchy Eşitsizliği):** $w = f\ (z)$ fonksiyonu bir $|z-a| < r$ diskinin içinde ve sınırında analitik olsun. $|f(z)|$'nin bu diskin sınırındaki maksimum değeri $M$ ise

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!\,M}{r^n}$$

dir.

**İspat:**

Bu diskin sınırı $\gamma$ olsun. O halde Cauchy Türev Formülü gereği

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

yazılabilir. Her iki tarafın mutlak değeri alınırsa,

$$\left|f^{(n)}(a)\right| = \left|\frac{n!}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\int_{\gamma}\left|\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|$$

yazılır $\gamma$ eğrisi üzerindeki $z$ değerleri için, $\left|f(z)\right| \leq M$ ve ayrıca $\left|z-a\right| = r$ olduğundan

$$\left|f^{(n)}(a)\right| \leq \frac{n!\,M}{2\pi r^{n+1}}\int_{\gamma}|dz| = \frac{n!\,M}{2\pi r^{n+1}}2\pi r = \frac{n!\,M}{r^n}$$

olduğu görülür.

**Teorem 2.6.4 (Cebirin Temel Teoremi):** Sabit olmayan bir

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0\ , \qquad a_n \neq 0$$

polinomunun en az bir sıfır yeri vardır.

**İspat:**

$P(z)$ sonlu düzlemde analitik, yani tam fonksiyondur. $|z| \to \infty$ için $|P(z)| \to \infty$ dir. Bu nedenle $1/(|P(z)|)$ nin belli bir $|z| = r$ çemberinin dışındaki bölgede sınırlı olduğu görülür. Eğer her $z$ için $P(z) \neq 0$ olursa, $1/(|P(z)|)$, $|z| \leq r$ 'nin içinde de sınırlı olur. O halde Liouville teoremi gereği $1/P(z)$ sabittir. Bu ise bir çelişkidir.Bu çelişkiye her $z$ için $P(z) = 0$ varsayımı ile varılır. O halde $P(z) = 0$ olacak şekilde bir $z_0$ vardır.

**Teorem 2.6.5 ( $\mathbb{C}_\infty$ 'da Liouville Teoremi ):** $f, \mathbb{C}_\infty\ da$ analitik ise sabittir.

**İspat:**

$f\ (1/z), z = 0$'da analitik olduğundan $|z| \leq r$'de $|f\ (1/z)| \leq M_1$,yani $|z| \geq 1/r$ 'de $|f\ (z)| \leq M_1$'dir. Eğer $M_2, |f\ (z)|$'nin $z \leq 1/r$ deki maksimumu ise tüm $z \in \mathbb{C}_\infty$ değerleri için $|f\ (z)| \leq M = max\{M_{1,} M_2\}$, Yani $f$ sınırlıdır. O halde Liouville Teoremi gereği $f$ sabittir.

## BÖLÜM 3

## GLOBAL CAUCHY TEOREMİ

### 3.1. GLOBAL CAUCHY TEOREMİ

Bu bölümde Cauchy teoreminin ve Cauchy integral formülünün global versiyonlarını vereceğiz.$R = \{z: a \le x \le b\, , c \le y \le d\}$ karmaşık düzlemde kapalı bir dikdörtgen ve $h: R \to \mathbb{C}$ nin sürekli fonksiyon olduğunu farz edelim. Bizim kastettiğimiz temel sonuç bir çift "iterated" integralinin eşitliğini belirtir.

$$\int_c^d \left( \int_a^b h(t,s)dt \right) ds = \int_a^b \left( \int_c^d h(t,s)ds \right) dt \qquad (\mathbf{3.1.})$$

Genelde $h$ reel değerli iken geçerlidir. Karmaşık değerli fonksiyonlar için geçerli kalır mı sorusudur. Bunu görmek için, $\gamma$ ve $\beta$, $\mathbb{C}$'de parçalı düzgün eğrilerini ve $|\gamma|$x$|\beta| = \{(z,\zeta) \in \mathbb{C}^2: z \in |\gamma|, \zeta \in |\beta|\}$ kümesinde sürekli iki kompleks değişkenli $g$ fonksiyonunu ele alalım. Bu durumda (3.1) eşitliğinin genellemesi

$$\int_\beta \left( \int_\gamma g(z,\zeta)dz \right) d\zeta = \int_\gamma \left( \int_\beta g(z,\zeta)d\zeta \right) dz \qquad (\mathbf{3.2})$$

biçiminde olur.

