OTONOM DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN DÜZLEMDEKİ YÖRÜNGELERİN LİMİT DURUMLARI VE AYKIRI NOKTALARIN SINIFLANDIRILMASI

2014
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

Habibe MUTLU

OTONOM DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN DÜZLEMDEKİ YÖRÜNGELERİN LİMİT DURUMLARI VE AYKIRI NOKTALARIN SINIFLANDIRILMASI

Habibe MUTLU

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak hazırlanmıştır

KARABÜK
Haziran 2014

Habibe MUTLU tarafından hazırlanan "OTONOM DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİN DÜZLEMDEKİ YÖRÜNGELERİN LİMİT DURUMLARI VE AYKIRI NOKTALARIN SINIFLANDIRILMASI" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 16/06/2014

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan : Yrd. Doc. Dr. Murat DÜZ (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Sedat ÇEVİKEL (BEÜ)	....

....../....../2014

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Mustafa BOZ ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"*Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.*"

Habibe MUTLU

ÖZET

OTONOM DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN DÜZLEMDEKİ YÖRÜNGELERİN LİMİT DURUMLARI VE AYKIRI NOKTALARIN SINIFLANDIRILMASI

Habibe MUTLU

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV

Haziran 2014, 50 sayfa

Bu çalışmada, ilk olarak Otonom diferansiyel denklem sistemleri ve çözümleri hakkında bilgi verildi. Sonra bu çözümlerin düzlemdeki yörüngelerinin limit durumları anlatıldı ve örnekler verildi. Son olarak bu sistemlerin aykırı noktaları etrafında sınıflandırılması Poincare yöntemi ile anlatıldı ve örnekler verildi.

Anahtar Sözcükler : Otonom diferansiyel denklem sistemleri, aykırı noktaların sınıflandırılması, Poincare yöntemi.

Bilim Kodu : 204.1.138

ABSTRACT

SYSTEMS OF AUTONOMOUS DIFFERENTIAL EQUATIONIN THE PLANE OF THE ORBIT OF THE LIMIT STATES AND THE CLASSIFICATION OF SINGULAR POINTS

Habibe MUTLU

Karabuk University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assist. Prof. Dr. Şerif AMİROV
June 2014,50 pages

In this study, the first given information about the autonomous differential equation and its characteristics of solution. After then given information about in the plane of the orbit of the limit states and examples were given. Later then given information about this systems the classification of singular points with Poincare method. Examples were given.

Keyword : Systems of autonomous differential equation, classification of singular points, The Poincare method.

Science code : 204.1.138

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve deneyimlerinden faydalandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV'a, Karabük Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sevgili aileme maddi ve manevi hiçbir yardımı esirgemeden yanımda oldukları için tüm kalbimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

<u>**Sayfa**</u>

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

BÖLÜM 1

OTONOM SİSTEMLER

1.1. TANIMLAR VE GEOMETRİK YORUM

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

şeklindeki normal sistemlere otonom sistem diyoruz. Başka bir ifadeyle t-den (zamandan) bağımsız sistemlerdir.

Burada $f(x)$, $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) i = \overline{1, n}$ vektör fonksiyonlarının bileşenleri $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenleri olan ve G bölgesinde sürekli fonksiyonlar olsun.

Her bir $x^0 = (x_1{}^0, x_2{}^0, \dots, x_n{}^0)$ ∈G içinde istenilen t_0 için (1.1) sisteminin;

$$x(t_0) = x^0 \tag{1.2}$$

Başlangıç şartını sağlayan tek devam ettirilemeyen $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ çözümü vardır.

Bu çözümün (α, β) aralığındaki $\forall\, t \in (\alpha, \beta)$ için $M(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$ kümesine, yani çözümün grafiğine, bu çözüme uygun olan yörünge diyoruz. Yörüngeyi ℓ ile göstereceğiz. $x = \varphi(t)$ yörüngenin parametrik denklemi olur.

G bölgesinin her bir $x^0 = (x_1{}^0, x_2{}^0, \dots, x_n{}^0)$ noktasını, bu noktadan çıkan $f(x^0) = (f_1(x_1{}^0, x_2{}^0, \dots, x_n{}^0), f_2(x_1{}^0, x_2{}^0, \dots, x_n{}^0), \dots, f_n(x_1{}^0, x_2{}^0, \dots, x_n{}^0))$vektörüne karşılık getirirsek, (1.1) denkleminin (1.2) şartını sağlayan $x = \varphi(t)$ çözümü için $\dot{\varphi(t_0)} = f(\varphi(t_0)) = f(x^0)$ olduğundan türevin fiziki anlamına göre; $t = t_0$ anındaki nokta,

x^0 noktasına karşılık gelir ve $\mathcal{V} = \frac{d\varphi}{dt}$ hız vektörü, vektör alanının aynı noktadaki vektörü ile eşittir. Buna göre (1.1) sisteminin oluşturduğu vektörler alanına hızlar alanı denir. (1.1) sisteminin çözümünün yörünge gibi, sistemin kendisinin ise vektörler alanı gibi yorumlandığı $x_1, x_2, \dots, x_n$ değişkenleri uzayına faz uzayı , yörüngelere faz yörüngeleri , $f(x)$ vektörüne ise faz hızı denir.

1.2. ÇÖZÜMÜN ÖZELLİKLERİ

Teorem 1.1: $x = \varphi(t)$ fonksiyonu, $\dot{x} = f(x)$ sisteminin (α, β) aralığında devam ettirilemeyen çözümü olsun. O zaman $x = \varphi(t+s)$ vektör fonksiyonu, $(\alpha - s, \beta - s)$ aralığında çözümdür (kaydırma özelliği).

İspat: $x = \varphi(t)$, $\dot{x} = f(x)$ sisteminin çözümü olduğundan $\dot{\varphi(t)} = f\big(\varphi(t)\big), t \in (\alpha, \beta)$ eşitliği sağlanır. Burada t yerine $t + s$ yazarsak $\varphi(t \dot{+} s) = f\big(\varphi(t+s)\big), t \in (\alpha - s, \beta - s)$ eşitliğini buluruz. Böylece teorem doğrudur.

Tanım 1.2: $x = \varphi(t)$ vektör fonksiyonu, $\dot{x} = f(x)$ sisteminin $(-\infty, +\infty)$ aralığındaki çözümü olsun. İstenilen $t \in (-\infty, +\infty)$ ve belirli s sayısı için $\varphi(t\ ) = \varphi(t+s)$ ise, s sayısına $x = \varphi(t)$ çözümünün periyodu (devir) denir. Çözümün periyotları kümesini F ile gösterelim. F kümesi, boş küme değildir. (0 ∈F olduğundan)

Not 1.3: Otonom sistemlerin üç tür yörüngeleri vardır. Bunlar:

- Stabilite hali
- Kendi kendini kesmeyen veya açık yörüngeler
- Kapalı yörüngeler veya devirler

BÖLÜM 2

DÜZLEM ÜZERİNDE YÖRÜNGELERİN LİMİT DURUMLARI

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{2.1}$$

Bu kısımda (2.1) şeklindeki otonom sistemlerinin çözümlerinin yörüngelerini araştıracağız. Burada $P(x,y), Q(x,y)$ fonksiyonları, x-y düzleminin G bölgesinde sürekli ve bölgenin istenilen kapalı sınırlı parçasında Lipschitz şartını sağlarlar. Koyulan şartlar dahilinde her bir (x_0, y_0) ∈G ve istenilen t_0 için (2.1) sisteminin $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$ şartını sağlayan devam ettirilemeyen tek çözümü vardır.

Tanım 2.1: $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ vektör fonksiyonu, (2.1) sisteminin $(0, \infty)$ aralığında alınmış çözümü ve yörüngesi ℓ^+ olsun. Belirli $P = (p_1, p_2)$ noktası için $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \varphi(t_n) = P$ şartını sağlayan $\{t_n\}$ dizisi varsa ($t_n \in (0, \infty)$); P noktasına, $\varphi(t)$ çözümünün (ℓ^+ yörüngesinin) $\infty -$ limitnoktası denir. Bu çözümün $\infty -$ limitnoktaları kümesini $\Omega(\ell^+)$ ile gösterelim.

Tanım 2.2: $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ vektör fonksiyonu, (2.1) sisteminin $(-\infty, 0)$ aralığında alınmış çözümü ve yörüngesi ℓ^- olsun. Belirli $Q = (q_1, q_2)$ noktası için $\lim_{n\to\infty} t_n = -\infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \psi(t_n) = Q$ şartını sağlayan $\{t_n\}$dizisi varsa ($t_n \in (-\infty, 0)$) ; Q noktasına, $\psi(t)$ çözümünün (ℓ^- yörüngesinin) $\alpha -$ limit noktası denir. Bu çözümün $\alpha -$ limitnoktaları kümesini $\mathcal{A}(\ell^-)$ ile gösterelim.

$\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ vektör fonksiyonu, (2.1) sisteminin$(-\infty, \infty)$ aralığında alınmış çözümü olsun. Bu çözümün yörüngesini ℓ ile gösterelim. Böylece tanımdan açıktır ki bu çözümün limit noktaları kümesi $\mathcal{A}(\ell) \cup \Omega(\ell)$ olur.

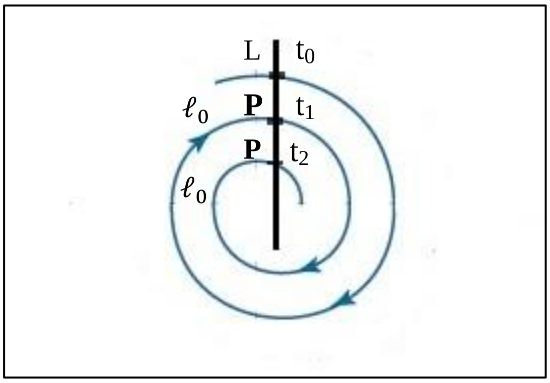
Tanım 2.3: (2.1) sisteminin $\varphi^0(t)$ çözümünün her bir noktası, bu çözümden farklı $\psi(t)$ çözümünün limit noktası olursa, o zaman $\varphi^0(t)$ çözümüne limit deviri denir.

Tanım 2.4: Belirli L doğru parçasının herbir (x, y) noktasındaP ve Q fonksiyonları $|P(x, y)| + |Q(x, y)| > 0$ ise ve $\left(P(x, y), Q(x, y)\right)$ vektörü bu doğru parçasına paralel değilse, böyle L parçasına (2.1) sisteminin transversalı denir.

Farzedelim ki; $\varphi^0(t) = \left({\varphi^0}_1(t), {\varphi^0}_2(t)\right)$ vektör fonksiyonu, (2.1) sisteminin $x(t_0) = x_0\,, y(t_0) = y_0$ şartını sağlayan periyodik fonksiyonudur ve bu çözümün yörüngesi ℓ_0 olsun. ℓ_0, kapalı eğridir gösterelim:

Bunun için farzedelim ki; $\psi(t) = \left(\psi_1(t), \psi_2(t)\right)$ vektör fonksiyonu, $(x_1, y_1) \in {\ell_0}^-$ noktası için (2.1) sisteminin $x(0) = x_1\,, y(0) = y_1$ şartlarını sağlayan çözümüdür. Ve bu çözümün yörüngesinin, ℓ_0 eğrisini $t = t_1$ anında $P = (p_1, p_2)$ noktasında kestiğini kabul edelim. Yani $\psi(t_1) = P\,, P \in \ell_0$ demektir.

Diğer taraftan $P \in \ell_0$ olduğundan öyle $t = t_2$ anı vardır ki $\varphi^0(t_2) = P$ olur. Otonom sistemlerin çözümlerinin kaydırma özelliğinden $\tilde{\varphi}(t) = \varphi^0(t + t_2 - t_1)$ fonksiyonu, (2.1) sisteminin çözümüdür. $t = t_1$ anında $\tilde{\varphi}(t_1) = \varphi^0(t_2) = P$ ve $\psi(t_1) = P$ olduğundan $\tilde{\varphi}(t_1) = \psi(t_1)$ olur. Böylece $\tilde{\varphi}(t)$ ve $\psi(t)$ çözümleri eşit bulunur. $\tilde{\varphi}(t)\,, \varphi^0(t)$ çözümünün kaydırılmış çözümü olduğundan yörüngeleri aynı olup ℓ_0'dır. $\tilde{\varphi}(t)$ ve $\psi(t)$ çözümleri de eşit olduğundan yörüngeleri eşit ve ℓ_0 olur.



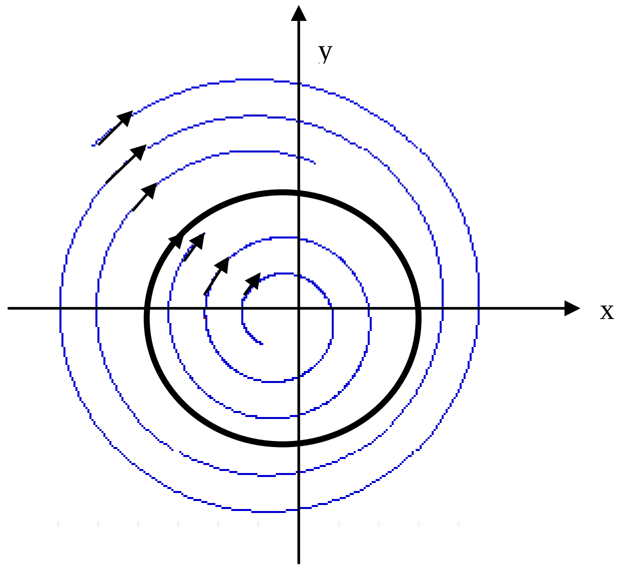
Şekil 2.1. Temsili yörünge.

Şekilden de görüldüğü gibi tüm bunların olması ancak ℓ_0 yörüngesinin kapalı eğri olması ile mümkündür.

Böylece ℓ_0 yörüngesi düzlemi ℓ_0 kapalı eğrisiyle çevrelenmiş iç parça ve dış parça olmak üzere ikiye böler. Buradan ve (2.1) sisteminin çözümünün tekliğinden anlaşılır ki ℓ_0 eğrisi üzerinde olmayan bir noktadan başlanan yörünge, ya tamamen ℓ_0 eğrisinin içinde ya da tamamen dış parçasında bulunur.

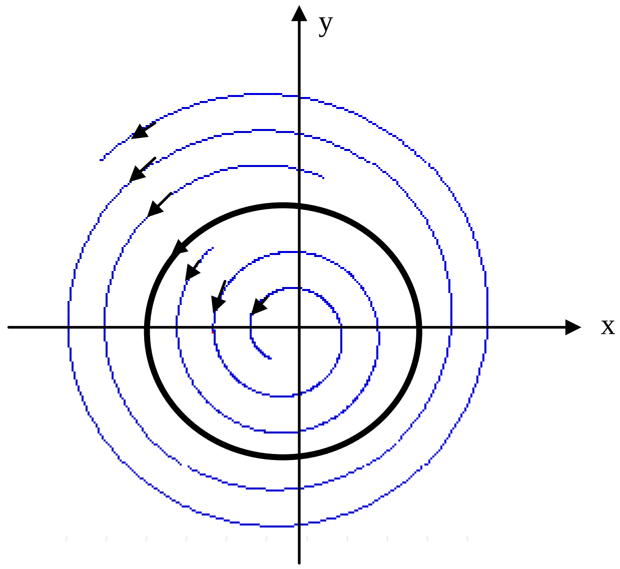
Üç tür izole edilmiş devir vardır bunlar:

- Dayanıklı devir : devire yakın noktalardan başlanan yörüngelerin hepsi t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında bu devire yaklaşır.



