LYAPUNOV FONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNÜN DAYANIKLILIĞI

2014
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

İnci Merve ALTAN

LYAPUNOV FONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNÜN DAYANIKLILIĞI

İnci Merve ALTAN

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

KARABÜK
Haziran 2014

İnci Merve ALTAN tarafından hazırlanan "LYAPUNOV FONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNÜN DAYANIKLILIĞI" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 16/06/2014

Ünvanı , Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan : Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Sedat ÇEVİKEL (BEÜ)	....

....../....../2014

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Mustafa BOZ ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

İnci Merve ALTAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LYAPUNOV FONKSİYONLAR YÖNTEMİ İLE LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜNÜN DAYANIKLILIĞI

İnci Merve ALTAN

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV

Haziran 2014, 95 sayfa

Bu çalışmada, öncelikle Dayanıklılık Teorisi Hakkındaki Esas Anlayışlar açıklandı. Homojen ve Homojen Olmayan Lineer Denklem Sistemlerinin Dayanıklılığı hakkında bilgi verildi ve örnekler çözüldü. Sonra Lyapunov Fonksiyonu Yöntemi ve Lyapunov Fonksiyonunun kuruluşu açıklanıp örnekler çözüldü. I. Yaklaşım Metodu açıklandı. Dayanıksız Sistemler incelendi ve genel olarak bütün konuyla ilgili örnek çözümü yapıldı.

Anahtar Sözcükler : Lyapunov dayanıklılık teorisi, Liapunov dayanıklılık teorisi, Lyapunov fonksiyonu.

Bilim Kodu : 204.1.138

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

STABILITY OF SOLUTION OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEM WITH LYAPUNOV FUNCTIONS METHOD

İnci Merve ALTAN

Karabük University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assist. Prof. Dr. Şerif AMİROV
June 2014, 95 pages

In this study, Firstly, The main understandings about Stability Theory were explained. Information about Stability Of Homogeneous and Non-Homogeneous System of Linear Equations were given. Lyapunov Function Method and Establishment of Lyapunov Functions were announced. Examples were given. After then given information about I. Approximation Method and Instability Theory. Examples were given.

Key Word : Lyapunov stability theory, Liapunov stability theory, Lyapunov function.

Science Code : 204.1.138

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında danışmanlığımı üstlenen, yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV'a, Karabük Üniversitesi ve Bülent Ecevit Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma sonsuz teşekkür ederim.

Böyle bir çalışmanın ortaya çıkmasında bana her zaman güvenen, hayatımın her döneminde sağlamış oldukları maddi ve manevi destekleri ile bugünlere gelmemde en büyük pay sahibi olan babam Kadir ALTAN, annem Safiye ALTAN ve onlarla birlikte manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen kardeşim M. Alper ALTAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

KABUL ii
ÖZET.. iv
ABSTRACT v
TEŞEKKÜR vi
İÇİNDEKİLER vii
ŞEKİLLER DİZİNİ ix

BÖLÜM 1 1
GİRİŞ 1
1.1. DAYANIKLILIK TEORİSİ KAVRAMI 1
1.2. DAYANIKLILIK TEORİSİNDE ESAS ANLAYIŞLAR 1

BÖLÜM 2 8
LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN DAYANIKLILIĞI 8
2.1. DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN DAYANIKLILIĞI 8
2.2. SABİT KATSAYILI LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN DAYANIKLILIĞI 12

BÖLÜM 3 22
LYAPUNOV FONKSİYONLARI İLE DAYANIKLILIK TEORİSİ 22
3.1. LYAPUNOV FONKSİYONLARI YÖNTEMİ 22
3.2. LYAPUNOV FONKSİYONUNUN KURULUŞU 31

BÖLÜM 4 36
BİRİNCİ YAKLAŞIMLARA GÖRE DAYANIKLILIK HAKKINDA LYAPUNOV TEOREMİ 36

Sayfa

BÖLÜM 5 43
DAYANIKSIZ SİSTEMLER 43

BÖLÜM 6 59
ALIŞTIRMALAR 59
KAYNAKLAR 94

ÖZGEÇMİŞ 95

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 5.1. $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ doğruları arasında kalan ve $x_1 > 0$ olan noktalar kümesi 45

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1. DAYANIKLILIK TEORİSİ KAVRAMI

Çözümün başlangıç şartlarından sürekli bağımlılığını araştırırken fark ettik ki; serbest değişken sonlu parçada değişmek üzere, başlangıç şartları küçük değiştiğinde çözüm aynı parçada küçük değişir. Birçok pratik problemlerde başlangıç şartlarının küçük değişmesi ile ilgili olarak serbest değişken sonsuz aralıkta değiştiğinde çözümün küçük değişip değişmediğini göstermek gerekir. Bu ise çözümün dayanıklılığı problemine bağlıdır.

Bu tezde diferansiyel denklem sistemlerinin çözümlerinin Lyapunov anlamında dayanıklılığı teorisi anlatılmaktadır.

1.2. DAYANIKLILIK TEORİSİNDE ESAS ANLAYIŞLAR

Kabul edelim ki;

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{1.1}$$

normal sisteminde $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun $f_i(t,x_1,x_2,\dots,x_n), i = 1,2,\dots,n$ bileşenleri $G = I\text{x}D$ bölgesinde süreklidir ve sürekli $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i,j = 1,2,\dots,n$ kısmi türevleri var olsun. Burada $I = \{t_0 \le t < \infty\}$, D ise $x_1,x_2,\dots,x_n$ değişkenli uzayın sınırlı bölgesidir.

Konulan şartlar dahilinde $\forall x^0 \in D$ noktası için (1.1) sisteminin $x(t_0) = x^0$ şartını sağlayan ve belli $[t_0, t_1)$ aralığında seçilmiş devamettirilmeyen tek çözümünün varlığı Varlık Teoreminden dolayı açıktır.

Kabul edelim ki $x = \varphi(t)$ vektör fonksiyonu (1.1) sisteminin $x(t_0) = x^0$ şartını sağlayan ve I dan seçilmiş çözümü olsun. Verilmiş $\xi \epsilon D$ için sistemin $x(t_0) = \xi$ şartını sağlayan belli $[t_0, t_\xi)$ aralığında seçilmiş devamettirilmeyen çözümü de $x = \varphi(t, \xi)$ ile gösterelim.

Bu durumda kabul edelim ki ;

i. Yeteri kadar küçük $\rho > 0$ sayısı vardır → $\|\xi - x^0\| < \rho$ şartını sağlayan ξ-ler için $x = \varphi(t, \xi)$ çözümleri *I* dan seçilmiştir.

ii. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle $0 < \delta \leq \rho$ sayısı vardır→ $\|\xi - x^0\| < \delta$ olduğunda $x = \varphi(t, \xi)$ çözümleri *I* aralığında $\|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\| < \varepsilon$ şartını sağlar.

O halde (1.1) sisteminin $x = \varphi(t)$ çözümü *Lyapunov Dayanıklı*dır.

$x = \varphi(t)$ çözümü Lyapunov Dayanıklı olsun ve

iii. $0 < \sigma \leq \delta$ şartını sağlayan öyle σ sayısı vardır → $\|\xi - x^0\| < \sigma$ olduğunda $\lim_{t\to\infty}\|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)\|$=0 olur.

Bu durumda $x = \varphi(t)$ çözümüne *Asimptotik Dayanıklıdır* denir.

$\forall \varepsilon > 0$ ve istenilen $\delta > 0$ sayısı için $\|\xi^0 - x^0\| < \delta$ şartını sağlayan öyle $\xi^0 \in D$ noktası ve $\exists t_1 > t_0$ anı vardır ki ; $x = \varphi(t, \xi^0)$ çözümü $\|\varphi(t_1, \xi^0) - \varphi(t_1)\| \geq \varepsilon$ şartını sağlasın bu durumda $x = \varphi(t)$ çözümü (1.1) sisteminin *Dayanıksız Çözümüdür* denir.

Öyle $\sigma > 0$ sayısı vardır $\rightarrow \|\xi - x^0\| < \sigma$ şartını sağlayan $\forall\, \xi \in D$ için $x = \varphi(t,\xi)$ çözümü belli $t_1 = T(\xi) > t_0$ anında seçilsin ve seçilen $t \geq T(\xi)$ anlarında $\|\varphi(t,\xi) - \varphi(t)\| \geq \sigma$ eşitsizliği sağlansın. O zaman (1.1) sisteminin $x = \varphi(t)$ çözümüne *Tamamen Dayanıksız Çözüm* denir.

Açıktır ki ; $x = a$ sabit vektörü için $f(t,a) = 0, t \in I$ olduğunda bu vektöre (1.1) sisteminin *Stabilite (Dayanıklılık) Hali* denir.

Özel olarak $a = 0$ olursa $x = 0$ çözümüne *Trivial (Aşikar) Çözüm* denir.

Sistemin $x = a$ dayanıklılık hali Lyapunov Dayanıklı veya Dayanıksız olmasının tanımı yukarıdaki tanımlarda $x^0 = a,\ \varphi(t) = a\,, t \in I$ yazılarak elde eldir.

Verilmiş sistemin herhangi çözümünün dayanıklılığının araştırılması problemi, bu sistem yardımıyla kurulan yeni sistemin Trivial Halinin dayanıklılığının araştırılması problemine dönüştürülür:

Kabul edelim ki ; $x = \varphi(t)$ vektör fonksiyonu (1.1) sisteminin herhangi bir çözümü olsun. Sistemde $x = y + \varphi(t)$ değişken değişimi uygulayalım:

$x = \varphi(t)$, (1.1)sisteminin çözümü olduğundan

$$\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big) \tag{1.2}$$

dir. $x = y + \varphi(t)$ ifadesinin her iki tarafı t-ye göre türevlenirse;

$$\dot{x} = \dot{y} + \dot{\varphi}(t)$$

olur. (1.1) , (1.2) ve $x = y + \varphi(t)$ eşitlikleri yerine yazılırsa ;

$$\dot{y} = f\big(t, y + \varphi(t)\big) - f(t, \varphi(t))$$

bulunur. Bu taktirde uygulanan $x = y + \varphi(t)$ değişken değişimi ile

$$\dot{y} = F(t, y), \;\; F(t, y) = f\big(t, y + \varphi(t)\big) - \big(t, \varphi(t)\big) \tag{1.3}$$

sistemi elde edilir ve açıktır ki $y = 0$ bu sistemin çözümüdür.

Böylelikle (1.1) sisteminin $x = \varphi(t)$ çözümünün dayanıklılığı problemi (1.3) sisteminin $y = 0$ trivial çözümünün dayanıklılığı problemine dönüşür.

Aşağıda göstereceğiz ki; Lineer homojen denklem sisteminin her bir çözümünün sınırlılığından onun keyfi çözümünün dayanıklılığı ve aksine herhangi çözümün dayanıklılığından keyfi çözümün sınırlılığı elde edilebilir. Fakat bu durum homojen olmayan ve lineer olmayan sistemler için genellikle doğru değildir.

<u>Örnek 1.1:</u> $\dot{x} = ax$ denkleminin $x = 0$ stabilite halinin dayanıklılığını inceleyelim. Öncelikle denklemin $x(t_0) = \xi$ şartını sağlayan çözümünü araştıralım:

$$\dot{x} = ax$$
$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} = ax$$
$$\Rightarrow dx = (ax)dt$$

olup bu ifadenin her iki tarafı integrallenirse;

$$\ln x = \int_{t_0}^{t} a \, dt$$
$$\Rightarrow \ln x = a(t - t_0) + \ln \mathrm{c}$$
$$\Rightarrow x = ce^{a(t-t_0)}$$

genel çözümü elde edilir. Denklemin $x(t_0) = \xi$ şartını sağlayan çözümü

$$\varphi(t, \xi) = \xi e^{a(t-t_0)}$$

biçimindedir. Bu durumda a-nın durumlarına göre denklemin $x = 0$ stabilite halinin dayanıklılığını inceleyelim;

$a \leq 0$ olsun:

Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta > 0$ sayısını $0 < \delta \leq \varepsilon$ olacak şekilde seçersek $\|\xi\| < \delta$ olduğunda;

$$\left|\xi e^{a(t-t_0)}\right| \leq |\xi| < \delta \leq \varepsilon, t \in I$$

dır. Bu ise $a \leq 0$ iken $x = 0$ stabilite hali Dayanıklıdır demektir.

$a < 0$ olsun:

Bu durumda

$$\lim_{t\to\infty} \xi e^{a(t-t_0)} = 0$$

olur. O halde $a < 0$ iken $x = 0$ stabilite hali Asimptotik Dayanıklıdır.

Genel çözümün ifadesinden açıktır ki;

$a > 0$ olursa;

$\forall\, \varepsilon > 0$ ve keyfi $\delta > 0$ sayıları için $\exists t_1 = T(\xi) > t_0$ anı bulunabilir ki, $0 < |\xi| < \delta \leq \varepsilon$ olmasına rağmen $t \geq t_1$ iken $\left|\xi e^{a(t-t_0)}\right| \geq \varepsilon$ olur.