Birinci durum olarak ,$\gamma: [a,b] \to \mathbb{C}$ ve $\beta: [c,d] \to \mathbb{C}$'nin ikiside düzgün eğri olsun. R dikdörtgeninde, sürekli $h(t,s) = g[\gamma(t), \beta(s)]\dot{\gamma}(t)\dot{\beta}(s)$ fonksiyonu tanımlanırsa ve (3.1) bağıntısından

$$\int_{\beta}\left(\int_{\gamma} g(z,\zeta)dz\right)d\zeta = \int_{c}^{d}\left(\int_{a}^{b} g[\gamma(t),\beta(s)]\dot{\gamma}(t)dt\right)\dot{\beta}(s)ds$$

$$= \int_{c}^{d}\left(\int_{a}^{b} g[\gamma(t),\beta(s)]\dot{\gamma}(t)\dot{\beta}(s)dt\right)ds$$

$$= \int_{a}^{b}\left(\int_{c}^{d} g[\gamma(t),\beta(s)]\dot{\gamma}(t)\dot{\beta}(s)ds\right)dt$$

$$= \int_{a}^{b}\left(\int_{c}^{d} g[\gamma(t),\beta(s)]\dot{\beta}(s)ds\right)\dot{\gamma}(t)dt$$

$$= \int_{\gamma}\left(\int_{\beta} g(z,\zeta)d\zeta\right)dz$$

olduğundan (3.2) görülür. Şimdi $\gamma$ ve $\beta$ parçalı düzgün eğri olsun. Bu durumda $\gamma_k$ ve $\beta_l$ düzgün eğrilerinin toplamı olarak $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n$ ve $\beta = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m$ şeklinde yazabiliriz. Birinci durum ve eğrisel integralin özelliklerinden

$$\int_{\beta}\left\{\int_{\gamma} g(z,\zeta)dz\right\}d\zeta = \sum_{l=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\int_{\beta_l}\left\{\int_{\gamma_k} g(z,\zeta)dz\right\}d\zeta$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m}\int_{\gamma_k}\left\{\int_{\beta_l} g(z,\zeta)d\zeta\right\}dz$$

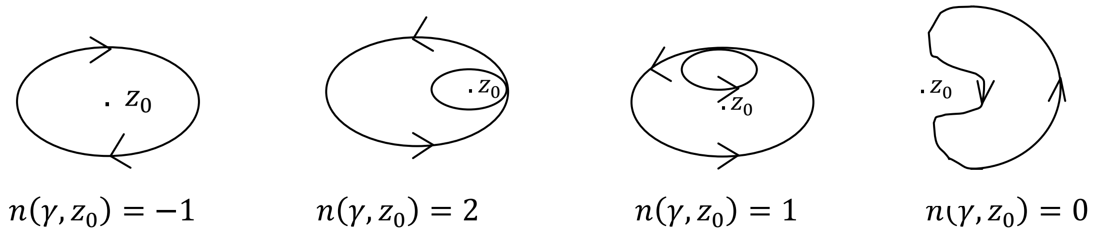
$$= \int_{\gamma}\left\{\int_{\beta} g(z,\zeta)d\zeta\right\}dz$$

(3.2) elde edilir. Şimdi global Cauhy teoremi için gerekli olan bir kavramı tanımlayalım.

**Tanım 3.1.1 :** $\gamma$, $\mathbb{C}'$ de kapalı düzgün bir eğri ve $z_0 \in \mathbb{C}$, $\gamma$ üzerinde bulunmayan sabit bir nokta olsun. Bu takdirde

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{dz}{z - z_0}$$

integral değerine ***$\gamma$'nın $z_0$ noktasına göre indeksi*** denir. Yani indeks $\gamma$ 'nın $z_0$ çevresindeki dönme sayısıdır. (Bakınız Şekil 3.1.)




Şekil 3.1. Eğrinin nokta çevresindeki dönme sayısı

Kapalı Jordan Eğrisi Teoremini kullanarak, basit kapalı $\gamma$ eğrisinin $z_0$ noktası etrafında dönme sayısı

$$n\,(\gamma, z_0) = \begin{cases} \pm 1 \;; z_0,\ \gamma \text{ 'nın içinde} \\ 0 \;; z_0, \gamma \text{ 'nındışında} \end{cases}$$

şeklinde verilebilir.

**Teorem 3.1.1:** $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ kapalı bir eğri ve $z_0 \in \mathbb{C}$ sabit bir nokta ve $z_0 \notin \gamma$ olsun. Bu durumda $n(\gamma, z_0)$ bir tamsayıdır.

**İspat:**

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda, integrantı sürekli olan noktalarda

$$g'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}$$

yazılır. Böylece, $g'(t)$ fonksiyonunun var olduğu noktalarda

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-g(a)}(\,\gamma(t) - z_0)\right] = 0$$

olur. O halde $e^{-g(a)}(\,\gamma(t) - z_0)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sürekli olduğundan bu fonksiyon aynı aralıkta sabit olmalıdır. Bu sabit değer de, $t_0 = a$ için

$$e^{-g(a)}(\,\gamma(a) - z_0) = e^{-g(a)}(\,\gamma(b) - z_0)$$

olur. $\gamma$ kapalı bir eğri olduğundan $\gamma(a) = \gamma(b)$ yazılabilir. Böylece,

$$e^{-g(a)} = e^{-g(b)}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$g(t) = \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds$$

integralinden $g(a) = 0$ yazılabilir. Böylece, $e^{-g(b)} = 1$ olur. Bu ise ancak $n$ tamsayısı için $g(b) = 2n\pi i$ olmasıyla mümkündür. Buradan,

$$n(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{dz}{z - z_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s) - z_0} ds = \frac{1}{2\pi i} g(b) = \frac{1}{2\pi i} 2n\pi i = n$$

elde edilir.