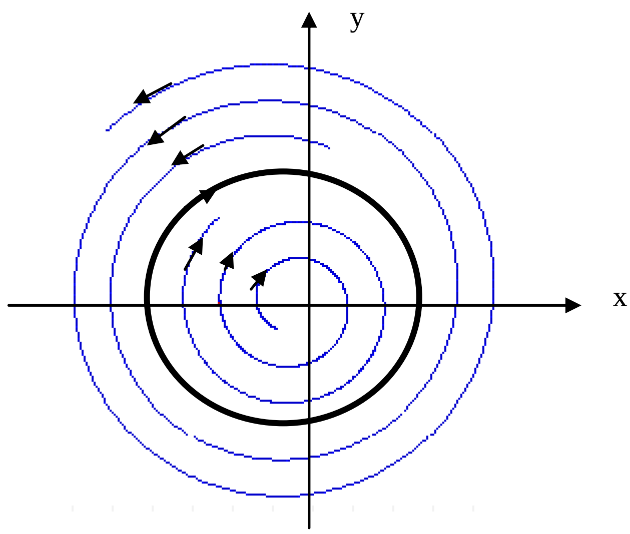
Şekil 2.2. Dayanıklı devir.

- Dayanıksız devir: t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında bütün yörüngeler bu devirden uzaklaşır.



Şekil 2.3. Dayanıksız devir.

- Yarı dayanıklı devir: t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında devirin herhangi bir tarafında (içinde veya dışında) bulunannoktalardan başlanan yörüngelerdevireyaklaşır. Diğer tarafında bulunan noktalardan başlanan yörüngeler bu devirden uzaklaşır.



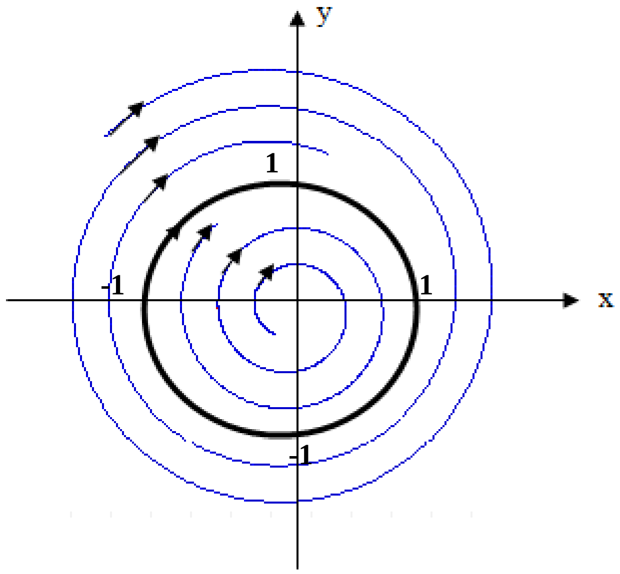
Şekil 2.4. Yarı dayanıklı devir.

Örnek 2.1: $\dot{x} = y$; $\dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2)$sistemini inceleyelim:

Açıktır ki, $x = 0, y = 0$ sistemin tek dayanıklılık halidir ve bu sistemin $\psi_1(t) = cos(t + c)$, $\psi_2(t) = \sin(t + c)$ (c keyfi sabit) periyodik çözümünün yörüngesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberidir. $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ sistemin keyfi çözümü olsun. Bu çözüm için:

$$\frac{d}{dt}[\psi_1{}^2(t) + \psi_2{}^2(t)] = 2\psi_1(t)\dot{\psi_1}(t) + 2\psi_2(\mathrm{t})\,\dot{\psi_2}(t)$$
$$= 2\mathrm{xy} + 2\mathrm{y}(-\mathrm{x} + \mathrm{y}(1 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2))$$
$$= 2y^2(1 - x^2 - y^2)$$
$$= 2\psi_2(\mathrm{t})^2(1 - \psi_1(t)^2 - \psi_2(t)^2)$$

eşitliği doğrudur. Ve açıktır ki, $\psi_1{}^2(0) + \psi_2{}^2(0) < 1$ ise istenilen $t > 0$ için $\frac{d}{dt}[\psi_1{}^2(t) + \psi_2{}^2(t)] > 0$. Yani t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ çözümünün yörüngesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberine yaklaşır. $\psi_1{}^2(0) + \psi_2{}^2(0) > 1$ ise istenilen $t > 0$ için $\frac{d}{dt}[\psi_1{}^2(t) + \psi_2{}^2(t)] < 0$. t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ çözümünün yörüngesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberine yaklaşır. Demek ki, $x^2 + y^2 = 1$ çemberi sistemin dayanıklı devirdir.



Şekil 2.5. Dayanıklı devir.

Örnek 2.2: $\dot{x} = -\frac{2y}{3} + x(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1)$; $\dot{y} = \frac{3x}{2} + y(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1)$ sistemini inceleyelim:

$x = 0$, $y = 0$ sistemin dayanıklılık halidir. bu sisteme uygun periyodik çözüm $\psi_1(t) = 2\cos(t + c)$, $\psi_2(t) = 3\sin(t + c)$ (c keyfi sabit) şeklindedir. Ve periyodik çözümün yörüngesi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ elipsidir. $\left(\psi_1(t), \psi_2(t)\right)$ sistemin keyfi çözümü olsun. Bu çözüm için:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi_1{}^2(t)}{4} + \frac{\psi_2{}^2(t)}{9}\right] = \frac{2\psi_1(t)\dot{\psi_1}(t)}{4} + \frac{2\psi_2(\mathrm{t})\dot{\psi_2}(t)}{9}$$

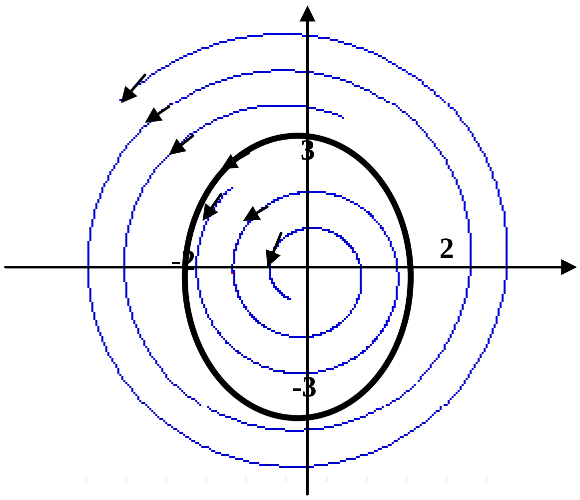
$$= \frac{2x}{4}\left(-\frac{2y}{3} + x\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\right) + \frac{2y}{9}\left(\frac{3x}{2} + y\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)\right)$$

$$= 2\left(\frac{x^4}{16} + \frac{x^2y^2}{36} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2y^2}{36} + \frac{y^4}{81} - \frac{y^2}{9}\right)$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1\right)$$

$$= 2\left(\frac{\psi_1{}^2(t)}{4} + \frac{\psi_2{}^2(t)}{9}\right)\left(\frac{\psi_1{}^2(t)}{4} + \frac{\psi_2{}^2(t)}{9} - 1\right)$$

eşitliği doğrudur ve açıktır ki, $\frac{\psi_1{}^2(0)}{4} + \frac{\psi_2{}^2(0)}{9} > 1$ olduğunda; t arttıkça $\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi_1{}^2(t)}{4} + \frac{\psi_2{}^2(t)}{9}\right] > 0$ olup $\frac{\psi_1{}^2(t)}{4} + \frac{\psi_2{}^2(t)}{9}$değeri artar ve devirin dış kısmındaki yörünge elipsten uzaklaşır. $\frac{\psi_1{}^2(0)}{4} + \frac{\psi_2{}^2(0)}{9} < 1$ olduğunda;$_y$ t arttıkça $\frac{d}{dt}\left[\frac{\psi_1{}^2(t)}{4} + \frac{\psi_2{}^2(t)}{9}\right] < 0$ olup $\frac{\psi_1{}^2(t)}{4} + \frac{\psi_2{}^2(t)}{9}$ değeri azalır ve devirin iç kısmındaki yörünge elipsten uzaklaşır. Yani, yörüngeler devirden uzaklaşır. Yani bu devir, dayanıksız devirdir.



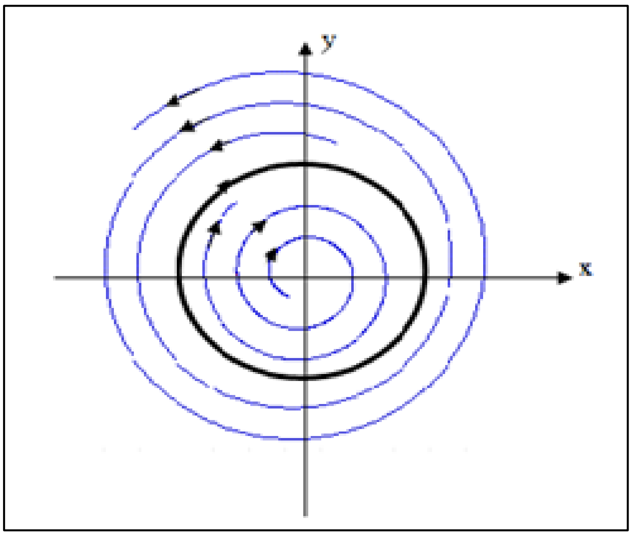
Şekil 2.6. Dayanıksız devir.

Örnek 2.3: $\dot{x} = y + x(x^2 + y^2 - 1)^2 \dot{y} = -x$ sistemini inceleyelim:

Açıktır ki, $x = 0\,, y = 0$ sistemin dayanıklılık noktasıdır. Ve bu sistemin $\psi_1(t) = \cos(t + c)\,, \psi_2(t) = \sin(t + c)$ (c keyfi sabit) periyodik çözümüdür ve periyodik çözümün uygun yörüngesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberidir. $\big(\psi_1(t), \psi_2(t)\big)$ sistemin keyfi çözümü olsun. Bu çözüm için: $\frac{d}{dt}\left[{\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t)\right] = 2\psi_1(t)\dot{\psi_1}(t) + 2\psi_2(\mathrm{t})\,\dot{\psi_2}(t)$

$= 2x(y + x(x^2 + y^2 - 1)^2) + 2y(-x)$
$= 2xy + 2x^2(x^2 + y^2 - 1)^2 - 2xy$
$= 2x^2(x^2 + y^2 - 1)^2$
$= 2{\psi_1}^2(t)\big({\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t) - 1\big)^2$ eşitliği doğrudur ve açıktır ki,

${\psi_1}^2(0) + {\psi_2}^2(0) < 1$ olduğunda; t arttıkça $\frac{d}{dt}\left[{\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t)\right] > 0$ olup${\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t)$ değeri artar. Böylece devirin iç kısmındaki noktadan başlanan yörünge devire yaklaşır. ${\psi_1}^2(0) + {\psi_2}^2(0) > 1$ olduğunda; t arttıkça $\frac{d}{dt}\left[{\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t)\right] > 0$ olup ${\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t)$ değeri artar. Böylece devirin dışında bir noktadan başlanan yörünge devirden uzaklaşır.Demek ki, $x^2 + y^2 = 1$ çemberi, yarı dayanıklı devirdir.



Şekil 2.7. Yarı dayanıklı devir.

BÖLÜM 3

DÜZLEM ÜZERİNDEKİ TEKİL NOKTALARIN SINIFLANDIRILMASI

$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases}$ (2.1) şeklindeki sistemin tekil noktalarının sınıflandırılması ve yörüngelerin tekil nokta etrafındaki görünüşünü inceleyeceğiz. Burada $P(x,y), Q(x,y)$ fonksiyonları, xoy düzleminin belirli bir G bölgesindendir.

3.1. TEKİL NOKTA

Adi Nokta:

- $P(x,y), Q(x,y)$ fonksiyonları (x_0, y_0) noktasının belirli U⊂G komşuluğunda süreklidir.
- Her bir (x,y) ve istenilen t_0 için (2.1) sisteminin $x(t_0) = x_0$, y$(t_0) = y_0$ şartlarını sağlayan tek çözüm vardır.
- $|P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| > 0.$ şartları sağlansın. O zaman (x_0, y_0) noktası, (2.1) sisteminin adi noktası (regular) olarak adlandırılır.

Başka bir ifadeyle, (x_0, y_0) ∈G noktasının bir U⊂G komşuluğunda $P(x,y), Q(x,y)$ fonksiyonları x, y değişkenlerine göre Lipschitz şartını sağlıyorsa ve $|P(x_0, y_0)| + |Q(x_0, y_0)| > 0$ ise (x_0, y_0) noktasına, (2.1) sisteminin adi noktası denir.

Adi nokta olmayan noktaya, (2.1) sisteminin tekil noktası denir.

Tekil noktaların belirli komşuluğunda bu noktadan başka bütün noktalar adi nokta ise, böyle tekil noktaya izole edilmiş tekil nokta denir.

3.2. KANONİK FORM

İlk olarak aşağıdaki iki değişkenli sabit katsayılı lineer homojen sisteme bakalım

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + b_1y \\ \dot{y} = a_2x + b_2y \end{cases} \tag{3.1}$$

ve farzedelim ki,

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \tag{3.2}$$

olsun. O zaman (0,0) noktası, izole edilmiş tekil noktasıdır.

Kabul edelim ki, (3.1) sistemi sabit katsayılı lineer homojen sistemdir. Ve çözümü elementer fonksiyonlar yardımıyla ifade etmek mümkündür. Fakat amacımız (0,0) noktası komşuluğunda yörüngelerin yerleşmesini öğrenmek olduğundan, (3.1) sistemini

$$\begin{cases} \zeta = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \sigma y \end{cases} (\alpha\sigma - \beta\gamma \neq 0) \tag{3.3}$$

dönüşümü yardımıyla aşağıdaki gibi daha sade halde olan sistemlerden birine dönüştürerek çözeriz.

$$(\mathrm{I})\begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda\zeta \\ \dot{\eta} = \mu\eta \end{cases} (\lambda, \mu \neq 0)(\mathrm{II})\begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda\zeta \\ \dot{\eta} = \lambda(\zeta + \eta) \end{cases}$$

$$(\lambda \neq 0)\ (\mathrm{III})\begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda\zeta + \mu\eta \\ \dot{\eta} = -\mu\zeta + \lambda\eta \end{cases} (\lambda \neq 0\,, \mu < 0)\ (\mathrm{IV})\begin{cases} \dot{\zeta} = \mu\eta \\ \dot{\eta} = -\mu\zeta \end{cases} (\mu < 0)$$

$a_2 = b_1 = 0$ olduğunda (3.3) sistemi,(I) şeklinde olduğu açıktır.

$a_2 \neq 0$ kabul edelim ve (3.1) sisteminin gösterilen şekillerden birine dönüştürülmesi problemini inceleyelim. (uygun incelemeler $b_1 \neq 0$ olduğunda da yapılabilir.)