Öte yandan $t_1 = t_0 + \frac{1}{a} ln \frac{\varepsilon}{|\xi|}$ olsun.

Kolaylıkla gösterilebilir ki $t \geq t_1$ olduğunda $\left|\xi e^{a(t-t_0)}\right| \geq \varepsilon$ olur. Gerçekten;

$$\left|\xi e^{a(t-t_0)}\right| = |\xi|\left|e^{a(t-t_0)}\right| = |\xi| \left|e^{a(t_0+\frac{1}{a}ln\frac{\varepsilon}{|\xi|})}\right| = |\xi| \left[e^{at_0} e^{ln\frac{\varepsilon}{|\xi|}}\right]$$

$$= |\xi| e^{at_0} \frac{\varepsilon}{|\xi|} = e^{at_0}\varepsilon$$

e^{at_0} ifadesi $a > 0$ iken ∞ a yaklaştığından $\left|\xi e^{a(t-t_0)}\right| \geq \varepsilon$ elde edilir. Böylece, $a > 0$ olduğunda $x = 0$ trivial çözümü dayanıksız çözümdür.

<u>Örnek 1.2:</u> $\varphi(t) = e^t$ fonksiyonu $\dot{x} = -x + 2e^t$ denkleminin $x(0) = 1$ şartını sağlayan çözümüdür ve denklemin $x(0) = \xi$ şartını sağlayan çözümü $\varphi(t, \xi) = (\xi - 1)e^{-t} + e^t$ dir.

$\forall t \geq 0$ için

$$|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = |(\xi - 1)e^{-t} + e^t - e^t| \leq |\xi - 1|$$

olduğundan açıktır ki ;

$\forall\, \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $\delta > 0$ sayısını $0 < \delta \leq \varepsilon$ olacak şekilde seçersek $|\xi - 1| < \delta$ olduğunda $t \in I_0 = \{0 \leq t < \infty\}$ olmak üzere $|\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| < \varepsilon$ olur.

Diğer taraftan $\lim\limits_{t\to\infty} e^{-t} = 0$ olduğundan

$$\lim_{t\to\infty} |\varphi(t, \xi) - \varphi(t)| = \lim_{t\to\infty} |\xi - 1| e^{-t} = 0$$

dır. O halde $\varphi(t) = e^t$ çözümünün I_0 da Asimptotik Dayanıklıdır.

Açıktır ki $\varphi(t) = e^t$ çözümü I_0 da sınırlı değildir.

<u>Örnek 1.3:</u> $\dot{x} = \sin\, x$ denkleminin genel çözümü $x = 2\,\arctan\,(ce^t)$ şeklindedir ve çözümler I_0 aralığında sınırlıdır.

Açıktır ki ; $c < 0$ olduğunda $\lim_{t \to \infty} x(t) = -\pi$

$c > 0$ olduğunda $\lim_{t \to \infty} x(t) = \pi$

olur. Buradan anlaşılır ki $x(t) = 0$ çözümü dayanıklı değildir.

BÖLÜM 2

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN DAYANIKLILIĞI

2.1. DEĞİŞKEN KATSAYILI LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN DAYANIKLILIĞI

Kabul edelim ki lineer homojen olmayan

$$\dot{x} = A(t)x + f(t) \tag{2.1}$$

denklem sistemi verilsin. Burada $A(t)$ matris fonksiyonu ve $f(t)$ vektör fonksiyonu $I = \{t_0 \le t < \infty\}$ aralığında süreklidir. Bu sistemin herhangi $x = \varphi(t)$ çözümünün dayanıklılığı problemi $x = y + \varphi(t)$ değişken değişimi vasıtasıyla uygun homojen $\dot{y} = A(t)y$ sisteminin $y = 0$ trivial çözümünün dayanıklılığı problemine dönüştürülebilir. Buna göre de lineer homojen

$$\dot{x} = A(t)x \tag{2.2}$$

sisteminin trivial çözümünün dayanıklılığını araştıracağız.

<u>Tanım 2.1:</u> Bütün çözümleri dayanıklı (veya asimptotik dayanıklı) olan sisteme *Dayanıklı Sistem (veya Asimptotik Dayanıklı Sistem)* denir.

Kabul edelim ki; I birim matris olmak üzere $\Phi(t)$ matrisi (2.2) sisteminin $\Phi(t_0) = I$ şartını sağlayan Fundemental (Temel) matrisi olsun. Bu durumda (2.2) sisteminin $x(t_0) = \xi$ başlangıç şartını sağlayan çözümü

$$\varphi(t,\xi) = \Phi(t)\xi \tag{2.3}$$

şeklinde gösterilir. O halde aşağıdaki sonuç kolayca gösterilebilir;

Sonuç 2.2: $\dot{x} = A(t)x$ sistemi dayanıklıdır $\Leftrightarrow$ Bu sistemin trivial çözümü dayanıklıdır.

Lineer homojen olmayan (2.1) sisteminin keyfi iki çözümünün farkı uygun homojen (2.2) sisteminin de çözümü olduğundan Sonuç 2.2 gereğince;

"(2.1) lineer homojen olmayan sistem dayanıklıdır $\Leftrightarrow$ (2.2) lineer homojen sistem dayanıklıdır$\Leftrightarrow$ (2.2) sisteminin trivial çözümü dayanıklıdır."

Yukarıda verilen örnekler gösterir ki ;

Çözümün dayanıklılığı ile sınırlılığı birbirinden bağımsızdır; fakat lineer homojen denklem sisteminin dayanıklılığı ile sınırlılığı birbirine sıkı bağlıdır.

Teorem 2.3: (2.2) Lineer homojen sistemi dayanıklıdır $\Leftrightarrow$ Her çözümü I aralığında sınırlıdır.

İspat:$\Rightarrow$ (2.2) lineer homojen sistemi dayanıklı olsun. O halde Sonuç 2.2 den dolayı trivial çözümü dayanıklıdır. Bu durumda dayanıklılık tanımından;

$\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle $\delta > 0$ sayısı bulunabilir ki $\|\xi\| < \delta$ olduğunda $t\epsilon I$ için

$$\|\varphi(t,\xi)\| < \varepsilon$$

olur. Ayrıca (2.3) ifadesinden

$$\|\Phi(t)\xi\| = \|\varphi(t,\xi)\| < \varepsilon$$

dır. Buna göre özel olarak ξ vektörünü i-nci bileşeni ${}^{\delta}/_{2}$, diğer bileşenleri 0 olan vektör olarak alırsak; $\Phi^i(t)$,$\Phi(t)$ matrisinin i-nci sütunu olmak üzere;

$$\|\varphi(t,\xi)\| = \|\Phi(t)\xi\| = \left\|\Phi^i(t)\right\|\frac{\delta}{2} < \varepsilon, \qquad t\epsilon I$$

dır. Burada $\left\|\Phi^i(t)\right\| < \frac{2\varepsilon}{\delta}$ olduğundan

$$\|\Phi(t)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\Phi^i(t)\right\|^2\right)^{1/2} < \frac{2\varepsilon}{\delta}\sqrt{n}\,, \qquad t\epsilon I$$

olur. Yani $\Phi(t)$ matrisi I da sınırlıdır. O halde (2.3) ifadesinden dolayı (2.2) sisteminin her çözümü sınırlıdır.

$\Leftarrow$: (2.2) lineer homojen sisteminin her bir çözümü I aralığında sınırlı olsun. O halde $\Phi(t)$ temel matrisi de I aralığında sınırlıdır. Yani $\forall\, t\epsilon I$ için $\|\Phi(t)\| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ vardır. Bu durumda;

$\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle $\delta > 0$ sayısını $0 < \delta \leq \frac{\varepsilon}{M}$ olacak şekilde seçersek; $\|\xi\| < \delta$ olduğunda (2.3) ifadesinden yararlanarak;

$$\|\varphi(t,\xi)\| = \|\Phi(t)\xi\| \leq \|\Phi(t)\|\|\xi\| < M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

olur. Buradan (2.2) sisteminin trivial çözümünün dayanıklı olduğu elde edilir.

<u>Sonuç 2.4:</u> Homojen olmayan (2.1) lineer sistemi dayanıklı olsun. Bu taktirde ya bu sistemin çözümlerinin her biri I aralığında sınırlıdır ya da hiç biri sınırlı değildir.

İspat: (2.1) sisteminin $x(t_0) = \xi$ başlangıç şartını sağlayan çözümü

$$\varphi(t, \xi) = \Phi(t)\xi + \int_{t_0}^{t} \Phi(t)\Phi^{-1}(s)\, f(s) ds$$

biçiminde olduğundan ve uygun homojen sistemin çözümlerinin I aralığında sınırlılığından dolayısıyla $\Phi(t)$ nin sınırlılığından dolayı ispat açıktır.

Teorem 2.5: (2.2) Lineer homojen sistemi asimptotik dayanıklıdır $\Leftrightarrow$ $t \to \infty$ iken her çözüm sıfıra yaklaşır.

İspat: $\Rightarrow$: (2.2) lineer homojen sistemi asimptotik dayanıklı olsun. Trivial çözümü de asimptotik dayanıklı olacağından $\exists \sigma > 0$ sayısı vardır ki, $\|\xi\| < \sigma$ olduğunda $x(t_0) = \xi$ şartını sağlayan $x = \varphi(t, \xi)$ çözümleri için

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t, \xi) = 0$$

dır. (2.3) eşitliğinden $\lim_{t \to \infty} \varphi(t, \xi) = \lim_{t \to \infty} \Phi(t)\, \xi = 0$ dır. Buradan $\lim_{t \to \infty} \Phi^{\mathrm{i}}(t) = 0$, $i = 1,2, \dots, n$ dir.

$\Leftarrow$: (2.2) lineer homojen sisteminin her bir $x = \varphi(t)$ çözümü

$$\lim_{t \to \infty} \varphi(t, \xi) = 0 \tag{2.4}$$

şartını sağlasın. O halde limit tanımına göre $\Delta_\varepsilon > t_0$ sayısı vardır ki;

$\|\varphi(t, \xi)\| \leq 1$, $t \in [\Delta_\varepsilon, \infty)$ dır. Diğer taraftan $\varphi(t, \xi)$ vektör fonksiyonu sonlu $[t_0, \Delta_\varepsilon]$ aralığında sürekli olduğundan bu aralıkta sınırlıdır. Buradan da $x = \varphi(t, \xi)$ çözümü I aralığında sınırlıdır. O halde Teorem 2.3 ve (2.4) ifadesinden (2.2) sisteminin trivial çözümünün asimptotik dayanıklı olduğu elde edilir.

2.2. SABİT KATSAYILI LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN DAYANIKLILIĞI

Sabit katsayılı lineer homojen

$$\dot{x} = Ax \tag{2.5}$$

sisteminin dayanıklılığı problemi A matrisinin karakteristik değerlerine bağlıdır. (2.5) formundaki sistemlerin $I_0 = \{0 \leq t < \infty\}$ parçasında dayanıklılığını inceleyelim.

Bunun için A matrisinin Jordan formundan yararlanılır.

Açıktır ki , J matrisi A matrisinin kanonik Jordan matrisi ise, öyle P matrisi vardır ki;

$$P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} J_{m_1}(\lambda_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_2}(\lambda_2) & 0 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & J_{m_l}(\lambda_l) \end{pmatrix},$$

$$J_{m_j}(\lambda_j) = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & & 0 \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_j \end{pmatrix}, j = 1,2,\dots,l\,;$$

Burada $m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n$,$J_{m_j}(\lambda_j)$ hücresi m_j indisli kuadrat matristir ve belli j_0 için $m_{j_0} = 1$ olduğunda $J_{m_{j_0}}(\lambda_{j_0})$ bir elemanlı hücre olup tek λ_{j_0} elemanı vardır. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ sayıları A matrisinin karakteristik değerleridir ve farklı olmayabilirler.

Eğer (2.5) sisteminde $x = Py$ değişken değişimi yaparsak y vektörünün $y_1, y_2, \dots, y_n$ bileşenlerine göre

$$
\begin{cases}
\dot{y_1} = \lambda_1 y_1 + y_2 \\
\dot{y_2} = \lambda_1 y_2 + y_3 \\
\vdots \\
\dot{y}_{m_1} = \lambda_1 y_{m_1} \\
\vdots \\
\dot{y}_{n-m_l+1} = \lambda_l y_{n-m_l+1} + y_{n-m_l+2} \\
\dot{y}_{n-m_l+2} = \lambda_l y_{n-m_l+2} + y_{n-m_l+3} \\
\vdots \\
\dot{y_n} = \lambda_l y_n
\end{cases}
\tag{2.6}
$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin m_1 sayıda denkliği $J_{m_1}(\lambda_1)$ hücresine ve bu şekilde devam ederek sonuncu m_l sayıda denkliği ise $J_{m_l}(\lambda_l)$ hücresine uygun alınır. Herhangi hücre, mesela $J_{m_1}(\lambda_1)$ hücresi bir elemanlı olursa ona karşılık bir $\dot{y_1} = \lambda_1 y_1$ denklemi uygun gelir.