**Lemma 3.1.1:** $D$ kompleks düzlemde bir bölge ve $z_0 = z_1$ şartını sağlamayan $z_0$ ve $z_1$ $D$'de iki nokta olsun. Bu durumda $D$ de başlangıç noktası $z_0$ ve bitiş noktası $z_1$ olan parçalı düzgün eğri vardır.

## 3.2. DÖNGÜLER

Global Cauchy teoremine geçmeden bazı ilişkili kavramlar verilecektir. Döngü olarak kompleks düzlemde kapalı düzgün yol, parçalı döngü olarak kapalı düzgün yolların birleşimi alınacaktır. Eğer $\gamma_1$,$\gamma_2, \dots, \gamma_p$ yolları bir $\sigma$ döngüsü oluştururlar ise bu $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ şeklinde ifade edilir. $\sigma = (\gamma_{1,}\gamma_2, \dots, \gamma_p)$ döngüsünde $\gamma_{\mathrm{k}}$ yolları için tekrarlamalar ve zıtlıklar söz konusu olabilir. Mesela bir $\sigma = (\gamma, \beta, \gamma, -\alpha, -\alpha\ , \beta, \gamma\ )$ döngüsünde olduğu gibi tekrarlamalar olabilir. Bu durumda $\sigma = (3\gamma, 2\beta, -2\alpha)$ şeklinde kısaltılıp yazılabilir. Bazı kitaplarda bu döngüyü göstermek için $\sigma = 3\gamma + 2\beta - 2\alpha$ ifadeside kullanılmaktadır. Bizde çalışmamızda $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$, döngüsünü $\sigma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_p$ olarak ifade edeceğiz. Eğer $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$, bir döngüsü için $|\sigma|$ ,$|\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \dots \cup |\gamma_p|$ olarak tanımlanır. $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $|\sigma|$, $A$ tarafından içeriliyorsa $\sigma$, $A$ da döngüdür denir. $\sigma = (\gamma_1\ , \gamma_2, \dots, \gamma_p\ )$, $A$ kümesi içinde bir döngü ve $f : A \to \mathbb{C}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\int_{\sigma} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_p} f(z)dz$$

şeklinde tanımlanır. Özellikle $z \in \mathbb{C} \sim |\sigma|$ de $z$'nin sarma sayısı (indeks formülü)

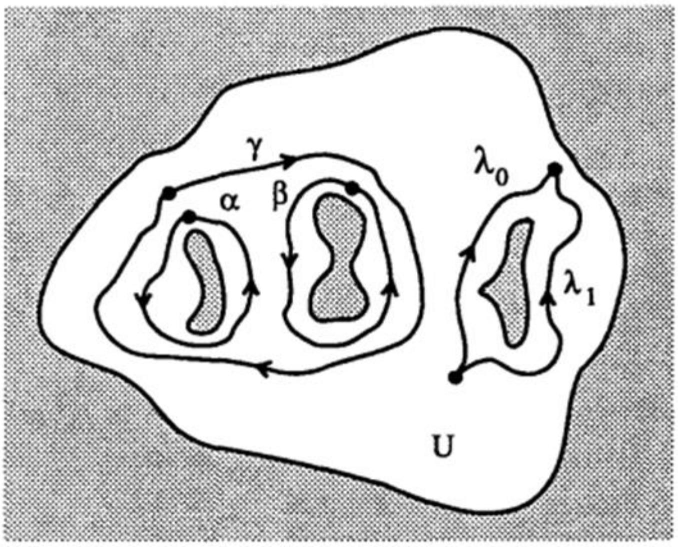
$$n(\sigma, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

şeklinde yazılabilir.

Her hangi $z \in \mathbb{C}\sim|\sigma|$ için aynı zamanda $\sigma'$ nın her bir $\gamma_k$ bileşeni için $z \in \mathbb{C}\sim|\gamma_k|$ olduğu açıktır. Böylece

$$n(\sigma, z) = n(\gamma_1, z) + n(\gamma_2, z) + \cdots + n(\gamma_p, z)$$

yazılır. Eğer $D$, $\mathbb{C}\sim|\sigma|$ açık kümesinin bir birleşeni ise $n(\sigma, z)$ sayısı $D$ üzerinde z ler değişse de sabittir. Bu doğrudur çünkü $D$ düzlemine bağlı olarak her $k$ $\mathbb{C}\sim|\gamma_k|$ nin $D_k$ olarak adlandırılan bir parçası olarak kapsar. Lemma 2.4.1 den dolayı $n(\gamma_k, z)$ değeri $D_k$'da değişmez. $\mathbb{C}\sim|\sigma|$ kümesi sınırlı olmayan $D^*$ bileşenine sahip ise Lemma 2.4.1 den $D^*$ deki her z için $n(\sigma, z) = 0$ olduğu görülür. $U$ karmaşık düzlemde açık bir küme olsun. Eğer $\mathbb{C}\sim U$ daki her z için $n(\sigma, z) = 0$ ise $\sigma$ ,$U$ 'da sıfıra homotop denir. $\sigma_0 = (\gamma_1, \dots, \gamma_p)$ ve $\sigma_1 = (\beta_1, \dots, \beta_q)$ $U$ 'da iki döngü homotop olması $\sigma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p, -\beta_1, \dots, -\beta_q)$ döngüsünün $U$ da sıfıra homotop olmasıdır. Buna denk olarak her bir $z \in \mathbb{C}\sim U$ için $n(\sigma_0, z) = n(\sigma_1, z)$ olmasıdır. Son olarak $U$'da iki kapalı olmayan $\lambda_0$ ve $\lambda_1$ parçalı düzgün yollarının $U$'da homotop olmaları için $\lambda_0$ ve $\lambda_1$ eğrilerinin başlangıç ve bitiş noktalarının aynı ve $\gamma = \lambda_0 - \lambda_1$ kapalı eğrisinin $U$'da sıfıra homotop olması gerekli ve yeterlidir. Şekil 3.2. de baktığımızda $\sigma = (\alpha, \beta, \gamma)$ döngüsü $U$'da sıfıra homotoptur. Fakat $\alpha, \beta$' ya homotop değildir. $\lambda_0$ ve $\lambda_1$ $U$ 'da homotopturlar.