(3.3) dönüşümüyle sistemin (I) şekline dönüştüğünü görelim:

$$\begin{cases}\zeta(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \\ \eta(t) = \gamma x(t) + \sigma y(t)\end{cases}$$

Türev alalım:

(I) şeklindeki denklem sistemi kullanılarak ve (3.1) sisteminden $\dot{x}, \dot{y}$ yerine yazılarak

$$\begin{cases}\dot{\zeta} = \alpha\dot{x} + \beta\dot{y} \\ \dot{\eta} = \gamma\dot{x} + \sigma\dot{y}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha(a_1 x + b_1 y) + \beta(a_2 x + b_2 y) \\ \mu(\gamma x + \sigma y) = \gamma(a_1 x + b_1 y) + \sigma(a_2 x + b_2 y)\end{cases} \tag{3.4}$$

olur burada x, y'nin katsayılarını eşitlersek,

$$\begin{cases}((a_1 - \lambda)a + a_2\beta)x + (b_1 a + (b_2 - \lambda)\beta)y = 0 \\ ((a_1 - \mu)\gamma + a_2\sigma)x + (b_1\gamma + (b_2 - \mu)\sigma)y = 0\end{cases}$$

buradan da $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ ifadelerine göre,

$$\begin{cases}(a_1 - \lambda)a + a_2\beta = 0 \\ b_1 a + (b_2 - \lambda)\beta = 0\end{cases} \tag{3.5}$$

$$\begin{cases}(a_1 - \mu)\gamma + a_2\sigma = 0 \\ b_1\gamma + (b_2 - \mu)\sigma = 0\end{cases} \tag{3.6}$$

sistemleri elde edilir.

$\lambda \neq 0$, $(\mu \neq 0)$ olmak üzere (3.5) ve (3.6) sisteminin $\alpha, \beta,$ (veya $\gamma, \sigma)$ ifadelerinin sıfırdan farklı çözümlerinin olması için sistemin baş katsayılar determinantı sıfır olmalıdır.

$$\begin{vmatrix}(a_1-\lambda) & a_2\\ b_1 & (b_2-\lambda)\end{vmatrix}=0$$
$$(a_1-\lambda)(b_2-\lambda)-a_2b_1=0$$
$$\lambda^2-(a_1+b_2)\lambda+(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

$$\left(\begin{array}{c}\begin{vmatrix}(a_1-\mu) & a_2\\ b_1 & (b_2-\mu)\end{vmatrix}=0\\ (a_1-\mu)(b_2-\mu)-a_2b_1=0\\ \mu^2-(a_1+b_2)\mu+(a_1b_2-a_2b_1)=0\end{array}\right)$$

denklemleri elde edilir.

Bu denklemlerde $\lambda = P$ (veya $\mu = P$) yazarsak

$$P^2-(a_1+b_2)P+(a_1b_2-a_2b_1)=0 \tag{3.7}$$

karakteristik denklemini elde ederiz. Bu denklemde P'nin kökleri λ ve μ sayılarını verir.

Karakteristik denklemin diskriminantına bakalım.

$$\begin{aligned}D &= (a_1+b_2)^2-4(a_1b_2-a_2b_1)\\ &= {a_1}^2+{b_2}^2+2a_1b_2-4a_1b_2+4a_2b_1\\ &= {a_1}^2+{b_2}^2-2a_1b_2+4a_2b_1\\ &= (a_1-b_2)^2+4a_2b_1\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$\Delta = a_1b_2-a_2b_1 \neq 0$ (3.2) şartına göre karakteristik denklemin her iki kökü sıfırdan farklıdır. Bu denklemin determinantını D ile gösterdik. Şimdi buD diskriminantının durumlarına göre (3.1) sisteminin (3.3) dönüşümü yardımıyla daha sade olan dört kanonik biçimden birine dönüştürülmesi problemini inceleyelim.

Farzedelim ki $\underline{D > 0}$; Bu durumda karakteristik denklemin <u>iki farklı reel</u> λ, μ kökleri vardır. (3.4) ve (3.5) sisteminin bu köklere uygun olan

$$\alpha = a_2\,,\beta = \lambda - a_1\,,\gamma = a_2\,,\sigma = \mu - a_1 \tag{3.8}$$

çözümlerini alalım. O zaman $(\alpha\sigma - \beta\gamma \neq 0)$ şartı ile (3.1) sistemini (3.3) dönüşümü yardımıyla (I) şekline dönüştürmüş olduk.

Farzedelim ki D < 0; Bu durumda karakteristik denklemin $\lambda = P_1 + iP_2\,, \mu = P_1 - iP_2\,, (P_2 < 0)$ olacak şekilde kompleks eşlenik kökleri vardır. Bu kökler için (3.5) ve (3.6) sistemlerinin (3.8) formülü ile verilen çözümleri (3.3) dönüşümünde yazalım öz vektörler, (I) sisteminde ζ, η değişkenleri olup yinekompleks eşlenik olurlar.

$$\begin{cases} \zeta = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \sigma y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta = a_2 x + (\lambda - a_1) y \\ \eta = a_2 x + (\mu - a_1) y \end{cases}$$

$u = a_2 x - a_1 y + P_1 y\,, v = -P_2$ alınırsa,

$$\begin{cases} \zeta = \overbrace{a_2 x - a_1 y + P_1 y}^{u} + i\,\overbrace{P_2}^{v} \\ \eta = a_2 x - a_1 y + P_1 y - iP_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \zeta = u - iv \\ \eta = u + iv \end{cases}$$

böylece (3.1) sisteminin λ, μ kompleks eşlenik özdeğerlerine karşılık gelen (I) sistemindeki ζ, η öz vektörlerininde kompleks eşlenik olduğu anlaşılır.

Şimdi (I) sistemine, bu kompleks eşlenik dönüşümü yapalım:

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = (P_1 + iP_2)(u - iv) \\ \dot{u} + i\dot{v} = (P_1 - iP_2)(u + iv) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = P_1 u + P_2 v - i(-P_2 u + P_1 v) \\ \dot{u} + i\dot{v} = P_1 u + P_2 v + i(-P_2 u + P_1 v) \end{cases}$$

buradan $\dot{u}, \dot{v}$ değerleri için, (3.9) sistemi elde edilir.

$$\begin{cases} \dot{u} = P_1 u + P_2 v \\ \dot{v} = -P_2 u + P_1 v \end{cases} \tag{3.9}$$

Ve burada;

$P_1 \neq 0\,, P_2 < 0$ olduğunda sistemi (III) şeklinde,
$P_1 = 0$ olduğunda (3.9) sistemi (IV) şeklinde sistemdir.

Farzedelim ki D = 0: Bu durumda karakteristik denklemin çift katlı kökü vardır. Ve bu kökler için (3.5) ve (3.6) sistemleri aynı sisteme çevrildiğinden $\alpha\sigma - \beta\gamma = 0$ şartı dahilinde çözüm bulmak mümkün değildir.

Buna göre (3.1) sisteminin, (3.3) dönüşümü yardımıyla (II) şekline dönüştürülmesi problemine bakalım. Bu durumda,

$$\begin{cases} \zeta(t) = \alpha x(t) + \beta y(t) \\ \eta(t) = \gamma x(t) + \sigma y(t) \end{cases} \text{türev alalım}$$

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = \alpha\dot{x} + \beta\dot{y} \\ \dot{\eta} = \gamma\dot{x} + \sigma\dot{y} \end{cases}$$

(II) $\begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda\zeta \\ \dot{\eta} = \lambda(\zeta + \eta) \end{cases}$ $(\lambda \neq 0)$ şeklindeki denklem sistemi kullanılarak ve (3.1) sisteminden $\dot{x}, \dot{y}$ yerine yazılarak

$$\begin{cases} \lambda(\alpha x + \beta y) = \alpha(a_1x + b_1y) + \beta(a_2x + b_2y) \\ \lambda(\alpha x + \beta y + \gamma x + \sigma y) = \gamma(a_1x + b_1y) + \sigma(a_2x + b_2y) \end{cases}$$

$$\begin{cases} ((a_1 - \lambda)a + a_2\beta)x + (b_1a + (b_2 - \lambda)\beta)y = 0 \\ ((a_1 - \lambda)\gamma + a_2\sigma - \lambda a)x + (b_1\gamma + (b_2 - \lambda)\sigma - \lambda\beta)y = 0 \end{cases}$$

buradan da $\alpha, \beta, \gamma, \sigma$ ifadelerine göre,

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda)a + a_2\beta = 0 \\ b_1a + (b_2 - \lambda)\beta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 - \lambda)\gamma + a_2\sigma = \lambda a \\ b_1\gamma + (b_2 - \lambda)\sigma = \lambda\beta \end{cases} \left(D = 0, \lambda = \frac{a_1 + b_2}{2}\right) \tag{3.10}$$

sistemleri elde edilir.

$\lambda \neq 0, (\ \mu \neq 0)$ olup (3.5) ve (3.10) sisteminin $\alpha, \beta($ veya $\gamma, \sigma)$ ifadelerinin sıfırdan farklı çözümlerinin olması için sistemin baş katsayılar determinantı sıfır olmalıdır. Yine aynı P-li karakteristik denklem elde edilir ve denklemin kökleri $\lambda = \mu = \frac{a_1+b_2}{2}$ olup sistem(II) şekline dönüştürülmüştür. Ve (3.5) ve (3.10) sistemlerinin çözümleri

$$a = a_2\ , \beta = \lambda - a_1 = \frac{b_2-a_1}{2}, \gamma = 0\ , \sigma = \frac{a_1+b_2}{2} \tag{3.11}$$

sayıları olduğu açıktır.

Diğer taraftan, $D = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 = 0$ olduğundan $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ (3.2) şartına göre $\lambda\mu = \left(\frac{a_1+b_2}{2}\right)^2 = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ve $a_2 \neq 0$ kabul ettiğimiz için (3.11) denkleminden $\alpha\sigma - \beta\gamma = a_2\left(\frac{a_1+b_2}{2}\right) \neq 0$ olur.

Böylelikle, (3.1) sistemi (3.3) tekil olmayan dönüşümü ile (I), (II), (III) ve (IV) kanonik formdaki sistemlerinden birine dönüştürülmüş olur. Ve (0,0) noktası, bu sistemler için izole edilmiş tekil noktadır.

(3.3) dönüşümü, geometrik olarakxoy dik koordinat siteminden genellikle $\zeta o\eta$ koordinat sistemine geçmek demektir. Bu durumda koordinat başlangıcı aynı kalmakta koordinat eksenlerinin yönü ve birimi (ölçeği) değişebilir. Fakat asıl amaç olan (3.1) sisteminin yörüngelerinin (0,0) noktası etrafında grafiklerinin çizilişinin sade olması için $\zeta o\eta$ koordinat sistemini de dik koordinat sistemi kabul edeceğiz [1].

3.3. SADE HAL İÇİN TEKİL NOKTALARIN POİNCARE YÖNTEMİ

Poincare yöntemi, (I), (II), (III) ve (IV) şeklindeki sistemlerin herbirinin λ, μ katsayılarına göre tekil noktaların sınıflandırılması ile ilgilidir.

- İlk olarak <u>(I) sisteminin</u> mümkün olan

  A) $\lambda = \mu < 0$

  B) $\lambda = \mu > 0$

  C) $\lambda < \mu < 0$

  D) $0 < \mu < \lambda$

  E) $\lambda < 0 < \mu$

  hallerini araştıralım.

$(\mathrm{I})\begin{cases}\dot{\zeta} = \lambda\zeta \\ \dot{\eta} = \mu\eta\end{cases}$ $(\lambda, \mu \neq 0)$ sisteminin çözümünü bulalım.

$$\dot{\zeta} = \lambda\zeta \qquad \dot{\eta} = \mu\eta$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \lambda\zeta \qquad \frac{d\eta}{dt} = \mu\eta$$

$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \lambda d_t \qquad \frac{d\eta}{\eta} = \mu d_t$$

$$\ln\zeta = \lambda t + c \qquad \ln\eta = \mu t + c$$

$$\zeta = e^{\lambda t}e^{c}(e^{c} = c_1) \qquad \eta = e^{\mu t}e^{c} \quad (e^{c} = c_2)$$

$$\zeta = c_1 e^{\lambda t} \qquad \eta = c_2 e^{\mu t}$$

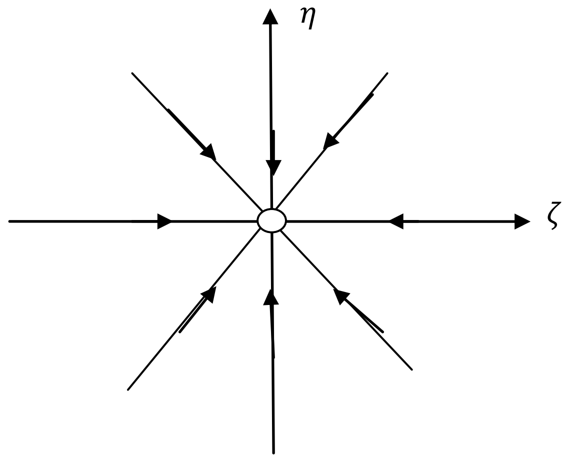
böylece (I) sisteminin çözümü $\zeta = c_1 e^{\lambda t}, \eta = c_2 e^{\mu t}$ olarak bulunur.

<u>A) $\lambda = \mu < 0$ halinde:</u> sistemin çözümü $\zeta = c_1 e^{\lambda t}, \eta = c_2 e^{\mu t}$ şeklindedir ve $\lim_{t\to\infty} \zeta(t)^2 + \eta(t)^2 = 0$ olduğu açıktır. $\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = 0$ ve $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$ olduğundan t pozitif sonsuzluğa yaklaştıkça yörüngeler başlangıç noktasına yaklaşır. Şimdi çözümlerden yörüngeyi bulalım.

$$\zeta = c_1 e^{\lambda t} \implies t = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{\zeta}{c_1}\right)\eta = c_2 e^{\frac{\mu}{\lambda}\ln\left(\frac{\zeta}{c_1}\right)}, \frac{\mu}{\lambda} = 1 \text{ olduğundan} \eta = c_2 e^{\ln\left(\frac{\zeta}{c_1}\right)} \implies \eta = \frac{c_2}{c_1}\zeta$$

şeklindedir.

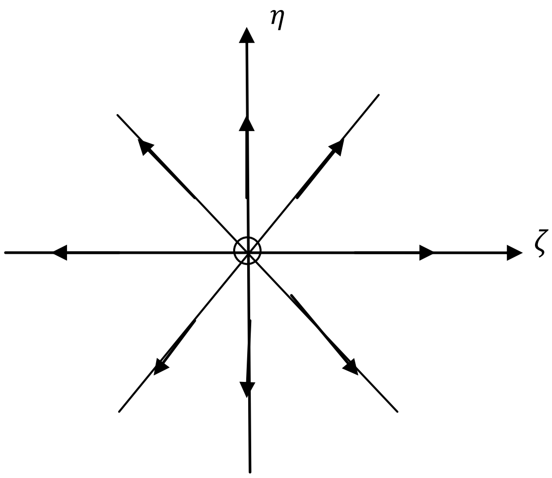
Demek ki, yörünge $t = 0$ anında (c_1, c_2) noktasından geçen ve t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında (0,0) noktasına yaklaşan açık yarı doğrulardır. Buna göre (0,0) tekil noktasına, dayanıklı düzgün düğüm noktası denir.