Not 2.6: P matrisi herhangi bir matris olduğundan (2.5) sisteminin dayanıklılığı (2.6) sisteminin dayanıklılığına eşdeğerdir.

Teorem 2.7: (2.5) Sabit katsayılı lineer homojen denklem sisteminin I_0 aralığında dayanıklı olması için ⇔ A matrisinin bütün karakteristik değerlerinin reel kısmı pozitif değildir ve reel kısmı sıfır olan karakteristik değerlere uygun Jordan hücreleri bir elemanlıdır.

İspat: ⇒: Kabul edelim ki (2.5) sabit katsayılı lineer homojen denklem sistemi dayanıklı olsun; fakat A matrisinin karakteristik değerleri içinde reel kısmı pozitif olanlar var olsun. Genelliği bozmadan farz edelim ki; $Re\lambda_1 = \alpha > 0$ olsun. O zaman (2.6) sisteminin $y_1(t) = e^{\lambda_1 t}$, $y_2(t) = 0, \dots, y_n(t) = 0$ çözümü için

$$\lim_{t\to\infty} \|y(t)\| = \lim_{t\to\infty} \left|e^{\lambda_1 t}\right| = \lim_{t\to\infty} e^{at} = \infty$$

dır. Bu durumda Teorem 2.5 den dolayı (2.6) sistemi dayanıksızdır. Bu ise Not 2.6 gereğince (2.5) sisteminin dayanıklı olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlış olup hiçbir karakteristik değer pozitif olamaz.

Şimdi kabul edelim ki; A matrisinin reel kısmı sıfır olan karakteristik değerlerinden en az birine uygun Jordan hücresinin indisi 1 den büyük olsun. Genelliği bozmadan farz edelim ki $\lambda_1 = i\beta$ ($\beta = 0$ olabilir) karakteristik değerlerine uygun olan $J_{m_1}(\lambda_1)$ Jordan hücresinde $m_1 \geq 2$ dir. Bu durumu araştırmak için (2.6) sisteminin $y_i(0) = 1, i = 1,2,\dots,m_1$; $y_j(0) = 0, j = m_1 + 1,\dots,n$ başlangıç şartını sağlayan çözümünü bulalım. Bunun için (2.6) sisteminin birinci m_1 eşitliklerinin sonuncusundan başlayarak ardışık çözüm yapalım.

O zaman (2.6) sisteminin

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= e^{i\beta t}\left(1 + t + \cdots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}\right),\\
y_2(t) &= e^{i\beta t}\left(1 + t + \cdots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}\right),\\
&\vdots\\
y_{m_1}(t) &= e^{i\beta t}\,,\\
y_j(t) &= 0, \qquad j = m_1 + 1,\dots,n
\end{aligned}
$$

çözümünü elde ederiz ve $m_1 \geq 2$ olduğunda bu çözüm için

$$
\lim_{t\to\infty} \|\varphi(t)\| \geq \lim_{t\to\infty} \left(1 + t + \cdots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}\right) = \infty
$$

dır. Bu ise Teorem 2.5 den dolayı (2.6) sisteminin dayanıksız olması demek olup bir çelişkidir. Çünkü: (2.5) sistemi dayanıklı olduğundan Not 2.6 gereğince (2.6) sistemi de dayanıklıdır. O halde kabulümüz yanlış olup A matrisinin reel kısmı sıfır olan karakteristik değerlerine uygun Jordan hücreleri tek elemanlıdır.

$\Leftarrow$: Kabul edelim ki; $Re\lambda_j = \alpha_j < 0$, $j = 1,2,\dots,k$ $(k < l)$ ve $Re\lambda_i = 0$, $i = k + 1,\dots,l$ olsun. Teoremin şartına göre $J_{m_i}(\lambda_i)$, $i = k + 1,\dots,l$ bir elemanlı olup tek λ_i elemanı vardır.

O zaman (2.6) sisteminin genel çözümü;

$$
\begin{gathered}
y_1(t) = e^{\lambda_1 t}\left(c_1 + tc_2 + \cdots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}c_{m_1}\right),\\
y_2(t) = e^{\lambda_1 t}\left(c_2 + tc_3 + \cdots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}c_{m_1}\right),\\
\vdots\\
y_{m_1}(t) = e^{\lambda_1 t}c_{m_l}\\
\vdots\\
y_n(t) = e^{\lambda_l t}c_n
\end{gathered}
$$

şeklinde olur.

$\sigma = \min\left(|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_k|\right)$ dersek $0 < \gamma < \sigma$ şartını sağlayan γ için $\mu = \sigma - \gamma$ sayısına bakalım. Bileşenleri $c_1, c_2, \dots, c_n$ olan c vektörü için öyle M sayısı bulunabilir ki, $t \geq 0$ olduğunda

$$
\begin{aligned}
|y_1(t)| &= \left|e^{\lambda_1 t}\left(c_1 + tc_2 + \cdots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}c_{m_1}\right)\right|\\
&= e^{(\alpha_1+\gamma)t}\left|e^{-\gamma t}\left(c_1 + tc_2 + \cdots + \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}c_{m_1}\right)\right| \leq Me^{-\mu t},\\
|y_2(t)| &= \left|e^{\lambda_1 t}\left(c_2 + tc_3 + \cdots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}c_{m_1}\right)\right|\\
&= e^{(\alpha_1+\gamma)t}\left|e^{-\gamma t}\left(c_2 + tc_3 + \cdots + \frac{t^{m_1-2}}{(m_1-2)!}c_{m_1}\right)\right| \leq Me^{-\mu t},\\
&\vdots\\
|y_n(t)| &= \left|e^{\lambda_l t}c_n\right| = |c_n| \leq M.
\end{aligned}
$$

Bu eşitsizliklere göre (2.6) sisteminin her bir çözümünü

$$\|y(t)\|^2 \leq M_1 e^{-2\mu t} + M_2$$

şeklinde değerlendirebiliriz. Buradan Teorem 2.3 e göre (2.6) sisteminin dayanıklı olduğu elde edilir.

<u>Not 2.8:</u> (2.5) sisteminin çözümleri $x(t) = Py(t)$ şeklinde olduğundan sonuncu eşitsizliğe göre bu sistemin her bir çözümü için öyle M_3, M_4 değerleri bulunabilir ki;

$$\|x(t)\|^2 \leq M_3 e^{-2\mu t} + M_4 \tag{2.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

<u>Teorem 2.9</u>: (2.5) Sabit katsayılı lineer homojen denklem sisteminin I_0 aralığında Asimptotik dayanıklı olması için ⇔ A katsayılar matrisinin karakteristik değerlerinin hepsinin reel kısımlarının negatif olmasıdır.

<u>İspat:</u> Gereklilik kısmının ispatı Teorem 2.7 den açıktır.

Teoremin şartları dahilinde (2.7) eşitsizliği

$$\|x(t)\| \leq M_5 e^{-\mu t}\ ,\ t \in I_0\ ,\ (\mu 0) \tag{2.8}$$

eşitsizliği ile değişken değişimi yapılır ve buradan da Teorem 2.5 e göre yeterliliğin ispatı yapılmış olur.

İspatlanan teoremler gösterir ki;

$\dot{x} = Ax$ sabit katsayılı lineer homojen denklem sisteminin dayanıklılığı probleminde A matrisinin karakteristik değerlerinin reel kısımlarının işaretinin bulmak esas rol oynar. A matrisinin karakteristik değerleri;

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

şeklindeki reel katsayılı denklemin kökleri olduğundan bu denklemin köklerinin reel kısımlarının işaretlerini belirlemek yeterlidir. Reel katsayılı

$$f(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$$

fonksiyonu için köklerinin reel kısımlarının pozitif olmaması hakkında birkaç durum karşımıza çıkar.

Genelliği bozmadan $a_0 > 0$ seçelim.

Tanım 2.10: Köklerinin reel kısmı negatif olan $f(\lambda)$ fonksiyonuna *Gurviç Fonksiyonu* denir.

Önerme 2.11: $f(\lambda)$ fonksiyonunun Gurviç Fonksiyonu olması için $a_i > 0$, $i = 1,2,\ldots,n$ olması gereklidir. Fonksiyonun derecesi $n \le 2$ olduğunda bu şart aynı zamanda yeterlidir.

Ayrıca $f(\lambda)$ fonksiyonu Gurviç Fonksiyonu ise kökleri $\alpha > 0$ olmak üzere; $\lambda = -\alpha$, $\lambda = -\alpha + i\beta$, $\bar{\lambda} = -\alpha - i\beta$ biçimindedir. Buradan $f(\lambda)$ fonksiyonu $\lambda + \alpha$, $\lambda + \alpha - i\beta$, $\lambda + \alpha + i\beta$ ve benzeri şekildeki çarpanların sonucu olarak gösterilebilir. Buradan açıktır ki $f(\lambda)$ fonksiyonunun katsayıları pozitiftir.

Önermenin $n > 2$ iken yeterli olmadığına dair örnek verelim;

Örnek 2.12: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 1 + 3i$, $\lambda_3 = 1 - 3i$ değerleri $f(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2 + 4\lambda + 30$ fonksiyonunun kökleridir. Katsayıları pozitif olmasına rağmen $Re\lambda_2 = 1 > 0$ ve $Re\lambda_3 = 1 > 0$ olduğundan $f(\lambda)$ fonksiyonu Gurviç fonksiyonu değildir.

Baş diagonal elemanları $a_1, a_2, \dots, a_n$ olan

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & & 0 \\ & & \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

kuadrat matrisini alalım ve onun baş diagonal minörlerini;

$$\Delta_1 = a_1\,, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = a_n \Delta_{n-1}$$

ile ifade edelim.

Önerme 2.13 (GURVİÇ TEOREMİ): $f(\lambda)$ fonksiyonu Gurviç Fonksiyonudur$\Leftrightarrow$ $\Delta_i > 0\,, i = 1,2,\dots,n$ dir.

Önerme 2.14 (LENAR-ŞİPAR ŞARTI): $f(\lambda)$ fonksiyonu Gurviç Fonksiyonudur$\Leftrightarrow$ $\mathrm{a_i} > 0,\ i = \overline{1,\mathrm{n}}$ ve $\Delta_{\mathrm{n}-1} > 0,\ \Delta_{\mathrm{n}-3} > 0,\ \Delta_{\mathrm{n}-5} > 0, \dots$ dır.

Önerme 2.15 (MİKAYLOV ŞARTI): $f(\lambda)$ fonksiyonu Gurviç Fonksiyonudur$\Leftrightarrow$ $a_n a_{n-1} > 0$ iken

$$a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \cdots = 0,$$
$$a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \cdots = 0$$

denklemlerinin köklerinin hepsi reel, pozitif, farklı olup

$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \cdots$ şartını sağlar.

Örnek 2.16:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \dot{x_2} = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \dot{x_3} = -3x_1 - 2x_2 - x_3 \end{cases} \tag{2.9}$$

sisteminin dayanıklılığını araştırınız.

Çözüm: (2.9) denklem sisteminin katsayılar matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

dır.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda+1 & -2 \\ 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda + 34$$

olup $f(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 12\lambda + 34$ biçimindedir.

$f(\lambda)$ nın Gurviç fonksiyonu olup olmadığını inceleyelim:

$$\Delta_1 = a_1 = 3$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 34 & 12 \end{vmatrix} = 2$$

$\Delta_3 = a_3\Delta_2 = 34.2 = 68$ $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ olduğundan Önerme 2.13 (Gurviç Teoremi) gereğince $f(\lambda)$ Gurviç fonksiyonudur. O halde $f(\lambda)$ nın köklerinin reel kısmı negatif olup Teorem2.9 dan dolayı sistem asimptotik dayanıklıdır.

Örnek 2.17: α ve β nın hangi değerleri için

$$\dddot{x} + \alpha\ddot{x} + \beta\dot{x} + 3x = 0 \qquad (2.10)$$

denklemi asimptotik dayanıklıdır?

Çözüm: (2.10) denkleminin karakteristik denklemi

$$f(\lambda) = \lambda^3 + \alpha\lambda^2 + \beta\lambda + 3$$

olup Lenar-Şipar şartına göre

$$\alpha > 0, \beta > 0 \text{ ve } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 3 & \beta \end{vmatrix} = \alpha\beta - 3 > 0$$

şartları sağlandığında (2.10) denklemi asimptotik dayanıklı olur.

Örnek 2.18:

$$x^{v} + x^{\imath v} + 6\dddot{x} + 4\ddot{x} + 8\dot{x} + 3x = 0 \qquad (2.11)$$

denkleminin asimptotik dayanıklı olduğunu Mikaylov Şartı yardımıyla gösteriniz.

Çözüm: (2.11) denkleminin karakteristik denklemi

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 6\lambda^3 + 4\lambda^2 + 8\lambda + 3$$

biçiminde olup $n = 5$ dir.