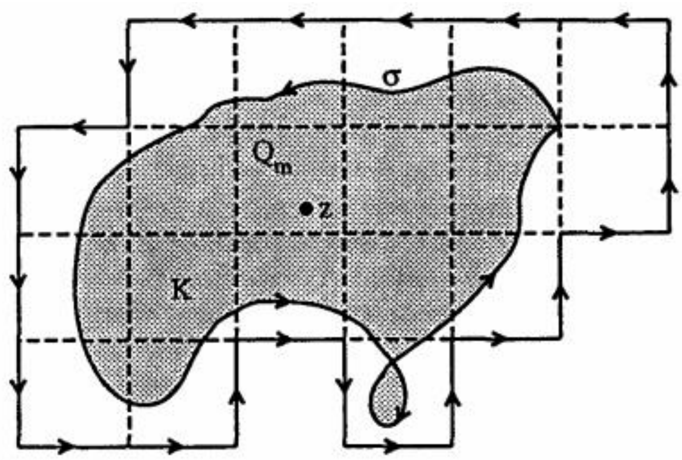



Şekil 3.2. Kapalı eğride homotop gösterimi.

## 3.3. GLOBAL CAUCHY TEOREMİ VE İNTEGRAL FORMÜLÜ

**Teorem 3.3.1 (Global Cauchy Teoremi):** σ açık bir $U$ kümesinde bir döngü olsun. Bu durumda $U$'da analitik her $f$ fonksiyonu için $\int_{\sigma} f\,(z)dz = 0$ olması için gerek ve yeter şart σ nın $U$'da sıfıra homotop olmasıdır.

**İspat:** Önce σ'nun $U$'da sıfıra homotop olduğunu farz edelim. $\mathbb{C}\sim|\sigma|$ deki her bir $z$ değeri için $n(\sigma, z)$ sabit olacağından $V = \{z \in \mathbb{C}\sim|\sigma| : n(\sigma\,, z) = 0\}$ biçiminde tanımlanan $V$ kümesi $\mathbb{C}\sim|\sigma|$'nun bir bileşenidir ve bu durumda açıktır. $\mathbb{C}\sim|\sigma|$ nun sınırlı olmayan bileşeni sıfıra homotop olduğundan $V$ tarafından kapsanır. $K = \mathbb{C}\sim V$ $U$' da bulunan $|\sigma|$ yı bulunduran kapalı ve sınırlı bir kümedir. Yani $K$ kompaktır. ispat sırasında $\delta > 0$ sayısını $K$ daki her bir $z$ için $\Delta(z, \delta)$ diski $U$ içerisinde kalacak şekilde seçelim. Şimdi kompleks düzlemi her bir boyutu $\delta$ /2 den karelere bölelim. Bu durumda $n$ tam sayısı için sıraladığımızda çakışmayan $x = \frac{n\delta}{2}$ , $y = \frac{n\delta}{2}$ olan Şekil 3.3. deki gibi dikey ve yatay doğrularla bölelim. $K$ sınırlı olduğundan sonlu sayıda kare ile kapsanır. $K$ ile kesişimleri boş olmayan kare kümelerinin bir numaralandırılması $Q_{1,}Q_{2,} \dots, Q_r$ olsun. $Q_j^0$ içini belirtelim. $U$,$1 \leq j \leq r$ için ,$Q_j$ ile ortak merkezli ve $\delta$ /2 yarı çaplı $\Delta_j$ açık diskini içerir. Şekil 3.3. de görüldüğü gibi karelerin düzenlenmesi döngüsünü bulunduran basit kapalı bir yol belirtir.




Şekil 3.3. Karelerin düzenlenmesi döngüsünü bulunduran basit kapalı bir yol.