Şekil 3.1. Dayanıklı düzgün düğüm noktası etrafındaki yörünge.

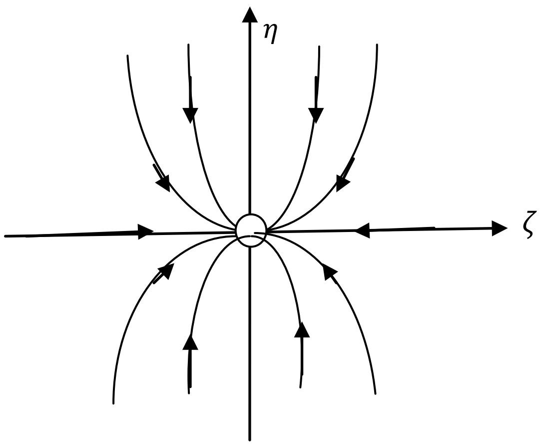
<u>B) $\lambda = \mu > 0$ halinde:</u> Sistemin çözümü $\zeta = c_1 e^{\lambda t}, \eta = c_2 e^{\mu t}$ şeklindedir ve $\lim_{t\to\infty} \zeta(t)^2 + \eta(t)^2 = \infty$ olduğu açıktır. $\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = \infty$ ve $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$ olduğundan t pozitif sonsuzluğa yaklaştıkça yörüngeler başlangıç noktasından uzaklaşır. Şimdi çözümlerden yörünge, bu durumda da $\frac{\mu}{\lambda} = 1$ olduğundan $\zeta - \eta$ arasındaki bağıntı $\eta = \frac{c_2}{c_1}\zeta$ şeklinde olur.

Demek ki, yörünge $t = 0$ anında (c_1, c_2) noktasından geçen ve t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında (0,0) noktasından uzaklaşan açık yarı doğrulardır. Buna göre (0,0) tekil noktasına, dayanıksız düzgün düğüm noktası denir.



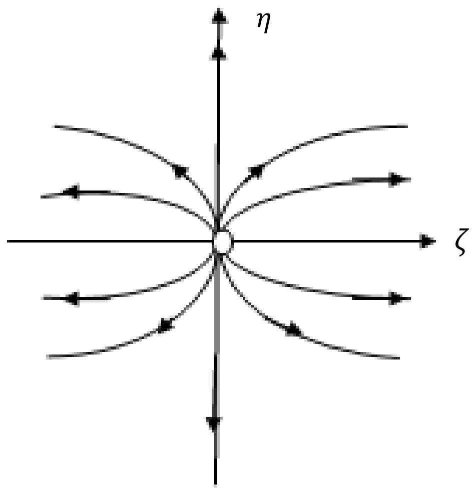
Şekil 3.2. Dayanıklı düzgün düğüm noktası etrafındaki yörünge.

C) $\mu < \lambda < 0$ halinde: sistemin çözümü $\zeta = c_1 e^{\lambda t}, \eta = c_2 e^{\mu t}$ şeklindedir. $\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$ ve $c_1 \neq 0$ için $\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\zeta(t)} = 0$ dır. Böylelikle t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında yörüngeler koordinat başlangıcına yaklaşır. Ve limit durumunda $o\zeta$ eksenine dokunurlar. Çözümlerden elde ettiğimiz bağıntıya göre $\eta = c_2 \left(\frac{\zeta}{c_1}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}}$ eşitliğinde $\frac{\mu}{\lambda} > 1$ olduğundan yörüngeler şekil 6'daki gibi olacaktır. $c_1 = 0 \,, c_2 = 0$ olduğunda yörünge, $\zeta = 0 \,, \eta = 0$ dayanıklılık halidir.$c_1 \neq 0 \,, c_2 = 0$ olduğunda $\zeta = c_1 e^{\lambda t}, \eta = 0$ çözümünün yörüngesi, $o\zeta$ ekseninin açık pozitif veya açık negatif yarı parçası olur. Bu halde (0,0) tekil noktasına, dayanıklı düzgün olmayan düğüm noktası denir.



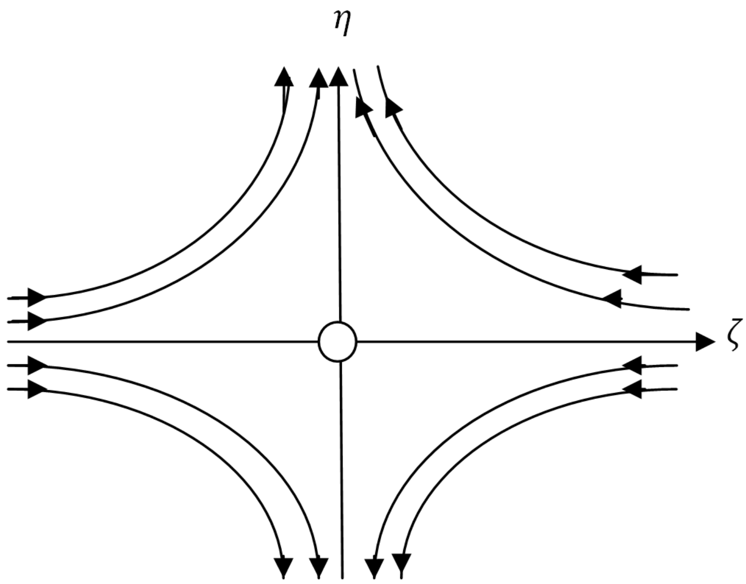
Şekil 3.3. Dayanıklı düzgün olmayan düğüm noktası etrafındaki yörünge.

D) $0 < \mu < \lambda$ halinde: C) haline benzer olarak yapılır. sistemin çözümü $\zeta = c_1 e^{\lambda t}, \eta = c_2 e^{\mu t}$ şeklindedir. Ve $\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = \infty$ ve $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$ olup yörüngeler başlangıç noktasından uzaklaşır. $c_2 \neq 0$ için $\lim_{t\to-\infty} \frac{\zeta(t)}{\eta(t)} = 0$ olur böylece yörünge limit durumunda $o\eta$ eksenine dokunur. Çözümlerden elde ettiğimiz bağıntıya göre $\eta = c_2 \left(\frac{\zeta}{c_1}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}}$ eşitliğinde $\frac{\mu}{\lambda} < 1$ olduğundan yörüngeler şekil 7'daki gibi olacaktır. $c_1 = 0\,, c_2 = 0$ olduğunda yörünge, $\zeta = 0\,, \eta = 0$ dayanıklılık halidir. $c_1 = 0\,, c_2 \neq 0$ olduğunda $\zeta = 0, \eta = c_2 e^{\mu t}$ çözümünün yörüngesi, $o\eta$ ekseninin açık pozitif veya açık negatif yarı parçası olur. Bu halde (0,0) tekil noktasına, dayanıksız düzgün olmayan düğüm noktası denir.



Şekil 3.4. Dayanıksız düzgün olmayan düğüm noktası etrafındaki yörünge.

E) $\lambda < \mu < 0$ halinde: sistemin çözümü $\zeta = c_1 e^{\lambda t}, \eta = c_2 e^{\mu t}$ şeklindedir.Bu halde $\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = 0$ ve $c_2 > 0$ ise $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty c_2 < 0$ ise $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = -\infty$ olur. Çözümlerden elde ettiğimiz bağıntıya göre $\eta = c_2 \left(\frac{\zeta}{c_1}\right)^{\frac{\mu}{\lambda}}$ eşitliğinde $\frac{\mu}{\lambda} < 0$ olduğundan yörüngeler, $\eta = c_2 (\zeta)^{\frac{\mu}{\lambda}} (c_1)^{-\frac{\mu}{\lambda}}, (c_1)^{-\frac{\mu}{\lambda}} = c \Longrightarrow \eta = \frac{c}{(\zeta)^{-\frac{\mu}{\lambda}}}$ bağıntısından şekildeki gibi olduğu açıktır. Bu halde $(0,0)$ noktasına, eğervari tekil nokta denir.



Şekil 3.5. Eğervari tekil nokta etrafındaki yörünge.

- Şimdi de (II) sistemini inceleyelim. Kolayca görebiliriz ki, (II) sistemini $\zeta(0) = c_1\,, \eta(0) = c_2$ şartını sağlayan çözüm: $\zeta(t) = c_1 e^{\lambda t}, \eta(t) = (c_2 + c_1 \lambda t) e^{\mu t}$ şeklindedir.

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda\zeta \\ \dot{\eta} = \lambda(\zeta + \eta) \end{cases} , \quad \lambda \neq 0$$

$$\dot{\zeta} = \lambda\zeta$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = \lambda\zeta$$
$$\frac{d\zeta}{\zeta} = \lambda dt$$
$$\ln\zeta = \lambda t + c$$
$$\zeta = e^{\lambda t} e^{c} \quad (e^{c} = c_1)$$
$$\zeta = c_1 e^{\lambda t}$$

$$\dot{\eta} = \lambda\zeta + \lambda\eta$$
$$\dot{\eta} - \lambda\eta = \lambda\zeta$$
$\dot{\eta} - \lambda\eta = 0\}$ homojen çözüm
$$\frac{\dot{\eta}}{\eta} = \lambda$$
$$\frac{d\eta}{\eta} = \lambda dt$$
$$\ln\eta = \lambda t + c$$
$$\eta = e^{\lambda t} e^{c}, \quad c_2 = e^{c}$$
$$\eta = c_2 e^{\lambda t}$$
$$\left.\begin{aligned} \eta &= c(t) e^{\lambda t} \\ \dot{\eta} &= c'(t) e^{\lambda t} \end{aligned}\right\} \; c'(t) e^{\lambda t} = \lambda c_1 e^{\lambda t}$$
$$c' = \lambda c_1$$
$$c(t) = \lambda c_1 t + c_2$$
genel çözüm: $\eta = (\lambda c_1 t + c_2\ ) e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \zeta = c_1 e^{\lambda t} \\ \eta = (\lambda c_1 t + c_2\ ) e^{\lambda t} \end{cases}$$ olarak bulunur.

Bu çözümün yörüngelerini

$A_1)\ \lambda < 0$

$A_2)\ \lambda > 0$

hallerini inceleyelim:

<u>$A_1)\ \lambda < 0$ halinde:</u> sistemin çözümü $\zeta = c_1 e^{\lambda t}, \eta = (\lambda c_1 t + c_2)e^{\lambda t}$ şeklindedir. $\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = 0$ ve $c_1 \neq 0$ için $\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\zeta(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\dot{\eta}(t)}{\dot{\zeta}(t)} = \pm\infty$ olur. (c_1'e göre). Demek ki çözümlerin yörüngeleri t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında $(0,0)$ noktasına yaklaşır. Ve limit durumunda $o\eta$ eksenine dokunur. $c_1 = 0$, $c_2 > 0$ ise yörünge $o\eta$ eksenin açık pozitif yarı parçası $c_1 = 0$, $c_2 < 0$ ise yörünge $o\eta$ eksenin açık negatif yarı parçasıdır. $\zeta - \eta$ koordinat sisteminde yörüngenin denklemini bulalım. Bunun için ζ, η çözümlerindetparametresini yok edelim.

$e^{\lambda t} = \frac{\zeta}{c_1}$ $\longrightarrow$ $\eta = c_2 e^{\lambda t} + \lambda c_1 t e^{\lambda t}$

$\lambda t = \ln\frac{\zeta}{c_1}$ $\qquad \eta = \left(\frac{c_2}{c_1} + \ln\frac{|\zeta|}{c_1}\right)\zeta$ şeklindedir. Şimdi bu yörüngeyi çizelim.

$\zeta = 0\,,\ \eta = 0$

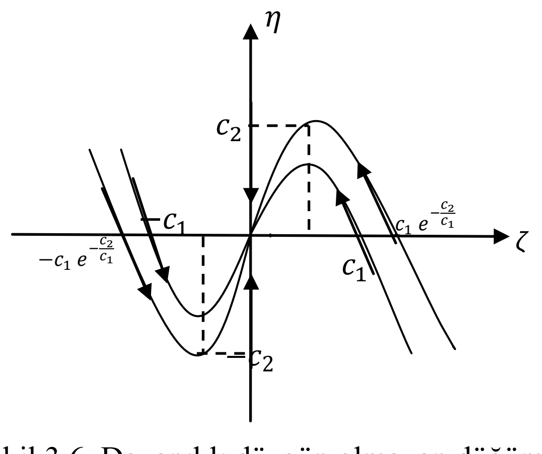
$\zeta = c_1\,,\ \eta = c_2$

$\zeta = -c_1\,,\ \eta = -c_2$

$\frac{c_2}{c_1} + \ln\frac{\zeta}{c_1} = 0 \Rightarrow |\zeta| = c_1 e^{-\frac{c_2}{c_1}}\ \zeta = c_1\, e^{-\frac{c_2}{c_1}}$, $\eta = 0$

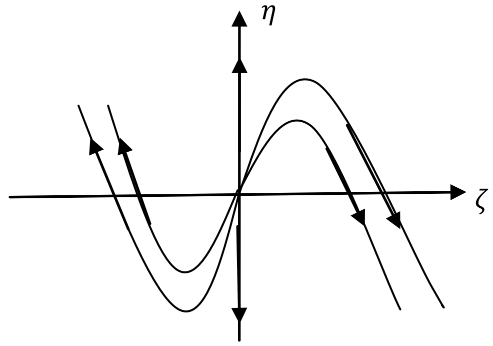
$\zeta = -c_1\, e^{-\frac{c_2}{c_1}}$, $\eta = 0$

bu verileri koordinat sisteminde çizersek, O halde $(0,0)$ tekil noktasına, dayanıklı düzgün olmayan düğüm noktası denir.



Şekil 3.6. Dayanıklı düzgün olmayan düğüm noktası etrafındaki yörünge.

$\underline{B_1)\ \lambda > 0 \text{ halinde:}}$ sistemin çözümü $\zeta = c_1 e^{\lambda t}$, $\eta = (\lambda c_1 t + c_2\ )e^{\lambda t}$ şeklindedir. $\lim_{t\to\infty} \zeta(t) = \infty$, $\lim_{t\to\infty} \eta(t) = \infty$ ve $c_1 \neq 0$ için $\lim_{t\to\infty} \frac{\eta(t)}{\zeta(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{\dot{\eta}(t)}{\dot{\zeta}(t)} = \infty$ olur. Demek ki çözümlerin yörüngeleri t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında (0,0) noktasından uzaklaşır. Ve limit durumunda $o\eta$ eksenine dokunur. Yörünge A_1) halindeki gibidir. O halde (0,0) tekil noktasına, dayanıksız düzgün olmayan düğüm noktası denir.



Şekil 3.7. Dayanıksız düzgün olmayan düğüm noktası etrafındaki yörünge.

- Geriye kalan <u>(III) ve (IV) sistemlerini</u> araştıralım. (0,0) noktası etrafında yörüngeleri daha sade olması için $\begin{cases} \zeta = r cos\theta \\ \eta = r sin\theta \end{cases}$ dönüşümü uygulayarak kutupsal koordinat sistemine geçelim.