$a_n a_{n-1} = a_5 a_4 = 8.3 = 24 > 0$ ve

$$a_5 - a_3\xi + a_1\xi^2 = 0 \;\Rightarrow 3 - 4\xi + \xi^2 = 0$$
$$a_4 - a_2\eta + a_0\eta^2 = 0 \;\Rightarrow 8 - 6\eta + \eta^2 = 0$$

Denklemlerinin kökleri $\xi_1 = 1, \xi_2 = 3, \eta_1 = 2, \eta_2 = 4$ olup

$0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2$ şartı sağlanır.

O halde Mikaylov Şartından dolayı verilen denklem asimptotik dayanıklıdır.

BÖLÜM 3

LYAPUNOV FONKSİYONLARI İLE DAYANIKLILIK TEORİSİ

3.1. LYAPUNOV FONKSİYONLARI YÖNTEMİ

Bu kısımda D bölgesinin n-ölçülü uzayının koordinat başlangıcını içine alan ve $f(t,0)=0, t\epsilon I$ şartını sağlayan Lyapunov fonksiyonlarının yardımıyla (1.1) denklem sisteminin trivial çözümünün dayanıklılığını araştıracağız.

Tanım 3.1: *i.* $V=V(t,x)$ fonksiyonu G kümesinde sürekli ve sürekli kısmi türevleri var olsun. Eğer

$$V(t,0)=0,\, t\in I$$
$$V(t,x)\geq 0\ (V(t,x)\leq 0), (t,x)\in G$$

şartları sağlanırsa $V(t,x)$ fonksiyonuna *Pozitif İşaretli (Negatif İşaretli) Fonksiyon* denir.

ii. Pozitif $V(t,x)$ fonksiyonu için D bölgesinde

$$V(t,x)\geq w(x)>0;\ (t,x)\in G, x\neq 0\,,$$
$$V(t,0)=w(0)=0, t\epsilon I$$

şartlarını sağlayan ve sürekli diferansiyellenebilen $w(x)$ fonksiyonu varsa $V(t,x)$ fonksiyonuna *G de Pozitif Tanımlı*, $w(x)$ fonksiyonuna ise *D Bölgesinde Pozitif Tanımlı Fonksiyon* denir.

iii. Uygun şartlar altında negatif işaretli $\tilde{V}(t,x)$ fonksiyonu için D bölgesinde

$$\tilde{V}(t,x) \leq -\widetilde{w}(x) < 0;\ (t,x) \in G, \qquad x \neq 0,$$
$$\tilde{V}(t,0) = \widetilde{w}(0) = 0, \qquad t\epsilon I$$

şartlarını sağlayan ve sürekli diferansiyellenebilen ve pozitif tanımlı $\widetilde{w}(x)$ fonksiyonu varsa, $\tilde{V}(t,x)$ fonksiyonuna *G de Negatif Tanımlı Fonksiyon* denir.

iv. Dayanıklılığın araştırılması için yararlanılan $V(t,x)$ fonksiyonuna *Lyapunov Fonksiyonu* denir.

Genellikle (1.1) sisteminin sağ tarafı t-den bağımsız olduğunda Lyapunov fonksiyonu olarak $w(x)$ fonksiyonu seçilir.

<u>Lemma 3.2:</u> $w(x)$ fonksiyonu D bölgesinde pozitif tanımlı fonksiyon olsun. O zaman öyle $h > 0$ sayısı vardır ki $0 < c < h$ şartını sağlayan keyfi c sayısı için $w(x) = c$ seviye yüzeyleri orijine göre kapalı yüzeylerdir yani orijini D bölgesinin sınırı ile birleştiren keyfi sürekli eğri $w(x) = c$ yüzeyini en az bir noktada keser.

<u>İspat:</u> Öyle $R > 0$ sayısı seçelim ki; orijin merkezli R yarıçaplı H_R küresi tamamıyla D bölgesinde olsun. Bu kürenin yüzeyini S_R ile gösterelim. $w(x)$ fonksiyonu D bölgesinde pozitif tanımlı olduğundan D bölgesinde sürekli olup $H_R \subset$D küresinde de süreklidir. Dolayısıyla $w(x)$ fonksiyonu S_R kapalı ve sınırlı yüzeyinde de sürekli olup S_R yüzeyinde maksimum ve minimum değer alır. Bu minimum değeri h ile gösterelim. S_R yüzeyinde η noktası seçelim. $x(0) = 0,\ x(s_1) = \eta$ şartını sağlayan ve $[0, s_1]$ parçasında sürekli olan $x = x(s)$ fonksiyonu için $\phi(s) = w\big(x(s)\big)$ fonksiyonuna bakalım. $w(x)$ ve $x(s)$ fonksiyonları $[0, s_1]$ parçasında sürekli olduğundan dolayı $y = \phi(s)$ fonksiyonu da $[0, s_1]$ parçasında süreklidir ve

$$\phi(0) = w\big(x(0)\big) = w(0) = 0,$$
$$\phi(s_1) = w\big(x(s_1)\big) = w(\eta) \geq h > 0$$

elde edilir. Buradan Cauchy Teoremine göre $0 < c < h$ olacak şekilde keyfi c sayısı için öyle $s' \in [0, s_1]$ noktası vardır→ $\phi(s) = w\big(x(s')\big) = c$ olur. $\phi(s)$, orijini sınırla birleştiren eğri olup c değeri aldığından $w(x) = c$ yüzeyini en az bir noktada keser.

<u>Teorem 3.3</u>: (1.1) sisteminin stabilite hali dayanıklı olsun. Bu durumda

G kümesinde pozitif tanımlı öyle $V(t,x)$ fonksiyonu vardır ki (1.1) sistemine göre türemesi

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,x) \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} f_j(t,x) \leq 0\,,(t,x) \in G \tag{3.1}$$

dır.

<u>İspat:</u> $V(t,x)$ fonksiyonu pozitif tanımlı olduğundan D bölgesinde pozitif tanımlı olan öyle $w(x)$ fonksiyonu vardır ki

$$V(t,x) \geq w(x) > 0, x \neq 0$$

şartını sağlar. Yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için orijin merkezli ε yarıçaplı H_ε küresi, S_ε yüzeyi ile birlikte D bölgesinde yer alsın. $w(x)$ fonksiyonu pozitif tanımlı olduğundan sürekli olup S_ε kapalı sınırlı yüzeyinde minimum değerini alacağından S_ε yüzeyindeki minimum değerini w_ε ile gösterelim.

O zaman $V(t,0) = 0,\ t\epsilon I$ olduğundan verilmiş ε sayısına göre $0 < \delta < \varepsilon$ olacak şekilde öyle δ seçilebilir ki $x \in H_\delta,\ t\epsilon I$ için $V(t,x) < w_\varepsilon$ olur. Seçilen $\delta > 0$ sayısı için $0 < \|\xi\| < \delta$ olacak şekilde keyfi ξ noktası alalım. (1.1) sisteminin $x(t_0) = \xi$ şartını sağlayan çözümüne bakalım. Konulan şartlar altında bu problemin $\left[t_0, t_\xi\right]$ aralığında seçilen ve genişletilmeyen tek $x = \varphi(t,\xi)$ çözümü vardır.

Gösterelim ki; $t\epsilon\left[t_0, t_\xi\right)$ için

$$\|\dot{\varphi}(t, \xi)\| < \varepsilon \tag{3.2}$$

biçimindedir:

$\|\xi\| < \delta < \varepsilon$ olduğundan bu eşitsizlik yeterince küçük $h > 0$ için $t_0 + h < t_\xi$ olmak üzere $[t_0, t_0 + h]$ aralığında sağlanır. Eğer bu eşitsizlik $\left[t_0, t_\xi\right]$ aralığında sağlanırsa Lemma 3.2 ye göre öyle $t_1 \in \left(t_0, t_\xi\right)$ noktası bulunabilir ki; $t\epsilon[t_0, t_1)$ olduğunda (3.2) eşitsizliği sağlanır ve $\|\varphi(t, \xi)\| = \varepsilon$ olur. Buradan anlaşılır ki $x' = (t, \xi)$ noktası S_ε yüzeyi üzerindedir.

Diğer taraftan (3.1) eşitliğine göre;

$$V(t_1, x') - V(t_0, \xi) = \int_{t_0}^{t_1} \dot{V}(t, \varphi(t, \xi))dt \leq 0$$

olur. Yani $V(t_1, x') \leq \; V(t_0, \xi)$ dir. Buradan

$$V(t_0, \xi) \geq V(t_1, x') \geq w(x') \geq w_\varepsilon$$

olur. Bu ise $V(t_0, \xi) < w_\varepsilon$ olmasıyla çelişir. O halde $\left[t_0, t_\xi\right)$ aralığında (3.2) eşitsizliği sağlanır.

"(3.2) eşitsizliğinin sağlanmasından $t_\xi = \infty$ olduğu elde edilir. Aksi halde, yani $t_\xi < \infty$ iken $\varphi(t, \xi)$ çözümü devamettirilebilen (genişletilebilen) çözüm olur."

Böylelikle $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $0 < \delta < \varepsilon$ olacak şekilde öyle δ seçilebilir ki, $\|\xi\| < \delta$ şartı sağlandığında (1.1) sisteminin $x(t_0) = \xi$ başlangıç şartını sağlayan $x = \varphi(t, \xi)$ çözümleri I aralığından seçilmiş olup I da $\|\varphi(t, \xi)\| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Bu ise (1.1) sisteminin $x = 0$ stabilite hali dayanıklıdır demektir.

Teorem 3.4: G kümesinde pozitif belirli $V(t,x)$ fonksiyonunun (1.1) sistemine göre türemesi negatif tanımlı olsun ve I aralığının her noktasında

$$\lim_{x\to 0} V(t,x) = 0$$

şartı sağlansın. O zaman (1.1) sisteminin trivial çözümü asimptotik dayanıklıdır.

İspat: G kümesinde pozitif belirli $V(t,x)$ fonksiyonunun (1.1) sistemine göre türemesi negatif tanımlı olduğundan Teorem 3.3 ün şartları sağlanmış olup (1.1) sisteminin $x=0$ trivial çözümü dayanıklıdır. Buna göre $0<\sigma<\delta$ şartını sağlayan σ sayısı için 0<$\|\xi\|<\sigma$ olduğunda $x=\varphi(t,\xi)\in\overline{H_\varepsilon}=H_\varepsilon\cup S_\varepsilon,\ t\epsilon I$ olur.

$$\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\xi) = 0 \tag{3.3}$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim:

Bunun için $\phi(t)=V\big(t,\varphi(t,\xi)\big)$ fonksiyonuna bakalım. Şarta göre $\forall t\epsilon I$ için $\dot{\phi}(t)=\dot{V}_{(1.1)}(t,x)<0$ olduğundan $\phi(t)$ fonksiyonu I aralığında monoton azalandır ve tanımlanışı gereği $\phi(t)>0$ dır. O halde limit tanımından

$$\lim_{t\to\infty}\phi(t) = \inf\phi(t) = l \geq 0$$

sonlu limiti vardır.

Kabul edelim ki $l>0$ olsun.

Bu durumda öyle $\lambda>0$ sayısı vardır ki $\|\varphi(t,\xi)\|\geq\lambda\,,t\epsilon I$ dır. Aksi halde öyle $\{t_k\}, t_k\in I$ dizisi seçmek mümkündür ki $\lim_{k\to\infty} t_k=\infty$ ve $\lim_{k\to\infty}\varphi(t_k,\xi)=0$ dır.

Buradan teoremin hipotezinden

$$\lim_{k\to\infty}\phi(t_k) = \lim_{k\to\infty}V\big(t_k,\varphi(t_k,\xi)\big) = 0$$

dır. O halde $l \geq 0$ olduğunda $0 < \lambda \leq \|\varphi(t,\xi)\| < \varepsilon\,, t \in I$ olmalıdır. Yani $t \in I$ için $\varphi(t,\xi) \in \overline{\mathrm{H}}_\varepsilon \backslash \mathrm{H}_\lambda$ dır. Şarta göre $V(t,x)$ fonksiyonunun (1.1) sistemine göre türemesi negatif tanımlı olduğundan öyle pozitif tanımlı $w_1(x)$ fonksiyonu vardır ki;

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,x) \leq -w_1(x) < 0, \qquad t \in I, \qquad x \in \overline{\mathrm{H}}_\varepsilon \backslash \mathrm{H}_\lambda$$

dır. Kapalı sınırlı $\overline{\mathrm{H}}_\varepsilon \backslash \mathrm{H}_\lambda$ bölgesinde $w_1(x)$ fonksiyonunun minimumuna m ile gösterirsek $m > 0$ olmak üzere

$$\dot{V}_{(1.1)}(t,x) \leq -m, \qquad t \in I, \quad x \in \overline{\mathrm{H}}_\varepsilon \backslash \mathrm{H}_\lambda$$

olur. O zaman

$$V\big(t,\varphi(t,\xi)\big) = \mathrm{V}(\mathrm{t}_0,\xi) + \int_{\mathrm{t}_0}^{\mathrm{t}} \dot{\mathrm{V}}\big(\tau,\varphi(\tau,\xi)\big)\mathrm{d}\tau$$

eşitliğine göre;

$$V\big(t,\varphi(t,\xi)\big) \leq \mathrm{V}(\mathrm{t}_0,\xi) - \mathrm{m}(\mathrm{t}-\mathrm{t}_0), \;\; \mathrm{t} \geq \mathrm{t}_0$$

eşitsizliği elde edilir.Bu eşitsizliğin sağ tarafı yeteri kadar büyük t-ler için negatif, sol tarafı ise pozitiftir. Bu zıtlıktan dolayı $l = 0$ olmalıdır.