$f$ fonksiyonu $U$'da analitik olsun. Bu durumda $\int_{\sigma} f\,(z)dz = 0$ olduğunu gösterelim. İspata başlamak için $1 \leq j \leq r$ için ,$Q_j$ karelerinden sabit bir $Q_m$ karesini ve $Q_m^0$'nin sabit $z$ noktasını göz önüne alalım. $\Delta_m$ diskinde $f$ fonksiyonuna Cauchy integral formülü uygulanırsa

$$f\,(z) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{\partial\, Q_m} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

elde edilir. Diğer taraftan her bir $j \neq m$ olduğunda Lemma 3.1.1 gereği

$g(\zeta) = (\zeta - z)^{-1} f(\zeta)$ için

$$\frac{1}{2\Pi i}\int_{\partial\, Q_j} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = 0$$

elde edilir. $j = 1$'den $j = r$'ye toplam alındığında

$$f\,(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{r}\int_{\partial\, Q_j} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \qquad (\mathbf{3.3.})$$

olup (3.3) bağıntısı ile verilen eşitlik *m=1,2,...,r* olmak üzere $Q_m^0$ deki her $z$ için sağlanır. $\lambda$ , $\partial Q_j$ karesinin dört doğru parçasından biri olsun. Böylece $|\lambda|$,$\partial Q_j$ karesinin bir yan parçası olur. $|\lambda|$ $K$'da olmayabilir. Eğer $|\lambda|$, $K$'yı kesiyorsa $Q_j$, $|\lambda|$ yönünü $Q_j'$ olarak gösterelim. Açıkça –$\lambda$ de $\partial Q_j'$ 'nin parçalarından biridir. Bu durumda sağ el kuralı gereği (3.3) bağıntısı için $\lambda$ ve – λ zıt işaretlidirler. Bu durumda $\bigcup_{j=1}^{r} Q_j^0$ daki her hangi bir $z$ için (3.3) bağıntısı

$$f\,(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} \qquad (\mathbf{3.4.})$$

biçiminde küçültülür.

Burada $\lambda_1,\lambda_2, \dots, \lambda_q$ doğru parçaları $\partial Q_1, \partial Q_2, \dots,$ $\partial Q_r$ karelerin özel olarak seçilmiş ayrıtlarının birleşimidir. Bu birleşim $\lambda$ ise ve $|\ \lambda\ |$ $K$'yı kesmez. Buradan $z$ ye bağlı

$$\int_{\lambda_k} (\zeta - z)^{-1} f(\zeta)d\,\zeta$$

fonksiyonu $(\mathbb{C}\sim |\ \lambda_k\ |)$ da analitiktir. (3.4) bağıntısıyla tanımlanan $f(z)$ sağ el kuralı gereği $\mathbb{C}\sim \bigcup_{k=1}^{q} |\ \lambda_k\,|'$ da süreklidir. (3.4) bağıntısın her $z \in K$ için sağlandığını göstermemiz gerekir. Eğer $z$ ler $\bigcup_{k=1}^{q} Q_j^0$ ise sağlanır. Eğer $z$ ler $\bigcup_{k=1}^{q} Q_j^0$ değilse karelerinin iki veya daha çoğunun sınırlarındadır. Bunlardan birini seçebilir ve kolaylık olması için $Q$ diyebiliriz ve bu durumda $Q$'nun içinde $z_n \to z$ olacak şekilde $(z_n)$ dizisini seçebiliriz. (3.4)'nin her iki tarafıda $z$'ye göre sürekli olduğundan,

$$f\,(z) = \lim_{n\to\infty} f\,(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z_n} = \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

dir. (3.4) bağıntısı $|\sigma|$'nun herhangi bir $z$ noktası için geçerlidir. İspatı tamamlamak için $\sigma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p)$ kabul edelim, (3.2) ve (3.4) de yerine konup hesaplanırsa

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma} f\,(z)dz &= \int_{\sigma}\left\{\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right\}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{q}\int_{\gamma_l}\left\{\int_{\lambda_k}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right\}dz \\
&= \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{q}\sum_{l=1}^{p}\int_{\lambda_k}\left\{\int_{\gamma_l}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}\right\}d\zeta \\
&= \sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} f(\zeta)\left\{\sum_{l=1}^{p}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_l}\frac{dz}{z-\zeta}\right\}d\zeta \\
&= -\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} f(\zeta)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma}\frac{dz}{z-\zeta}\right\}d\zeta \\
&= -\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} f(\zeta)n(\sigma,\zeta)d\zeta \\
&= -\sum_{k=1}^{q}\int_{\lambda_k} f(\zeta).0d\zeta = 0
\end{aligned}$$

Burada $|\lambda_l| \times |\lambda_k|$ için $1 \le l \le p$ ve $1 \le k \le q$'da sürekli bir $g(z,\zeta) = (\zeta - z)^{-1}f(\zeta)$ fonksiyonu için $|\lambda_k|, K$ ile kesişmediğinden $\zeta$ , $|\lambda_k|$ da olduğu müddetçe $n(\sigma,\zeta) = 0$ dır. Bundan dolayı $V$'nin alt kümesidir. Teoremin yeterli şartı ispatlanmış olur. Şimdi gerekliliği ispatlayalım. $z \in \mathbb{C}\sim U$ olmak üzere $f: U \to \mathbb{C}$ , $f(\zeta) = (\zeta - z)^{-1}$ fonksiyonu analitik olsun. Böylece

$$\int_{\sigma} f(\zeta)d\zeta = \int_{\sigma}\frac{dz}{\zeta - z} = 2\pi i n(\sigma, z) = 0$$

olup $\mathbb{C}\sim U$ daki her bir $z$ için $n(\sigma,\zeta) = 0$ olur. Bu da σ yı $U$'da sıfıra homotop yapar.