- İlk olarak <u>(III) sistemine</u> uygularsak,

(III) $\begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda\zeta + \mu\eta \\ \dot{\eta} = -\mu\zeta + \lambda\eta \end{cases}$ $(\lambda \neq 0, \mu < 0)$ $\begin{cases} \zeta(t) = r(t)cos\theta(t) \\ \eta(t) = r(t)sin\theta(t) \end{cases}$ türev alalım.

$$r'cos\theta - r\theta' sin\theta = \lambda r cos\theta + \mu r sin\theta r' sin\theta + r\theta' cos\theta = -\mu r cos\theta + \lambda r sin\theta$$

1. denklemi $sin\theta$ ile 2. denklemi $-cos\theta$ ile çarpıp toplarsak $\theta' = -\mu$,ve 1. denklemi $cos\theta$ ile 2. denklemi $sin\theta$ ile çarpıp toplarsak $r' = \lambda r$ olarak bulunur.

O zaman bu dönüşümden sonra (III) sistemini,

$(III')\begin{cases} \frac{d_\theta}{d_t} = -\mu \\ \frac{d_r}{d_t} = \lambda r \end{cases}$ $(\lambda \neq 0, \mu < 0)$ şeklindeki sisteme dönüştürmüş olduk.

- Şimdi bu dönüşümü (IV) sistemine uygulayalım.

(IV) $\begin{cases} \dot{\zeta} = \mu\eta \\ \dot{\eta} = -\mu\zeta \end{cases}$ $(\mu < 0)$ $\begin{cases} \zeta(t) = r(t)cos\theta(t) \\ \eta(t) = r(t)sin\theta(t) \end{cases}$ türev alalım.

$r^{'}cos\theta - r\theta' sin\theta = \mu r sin\theta r^{'}sin\theta + r\theta^{'}cos\theta = -\mu r cos\theta$

1. denklemi $-sin\theta$ ile 2. denklemi $cos\theta$ ile çarpıp toplarsak $\theta^{'} = -\mu$,ve 1. denklemi $cos\theta$ ile 2. denklemi $sin\theta$ ile çarpıp toplarsak $r^{'} = 0$ olarak bulunur.

O zaman bu dönüşümden sonra (IV) sistemi,

$(\mathrm{IV}^{'}) \begin{cases} \frac{\mathrm{d}_{\theta}}{\mathrm{d}_{\mathrm{t}}} = -\mu \\ \frac{\mathrm{d}_{\mathrm{r}}}{\mathrm{d}_{\mathrm{t}}} = 0 \end{cases}$ $(\mu < 0)$ şeklindeki sisteme dönüştürür.

- Açıktır ki, (III') sisteminin çözümü: $\begin{cases} \theta = -\mu t + c_1 \\ r = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}$ $(c_2 > 0)$ fonksiyonlarıdır. Bu çözüme uygun kutupsal koordinat sistemindeki yörünge

$t = \frac{c_1 - \theta}{\mu} \longrightarrow r = c_2 e^{\frac{\lambda}{\mu}(c_1 - \theta)}$

$r = c_2 e^{c_1 \frac{\lambda}{\mu}} e^{-\theta \frac{\lambda}{\mu}}$ $(c_2 e^{c_1 \frac{\lambda}{\mu}} = c)$

$r = ce^{-\theta \frac{\lambda}{\mu}}$ şeklindedir.

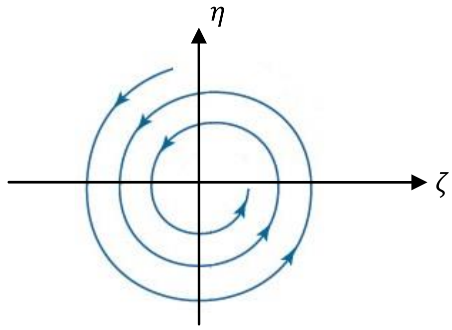
- $\lambda < 0$ durumunda: θ pozitif sonsuzluğa yaklaştığında (III') sisteminin yörüngeleri spiral şeklinde (0,0) noktasına yaklaşır. Bu ise t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında (III) sisteminin yörüngelerinin (0,0) noktasına yaklaştığını gösterir.

$$r = ce^{-\theta\frac{\lambda}{\mu}} \xrightarrow[A=\frac{\lambda}{\mu}>0]{\substack{\mu<0\\ \lambda<0}} r = ce^{-\theta A}$$

$\theta \to \infty\,,\ r \to 0$

$t \to \infty\,,\ \zeta,\eta \to 0$

Bu halde (0,0) noktasına, dayanıklı odak noktası denir.



Şekil 3.8. Dayanıklı odak noktası etrafındaki yörünge.

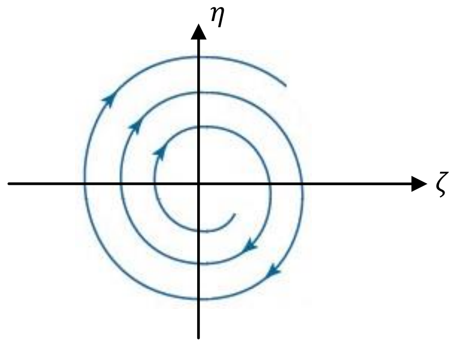
- <u>$\lambda > 0$ durumunda:</u> θ pozitif sonsuzluğa yaklaştığında (III') sisteminin yörüngeleri spiral şeklinde (0,0) noktasına uzaklaşır. Bu ise t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında (III) sisteminin yörüngelerinin (0,0) noktasından uzaklaştığını gösterir.

$$r = ce^{-\theta\frac{\lambda}{\mu}} \xrightarrow[A=-\frac{\lambda}{\mu}>0]{\substack{\mu<0\\ \lambda>0}} r = ce^{\theta A}$$

$\theta \to \infty\,,\ r \to \infty$

$t \to \infty\,,\ \zeta,\eta \to \infty$

Bu halde (0,0) noktasına, dayanıksız odak noktası denir.



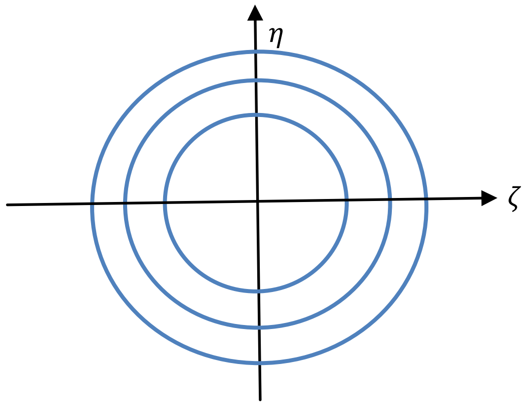
Şekil 3.9. Dayanıksız odak noktası etrafındaki yörünge.

- Açıktır ki, <u>(IV') sisteminin</u> çözümleri $\begin{cases}\theta = -\mu t + c_1 \\ r = c_2\,, c_2 > 0\end{cases}$ şeklindedir.

- <u>$\lambda > 0$ durumunda:</u>θ pozitif sonsuzluğa yaklaştığında (III') **s**isteminin yörüngeleri spiral şeklinde (0,0) noktasına uzaklaşır. Bu ise t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında (III) sisteminin yörüngelerinin (0,0) noktasından uzaklaştığını gösterir.

- Açıktır ki, <u>(IV') sisteminin</u> çözümleri $\begin{cases}\theta = -\mu t + c_1 \\ r = c_2\,, c_2 > 0\end{cases}$ şeklindedir.

Bu çözüme uygun kutupsal koordinatlardaki bu yörünge merkezi $(0,0)$ noktası olan c_2 yarıçaplı çemberler ailesidir. $(0,0)$ noktasına merkez noktası denir. Yani devirlerden ibarettir. Burada r sabit , θ değişiyor. Bu yörünge her r sabiti için t pozitif sonsuzluğa yaklaştıkçaθ da pozitif sonsuzluğa yaklaşarak $(\mu < 0)$değişir ve bir çember çizer. Bu yüzden istenilen yörünge çemberler ailesi olacaktır.



Şekil 3.10. Merkez tekil nokta etrafındaki yörünge.

Böylelikle aşağıdaki teoremi ispat etmiş olduk [1].

Teorem 3.1:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + b_1y \\ \dot{y} = a_2x + b_2y \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \tag{3.13}$$

Farzedelim ki, (3.12) sistemi (3.13) şartını sağlasın. O zaman $(0,0)$ noktası, (3.12) sisteminin izole edilmiş tekil noktasıdır. Ve$D = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 = 0$ veya $D > 0\,, \Delta > 0$ olduğunda $(0,0)$ tekil noktası, <u>düğüm noktası</u> $D > 0\,, \Delta < 0$ olduğunda $(0,0)$ tekil noktası, <u>eğervari nokta</u> $D < 0\,, \mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_2 \neq 0$ olduğunda $(0,0)$ tekil noktası, <u>odak noktası</u>$D < 0\,, \mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_2 = 0$ olduğunda $(0,0)$ tekil noktası, <u>merkez noktasıdır</u>.

BÖLÜM 4

GENEL OLARAK TEKİL NOKTALARIN SINIFLANDIRILMASI

Genelliği bozmadan (0,0) noktasının (2.1) sisteminin tekil noktası olduğunu farzedelim. Aksi halde tekil noktasını koordinat başlangıcına kaydırmakla bunu elde edeiliriz. Bu halde homojen olmayan otonom sistemlerin tekil noktalarının sınflandırılması ile ilgili aşağıdaki teorem doğrudur.

Teorem 4.1:

$$\begin{cases} \dot{x} = P(x,y) \\ \dot{y} = Q(x,y) \end{cases} \tag{4.1}$$

Farzedelim ki, (2.1) sisteminde aşağıdaki üç şart sağlansın.

1) $P(x,y), Q(x,y)$ fonksiyonları $(0,0)$ noktasının belirli U komşuluğunda Lipschitz şartını sağlasın.

2) Hepsi birden sıfır olmayan a_1, b_1, a_2 , b_2 sayıları var ki,

$$\begin{cases} P(x,y) = a_1x + b_1y + \varphi(x,y) \\ Q(x,y) = a_2x + b_2y + \psi(x,y) \end{cases}$$

burada φ, ψ fonksiyonları U komşuluğunda sürekli ve$\varphi(x,y) = O(r), \psi(x,y) = O(r), r = \sqrt{x^2 + y^2}$ şeklindedir.$\lim_{r\to 0} \frac{\varphi(x,y)}{r} = 0$, $\lim_{r\to 0} \frac{\psi(x,y)}{r} = 0$.

3) $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.

O zaman (0,0) noktası

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1x + b_1y + \varphi(x,y) \\ \dot{y} = a_2x + b_2y + \psi(x,y) \end{cases} \tag{4.2}$$

sisteminin izole edilmiş tekil noktasıdır. Ve $\mathrm{D} = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 = 0$ veya:

$D > 0\,, \Delta > 0$ olduğunda (0,0) tekil noktası, <u>düğüm noktası</u>

$D > 0\,, \Delta < 0$ olduğunda (0,0) tekil noktası, <u>eğervari nokta</u>

$D < 0\,, \mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_2 \neq 0$ olduğunda (0,0) tekil noktası, <u>odak</u>

$D < 0\,, \mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_2 = 0$ olduğunda (0,0) tekil noktası, <u>merkez</u> veya <u>odak</u> olur.

Teoremdeki şartlar sağlandığında $P^2 - (a_1 + b_2)P + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0$ denkleminin reel kısımları, sıfırdan farklı olduğunda φ, ψ fonksiyonları tekil noktaların sınıflandırılmasında rol oynamazlar yani o halde (0,0) izole edilmiş tekil noktası etrafında (4.1) sisteminin yörüngeleri $\begin{cases} \dot{x} = a_1x + b_1y \\ \dot{y} = a_2x + b_2y \end{cases}$ (3.1) sisteminin yörüngeleri gibidir. Fakat karakteristik denklemin köklerinin reel kısmı sıfır olduğunda ($\mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_2 = 0$ olduğunda) φ, ψ fonksiyonları ihmal edilmeksizin araştırılır ve (0,0) noktası merkez veya odak olabilir [1].

Örnek 4.1:

$\begin{cases} \dot{x} = y + x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = -x + y(x^2 + y^2) \end{cases}$ sisteminin tekil noktasını sınıflandırınız.

Verilen sistemde $\mathrm{D} = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2b_1 = -4 < 0\,, \mathrm{a}_1 + \mathrm{b}_2 = 0$ noktası uygun lineer homojen sistem için merkezdir. Sistemin karakteristik denkleminin köklerinin reel kısmı sıfırdır.

O halde sisteme $\begin{cases} \zeta = r\cos\theta \\ \eta = r\sin\theta \end{cases}$ dönüşümü yapalım ve bu durumda sistemin, (III) veya (IV) sistemine dönüşmesi gerektiğini görmüştük.

$r'cos\theta - r\theta'sin\theta = rsin\theta + rcos\theta(r^2)$

$r'sin\theta + r\theta'cos\theta = -rcos\theta + rsin\theta(r^2)$

1. denklemi $-sin\theta$ ile 2. Denklemi $cos\theta$ ile çarpıp toplarsak $\theta' = -1$ ve 1. denklemi $cos\theta$ ile 2. denklemi $sin\theta$ ile çarpıp toplarsak $r' = r^3$ olarak bulunur.

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = -1 \\ \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} = \mathrm{r}^3 \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{r}^3} = \mathrm{dt}$$

$$-\frac{1}{2r^2} = t + c$$

$$\frac{1}{r^2} = -2t - 2c$$

$$r^2 = \frac{1}{-2t-2c} \; (-2c = c_2)$$

$$r = \sqrt{\frac{1}{c_2 - 2t}}$$

sistemi elde edilir.

Buradan $\begin{cases} \theta = -t + c_1 \\ r = \sqrt{\frac{1}{c_2 - 2t}} \end{cases}$ çözümü bulunur. Bu çözüme uygun yörünge:

$r = \sqrt{\frac{1}{2\theta + c}} \; (2\theta + c > 0)$ olarak bulunur. Ve buradan $\theta \to \infty, r \to 0$ olduğundan yörüngeler koordinat başlangıcına yaklaşır.Yani (0,0) noktası, sistemin <u>dayanıklı odak noktasıdır</u>.