Yani $\phi(t) = V\big(t,\varphi(t,\xi)\big)$ için

$$\lim_{t\to\infty}V\big(t,\varphi(t,\xi)\big) = 0 \tag{3.4}$$

olur. Buradan da $V(t,x)$ fonksiyonu sürekli olduğundan (3.3) ifadesinin doğruluğu elde edilir.

Gerçekten;

$0 < \rho < \varepsilon$ olacak şekilde $\forall\rho$ sayısı seçelim. Kapalı sınırlı $\overline{H_\varepsilon}\backslash H_\rho$ bölgesinde $w(x)$ fonksiyonunun minimumunu w_ρ ile gösterelim. Limitin tanımına göre (3.4) ifadesinden anlaşılır ki; $\exists t_\rho > t_0$ vardır $\rightarrow t \geq t_\rho$ olduğunda

$$V\big(t, \varphi(t,\xi)\big) < w_\rho$$

olur. Burada $\phi(t)$ fonksiyonunun monoton azalan olmasından

$$\|\varphi(t,\xi)\| < \rho, \quad t \geq t_\rho \tag{3.5}$$

olmalıdır. Aksi halde $\exists t_1 > t_\rho$ noktası bulunabilir öyle ki $\|\varphi(t_1,\xi)\| \geq \rho$ dır.

O halde

$$V\big(t_1, \varphi(t_1,\xi)\big) \geq \mathrm{w}\big(\varphi(t_1,\xi)\big) \geq w_\rho$$

elde edilir. Bu ise $t \geq t_\rho$ olduğunda $V\big(t, \varphi(t,\xi)\big) < w_\rho$ olması ile çelişir.

Bu durumda (3.5) ifadesi doğrudur. Buradan ρ keyfi olduğundan (3.3) ifadesi elde edilir. Bu ise (1.1) sisteminin trivial çözümü asimptotik dayanıklı olduğunu gösterir.

Özel halde (1.1) sisteminin sağ tarafı t-den bağımsız olduğunda yani

$$\dot{x} = f(x), \ f(0) = 0 \tag{3.6}$$

Otonom sistemi için Teorem 3.4 aşağıdaki şekildedir:

Teorem 3.5: D bölgesinde pozitif tanımlı ve (3.6) sistemine göre türemesi

$$\dot{w}_{(3.6)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{dw}{dx_j} f_j(x)$$

negatif tanımlı olan $w(x)$ fonksiyonu var olsun. O zaman (3.6) sisteminin trivial çözümü asimptotik dayanıklıdır.

İspat: Teorem 3.3 ün şartları sağlandığından $x = 0$ çözümü dayanıklıdır. Bu çözümün asimptotik dayanıklı olduğunu göstermek için öncelikle Teorem 3.4 ünispatındaki gibi $\phi(t) = w\big(t, \varphi(t,\xi)\big)$ fonksiyonunun monoton azalan ve $\lim_{t\to\infty} \phi(t) = \lim_{t\to\infty} V\big(t, \varphi(t,\xi)\big) = 0$ olduğu kolayca görülür. Buradan Teorem 3.4 ün ispatından $\lim_{t\to\infty} \varphi(t,\xi) = 0$ olduğu açıktır. Bu ise (3.6) sisteminin trivial çözümünün asimptotik dayanıklı olduğunu gösterir.

Örnek 3.6:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_2 x_1^2 \end{cases} \tag{3.7}$$

sisteminin $x_1 = 0, x_2 = 0$ stabilite halinin dayanıklılığını Lyapunov fonksiyonları metodu ile araştıralım:

Bunun için $w(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_2^2$ fonksiyonuna bakalım. Bu fonksiyonun pozitif tanımlı olduğu aşikardır. Öte yandan $w(x_1,x_2)$ fonksiyonunun (3.7) sistemine göre türemesi Teorem 3.5 den

$$\begin{aligned} \dot{w}(x_1,x_2) &= \sum_{j=1}^{2} \frac{dw}{dx_j} f_j(x) = \frac{dw}{dx_1} f_1(x) + \frac{dw}{dx_2} f_2(x) \\ &= 4x_1(-x_1x_2^2) + 2x_2(x_2x_1^2) \\ &= -4x_1^2x_2^2 + 2x_1^2x_2^2 \\ &= -2x_1^2x_2^2 \end{aligned}$$

olduğundan $\dot{w}(x_1, 0) = \dot{w}(0, x_2) = 0$ ve $x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ iken $\dot{w}(x_1, x_2) < 0$ dır. Yani pozitif tanımlı $w(x_1, x_2)$ fonksiyonunun verilen sisteme göre türemesi negatif işaretli fonksiyondur. O halde Teorem 3.3 e göre $x_1 = 0, x_2 = 0$ stabilite hali dayanıklıdır.

(3.7) sisteminin istenilen $x_1(t), x_2(t)$ çözümü için $c > 0$ keyfi sabit olmak üzere $2x_1^2(t) + x_2^2(t) = c$ ifadesi doğrudur. O halde $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| \neq 0$ dır. Bu bir kez daha gösterir ki; $x_1 = 0, x_2 = 0$ stabilite hali asimptotik dayanıklı değildir.

Örnek 3.7:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_1 - 9x_2 - {x_1}^3 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 - 0{,}5{x_2}^3 \end{cases} \qquad (3.8)$$

sisteminin $x_1 = 0, x_2 = 0$ stabilite halinin asimptotik dayanıklı olduğunu Lyapunov fonksiyonları metodu ile gösterelim:

Lyapunov fonksiyonu olarak pozitif tanımlı $w(x_1, x_2) = x_1^2 + 3x_2^2$ fonksiyonunu seçelim. Bu fonksiyonun (3.8) sistemine göre türemesi;

$$\dot{w}(x_1, x_2) = \frac{dw}{dx_1} f_1(x) + \frac{dw}{dx_2} f_2(x)$$
$$= 2x_1(-5x_1 - 9x_2 - {x_1}^3) + 6x_2(3x_1 - 4x_2 - 0{,}5{x_2}^3)$$
$$= -(2x_1^4 + 3x_2^4 + 10x_1^2 + 24x_2^2)$$

olup negatif işaretlidir. O halde Teorem 3.5 e göre verilen sistemin $x_1 = 0, x_2 = 0$ stabilite halinin asimptotik dayanıklıdır.

Sonuç 3.8: İspatlanan teoremler gösterir ki; Lyapunov fonksiyonu metodu ile dayanıklılık incelenirken esas zorluk Lyapunov fonksiyonunun varlığı ve kurulması problemidir.

3.2. LYAPUNOV FONKSİYONUNUN KURULUŞU

Teorem 3.9: A katsayılar matrisinin karakteristik değerlerin hepsinin reel kısmı negatif olsun.O zaman öyle pozitif tanımlı

$$w(x) = \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j$$

kuadratik formu vardır ki (2.5) sistemine göre türemesi belli $\beta > 0$ sayısı için

$$\dot{w}_{(2.5)}(x) \leq -\beta w(x) \tag{3.9}$$

eşitsizliği sağlanır (Ahmedov ve Hesenov, 1977).

İspat: (2.5) sisteminin $x(0) = \xi$ başlangıç şartını sağlayan çözümü

$$\varphi(t, \xi) = e^{At} \xi \tag{3.10}$$

şeklinde verilebilir. $\phi^i(t), i = 1,2, \ldots, n$ ile e^{At} matrisinin i.sütununu gösterirsek bu çözümü

$$\varphi(t, \xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \phi^i(t) \tag{3.11}$$

şeklinde yazabiliriz.

Hipoteze göre A matrisinin karakteristik değerlerinin reel kısmı negatif olduğundan, $\exists \delta > 0$ sayısı vardır ki (2.8) eşitsizliğinden

$$\|\varphi(t, \xi)\| \leq M \|\xi\| e^{-\delta t}, \ t \geq 0 \tag{3.12}$$

dır. Buna göre

$$w(\xi) = \int_0^\infty \|\varphi(\tau,\xi)\|^2 d\tau \tag{3.13}$$

integrali sonludur. Bu integralde $\|\varphi(t,\xi)\|^2 = \langle\varphi(t,\xi),\varphi(t,\xi)\rangle$ olduğunu göz önüne alırsak ve (3.11) eşitliğinden;

$$w(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\int_0^\infty \langle\phi^i(\tau),\phi^j(\tau)\rangle d\tau \right) \xi_i \xi_j$$

olur. Burada $w_{ij} = \int_0^\infty \langle\phi^i(\tau),\phi^j(\tau)\rangle d\tau\,, i = 1,2,\dots n$ diyelim. Açıktır ki;

$$w(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}\xi_i\xi_j$$

kuadratik formu pozitif tanımlıdır.

Diğer taraftan (3.10) ifadesine göre

$$\varphi\big(t,\varphi(s,\xi)\big) = e^{At}\varphi(s,\xi) = e^{At}e^{As}\xi = e^{A(t+s)}\xi = \varphi(t+s,\xi)$$

olduğu göz önüne alınarak;

$$w\big(\varphi(t,\xi)\big) = \int_0^\infty \|\varphi(\tau,\varphi(t,\xi)\|^2 d\tau = \int_0^\infty \|\varphi(\tau+t,\xi)\|^2 d\tau$$

elde edilir. Burada $\tau + t = s$ denilirse;

$$w\big(\varphi(t,\xi)\big) = \int_t^\infty \|\varphi(s,\xi)\|^2 ds$$

olur. Bu fonksiyonun $t = 0$ noktasındaki türemesi;

$$\dot{w}_{(2.5)}(\xi) = \frac{d}{dt} w\big(\varphi(t,\xi)\big) \Bigg|_{t=0} = -\|\varphi(t,\xi)\|^2 \Bigg|_{t=0} = -\|\xi\|^2 \tag{3.14}$$

olarak elde edilir.

Orijin merkezli birim yarıçaplı S_1 yüzeyi üzerinde $w(\xi)$ fonksiyonunun minimum ve maksimum değerlerini sırasıyla μ ve ν ile gösterelim. (μ > 0 ve $\nu > 0$ dır.) O halde $x\epsilon S_1$ için

$$\mu \leq w(x) \leq \nu \tag{3.15}$$

dir. $\forall\xi$ noktası için $\exists\lambda$ sayısı ve $x\epsilon S_1$ noktası vardır ki $\xi = \lambda x$ dir. O zaman $x\epsilon S_1$ iken $\|x\| = 1$ olduğundan;

$$\|\xi\|^2 = \|\lambda x\|^2 = |\lambda|^2\|x\|^2 = \lambda^2$$

Olup (3.15) eşitsizliğinin her iki tarafı λ^2 ile çarpılırsa;

$$\mu\|\xi\|^2 \leq w(\xi) \leq \nu\|\xi\|^2 \tag{3.16}$$

elde edilir. Buradan $-\|\xi\|^2 \leq -\frac{1}{\nu} w(\xi)$ eşitsizliğini göz önüne alırsak;

$$\dot{w}_{(2.5)}(\xi) \leq -\frac{1}{\nu} w(\xi)$$

bulunur. Bu ise istenendir.

Sonuç 3.10: Asimptotik dayanıklı sabit katsayılı denklem sistemi için kuadratik form şeklinde Lyapunov fonksiyonu kurulabilir.

Örnek 3.11:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 3x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 4x_2 \end{cases} \tag{3.17}$$

sisteminin asimptotik dayanıklı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Öncelikle (3.17) sistemine uygun Lyapunov fonksiyonu kurulup kurulamayacağını inceleyelim:

Verilen denklem sisteminin katsayılar matrisi A olmak üzere;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 3 \\ -2 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

olup karakteristik değerler $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$ olup Teorem 2.9 dan dolayı sistem asimptotik dayanıklıdır.

O halde Teorem 3.9 dan dolayı verilen sistemin

$$w(x_1, x_2) = a{x_1}^2 + 2bx_1x_2 + c{x_2}^2$$

şeklinde Lyapunov fonksiyonu vardır. Bu kuadratik formun pozitif tanımlı olması için $a > 0\,,\ ac - b^2 > 0$ olmalıdır.