**Sonuç 3.3.1:** $f$ fonksiyonu açık bir $U$ kümesinde analitik ve $\sigma_0$ ve $\sigma_1$ $U$'da iki döngü ve bu kümede homotop olsunlar. Bu durumda

$$\int_{\sigma_0} f(z)dz = \int_{\sigma_1} f(z)dz$$

dir.

**İspat:**

$\sigma_0 = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p)$ olsun. $\sigma_1 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q)$ Cauchy teoremi $f$ ve $\sigma = (\gamma_1, \dots, \gamma_p, -\beta_1, \dots, \beta_q)$ için uygulanabilir ve

$$\int_{\sigma_0} f(z)dz - \int_{\sigma_1} f(z)dz = \int_{\sigma} f(z)dz = 0$$

elde edilir.

**Sonuç 3.3.2:** Eğer bir $f$ fonksiyonu $U$ açık kümesinde analitik ve eğer $\lambda_0$ ve $\lambda_1$ $U$ 'da kapalı olmayan homotop iki yol olsun. Böylece,

$$\int_{\lambda_0} f(z)dz = \int_{\lambda_1} f(z)dz$$

dir.

Sonuç 3.3.1 deki ispatımızda $\sigma = \lambda_0 - \lambda_1$ kapalı düzlem için Cauchy teoremini kullanırız. Böylece

$$\int_{\lambda_0} f(z)dz - \int_{\lambda_1} f(z)dz = \int_{\sigma} f(z)dz = 0$$

elde ederiz.

**Teorem 3.3.2 (Global Cauchy İntegral Formülü) :** $f$ fonksiyonu açık bir $U$ kümesinde analitik ve $\sigma, U$'da sıfıra homotop olsun. Bu takdirde $U \sim |\sigma|$ ' daki her $z$ için

$$\mathrm{n}(\sigma, z) f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

dir.

**İspat:**

$U\sim|\sigma|$ 'da keyfi sabit $z$ için

$g{:}U \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu

$$g(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{[f(\zeta) - f(z)]}{\zeta - z} & ; \quad \text{için } \zeta \neq z, \\ f'(z) & ; \quad \text{için } \zeta = z, \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. $g$ fonksiyonu $U$'da sürekli ve analitik, $U\sim\{z\}$'de analitik olduğundan Cauchy teoremi gereği

$$0 = \int_\sigma g(\zeta)d\zeta = \int_\sigma \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta = \int_\sigma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} - 2\pi i n(\sigma, z)f(z)$$

ve böylece

$$n(\sigma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z}$$

elde edilir.

**Teorem 3.3.3:** $f, U$ açık kümesinde analitik fonksiyon, $k$ negatif olmayan tamsayı ve $\sigma, U'$ da sıfıra homotop döngü olsun. Böylece $U\sim|\sigma|$'da her $z$ için

$$n(\sigma, z)f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\sigma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

dir.

**Teorem 3.3.4:** $f$ fonksiyonu $U$ açık kümesinde analitik ve $\gamma$ da bir Kapalı jordan eğrisi olsun. Bu takdirde $\int_\gamma f(z)dz = 0$ ve $D$'deki her $z$ için ve negatif olmayan her $k$ tam sayısı için

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

**İspat:**

Teorem 3.3.1 gösterir ki $\mathbb{C}\sim U$'daki her $z$ için $n(\gamma, z) = 0$ dır. Ayrıca $D$ de her $z$ için $\gamma$ pozitif olarak yönlendirilmiş olduğundan $n(\gamma, z) = 1$ olup Teorem 3.3.1 ve 3.3.3'den istenen sonuç elde edilir.

**Teorem 3.3.5 (Goursat'ın Teoremi):** Karmaşık düzlemde $\gamma$ bir jordan eğrisi olsun $|\gamma|$ Jordan curve (kıvrımı) içindeki $D$ olsun ve $f{:}\overline{D} \to \mathbb{C}$ sürekli ve $D$ de analitik olsun. Böylece $\int_\gamma f(z)dz = 0$ ve $D$'de her $z$ ve negatif olmayan her bir $k$ tam sayısı için

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}$$

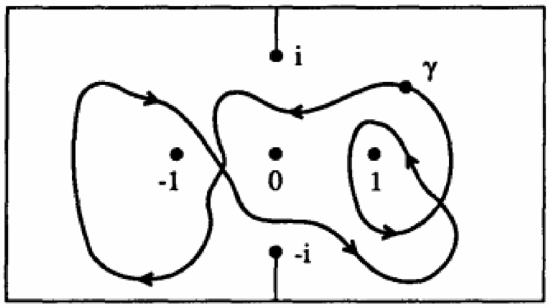
dir.

**Örnek 3.3.1:**

$\gamma$, Şekil 3.3.2 deki eğri olmak üzere

$$\int_\gamma \frac{Arctanz\, dz}{z^2 - 1}$$

integralini hesaplayalım.