BÖLÜM 5

ALIŞTIRMALAR

1) Aşağıdaki limit devirlerinin dayanıklılığını inceleyiniz ve yörüngelerini kurunuz.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - y^2) \end{cases}$

sistemin limit devrinin dayanıklılığını araştıralım. Verilen sistemin $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1, \Delta \neq 0$ olduğundan (0,0) noktası, tekil noktadır. Açıktır ki, $x = 0, y = 0$ sistemin tek dayanıklılık halidir. ve bu sistemin $\psi_1(t) = cos(t + c)\,, \psi_2(t) = \sin(t + c)$ (c keyfi sabit) periyodik çözümünün yörüngesi, $x^2 + y^2 = 1$ çemberidir. $\left(\psi_1(t), \psi_2(t)\right)$ sistemin keyfi çözümü olsun. Bu çözüm için:

$$\frac{d}{dt}\left[{\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t)\right] = 2\psi_1(t)\dot{\psi_1}(t) + 2\psi_2(\mathrm{t})\,\dot{\psi_2}(t)$$
$$= 2\mathrm{x}(\mathrm{y} + \mathrm{x}(1 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2)) + 2\mathrm{y}(-\mathrm{x} + \mathrm{y}(1 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2))$$
$$= 2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2)$$
$$= 2({\psi_1}^2(t) + \psi_2(\mathrm{t})^2)(1 - \psi_1(t)^2 - \psi_2(t)^2)$$

eşitliği doğrudur. Ve açıktır ki, ${\psi_1}^2(0) + {\psi_2}^2(0) < 1$ ise istenilen $t > 0$ için $\frac{d}{dt}\left[{\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t)\right] > 0$. Yani t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında $\left(\psi_1(t), \psi_2(t)\right)$ çözümünün yörüngesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberine yaklaşır. ${\psi_1}^2(0) + {\psi_2}^2(0) > 1$ ise istenilen $t > 0$ için $\frac{d}{dt}\left[{\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t)\right] < 0$. Yani t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında $\left(\psi_1(t), \psi_2(t)\right)$ çözümünün yörüngesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberine yaklaşır. Demek ki, $x^2 + y^2 = 1$ çemberi sistemin <u>dayanıklı</u> <u>devir</u>dir.

(b) $\begin{cases} \dot{x} = -y + x(x^2 + y^2 - 1) \\ \dot{y} = x + y(x^2 + y^2 - 1) \end{cases}$

limit devrinin dayanıklığını araştıralım. Verilen sistemin$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = 1, \Delta \neq 0$ olduğundan (0,0) noktası, tekil noktadır. Açıktır ki,$x = 0, y = 0$ sistemin tek dayanıklılık halidir. ve bu sistemin $\psi_1(t) = cos(t + c)\,, \psi_2(t) = \sin(t + c)$ (c keyfi sabit) periyodik çözümünün yörüngesi, $x^2 + y^2 = 1$ çemberidir. $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ sistemin keyfi çözümü olsun. Bu çözüm için:

$$\frac{d}{dt}\left[{\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t)\right] = 2\psi_1(t)\dot{\psi_1}(t) + 2\psi_2(\mathrm{t})\,\dot{\psi_2}(t)$$
$$= 2\mathrm{x}(-y + x(x^2 + y^2 - 1)) + 2\mathrm{y}(x + y(x^2 + y^2 - 1))$$
$$= 2(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1)$$
$$= 2({\psi_1}^2(t) + \psi_2(\mathrm{t})^2)(\psi_1(t)^2 + \psi_2(t)^2 - 1)$$

eşitliği doğrudur. Ve açıktır ki, ${\psi_1}^2(0) + {\psi_2}^2(0) < 1$ ise istenilen $t > 0$ için $\frac{d}{dt}\left[{\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t)\right] < 0$. Yani t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ çözümünün yörüngesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberinden uzaklaşır. ${\psi_1}^2(0) + {\psi_2}^2(0) > 1$ ise istenilen $t > 0$ için $\frac{d}{dt}\left[{\psi_1}^2(t) + {\psi_2}^2(t)\right] > 0$. Yani t pozitif sonsuzluğa yaklaştığında $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ çözümünün yörüngesi $x^2 + y^2 = 1$ çemberinden uzaklaşır. Demek ki, $x^2 + y^2 = 1$ çemberi sistemin dayanıksız devirdir.

(c) $\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = -0.5x + y\left(1 - \frac{x^2}{4} - y^2\right)^2 \end{cases}$

sistemin limit devrinin dayanıklılığını araştıralım. Açıktır ki, $x = 0\,, y = 0$ sistemin dayanıklılık noktasıdır. Ve bu sistemin $\psi_1(t) = 2\cos(t + c)\,, \psi_2(t) = \sin(t + c)$ (c keyfi sabit) periyodik çözümüdür ve periyodik çözümün uygun yörüngesi $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ elipsidir. $(\psi_1(t), \psi_2(t))$ sistemin keyfi çözümü olsun. Bu çözüm için:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{{\psi_1}^2(t)}{4}+{\psi_2}^2(t)\right]=\frac{2\psi_1(t)\dot{\psi_1}(t)}{4}+2\psi_2(\mathrm{t})\,\dot{\psi_2}(t)$$

$$=\frac{2x}{4}(2y)+2y\left(-\frac{x}{2}+y\left(1-\frac{x^2}{4}-y^2\right)^2\right)$$

$$=xy-xy+2y^2\left(1-\frac{x^2}{4}-y^2\right)^2$$

$$=2y^2\left(1-\frac{x^2}{4}-y^2\right)^2$$

$$=2{\psi_2}^2(t)\left(1-\frac{{\psi_1}^2(t)}{4}-{\psi_2}^2(t)\right)^2$$

eşitliği doğrudur ve açıktır ki, $\frac{{\psi_1}^2(0)}{4}+{\psi_2}^2(0)<1$ olduğunda; t arttıkça $\frac{d}{dt}\left[\frac{{\psi_1}^2(t)}{4}+{\psi_2}^2(t)\right]>0$ olup $\frac{{\psi_1}^2(t)}{4}+{\psi_2}^2(t)$ değeri artar. Böylece devirin iç kısmında bir noktadan başlanan yörünge devire yaklaşır. $\frac{{\psi_1}^2(0)}{4}+{\psi_2}^2(0)>1$ olduğunda; t arttıkça $\frac{d}{dt}\left[\frac{{\psi_1}^2(t)}{4}+{\psi_2}^2(t)\right]>0$ olup $\frac{{\psi_1}^2(t)}{4}+{\psi_2}^2(t)$ değeri artar. Böylece devirin dışında bir noktadan başlanan yörünge devirden uzaklaşır. Demek ki, $\frac{x^2}{4}-y^2=1$ elipsi, yarı dayanıklı devirdir.

2) Aşağıdaki sistemlerde $(0,0)$ tekil noktasını sınıflandırınız ve aynı nokta etrafında yörüngelerini bulunuz.

(a) $\begin{cases}\dot{x}=x-2y\\ \dot{y}=x-y\end{cases}$ $\Delta=a_1b_2-a_2b_1=1\neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır.

Sistemin $(0,0)$ noktasını sınıflandırmak için karakteristik denklemi ve diskriminantı hesaplayalım. Karakteristik denklem $P^2-(a_1+b_2)P+(a_1b_2-a_2b_1)=0$ ve diskriminantı $\mathrm{D}=(a_1-b_2)^2+4a_2b_1$ şeklindedir. $P^2+1=0$ ve $D=-4<0$ bulunur. Burada $D<0$ olduğundan karakteristik denklem kompleks eşlenik iki köke sahip olacaktır. Ve bu kökler $\lambda=-i\,,\mu=i$ şeklindedir. $D<0$ olduğundan verilen sistemin kanonik formu (III) yada (IV) şeklinde olmalıdır. Verilen sisteme

(I) $\begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda\zeta \\ \dot{\eta} = \mu\eta \end{cases}$ $\lambda, \mu \neq 0$ sistemi ile, $\begin{cases} \zeta = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \sigma y \end{cases}$ dönüşümünü uygulayalım. Burada λ, μ özdeğerleri kompleks eşlenik sayı olduğundan bu özdeğerlere (I) sisteminde karşılık gelen ζ, η özvektörleri de kompleks eşlenik olacaktır. O halde verilen sisteme;

$\begin{cases} \zeta = u - iv \\ \eta = u + iv \end{cases}$ dönüşümü yapalım.

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = -i(u - iv) \\ \dot{u} + i\dot{v} = i(u + iv) \end{cases} \begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = -iu - v \\ \dot{u} + i\dot{v} = iu - v \end{cases}$$

buradan $\dot{u}, \dot{v}$ değerleri, $\begin{cases} \dot{u} = -v \\ \dot{v} = u \end{cases}$ şeklindedir. Görüldüğü gibi sistem, (IV) şekline dönüştü. Şimdi bu sisteme $\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$ dönüşümü yaparak kutupsal koordinat sistemine geçelim ve böylece verilen sistemin yörüngesini en sade şekilde görelim.

$$r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta = -r\sin\theta$$
$$r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta = r\cos\theta$$

1. denklemi $-\sin\theta$ ile 2. denklemi $\cos\theta$ ile çarpıp toplarsak $\theta' = 1$, ve 1. denklemi $\cos\theta$ ile 2. denklemi $\sin\theta$ ile çarpıp toplarsak $r' = 0$ olarak bulunur.

O zaman bu dönüşümden sonra (IV) sistemi, $(\mathrm{IV}')\begin{cases} \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{dt}} = 1 \\ \frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{dt}} = 0 \end{cases}$ şeklindeki sisteme dönüştürür. Artık bu sistemin çözümünü kolayca bulabiliriz. Ve bu sistemin çözümleri $\begin{cases} \theta = t + c_1 \\ r = c_2 \end{cases}$, $c_2 > 0$ şeklindedir. O zaman verilen sistemin (0,0) tekil noktası <u>merkez</u> ve yörüngesi <u>çemberler ailesi</u>dir.

(b) $\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 2x - 3y \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 1 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır.

Bu sistemde karakteristik denklem ve diskriminant $P^2 + 2P + 1 = 0\,, D = 0$ bulunur. Burada $D = 0$ olduğundan karakteristik denklem çakışık iki köke sahiptir. Ve bu kök $\lambda = \mu = -1$ şeklindedir. $D = 0$ olduğunda verilen sisteme (II) şeklindeki sistem ile $\begin{cases} \zeta = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \sigma y \end{cases}$ dönüşümü yapmalıyız. Bu sistemin çözümünün olması için $a = a_2\,, \beta = \lambda - a_1 = \frac{b_2 - a_1}{2}, \gamma = 0\,, \sigma = \frac{a_1 + b_2}{2}$ (3.11) formülünü vermiştik o halde $a = 2\,, \beta = -2, \gamma = 0\,, \sigma = -1$ sayıları edilir. Böylece;

$(\mathrm{II})\begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda\zeta \\ \dot{\eta} = \lambda(\zeta + \eta) \end{cases} (\lambda \neq 0)$ şeklindeki sistem ile verilen sisteme $\begin{cases} \zeta = 2x - 2y \\ \eta = -y \end{cases}$ dönüşümü uygulayalım.

$\begin{cases} \dot{\zeta} = 2\dot{x} - 2\dot{y} \\ \dot{\eta} = -\dot{y} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dot{\zeta} = -2x + 2y \\ \dot{\eta} = -2x + 3y \end{cases} \begin{cases} \dot{\zeta} = -\zeta \\ \dot{\eta} = -(\zeta + \eta) \end{cases} (\lambda = -1 \neq 0)$ sistemi bulunur.

$$\dot{\zeta} = -\zeta$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = -\zeta$$
$$\frac{d\zeta}{\zeta} = -dt$$
$$\ln\zeta = -t + c$$
$$\zeta = e^{-t}e^{c} \quad (e^{c} = c_1)$$
$$\zeta = c_1 e^{-t}$$

$$\dot{\eta} = -\zeta - \eta$$
$$\dot{\eta} + \eta = -\zeta$$
$\dot{\eta} + \eta = 0\}$ Homojen çözüm
$$\dot{\eta} = -\eta$$
$$\eta = c_2 e^{-t}$$
$$\left.\begin{aligned} \eta &= c(t)e^{-t} \\ \dot{\eta} &= c'(t)e^{-t} \end{aligned}\right\} c'(t)e^{-t} = -c_1 e^{-t}$$
$$c' = -c_1$$
$$c(t) = -c_1 t + c_2$$
genel çözüm: $\eta = (-c_1 t + c_2\ )e^{-t}$

Sistemin çözümü, $\begin{cases} \zeta = c_1 e^{-t} \\ \eta = (-c_1 t + c_2)e^{-t} \end{cases}$ şeklinde bulunur. Şimdi bu çözümler arasında tparametresini yok ederek yörüngeyi bulalım.

$$-t = \ln\frac{|\zeta|}{c_1} \rightarrow \ \eta = \left(c_1 \ln\frac{|\zeta|}{c_1} + c_2\right)\frac{\zeta}{c_1}$$

O halde bu çözümlere uygun yörünge yukarıdaki gibi olacaktır. t→ ∞ iken $\zeta, \eta \rightarrow 0$ olduğu görülür. Özet olarak D=0 olduğundan sistem (II) şekline dönüştü ve

Poincare yöntemi ile $\lambda < 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktası, dayanıklı düzgün olmayan düğüm noktasıdır.

(c) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + y \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = -1 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır.

Bu sistemde karakteristik denklem ve diskriminant $P^2 - 3P - 1 = 0\,, D = 13$ bulunur. Burada $D > 0$ olduğundan karakteristik denklem reel farklı iki köke sahiptir. Bu kökler $\lambda = \frac{3-\sqrt{13}}{2} = -0{,}302775637$ ve $\mu = \frac{3+\sqrt{13}}{2} = 3{,}302775638$ şeklindedir. $D > 0$ olduğundan verilen sistem (I) şekline dönüşecektir. Poincare yöntemi ile $D > 0$ ve $\lambda < 0 < \mu$ olup $(0,0)$ noktası eğervari tekil noktadır. Şimdi verilen sistemin yörüngesini kuralım. (I) şeklinde $\lambda\,,\mu$ değerlerini yerine yazalım ve uygun çözümübulalım.

$$\text{(I)} \begin{cases} \dot{\zeta} = \left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)\zeta \\ \dot{\eta} = \left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)\eta \end{cases} \xrightarrow{\text{bu sisteme uygun çözüm}} \begin{cases} \zeta = c_1 e^{\left(\frac{3-\sqrt{13}}{2}\right)t} \\ \eta = c_2 e^{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)t} \end{cases}$$

bu çözüme karşılık gelen yörünge $\frac{t}{2} = \frac{1}{3-\sqrt{13}} \ln\frac{\zeta}{c_1} \rightarrow \eta = c_2 e^{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{3-\sqrt{13}}\right)\ln\frac{\zeta}{c_1}}$

$$= c_2 e^{\left(\ln\frac{\zeta}{c_1}\right)^{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{3-\sqrt{13}}\right)}}$$

$$= c_2 \left(\frac{\zeta}{c_1}\right)^{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{3-\sqrt{13}}\right)} ,\left(c_2 \left(\frac{1}{c_1}\right)^{\left(\frac{3+\sqrt{13}}{3-\sqrt{13}}\right)} = c \text{ ve } \frac{3+\sqrt{13}}{3-\sqrt{13}} < 0 \right)$$

$$\eta \zeta^{-\left(\frac{3+\sqrt{13}}{3-\sqrt{13}}\right)} = c$$

Sistemin yörüngesi yukarıdaki gibidir ve $(0,0)$ noktası, eğervari tekil noktadır.

(d) $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 7 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır. Bu sistemde karakteristik denklem ve diskriminant $P^2 - 5P + 7 = 0\,, D = -3$ bulunur.

Burada $D < 0$ olduğundan karakteristik denklem kompleks eşlenik iki köke sahiptir. Bu kökler $\lambda = \frac{5-i\sqrt{3}}{2}$ ve $\mu = \frac{5+i\sqrt{3}}{2}$ şeklindedir.