Diğer taraftan $w(x_1, x_2)$ fonksiyonunun (3.17) sistemine göre türemesi;

$$\dot{w}(x_1, x_2) = \frac{dw}{dx_1} f_1(x) + \frac{dw}{dx_2} f_2(x)$$
$$= 2(ax_1 + bx_2)(x_1 - 3x_2) + 2(bx_1 + cx_2)(2x_1 - 4x_2)$$
$$= 2(a + 2b){x_1}^2 + 2(2c - 3a - 3b)x_1x_2 - 2(3b + 4c){x_2}^2$$

olup türemenin negatif tanımlı olması için $2(a + 2b) < 0, -4(a + 2b)(3b + 4c) - (2c - 3a - 3b)^2 > 0$ olmalıdır. O halde $w(x_1, x_2)$ fonksiyonunun verilen sistemin Lyapunov fonksiyonu olması için a, b, c katsayıları

$$a > 0,$$
$$ac - b^2 > 0,$$
$$2(a + 2b) < 0,$$
$$-4(a + 2b)(3b + 4c) - (2c - 3a - 3b)^2 > 0$$

eşitsizliklerini sağlamalıdır.

Özel olarak bu eşitsizlikleri sağlayacak şekilde $a = 1, b = -\frac{2}{3}, c = 1$ seçilirse

$$w(x_1, x_2) = {x_1}^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 + {x_2}^2$$

fonksiyonu verilen sistem için Lyapunov fonksiyonu olur. Bu fonksiyon pozitif değerli türemesi negatif değerli olduğundan Teorem 3.5 e göre verilen sistem asimptotik dayanıklıdır.

BÖLÜM 4

BİRİNCİ YAKLAŞIMLARA GÖRE DAYANIKLILIK HAKKINDA LYAPUNOV TEOREMİ

Bu bölümde

$$\dot{x} = Ax + f(t,x) \tag{4.1}$$

şeklinde olan sistemin trivial çözümünün dayanıklılığı araştıracağız. Burada A sabit matris, $f(t,x)$ ise $f_i(t,x), i = 1,2,\dots,n$ bileşenleri $G = IXD$ bölgesinde sürekli olan vektör fonksiyonlarıdır; $I = \{t_0 \leq t \leq \infty\}, D$ ise n ölçülü Euclid uzayında orijini kapsayan sınırlı bölgedir. İlave olarak farz edeceğiz ki $t -$ ye göre I da düzenli olarak;

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} = 0 \tag{4.2}$$

şartı sağlanır.

Tanım 4.1: Yukarıda konulan şartlar altında lineer homojen (2.5) sistemine (4.1) homojen olmayan sisteminin *Birinci Yaklaşım Sistemi* denir.

Kabul edelim ki;

$$\dot{x} = F(t,x) \tag{4.3}$$

sisteminde $F(t,x)$ vektör fonksiyonu belli şartları sağladığında (4.1) şeklindeki sisteme dönüşebilsin. $F(t,x)$ vektör fonksiyonu ve $F_x(t,x)$ matris fonksiyonu G bölgesinde sürekli, $F(t,0)=0, t\in I$, hem de $F_x(t,0)=A_1$ sabit matristir. O halde Taylor formülüne göre;

$$F(t,x)=F(t,0)+F_x(t,0)x+F_1(t,x)$$

olduğundan (4.3) sistemi $\dot{x}=A_1x+F_1(t,x)$ yazılabilir ve açıktır ki $F_1(t,x)$ fonksiyonu (4.2) şartını sağlar.

Teorem 4.2: (2.5) Lineer homojen sistemi asimptotik dayanıklı olsun ve (4.2) şartı sağlasın. O halde (4.1) sisteminin $x=0$ stabilite hali asimptotik dayanıklıdır.

İspat: (2.5) sistemi yani $\dot{x}=Ax$ sistemi asimptotik dayanıklı olduğundan Teorem 3.9 a göre öyle pozitif tanımlı

$$w(x)=\sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}x_ix_j$$

kuadratik formu vardır ki (2.5) sistemine göre türemesi $\beta>0$ olmak üzere $\dot{w}_{(2.5)}(x)\le-\beta w(x)$ biçimindeki (3.9) eşitsizliğini sağlar.

$w(x)$ kuadratik formunun aynı zamanda (4.1) sistemi için de Lyapunov fonksiyonu olduğunu gösterelim;

Bu $w(x)$ fonksiyonunun (4.1) sistemine göre türemesi;

$$\dot{w}_{(4.1)}(x)=\dot{w}_{(2.5)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial w}{\partial x_i}f_i(t,x)$$

biçiminde olup (3.9) dan dolayı;

$$\dot{w}_{(4.1)}(x)\le-\beta w(x)+\langle \mathrm{grad}w(x), f(t,x)\rangle \tag{4.4}$$

dır. (Burada $\mathrm{grad}w(x)=\left(\frac{\partial w(x)}{\partial x_1},\frac{\partial w(x)}{\partial x_2},\dots,\frac{\partial w(x)}{\partial x_n}\right)$ dir.)

Diğer taraftan $\frac{\partial w}{\partial x_i}$ türevleri $x_1, x_{2,}, \dots, x_n$ değişkenlerine göre lineer formda olduğundan

$$\|\mathrm{grad} w(x)\| \leq l\|x\|, l = const > 0$$

dır.

O halde (3.16) eşitliğinden

$$\|\mathrm{grad} w(x)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{w(x)} \tag{4.5}$$

elde edilir.

Lemma 3.2 ye göre, yeteri kadar küçük $b > 0$ sayısı için $w(x) \leq b$ şartını sağlayan x noktaları kümesi n ölçülü Euclid uzayının orijini kapsayan, kapalı, sınırlı bölgesini oluşturur. Bu kapalı bölgeyi Δ_b ile gösterelim. b sayısını yeterince küçük seçersek $\Delta_b \subset D$ olur. Bu b ler için $f(t,x)$ vektör fonksiyonu $IX\Delta_b$ de sürekli olduğundan ve (4.2) şartını sağladığından öyle pozitif monoton artan ve

$$\lim_{r \to 0} \Omega(r) = 0$$

şartını sağlayan $\Omega(r)$ fonksiyonu vardır ki $(t,x) \epsilon\ IX\Delta_b$ olduğunda

$$\|f(t,x)\| \leq \Omega(\|x\|)\|x\| \tag{4.6}$$

sağlanır. Buradan (3.16) ifadesine göre;

$$\|f(t,x)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{w(x)}\,\Omega\left(\sqrt{\frac{w(x)}{\mu}}\right)$$

dır. Bu eşitsizliğe ve (4.5) e göre;

$$|\langle \mathrm{grad} w(x), f(t,x)\rangle| \leq \frac{1}{\mu} w(x)\Omega\left(\sqrt{\frac{w(x)}{\mu}}\right)$$

olur. Bu durumda (4.4) eşitsizliği

$$\dot{w}_{(4.1)}(x) \leq -\beta w(x) + \frac{1}{\mu} w(x)\Omega\left(\sqrt{\frac{w(x)}{\mu}}\right)$$

biçiminde yazılabilir.

Verilmiş $\beta > 0$ sayısına göre $0 < c \leq b$ şartını sağlayan öyle c sayısı seçelim ki ;

$$\frac{1}{\mu}\Omega\left(\sqrt{\frac{c}{\mu}}\right) \leq \frac{\beta}{2}$$

olsun. $w(x) \leq c$ eşitsizliğini sağlayan kapalı sınırlı Δ_c bölgesinde

$$\dot{w}_{(4.1)}(x) \leq -\beta w(x) + \frac{1}{\mu}\Omega\left(\sqrt{\frac{c}{\mu}}\right)\mathrm{w(x)} \leq -\frac{\beta}{2} w(x) \tag{4.7}$$

eşitsizliği sağlanır.

Elde edilen (4.7) eşitsizliği pozitif tanımlı, $w(x)$ kuadratik formunun (4.1) sistemine göre türemesi negatif işaretlidir. Buradan da Teorem 3.4 e göre (4.1) sisteminin $x = 0$ stabilite hali asimptotik dayanıklıdır.

Örnek 4.3:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + (tx_2 - x_1)^2 + t^2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2tx_2 - (x_2 + 1)^2 + 2t + 2 \end{cases} \tag{4.8}$$

sisteminin $x_1 = t^2, x_2 = t$ çözümünün dayanıklı olup olmadığını araştıralım:

(4.8) sisteminde $x_1 = y_1 + t^2$, $x_2 = y_2 + t$ dönüşümlerini uygulayalım.

$$x_1 = y_1 + t^2$$
$$\Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y}_1 + 2t$$
$$\Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{x}_1 - 2t$$

olup burada (4.8) sistemindeki $\dot{x}_1$ ifadesi ve $x_1 = y_1 + t^2$, $x_2 = y_2 + t$ yerine yazılıp düzenlenirse;

$$\dot{y}_1 = -y_1 + 2y_2 + (ty_2 - y_1)^2 \tag{4.9}$$

elde edilir. Benzer şekilde yukarıdaki yol takip edilerek

$$\dot{y}_2 = -y_1 - 2y_2 - {y_2}^2 \tag{4.10}$$

bulunur.

(4.9) ve (4.10) dan

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + 2y_2 + (ty_2 - y_1)^2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 - 2y_2 - {y_2}^2 \end{cases} \tag{4.11}$$

sistemi elde edilir.

Yapılan bu dönüşümden dolayı (4.8) sisteminin $x_1 = t^2, x_2 = t$ çözümünün dayanıklılığı problemi (4.11) sisteminin $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ stabilite halinin dayanıklılığı problemi ile aynıdır. Elde edilen (4.11) sistemi (4.1) biçimindedir.

(4.11) sisteminin $f(t,y)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,y) = (ty_2 - y_1)^2$, $f_2(t,y) = -y_2^2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned} \|f(t,y)\|^2 &= |f_1(t,y)|^2 + |f_2(t,y)|^2 \\ &= |(ty_2 - y_1)^2|^2 + |-y_2^2|^2 \\ &\leq t^4 |y_2 + y_1{}^2|^2 + |y_2^2|^2 \\ &\leq t^4 2^4 |y_1 + y_2|^4 \|y\|^2 \end{aligned}$$

olup $\|f(t,y)\| \leq 4t^2 |y_1 + y_2|^2 \|y\|$ bulunur. O halde

$$\lim_{\|y\| \to 0} \frac{\|f(t,y)\|}{\|y\|} \leq \lim_{\|y\| \to 0} \frac{4t^2 |y_1 + y_2|^2 \|y\|}{\|y\|} = \lim_{\|y\| \to 0} 4t^2 |y_1 + y_2|^2 = 0 \qquad (4.12)$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,y)\|}{\|y\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|y\| \to 0} \frac{\|f(t,y)\|}{\|y\|} \geq 0 \qquad (4.13)$$

dır. Buna göre (4.12) ve (4.13) den (4.2) şartı sağlanır.

Buradan (4.11) sistemine uygun homojen lineer denklem sistemi yani Birinci yaklaşım sistemi;

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + 2y_2 \\ \dot{y}_2 = -y_1 - 2y_2 \end{cases} \qquad (4.14)$$

dir.

(4.14) sisteminin asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Lineer homojen denklem sisteminin katsayılar matrisi A olmak üzere;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 4$$

dır. $f(\lambda)$ fonksiyonunun Gurviç fonksiyonu olup olmadığını inceleyelim;

$$\Delta_1 = a_1 = 3$$
$$\Delta_2 = a_2 \Delta_1 = 4.3 = 12$$

olup $\Delta_1 > 0$ ve $\Delta_2 > 0$ olduğundan Gurviç Teoremi gereğince $f(\lambda)$ Gurviç fonksiyonu olup köklerinin reel kısmı negatiftir. O halde Teorem 2.9 dan (4.14) birinci yaklaşım sistemi asimptotik dayanıklıdır. Buna göre Teorem 4.2 ye göre (4.11) sisteminin $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ stabilite hali dolayısıyla (4.8) sisteminin $x_1 = t^2, x_2 = t$ çözümü asimptotik dayanıklıdır.

BÖLÜM 5

DAYANIKSIZ SİSTEMLER

(1.1) sistemi verilsin. Burada $f(t,x)$ vektör fonksiyonu 1. Bölümde konulan şartları ve $\forall t \in I$ için $f(t,0) = 0$ koşulunu sağlasın. Bu sistemin $x = 0$ stabilite halinin dayanıksızlığı hakkında aşağıdaki teoremi ispatlayalım:

Teorem 5.1 (Çetayev Teoremi): Orijin merkezli $\varepsilon_o > 0$ yarıçaplı kapalı $\overline{H_{\varepsilon_o}} \subset D$ küresinde sürekli diferansiyellenebilen $w(x)$ fonksiyonu ve $U \subset H_{\varepsilon_o}$ bölgesi mevcut olsun ve aşağıdaki şartlar sağlansın:

i. $x = 0$ noktası U bölgesinin sınırında olmak üzere bu bölgede $w(x) > 0$,
ii. $\dot{w}_{(1.1)}(x) = \langle gradw(x), f(t,x) \rangle > 0\,, t \in I, x \in U$ dır ve $\forall \alpha > 0$ sayısına göre $\exists \beta > 0$ sayısı vardır ki, $w(x) \geq \alpha$ iken $\dot{w}_{(1.1)}(x) \geq \beta$ dır.
iii. U bölgesinin H_{ε_o} küresinde yerleşen sınır noktalarında $w(x) = 0$ dır.