**Çözüm:**

$(z^2 - 1)^{-1}$i basit kesirlere ayıralım. $U = \mathbb{C}\sim\{z{:}\, Rez = 0 \text{ ve } |z| \geq 1\}$ kümesinde $f(z) = Arctanz$ fonksiyonu analitik olduğundan Cauchy integral formülü gereği

$$\int_\gamma \frac{Arctan\, z\, dz}{z^2 - 1} = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{Arctan\, z\, dz}{z - 1} - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{Arctan\, z\, dz}{z + 1}$$

$$= \frac{2\pi i n(\gamma, 1) Arctan 1}{2} - \frac{2\pi i n(\gamma, -1) Arctan(-1)}{2} = \frac{\pi^2 i}{4}$$

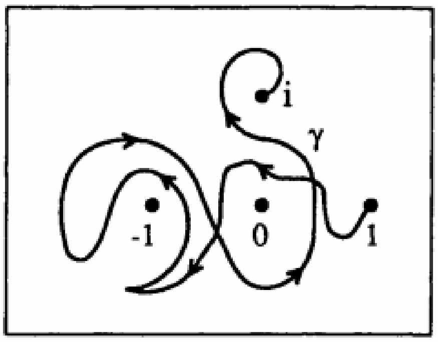
$\gamma$ eğrisi -1 noktasını 1 kez, 1 noktasını 2 kez sardığından $n(\gamma, -1) = 1$ dir.

**Örnek 3.3.2:**

$\gamma$, Şekil 3.3.3 de verilen eğri olmak üzere

$$\int_\gamma (z^2+z+1)\,(z^3+z^2)^{-1}dz$$

integralini hesaplayalım.




**Çözüm:**

Basit kesirlere ayırarak yazalım.

$$\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2}dz = \int_\gamma \left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z+1}\right)dz = \int_\gamma \frac{d}{z^2}+\int_\gamma \frac{dz}{z+1}.$$

$\mathbb{C}\sim\{0\}$, da $f(z)=z^{-2}$ fonksiyonunun ilkeli $F(z)=-z^{-1}$ olduğundan

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2}=\left[-\frac{1}{z}\right]_1^i = 1+i$$

elde edilir. $g(z)=z+1)^{-1}$ bir analitik $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ de analitik olduğundan Sonuç 3.3.2 yardımımıza gelir ve integral 1 noktasını $i$ noktasına birleştiren yoldan bağımsız olup $\mathbb{C}\sim(\infty,-1]$ kümesinde $g$ fonksiyonunun ilkeli *G(z)=Log(z+1)* olduğundan

$$\int_\gamma \frac{dz}{z+1}=\int_\gamma \frac{dz}{z+1}=[Log(z+1)]^i{}_1=-\frac{Log2}{2}+\frac{\pi i}{4}$$

ve sonuç olarak

$$\int_\gamma \frac{z^2+z+1}{z^3+z^2}dz = 1-Log\sqrt{2}+i\left(1+\frac{\pi}{4}\right)$$

elde edilir.

**Örnek 3.3.3:**

$f$ analitik ve $|z| \leq R$ için $|f(z)| \leq M$ olsun. $|z| \leq r < R$ olmak üzere $\left|f^{(n)}(z)\right|$ için bir üst sınır bulalım.

**Çözüm:**

Cauchy İntegral Formülü gereği,

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = R - r} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z)^{n+1}}$$

dir. Buradan

$$f^{(n)}(z) \leq \frac{n!}{2\pi i} \int_{|\zeta - z| = R - r} \frac{M|d\zeta|}{(R - r)^{n+1}}$$

$$= \frac{n!\, M}{2\pi (R - r)^{n+1}} 2\pi (R - r)$$

$$\frac{n!\, M}{(R - r)^n}$$

elde edilir.

**Örnek 3.3.4:**

Bir noktada analitik bir $f$ fonksiyonunun $\left|f^{(n)}(z)\right| > n!\, n^n$ eşitsizliğini asla sağlamadığını gösterelim.

**Çözüm:**

Cauchy İntegral Formülü gereği $r > 0$ sayısı $f$ fonksiyonu $\{\zeta;\ |\zeta - z| \leq r\}$ de analitik olacak şekilde yeterince küçük olsun. Cauchy eşitsizliğinden,

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{n!\, M}{(r)^n} dir. n \geq max\left\{{}^{M}/_{r}, 1\right\}$$

seçilirse $nr \geq M > 1$ ve $n \geq 1$ olup bu durumda $(nr)^n \geq M$ dir.Bu ise

$$r^{-n} \leq \frac{n^n}{M}$$

demektir. Böylece her $n \geq max\left\{{}^{M}/_{r}, 1\right\}$ için

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq n!\,M\left(\frac{n^n}{M}\right) = n!\,n^n$$

Yani verilen eşitsizlik hiçbir zaman sağlamaz.

**Örnek 3.3.5**

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+4}\,dz$$

integralini hesaplayalım.