$D < 0$ olduğundan verilen sistemin kanonik formu (III) yada (IV) şeklinde olmalıdır. verilen sisteme (I) $\begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda\zeta \\ \dot{\eta} = \mu\eta \end{cases}$ $\lambda, \mu \neq 0$ sistemi ile $\begin{cases} \zeta = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \sigma y \end{cases}$ dönüşümünü uygulayalım.

Burada λ, μ özdeğerleri kompleks eşlenik sayı olduğundan bu özdeğerlere (I) sisteminde karşılık gelen ζ, η özvektörleri de kompleks eşlenik olacaktır. O halde verilen sisteme $\begin{cases} \zeta = u - iv \\ \eta = u + iv \end{cases}$ dönüşümü yapalım

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = \dfrac{5 - i\sqrt{3}}{2}(u - iv) \\ \dot{u} + i\dot{v} = \dfrac{5 + i\sqrt{3}}{2}(u + iv) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = \dfrac{5}{2}u - \dfrac{5}{2}iv - \dfrac{\sqrt{3}}{2}iu - \dfrac{\sqrt{3}}{2}v \\ \dot{u} + i\dot{v} = \dfrac{5}{2}u + \dfrac{5}{2}iv + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}u - \dfrac{\sqrt{3}}{2}v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = \dfrac{5}{2}u - \dfrac{\sqrt{3}}{2}v - i\left(\dfrac{5}{2}v + \dfrac{\sqrt{3}}{2}u\right) \\ \dot{u} + i\dot{v} = \dfrac{5}{2}u - \dfrac{\sqrt{3}}{2}v + i\left(\dfrac{5}{2}v + \dfrac{\sqrt{3}}{2}u\right) \end{cases}$$

buradan $\dot{u}, \dot{v}$ değerleri, $\begin{cases} \dot{u} = \frac{5}{2}u - \frac{\sqrt{3}}{2}v \\ \dot{v} = \frac{\sqrt{3}}{2}u + \frac{5}{2}v \end{cases}$ şeklindedir. Görüldüğü gibi sistem, (III) şekline dönüştü. Şimdi bu sisteme $\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r\sin\theta \end{cases}$ dönüşümü yaparak kutupsal koordinat sistemine geçelim. Böylece verilen sistemin yörüngesini en sade şekilde görelim.

$$r'cos\theta - r\theta' sin\theta = \frac{5}{2} rcos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2} rsin\theta$$
$$r'sin\theta + r\theta' cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} rcos\theta + \frac{5}{2} rsin\theta$$

1. denklemi $-sin\theta$ ile 2. denklemi $cos\theta$ ile çarpıp toplarsak $\theta' = \frac{\sqrt{3}}{2}$,ve 1. denklemi $cos\theta$ ile 2. denklemi $sin\theta$ ile çarpıp toplarsak $r' = \frac{5}{2} r$olarak bulunur.

O zaman bu dönüşümden sonra (III) sistemi, $(III')\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{dr}{dt} = \frac{5}{2} r \end{cases} \left(\lambda = \frac{5}{2} > 0\right)$ şeklindeki sisteme dönüştü. Artık bu sistemin çözümünü kolayca bulabiliriz. Ve bu sistemin çözümleri $\begin{cases} \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_1 \\ r = c_2 e^{\frac{5}{2} t} \end{cases}$, $c_2 > 0$ şeklindedir. Çözümlerde t parametresini yok ederek yörüngeyi bulalım.

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}} (\theta - c_1) \rightarrow r = c_2 e^{\frac{5}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} (\theta - c_1)}$$
$$= c_2 e^{\frac{5}{\sqrt{3}} (\theta - c_1)}, \left(c_2 e^{-\frac{5}{\sqrt{3}} c_1} = c \right)$$

$r = c\, e^{\frac{5}{\sqrt{3}} \theta}$ yörüngesi yukarıdaki şekildedir ve spiral belirtir. Ve buradan $\theta \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$ $t \rightarrow \infty, \zeta, \eta \rightarrow \infty$ olduğu açıktır. Böylece verilen sistemin $(0,0)$ noktası dayanıksız odak noktasıdır.

(e) $\begin{cases} \dot{x} = -2x + 5y \\ \dot{y} = -x + y \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 3 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır.

Bu sistemde karakteristik denklem ve diskriminant $P^2 + P + 3 = 0, D = -11$ olarak bulunur. Burada $D < 0$ olduğundan karakteristik denklem kompleks eşlenik iki köke sahiptir. Bu kökler $\lambda = \frac{-1 - i\sqrt{11}}{2}$ ve $\mu = \frac{-1 + i\sqrt{11}}{2}$ şeklindedir. $D < 0$

olduğundan verilen sistemin kanonik formu (III) yada (IV) şeklinde olmalıdır. verilen sisteme (I) $\begin{cases} \dot{\zeta} = \lambda\zeta \\ \dot{\eta} = \mu\eta \end{cases}$ $\lambda, \mu \neq 0$ sistemi ile , $\begin{cases} \zeta = \alpha x + \beta y \\ \eta = \gamma x + \sigma y \end{cases}$ dönüşümünü uygulayalım.

Burada λ, μ özdeğerleri kompleks eşlenik sayı olduğundan bu özdeğerlere (I) sistemindekarşılık gelen ζ, η özvektörleri de kompleks eşlenik olacaktır. O halde verilen sisteme $\begin{cases} \zeta = u - iv \\ \eta = u + iv \end{cases}$ dönüşümü yapalım.

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = \dfrac{-1 - i\sqrt{11}}{2}(u - iv) \\ \dot{u} + i\dot{v} = \dfrac{-1 + i\sqrt{11}}{2}(u + iv) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = \dfrac{-1}{2}u - \dfrac{1}{2}iv - \dfrac{\sqrt{11}}{2}iu - \dfrac{\sqrt{11}}{2}v \\ \dot{u} + i\dot{v} = \dfrac{-1}{2}u - \dfrac{1}{2}iv + i\dfrac{\sqrt{11}}{2}u - \dfrac{\sqrt{11}}{2}v \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} - i\dot{v} = \dfrac{-1}{2}u - \dfrac{\sqrt{11}}{2}v + i\left(\dfrac{1}{2}v - \dfrac{\sqrt{11}}{2}u\right) \\ \dot{u} + i\dot{v} = \dfrac{5}{2}u - \dfrac{\sqrt{3}}{2}v + i\left(\dfrac{-1}{2}v + \dfrac{\sqrt{11}}{2}u\right) \end{cases}$$

buradan $\dot{u}, \dot{v}$ değerleri, $\begin{cases} \dot{u} = \frac{-1}{2}u - \frac{\sqrt{11}}{2}v \\ \dot{v} = \frac{\sqrt{11}}{2}u - \frac{1}{2}v \end{cases}$ şeklindedir. Görüldüğü gibi sistem, (III) şekline dönüştü. Şimdi bu sisteme $\begin{cases} u = rcos\theta \\ v = rsin\theta \end{cases}$ dönüşümü yaparak kutupsal koordinat sistemine geçelim. Böylece verilen sistemin yörüngesini en sade şekilde görelim.

$$r'cos\theta - r\theta' sin\theta = \frac{-1}{2}rcos\theta - \frac{\sqrt{11}}{2}rsin\theta \; r'sin\theta + r\theta' cos\theta$$
$$= \frac{\sqrt{11}}{2}rcos\theta - \frac{1}{2}rsin\theta$$

1. denklemi $-sin\theta$ ile 2. denklemi $cos\theta$ ile çarpıp toplarsak $\theta' = \frac{\sqrt{11}}{2}$ ve 1. denklemi $cos\theta$ ile 2. denklemi $sin\theta$ ile çarpıp toplarsak $r' = -\frac{1}{2}r$ olarak bulunur.

O zaman bu dönüşümden sonra (III) sistemi, $(III')\begin{cases}\frac{d\theta}{dt} = \frac{\sqrt{11}}{2} \\ \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{2}r\end{cases} \left(\lambda = -\frac{1}{2} < 0\right)$ şeklindeki sisteme dönüştü.Artık bu sistemin çözümünü kolayca bulabiliriz.Ve bu sistemin çözümleri $\begin{cases}\theta = \frac{\sqrt{11}}{2}t + c_1 \\ r = c_2\, e^{-\frac{1}{2}t}\end{cases}$, $c_2 > 0$ şeklindedir. Çözümlerde t parametresini yok ederek yörüngeyi bulalım.

$$t = \frac{2}{\sqrt{11}}(\theta - c_1) \;\rightarrow r = c_2\, e^{-\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{11}}(\theta - c_1)}$$

$= c_2\, e^{-\frac{5}{\sqrt{3}}(\theta - c_1)}$, $\left(c_2\, e^{\frac{5}{\sqrt{3}}c_1} = c\right)$ yörünge $r = c\, e^{-\frac{5}{\sqrt{3}}\theta}$ spirali olarak bulunur.

Buradan $\theta \to \infty, r \to 0$olduğu görülür. $t \to \infty, \zeta, \eta \to 0$ Poincare yöntemi ile verilen sistemin $(0,0)$ noktası dayanıklı odak noktasıdır.

(f) $\begin{cases}\dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = -5x + 4y\end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır.

Bu sistemde karakteristik denklem ve diskriminant $P^2 - 7P + 2 = 0, D = 41$ şeklindedir. Burada $D > 0$ olduğundan karakteristik denklem reel farklı iki köke sahiptir. Bu kökler $\lambda = \frac{7+\sqrt{41}}{2} = 6.701562119$ ve $\mu = \frac{7-\sqrt{41}}{2} = 0.298437881$ şeklindedir. $D > 0$ olduğundan sistem (I) şekline dönüşür. Poincare yöntemine göre $D > 0$ ve $0 < \mu < \lambda$olduğunda $(0,0)$ noktası dayanıksız düzgün olmayan tekil noktadır. Şimdi verilen sistemin yörüngesini kuralım. (I) şeklinde λ, μ değerlerini yerine yazalım ve uygun çözümü bulalım.

$$(\mathrm{I})\begin{cases}\dot{\zeta}=\left(\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}\right)\zeta\\ \dot{\eta}=\left(\dfrac{7-\sqrt{41}}{2}\right)\eta\end{cases}\xrightarrow{\text{bu sisteme uygun çözüm}}\begin{cases}\zeta=c_1e^{\left(\frac{7+\sqrt{41}}{2}\right)t}\\ \eta=c_2e^{\left(\frac{7-\sqrt{41}}{2}\right)t}\end{cases}$$

bu çözüme karşılık gelen yörünge $\frac{t}{2}=\frac{1}{7+\sqrt{13}}\ln\frac{\zeta}{c_1}\ \rightarrow\ \eta=c_2e^{\left(\frac{7-\sqrt{41}}{7+\sqrt{41}}\right)\ln\frac{\zeta}{c_1}}$

$$=c_2e^{\left(\ln\frac{\zeta}{c_1}\right)\left(\frac{7-\sqrt{41}}{7+\sqrt{41}}\right)}$$

$$\eta=c_2\left(\frac{\zeta}{c_1}\right)^{\left(\frac{7-\sqrt{41}}{7+\sqrt{41}}\right)},\left(c_2\left(\frac{1}{c_1}\right)^{\left(\frac{7-\sqrt{41}}{7+\sqrt{41}}\right)}=c\text{ ve }\frac{7-\sqrt{41}}{7+\sqrt{41}}>0\right)$$

$$\eta=\zeta^{\left(\frac{7-\sqrt{41}}{7+\sqrt{41}}\right)}c$$

Sistemin yörüngesi yukarıdaki gibidir ve çözümlerde $t\rightarrow\infty\ \zeta,\eta\rightarrow\infty$ olduğundan $(0,0)$ noktası <u>dayanıksız düzgün olmayan tekil nokta</u>dır.

(g) $\begin{cases}\dot{x}=-3x+2y\\ \dot{y}=-5x+3y\end{cases}$ $\Delta=a_1b_2-a_2b_1=1\neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır.

Bu sistemde karakteristik denklem ve diskriminant $P^2+1=0\,,D=-4<0$bulunur. Burada $D<0$ olduğundan karakteristik denklem kompleks eşlenik iki köke sahiptir. Bu kökler $\lambda=-i$ ve $\mu=i$ şeklindedir. $D<0$ olduğundan verilen sistemin kanonik formu (III) yada (IV) şeklinde olmalıdır. Verilen sisteme (I) $\begin{cases}\dot{\zeta}=\lambda\zeta\\ \dot{\eta}=\mu\eta\end{cases}$ $\lambda,\mu\neq 0$ sistemi ile,$\begin{cases}\zeta=\alpha x+\beta y\\ \eta=\gamma x+\sigma y\end{cases}$ dönüşümünü uygulamalıyız. Burada λ,μ özdeğerleri kompleks eşlenik sayı olduğundan bu özdeğerlere (I) sisteminde karşılık gelen ζ,η özvektörleri de kompleks eşlenik olacaktır. O halde verilen sisteme $\begin{cases}\zeta=u-iv\\ \eta=u+iv\end{cases}$ dönüşümü yapılmalıdır. Bu dönüşümlerin aynısını daha önce (a) sisteminde yapmıştık. Özet olarak $D<0$ olduğundan sistem (IV) şekline dönüşür. Poincare yöntemi ile $D<0$ ve $a_1+b_2=0$ olduğundan (0,0) tekil noktası <u>merkezdir</u> ve (IV) sisteminin yörüngesi <u>çemberler ailesi</u>dir.

(h) $\begin{cases} \dot{x} = -3x + y \\ \dot{y} = -4x + 2y \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = -2 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır.

Bu sistemde karakteristik denklem ve diskriminant $P^2 + P - 2 = 0\,, D = 9$ bulunur. Burada $D > 0$ olduğundan karakteristik denklem reel farklı iki köke sahiptir. Bu kökler $\lambda = -1$ ve $\mu = 2$ şeklindedir. $D > 0$ olduğundan verilen sistem (I) şekline dönüşecektir. Poincare yöntemi ile $D > 0$ ve $\lambda < 0 < \mu$ olup $(0,0)$ noktası eğervari tekil noktadır.

Şimdi verilen sistemin yörüngesini kuralım. (I) şeklinde $\lambda\,,\mu$ değerlerini yerine yazalım ve uygun çözümü bulalım.

(I) $\begin{cases} \dot{\zeta} = -\zeta \\ \dot{\eta} = 2\eta \end{cases} \xrightarrow{\text{bu sisteme uygun çözüm}} \begin{cases} \zeta = c_1 e^{-t} \\ \eta = c_2 e^{2t} \end{cases}$

bu çözüme karşılık gelen yörünge

$$t = -\ln\frac{\zeta}{c_1} \rightarrow \eta = c_2 e^{-2\ln\frac{\zeta}{c_1}}$$

$$= c_2 e^{\left(\ln\frac{\zeta}{c_1}\right)^{-2}}$$

$$\eta = c_2\left(\frac{\zeta}{c_1}\right)^{-2}\,, (c_1^2 c_2 = c)$$

$$\eta\zeta^2 = c$$

Sistemin yörüngesi yukarıdaki gibidir ve $(0,0)$ noktası, eğervari tekil noktadır.