O halde (1.1) sisteminin $x = 0$ stabilite hali dayanıksızdır (Ahmedov ve Hesenov, 1977).

İspat: Yeteri kadar küçük $\delta > 0$ sayısı seçelim ve $0 < \|\xi\| < \delta$ olacak şekilde $\xi \epsilon U$ için (1.1) sisteminin $x = \varphi(t,\xi)$ çözümüne bakalım.

Belirli $h > 0$ sayısı için $\varphi(t,\xi) \in U,\ t\epsilon[t_0, t_0 + h]$ dır. Teoremin (ii) şartına göre $[t_0, t_0 + h]$ aralığında $\phi(t) = w\big(\varphi(t,\xi)\big) > 0$ ve $\dot{\phi}(t) = \dot{w}\big(\varphi(t,\xi)\big) > 0$ dır. O halde $\phi(t)$ fonksiyonu bu aralıkta monoton artandır. Buna göre $\varphi(t,\xi) \in U$ şartını sağlayan $\forall t \geq t_0$ noktaları için;

$$\phi(t) = w(\varphi(t,\xi)) \geq w(\varphi(t_0,\xi)) = w(\xi) = \alpha > 0 \tag{5.1}$$

$$\dot{\phi}(t) = \dot{w}(\varphi(t,\xi)) \geq \beta > 0 \tag{5.2}$$

dır. (5.2) eşitsizliği t_0-dan t-ye integrallenirse;

$$w(\varphi(t,\xi)) \geq w(\varphi(t_0,\xi)) + \beta(t-t_0)\,, \qquad t \geq t_0$$

elde edilir. Buradan $\varphi(t,\xi) \in U, t \in I$ olduğundan t arttıkça $\phi(t) = w(\varphi(t,\xi))$ fonksiyonu sınırsız artar. Bu ise $w(x)$ fonksiyonunun $\overline{H_{\varepsilon_o}}$ küresinde sınırlılığına zıttır. O halde $\forall t \geq t_0$ için $\varphi(t,\xi) \in U$ olamaz. Bu durumda $\exists t_1 > t_0$ anı vardır

$\rightarrow t \in [t_0, t_1)$ için $\varphi(t,\xi) \in U$ dur ve $\varphi(t_1,\xi)$ noktası U bölgesinin sınırındadır.

Özel olarak $\varphi(t_1,\xi) \in H_{\varepsilon_o}$ olursa teoremin (iii) şartına göre

$$w(\varphi(t_1,\xi)) = 0 \tag{5.3}$$

olmalıdır. Diğer taraftan (5.1) eşitsizliğinden $w(\varphi(t_1,\xi)) \geq \alpha > 0$ elde edilir.

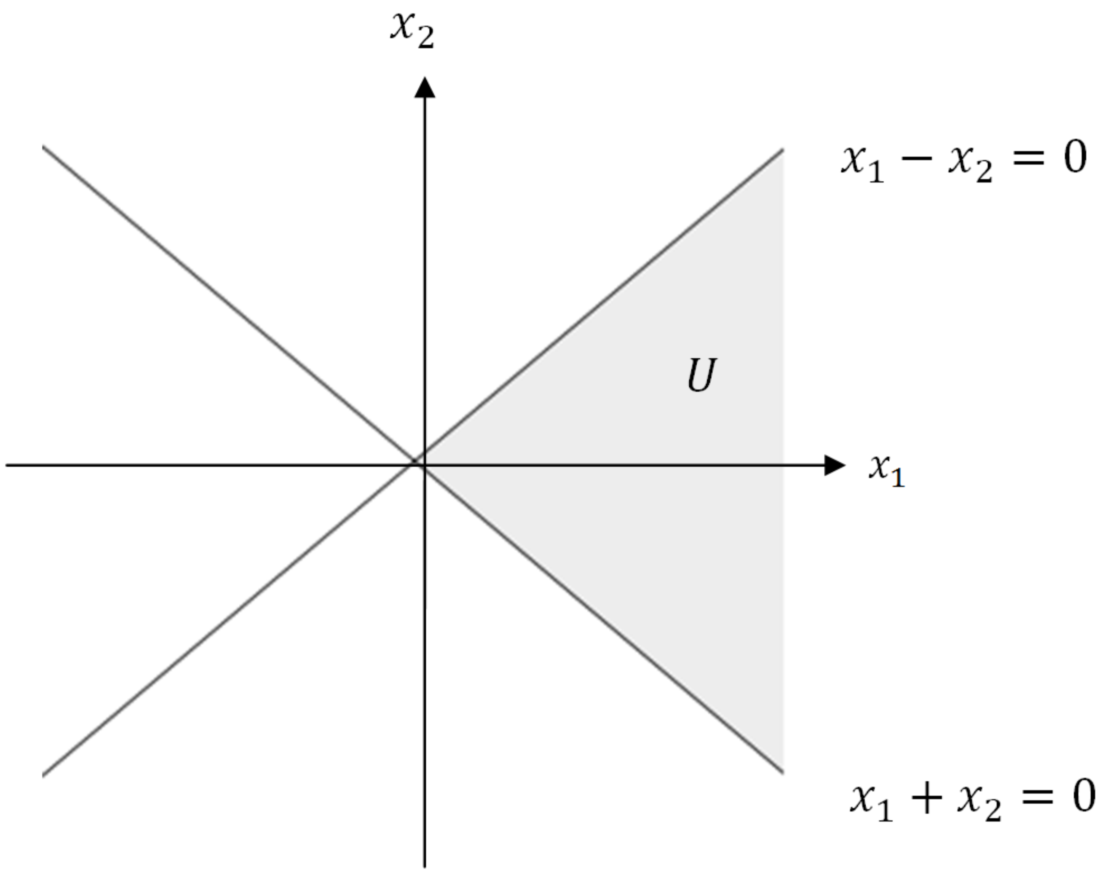
Bu ise (5.3) ile çelişir. Bu çelişki $\varphi(t_1,\xi)$ noktasının H_{ε_o} küresinin içinde yerleşmediğini gösterir. O halde $\|\varphi(t_1,\xi)\| \geq \varepsilon_o$ olmalıdır. O halde dayanıklılık tanımına göre (1.1) sisteminin $x = 0$ stabilite hali dayanıksızdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

<u>Örnek 5.2</u>:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 x_2^2 + x_1^3 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 x_2 + x_2^3 \end{cases} \tag{5.4}$$

sisteminin $x_1 = 0, x_2 = 0$ stabilite halinin dayanıksız olduğunu gösterelim:

(5.4) sistemi için $w(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ fonksiyonuna bakalım. U bölgesini Şekil 5.1 biçiminde seçelim:



Şekil 5.1. $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ doğruları arasında kalan ve $x_1 > 0$ olan noktalar kümesi.

Çetayev Teoremin koşullarının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim;

i. (0,0) noktası U bölgesinin sınır noktasıdır ve$\forall(x_1, x_2) \in U$ için $w(x_1, x_2) > 0$ dır.

ii. $\forall(x_1, x_2) \in U$ için

$$\begin{aligned}
\dot{w}_{(5.4)}(x_1, x_2) &= \frac{dw}{dx_1} f_1(x) + \frac{dw}{dx_2} f_2(x) \\
&= 2x_1(x_1 x_2^2 + x_1^3) - 2x_2(x_1^2 x_2 + x_2^3) \\
&= 2(x_1^4 - x_2^4) = 2(x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2) \\
&= 2\,(x_1^2 + x_2^2) w(x_1, x_2) > 0
\end{aligned}$$

dır. Öte yandan

$$\dot{w}_{(5.4)}(x_1,x_2) = 2\,(x_1^2 + x_2^2)w(x_1,x_2)$$

ifadesinden açıktır ki;

$\forall\alpha > 0$ sayısı için $w(x_1,x_2) \geq \alpha$ olduğunda

$$\dot{w}_{(5.4)}(x_1,x_2) \geq 2\,(x_1^2 + x_2^2)\alpha \geq 2\alpha^2 = \beta > 0$$

olur.

iii. $w(x_1,x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ olduğundan $\forall\varepsilon > 0$ için U bölgesinin H_ε küresine dahil olan (x_1,x_2) sınır noktalarında $w(x_1,x_2) = 0$ dır.

Böylece Çetayev Teoreminin bütün şartları sağlanır. O halde (5.4) sisteminin $x_1 = 0, x_2 = 0$ stabilite hali dayanıksızdır.

Not 5.3: Birinci yaklaşımlar yöntemine göre dayanıksızlığını araştırmak için (4.1) sistemine bakalım. Burada A sabit matris, $f(t,x)$ vektör fonksiyonu ise t-ye göre I da düzgün olarak (4.2) ifadesinin sağlanıp sağlanmadığı kontrol edilir.

Teorem 5.4: A matrisinin karakteristik değerlerinin en az birinin reel kısmı pozitif olsun ve (4.2) şartı sağlansın. Bu durumda (4.1) sisteminin $x = 0$ stabilite hali dayanıksızdır.

İspat: J matrisi A matrisinin kanonik Jordan formu olsun. O zaman öyle P matrisi vardır ki $P^{-1}AP = J$ matrisinin hücrelerini

$$J_{m_1}(\lambda_1), J_{m_2}(\lambda_2), \dots, J_{m_k}(\lambda_k), J_{m_{k+1}}(\lambda_{k+1}), \dots, J_{m_l}(\lambda_l)$$

ile gösterelim.

Kabul edelim ki;

$Re\lambda_r = \alpha_r > 0, r = 1,2, \dots, k, (1 \leq k < l),\ \ Re\lambda_j = \alpha_j \leq 0, j = k+1, \dots, l$ olsun.

(4.1) sisteminde $x = Py$ dönüşümü uygulayalım. Bu durumda her iki taraf t-ye göre türevlenip (4.1) de yerine yazılırsa;

$$\dot{y} = P^{-1}\big(APy + f(t, Py)\big)$$

olur. $P^{-1}AP = J$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\dot{y} = Jy + P^{-1}f(t, Py)$$

sistemi elde edilir.

Keyfi $\gamma > 0$ sayısı için başdiagonal elemanları $1, \gamma, \gamma^2, \dots, \gamma^{n-1}$ olan Q diagonal matrisini alarak son sistemde $y = Qz$ dönüşümünü uygulayalım. O zaman $\dot{y} = Q\dot{z}$ olduğundan $\dot{z} = Q^{-1}\dot{y}$ olup

$$\dot{z} = Q^{-1}\big(Jy + P^{-1}f(t, Py)\big)$$
$$\Rightarrow \dot{z} = Q^{-1}JQz + Q^{-1}\,P^{-1}f(t, PQz)$$

sistemi elde edilir.

$g_1(t,z), g_2(t,z), \dots, g_n(t,z)$ fonksiyonları $g(t,z) = Q^{-1}\,P^{-1}f(t, PQz)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri olmak üzere bu sistem bileşenlerle yazılırsa;

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + \gamma z_2 + g_1(t,z), \\ \dot{z}_2 = \lambda_1 z_2 + \gamma z_3 + g_2(t,z), \\ \quad\vdots \\ \dot{z}_{m_1} = \lambda_1 z_{m_1} + g_{m_1}(t,z), \\ \quad\vdots \\ \dot{z}_{n-m_l+1} = \lambda_l z_{n-m_l+1} + \gamma z_{n-m_l+2} + g_{n-m_l+1}(t,z), \\ \dot{z}_{n-m_l+2} = \lambda_l z_{n-m_l+2} + \gamma z_{n-m_l+3} + g_{n-m_l+2}(t,z), \\ \quad\vdots \\ \dot{z}_n = \lambda_l z_n + g_n(t,z) \end{cases} \tag{5.5}$$

biçimindedir.

<u>Not 5.5:</u> Herhangi hücre, örneğin $J_{m_1}(\lambda_1)$bir elemanlı olduğunda (5.5) sisteminde ona uygun ancak bir $\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 + \gamma z_2 + g_1(t,z)$ denkliği vardır.

Yapılan değişken değiştirmelerinden açıktır ki;

P ve Q keyfi matrisler olduğundan (4.1) sisteminin $x = 0$ stabilite halinin dayanıklılığı problemi, (5.5) sisteminin $z = 0$ stabilite halinin dayanıklılığı problemine eşdeğerdir.

Buradan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$ değerleri genellikle kompleks sayılar olduklarından (5.5) sisteminin çözümleri genellikle kompleks fonksiyonlardır. Bu taktirde $z_j = u_j + iv_j$, $j = 1,2,\dots,n$ kabul edilirse $|z_j|^2 = z_j\overline{z_j} = {u_j}^2 + {v_j}^2$ olur.