**Çözüm:**

$|z| = 1$çemberi kapalı ve basit bir eğri olup, $f$ (z) $= \frac{e^z}{z^2+4}$ fonksiyonunun singüler noktaları $z = \mp 2i$ olup çember dışında olduğundan $f$ (z) fonksiyonu $|z| = 1$ çemberinin sınırladığı bölgede ve üzerinde analitiktir. Cauchy İntegral Teoremi gereği,

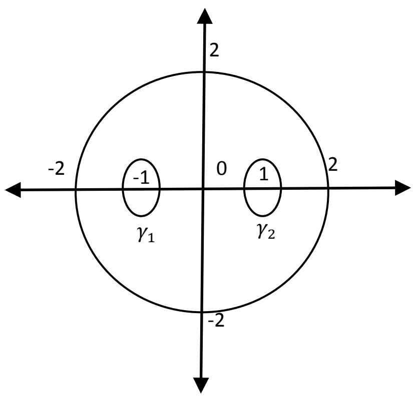
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+4}\,dz = 0$$

dır.

**Örnek 3.3.6**

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$$

integralini hesaplayalım.



**Çözüm:**

**1.yol.** Basit kesirlere ayırdığımızda

$$\frac{e^z}{z^2-1}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z+1}$$

$$(z+1)(z-1)$$

$$1=A(z+1)+B(z-1)$$

$z=1$ için $A=\frac{1}{2}$ , $z=-1$ için $B=-\frac{1}{2}$ elde edilir. Böylece integral

$$I=\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2-1}dz=\frac{1}{2}\left(\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z-1}dz-\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z+1}dz\right)$$

$f\ (\mathrm{z})=e^z$ fonksiyonu tam fonksiyon olduğundan Cauchy İntegral Formülü gereği

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z-1}dz=2\pi i f\ (1)=2\pi \mathrm{i}e$$

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z+1}dz=2\pi i f\ (-1)=2\pi \mathrm{i}e^{-1}$$

olup,

$$I=\frac{1}{2}2\pi i\ \left(e-\frac{1}{e}\right)=\pi i\ \left(e-\frac{1}{e}\right)$$

bulunur.

**2.yol :** $|z|=2$ Çemberi $\gamma_1$ ve $\gamma_2$ ye homotop olduğundan

$$\int\limits_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2-1}dz=\int\limits_{\gamma_1}\frac{e^z}{z^2-1}dz+\int\limits_{\gamma_2}\frac{e^z}{z^2-1}dz$$

yazabiliriz.

$f\ (\mathrm{z})=\frac{e^z}{z+1}$ fonksiyonu $\gamma_2$ nin sınırında ve sınırladığı bölgede analitik olduğundan Cauchy İntegral Formülü gereği,

$$\int\limits_{\gamma_2}\frac{e^z}{z^2-1}dz=\int\limits_{\gamma_2}\frac{\frac{e^z}{z+1}}{z-1}dz=2\pi i f\ (1)=2\pi i\frac{e}{2}=e\pi i$$

bulunur.

$g(\mathrm{z})=\frac{e^z}{z-1}$ fonksiyonu $\gamma_1$ in sınırında ve sınırladığı bölgede analitik olduğundan Cauchy İntegral Formülü gereği,

$$\int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2-1} dz = \int_{\gamma_1} \frac{\frac{e^z}{z-1}}{z+1} dz = 2\pi i g\,(-1) = -2\pi i \frac{1}{2e} = -\frac{\pi i}{e}$$

bulunur. Böylece

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2-1} dz = \int_{\gamma_1} \frac{e^z}{z^2-1} dz + \int_{\gamma_2} \frac{e^z}{z^2-1} dz = e\pi i - \frac{\pi i}{e} = \pi i(e - \frac{1}{e})$$

elde edilir.

**Örnek 3.3.7**

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z sinz}{z^3} dz$$

integralini hesaplayalım.

**Çözüm:**

$f\,(\mathrm{z}) = e^z sinz$ fonksiyonu $|z| = 3$ çemberi üzerinde ve sınırladığı bölgede analitiktir. $n + 1 = 3 \Rightarrow n = 2$ için Cauchy İntegral Formülü gereği,

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z sinz}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0)$$

dır.

$$f\,(\mathrm{z}) = e^z sinz$$

$$f'(\mathrm{z}) = e^z sinz + e^z cosz$$

$$f''(\mathrm{z}) = e^z sinz + e^z cosz + e^z cosz - e^z sinz = 2e^z cosz$$

$$f''(0) = 2e^0 cos0 = 2$$

olduğundan

$$\int_{|z|=3} \frac{e^z sinz}{z^3} dz = \frac{2\pi i}{2!} f''(0) = \frac{2\pi i}{2!} 2 = 2\pi i$$

elde edilir.

## KAYNAKLAR

1. Başkan, T., “Kompleks Fonksiyonlar Teorisi”, ***Uludağ Üniversitesi Basımı***, (1996).

2. Brown, J. W. and Churchıll, R. V., “Complex Variables and Applications”, ***Mc Graw-Hıll***, (1996).

3. Beardon, A. F., “Complex Analysis: The Argument Principle in Analysis and Topology”, ***John Wiley & Sons Ltd***., New York, (1979).

4. Evgrafov, M. A., “Analytic Functions”, ***W.B. Saunders Company***, Philadelphia and London, (1966).

5. Palka, B. P., “An Introduction to Complex Function Theory” ***Springer-Verlag***, New York, (1991).