3) Aşağıdaki sistemlerin tekil noktalarını bulunuz ve sınıflandırınız.

(a) $\begin{cases} \dot{x} = 13 - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = x^2 + 2xy - 11x - 6y + 24 \end{cases}$ sisteminin tekil noktalarını bulalım.

Teorem 4.1'in şartlarını sağlatalım:

1) $P(x,y) = 2x + y - xy$ ve $Q(x,y) = x + 2y - y^2$ fonksiyonlarının y'e göre türevleri sınırlı olduğundan Lipschitz koşulunu sağlar.

2) $x = rcos\theta, y = rsin\theta\ ve\ \varphi = -xy\ , \psi = -y^2\ olsun.$

$$\lim_{r\to 0} \frac{-r^2 sin\theta cos\theta}{r} = 0\ , \lim_{r\to 0} \frac{-r^2 \sin^2\theta}{r} = 0$$

3) $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 3 \neq 0.$

Böylece (0,0) noktası bu sistemin tekil noktasıdır. Verilen sisteme $\begin{cases} x = x + a \\ y = y + b \end{cases}$ ötelemesi yapalım.

$$\begin{cases} \dot{x} = 13 - (x+a)^2 - (y+b)^2 \\ \dot{y} = (x+a)^2 + 2(x+a)(y+b) - 11(x+a) - 6(y+b) + 24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -2ax - 2by - x^2 - y^2 + 13 - a^2 - b^2 \\ \dot{y} = (2(a+b) - 11)x + 2(a-3)y + 2xy + x^2 + a^2 + 2ab - 11a - 6b + 24 \end{cases}$$

sistemine dönüşür. Burada $\begin{cases} 13 - a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + 2ab - 11a - 6b + 24 = 0 \end{cases}$ denklem sisteminin çözümleri olan (a,b) noktaları verilen sistemin tekil noktalarıdır. Dolayısıyla bu tekil noktaların sınıflandırılması problemi, (a,b) noktalarına karşılık gelen sistemlerde $(0,0)$ tekil noktasının sınıflandırılması problemine dönüşmüş olur. O halde bu denklem sisteminin çözümleri olan (a,b) noktalarını bulalım.

$\begin{cases} 13 - a^2 - b^2 = 0 \\ a^2 + 2ab - 11a - 6b + 24 = 0 \end{cases}$ denklem sistemini sağlayan noktalar $(3,2)$, $(1.2,3.4)$, $(3,-2)$ ve $(2,3)$ noktaları olup verilen sistemin tekil noktalarıdır. Şimdi bu noktalara karşılık gelen sistemleri bulup onları (0,0) tekil noktası etrafında sınıflandıralım.

$$\xrightarrow{(3,2)\ tekil\ noktası\ için} \begin{cases} \dot{x} = -6x - 4y - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -x + 2xy + x^2 \end{cases}$$

Bu sistemin karakteristik denklemine ve diskriminantına bakalım. Karakteristik denklem $P^2 - (a_1 + b_2)P + (a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$ ve diskriminantı $\mathrm{D} = (a_1 - b_2)^2 + 4a_2 b_1$ şeklindedir. $P^2 + 6P - 4 = 0\ ve\ D = 52 > 0$ olup iki farklı reel köke sahiptir. Bu kökler $\lambda = -3 - \sqrt{13}\ , \mu = -3 + \sqrt{13}$ olarak bulunur.

Teorem 4.1' den çıkardığımız sonuca göre karakteristik denklemin köklerinin reel kısımları sıfırdan farklı ise homojenliği bozan $\varphi = -x^2 - y^2, \psi = 2xy + x^2$ fonksiyonları tekil noktaların sınıflandırılmasında rol oynamazlar dolayısıyla bu fonksiyonları ihmal edebiliriz. Yani bu sistemin tekil noktası etrafındaki yörüngeleri, aşağıdaki lineer homojen sisteminin yörüngeleri gibidir.

$\begin{cases} \dot{x} = -6x - 4y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = -2 \neq 0$ olduğundan (0,0) tekil noktadır.

Burada $D > 0$ olduğundan verilen sistem (I) şekline dönüşecektir. Kökler $\lambda = -3 - \sqrt{13} = -6.605551275 < 0$ ve $\mu = -3 + \sqrt{13} = 0.605551275 > 0$ şeklindedir. Poincare yöntemi ile $D > 0$ ve $\lambda < 0 < \mu$ olup (0,0) tekil noktası, <u>eğervari tekil noktadır</u>.

$$\xrightarrow{(1.2,3.4)\ tekil\ noktası\ için} \begin{cases} \dot{x} = -2{,}4x - 6{,}8y - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -1{,}8x + 0{,}8y + 2xy + x^2 \end{cases}$$

Bu sistemin karakteristik denklemine ve diskriminantına bakalım. $P^2 + 1.6P - 14.16 = 0$ ve $D = 59.2 > 0$ olup iki farklı reel köke sahiptir. Bu kökler $\lambda = \frac{-1.6-\sqrt{59.2}}{2}$, $\mu = \frac{-1.6+\sqrt{59.2}}{2}$ olarak bulunur.

Teorem 4.1 den çıkardığımız sonuca göre böylece homojenliği bozan $\varphi = -x^2 - y^2, \psi = 2xy + x^2$ fonksiyonlarını ihmal edebiliriz. Bu sistemin tekil noktası etrafındaki yörüngeleri, aşağıdaki lineer homojen sisteminin yörüngeleri gibidir.

$\begin{cases} \dot{x} = -2{,}4x - 6{,}8y \\ \dot{y} = -1{,}8x + 0{,}8y \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = -14{,}16 \neq 0$ olduğundan (0,0) tekil noktadır.

Burada $D > 0$ olduğundan verilen sistem (I) şekline dönüşecektir. Kökler $\lambda = -4{,}647076812 < 0$ ve $\mu = 3{,}047076812 > 0$ şeklindedir. Poincare yöntemi ile $D > 0$ ve $\lambda < 0 < \mu$ olup (0,0) tekil noktası, <u>eğervari tekil noktadır</u>.

$$\xrightarrow{(3,-2)\ tekil\ noktası\ için} \begin{cases} \dot{x} = -6x + 4y - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -9x + 2xy + x^2 \end{cases}$$

Bu sistemin karakteristik denklemine ve diskriminantına bakalım. $P^2 + 6P + 36 = 0\ ve\ D = -108 < 0$ olup kompleks eşlenik iki köke sahiptir. Bu kökler $\lambda = -3 - i6\sqrt{3}, \mu = -3 + i6\sqrt{3}$ olarak bulunur.

Teorem 4.1 den çıkardığımız sonuca göre böylece homojenliği bozan $\varphi = -x^2 - y^2, \psi = 2xy + x^2$ fonksiyonlarını ihmal edebiliriz. Bu sistemin tekil noktası etrafındaki yörüngeleri, aşağıdaki lineer homojen sisteminin yörüngeleri gibidir.

$\begin{cases} \dot{x} = -6x + 4y \\ \dot{y} = -9x \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 36 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır.

Burada $D < 0$ olduğundan verilen sistem (III) şekline dönüşecektir. Poincare yöntemi ile $D < 0$ ve $a_1 + b_2 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktası, <u>odaktır.</u>

$$\xrightarrow{(2,3)\ tekil\ noktası\ için} \begin{cases} \dot{x} = -4x - 6y - x^2 - y^2 \\ \dot{y} = -x - 2y + 2xy + x^2 \end{cases}$$

Bu sistemin karakteristik denklemine ve diskriminantına bakalım. $P^2 + 6P + 2 = 0$ ve $D = 28 > 0$ olup reel farklı iki köke sahiptir.Bu kökler $\lambda = -3 + \sqrt{7}, \mu = -3 - \sqrt{7}$ olarak bulunur.

Teorem 4.1 den çıkardığımız sonuca göre böylece homojenliği bozan $\varphi = -x^2 - y^2, \psi = 2xy + x^2$ fonksiyonlarını ihmal edebiliriz. Bu sistemin tekil noktası etrafındaki yörüngeleri, aşağıdaki lineer homojen sisteminin yörüngeleri gibidir.

$\begin{cases} \dot{x} = -4x - 6y \\ \dot{y} = -x - 2y \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 2 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır.

Burada $D > 0$ olduğundan verilen sistem (I) şekline dönüşecektir. Kökler $\lambda = -0.354248688 < 0$ ve $\mu = -5.645751311 < 0$ şeklindedir. Poincare yöntemi ile

$D > 0$ ve $\mu < \lambda < 0$ olup $(0,0)$ tekil noktası, dayanıklı düzgün olmayan düğüm noktasıdır.

(b) $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y - xy \\ \dot{y} = x + 2y - y^2 \end{cases}$ sisteminin tekil noktalarını bulalım.

Teorem 4.1 in şartları sağlanır. Dolayısıyla $(0,0)$ noktası, sistemin tekil noktasıdır. Verilen sisteme $\begin{cases} x = x + a \\ y = y + b \end{cases}$ ötelemesi yapalım.

$$\begin{cases} \dot{x} = 2(x + a) + (y + b) - (x + a)(y + b) \\ \dot{y} = (x + a) + 2(y + b) - (y + b)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (2 - b)x + (1 - a)y - xy + 2a + b - ab \\ \dot{y} = x + 2(1 - b)y - y^2 + a + 2b - b^2 \end{cases}$$

sistemine dönüşür. Burada $\begin{cases} 2a + b - ab = 0 \\ a + 2b - b^2 = 0 \end{cases}$ denklem sisteminin çözümleri olan (a, b) noktaları verilen sistemin tekil noktalarıdır. Dolayısıyla bu tekil noktaların sınıflandırılması problemi, (a, b) noktalarına karşılık gelen sistemlerde $(0,0)$ tekil noktasının sınıflandırılması problemine dönüşmüş olur. O halde bu denklem sisteminin çözümleri olan (a, b) noktalarını bulalım.

$\begin{cases} 2a + b - ab = 0 \\ a + 2b - b^2 = 0 \end{cases}$ denklem sistemini sağlayan noktalar $(0,0)$, $(3,3)$ ve $(-1,1)$ noktaları olup verilen sistemin tekil noktalarıdır. Şimdi bu noktalara karşılık gelen sistemleri bulup onları (0,0) tekil noktası etrafında sınıflandıralım.

$$\xrightarrow{(0,0)\ tekil\ noktası\ için} \begin{cases} \dot{x} = 2x + y - xy \\ \dot{y} = x + 2y - y^2 \end{cases}$$

Bu sistemin karakteristik denklemine ve diskriminantına bakalım. $P^2 - 4P + 3 = 0$ ve $D = 4 > 0$ olup reel farklı iki köke sahiptir. $\lambda = 3$, $\mu = 1$’dir.

Teorem 4.1 den çıkardığımız sonuca göre böylece homojenliği bozan $\varphi = -xy, \psi = -y^2$ fonksiyonlarını ihmal edebiliriz. Bu sistemin tekil noktası etrafındaki yörüngeleri, aşağıdaki lineer homojen sisteminin yörüngeleri gibidir.

$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 3 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır. Burada $D > 0$ olduğundan verilen sistem (I) şekline dönüşecektir. Poincare yöntemi ile $D > 0$ ve $0 < \mu < \lambda$ olup $(0,0)$ tekil noktası, <u>dayanıksız düzgün olmayan düğüm noktasıdır</u>.

$$\xrightarrow{(3,3)\ tekil\ noktası\ için} \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y - xy \\ \dot{y} = x - 4y - y^2 \end{cases}$$

Bu sistemin karakteristik denklemine ve diskriminantına bakalım. $P^2 + 5P + 6 = 0$ ve $D = 1 > 0$ olup reel farklı iki köke sahip $\lambda = -2\,, \mu = -3$.

Teorem 4.1 den çıkardığımız sonuca göre böylece homojenliği bozan $\varphi = -xy, \psi = -y^2$ fonksiyonlarını ihmal edebiliriz. Bu sistemin tekil noktası etrafındaki yörüngeleri, aşağıdaki lineer homojen sisteminin yörüngeleri gibidir.

$\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y \\ \dot{y} = x - 4y \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = 6 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır. Burada $D > 0$ olduğundan verilen sistem (I) şekline dönüşecektir. Poincare yöntemi ile $D > 0$ ve $\mu < \lambda < 0$ olup $(0,0)$ tekil noktası, <u>dayanıklı düzgün olmayan düğüm noktasıdır</u>.

$$\xrightarrow{(-1,1)\ tekil\ noktası\ için} \begin{cases} \dot{x} = x + 2y - xy \\ \dot{y} = x - y^2 \end{cases}$$

Bu sistemin karakteristik denklemine ve diskriminantına bakalım. $P^2 - P - 2 = 0$ ve $D = 9 > 0$ olup reel farklı iki köke sahiptir. $\lambda = -1\,, \mu = 2$'dir. Teorem 4.1 den çıkardığımız sonuca göre benzer olarak bu sistemin tekil noktası etrafındaki yörüngeleri, aşağıdaki lineer homojen sisteminin yörüngeleri gibidir.

$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x \end{cases}$ $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 = -2 \neq 0$ olduğundan $(0,0)$ tekil noktadır. Burada $D > 0$ olduğundan verilen sistem (I) şekline dönüşecektir. Poincare yöntemi ile $D > 0$ ve $\lambda < 0 < \mu$ olup $(0,0)$ tekil noktası, eğervari tekil noktadır.

KAYNAKLAR

1. Ahmedov, G. ve Hasenov, K., “Diferansiyel Denklemler Teorisi” ***Maarif Basımı***, Bakü, 336-360 (1977).

2. Petrovski, İ. G., “Lectures on Partial Differential Equations”, ***Interscience Publishers,*** New York, US (1957).

3. Yang, X. S., “Periodicity of limit sets of uniformly asymptotically Poincaré stable orbits”, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 259 (1): 46-50 (2001).

4. Melin, J., “Does distribution theory contain means for extending Poincaré – Bendixson theory?”, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications***, 303 (1): 81-89 (2004).

5. İneternet: Hur, V. M., “Ders 14 – Kararlılık (Çeviri)”, **http://www.acikders.org.tr/file.php/4/LectureNotesAndReadings/D14.pdf** (2014).

6. İneternet: Hur, V. M., “Ders 36 - Limit Çemberler (Çeviri)”, **http://www.acikders.org.tr/file.php/4/LectureNotesAndReadings/D36.pdf** (2014).

7. Barreira, L. and Valls, C., “Poincare-Bendixson theory”, Ordinary Differential Equations: Qualitative Theory, Volume 137, ***American Mathematical Society,*** 185-198 (2012).

ÖZGEÇMİŞ

Habibe MUTLU 1990'da Balıkesir'de doğdu. İlk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı; Balıkesir Muharrem Hasbi Koray Lisesi'nden mezun olduktan sonra 2008 yılında Harran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne başladı; 2012 yılında mezun olduktan sonra Karabük Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda başlamış olduğu yüksek lisans programını, Karabük Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı altında sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ:

Adres: Emek mah. Sezai Yıldız sok. Safran1 sitesi
10. Blok kat:3 daire:8
Safranbolu / KARABÜK
Tel:0554 299 0474
E-posta:hbb_1990@hotmail.com