Şimdi $p = m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ diyelim.

$$w(z) = \sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{n} |z_j|^2$$

kuadratik formunu alalım ve (5.5) sistemine göre türemesini hesaplayalım:

$$\dot{w}_{(5.5)}(z) = \sum_{j=1}^{p}\left(\dot{z}_j\overline{z_j} + z_j\dot{\overline{z}}_j\right) - \sum_{j=p+1}^{n}\left(\dot{z}_j\overline{z_j} + z_j\dot{\overline{z}}_j\right)$$

$$= 2\sum_{j=1}^{p}\alpha_j\left|z_j\right|^2 - 2\sum_{j=p+1}^{n}\alpha_j\left|z_j\right|^2 + \gamma\sum_{j=1}^{p-1}(z_j\bar{z}_{j+1} + \bar{z}_j z_{j+1})$$

$$-\gamma\sum_{j=p+1}^{n-1}\left(z_j\bar{z}_{j+1} + \bar{z}_j z_{j+1}\right) + \sum_{j=1}^{p}(\bar{z}_j g_j(t,z) + z_j\bar{g}_j(t,z))$$

$$-\sum_{j=p+1}^{n}(\bar{z}_j g_j(t,z) + z_j\bar{g}_j(t,z)) \tag{5.6}$$

($\overline{z_j}$ ifadesini bulmak için (5.5) sisteminin uygun denkliğinden kompleks eşlenik denkliğine geçmek gerekir.)

$\left|z_j\bar{z}_{j+1}\right| \le \frac{1}{2}(\left|z_j\right|^2 + \left|z_{j+1}\right|^2)$ eşitsizliği göz önüne alınırsa;

$$\left|\sum_{j=1}^{p-1}(z_j\bar{z}_{j+1} + \bar{z}_j z_{j+1})\right| \le \sum_{j=1}^{p-1}\left(\left|z_j\right|^2 + \left|z_{j+1}\right|^2\right),$$

$$\left|\sum_{j=p+1}^{n-1}\left(z_j\bar{z}_{j+1} + \bar{z}_j z_{j+1}\right)\right| \le \sum_{j=p+1}^{n-1}\left(\left|z_j\right|^2 + \left|z_{j+1}\right|^2\right)$$

dır.

Diğer taraftan hipotez gereğince (4.2) şartı sağlandığından (4.6) eşitsizliğine göre;

$$\|g(t,z)\| = \|Q^{-1}\,P^{-1}f(t,PQz)\| \le \Omega_1(\|z\|)\|z\|$$

dir.

Burada $\Omega_1(r)$ fonksiyonu $r > 0$ bölgesinde monoton artan ve $\lim_{r\to 0^+}\Omega_1(r) = 0$ şartını sağlayan fonksiyondur. Bu eşitsizliğe göre kolayca gösterilebilir ki;

$$\left|\sum_{j=1}^{p}\left(\bar{z}_j g_j(t,z)+z_j\bar{g}_j(t,z)\right)-\sum_{j=p+1}^{n}\left(\bar{z}_j g_j(t,z)+z_j\bar{g}_j(t,z)\right)\right|\leq 2\sum_{j=1}^{n}|z_j||g_j(t,z)|$$

$$\leq 2n\Omega_1(\|z\|)\|z\|^2$$

olur. Bu eşitsizlik de,

$$\|z\|^2=\sum_{j=1}^{p}|z_j|^2+\sum_{j=p+1}^{n}|z_j|^2$$

olduğundan ve (5.6) dan

$$\dot{w}_{(5.5)}(z)\geq 2\left\{\sum_{j=1}^{p}\left[\alpha_j-2\gamma-n\Omega_1(\|z\|)\right]|z_j|^2-\sum_{j=p+1}^{n}\left[\alpha_j+2\gamma+n\Omega_1(\|z\|)\right]|z_j|^2\right\} \quad (5.7)$$

biçiminde yazılabilir.

Kabul edelim ki $\varepsilon>0$ sayısı $\varepsilon<\frac{1}{6}\min_{1\leq j\leq k}\{\alpha_j\}$ şartını sağlasın ve yukarıda keyfi seçilen γ sayılarını $0<\gamma<\varepsilon$ olacak şekilde seçelim.

Öte yandan $\lim_{r\to 0^+}\Omega_1(r)=0$ olduğundan verilen ε sayısına göre öyle δ> 0 sayısı bulunabilir ki; $\|z\|<\delta$ iken $n\Omega_1(\|z\|)<\varepsilon$ olur.

O halde (5.7) eşitsizliğinden

$$\dot{w}_{(5.5)}(z)\geq 2\left\{\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j-3\varepsilon)|z_j|^2-\sum_{j=p+1}^{n}(\alpha_j+3\varepsilon)|z_j|^2\right\}$$

elde edilir. Buradan ε-nun seçiliş şartına göre;

$\alpha_j - 3\varepsilon > 3\varepsilon, j = 1,2, \dots, p$ ve $\alpha_j \leq 0, j = p+1, \dots, n$ olduğundan

$$\dot{w}_{(5.5)}(z) \geq 6\varepsilon \left\{ \sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{n} |z_j|^2 \right\} = 6\varepsilon w(z)$$

elde edilir. Yani $w(z)$ kuadratik formunun (5.5) sistemine göre türemesi

$$\dot{w}_{(5.5)}(z) \geq 6\varepsilon w(z) \tag{5.8}$$

eşitsizliğini sağlar.

i. Seçilmiş δ> 0 sayısına göre H_δ küresi ve öyle $\sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{n} |z_j|^2 > 0$ şartını sağlayan z-ler kümesinin kesişimini U ile gösterelim. Burada $z = 0$ noktası U bölgesinin sınır noktasıdır. Ayrıca U bölgesinde $w(z) > 0$ dır.

ii. (5.8) eşitsizliğine göre $\dot{w}_{(5.5)}(z) > 0$ dır.

iii. U bölgesinin tanımlanışından dolayı U nun H_δ küresi içinde olan sınır noktalarında $w(z) = 0$ dır.

Böylelikle $w(z)$ kuadratik formu U bölgesi için i, ii ve iii den dolayı Çetayev teoreminin bütün şartlarını sağlar. O halde (5.5) sisteminin $z = 0$ stabilite halinin dayanıklısızdır. Dolayısıyla (4.1) sisteminin $x = 0$ stabilite hali dayanıksızdır.

Teoremi Çetayev Teoremini kullanmadan ispatlayalım:

Seçilmiş δ> 0 sayısına göre $0 < \delta_1 < \delta$ şartını sağlayan δ_1 sayısını seçelim ve $\|\xi\| < \delta_1$, $\sum_{j=1}^{p} |z_j|^2 - \sum_{j=p+1}^{n} |z_j|^2 > 0$ şartını sağlayan ξ ler için $z(t,\xi)$ çözümüne bakalım. Bu durumda $\exists h > 0$ sayısı vardır ki $t \in [t_0, t_0 + h]$ olduğunda $\|z(t,\xi)\| < \delta$ olur. O halde (5.8) eşitsizliğine göre $[t_0, t_0 + h]$ parçasında

$$\dot{w}(z(t,\xi)) \geq 6\varepsilon w(z(t,\xi))$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafı $e^{-6\varepsilon t}$ ile çarpılıp t_0-dan t ye integral alınırsa;

$$w\big(z(t,\xi)\big) \geq w(\xi)e^{6\varepsilon(t-t_0)}$$

elde edilir. Fakat $\|z(t,\xi)\|^2 \geq w\big(z(t,\xi)\big)$olduğundan dolayı $\|z(t,\xi)\| < \delta$ eşitsizliği istenen $t > t_0$ için sağlanmaz. Yani en az bir $t_1 > t_0$ anı vardır ki $t \geq t_1$ olduğunda $\|z(t,\xi)\| \geq \delta$ olur. Bu ise (5.5) sisteminin $z = 0$ stabilite halinin dayanıksız olduğunu gösterir.

<u>Örnek 5.6:</u>

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + 4x_2 + tx_1x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 + x_1^2x_2\sin t \end{cases} \tag{5.9}$$

sisteminin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ stabillite halinin dayanıklılığını araştırınız.

<u>Çözüm</u>: (5.9) sistemine uygun birinci yaklaşımlar sistemi;

$\begin{cases} \dot{x_1} = x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2 \end{cases}$ şeklindedir.

Bu sistemin katsayılar matrisi A olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -4 \\ -2 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9$$

olup $f(\lambda)$ fonksiyonunun kökleri $\lambda_1 = 3$ ve $\lambda_2 = -3$ olup karakteristik değerlerinden birisi pozitiftir.

(5.9) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = tx_1x_2^2$, $f_2(t,x) = x_1^2x_2\sin t$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$\|x\|^2 = |x_2|^2 + |x_1|^2$ olmak üzere $|\mathrm{sint}| \leq 1$ olduğu göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\|f(t,x)\|^2 = |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2 &= |tx_1x_2^2|^2 + |x_1^2x_2\mathrm{sin}t|^2 \\ &= |t|^2|x_1|^2|x_2|^4 + |x_1|^4|x_2|^2|\mathrm{sint}|^2 \\ &\leq |t|^2|x_1|^2|x_2|^4 + |x_1|^4|x_2|^2 \\ &= |x_1|^2|x_2|^2(|t|^2|x_2|^2 + |x_1|^2) \\ &< |t|^2|x_1|^2|x_2|^2(|x_2|^2 + |x_1|^2) \\ &= |t|^2|x_1|^2|x_2|^2\|x\|^2\end{aligned}$$

olup $\|f(t,x)\| \leq |t||x_1||x_2|\|x\|$ bulunur. O halde

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \leq \lim_{\|x\|\to 0} \frac{|t||x_1||x_2|\|x\|}{\|x\|} = 0 \tag{5.10}$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \geq 0 \tag{5.11}$$

dır. Buna göre (5.10) ve (5.11) den (4.2) şartı sağlanır. O halde Teorem 5.4 e göre (5.9) sisteminin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ stabillite hali dayanıksızdır.

<u>Teorem 5.7:</u> A katsayılar matrisinin karakteristik değerlerinin hepsinin reel kısmı pozitif ve $f(t,x)$ vektör fonksiyonu (4.2) şartını sağlasın. O zaman (4.1) sisteminin stabilite hali tamamen dayanıksızdır.

İspat: A katsayılar matrisinin karakteristik değerleri $\alpha_j > 0$ olmak üzere $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j,\ j = 1,2,\dots,n$ ile gösterelim. O halde $-\lambda_j = -\alpha_j - i\beta_j\ ,\ j = 1,2,\dots,n$ değerleri –A matrisinin karakteristik değerleri olduğundan Teorem 4.2 ye göre

$$\dot{x} = -Ax - f(t,x) \tag{5.12}$$

sistemi için öyle pozitif tanımlı $w(x)$ kuadratik formu ve $c > 0$ sayısı vardır ki, $x\epsilon\Delta_c$ olduğunda

$$\dot{w}_{(5.12)}(x) \leq -2\alpha w(x), \qquad \alpha > 0$$

eşitsizliği sağlanır. Bu durumda (5.12) sisteminin $x = 0$ stabilite hali de asimptotik dayanıklı olur.

Öte yandan $\dot{w}_{(4.1)}(x) = -\dot{w}_{(5.12)}(x)$ olduğundan $x\epsilon\Delta_c$ noktası için

$$\dot{w}_{(4.1)}(x) \geq 2\alpha w(x) \tag{5.13}$$

olur.

Şimdi $0 < \|\xi\| < c$ şartını sağlayan ξ için (4.1) sisteminin $x = \varphi(t,\xi)$ çözümüne bakalım. O halde $\|\varphi(t,\xi)\| < c$ şartını sağlayan $t \geq t_0$ için (5.13) eşitsizliğine göre $\phi(t) = w(\varphi(t,\xi))$ fonksiyonunun türemesi

$$\dot{\phi}(t) = \dot{w}(\varphi(t,\xi)) \geq 2\alpha\phi(t)$$

eşitsizliğini sağlar. Buradan $\|\varphi(t,\xi)\| < c$ şartını sağlayan $t \geq t_0$ için

$$\phi(t) = w\big(\varphi(t,\xi)\big) \geq w(\xi)e^{2\alpha(t-t_0)}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikten (3.16) ifadesine göre

$$\|\varphi(t,\xi)\|^2 \geq \frac{1}{\nu} w\big(\varphi(t,\xi)\big) \geq \frac{1}{\nu} w(\xi) e^{2\alpha(t-t_0)}$$

olup bu ifadenin karekökü alınırsa;

$$\|\varphi(t,\xi)\| \geq \sqrt{\frac{1}{\nu} w(\xi) e^{\alpha(t-t_0)}}, t \geq t_0$$

elde edilir.

Bu son eşitsizlikten açıktır ki; $0 < \|\xi\| < c$ şartını sağlayan ξ için $\exists T = T(\xi)$ anı vardır→$t \geq T(\xi)$ iken $\|\varphi(t,\xi)\| \geq c$ dır. Bu ise $x = 0$ stabilite halinin tamamen dayanıksızlığı demektir.

Örnek 5.8 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 + t x_1^2 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 + x_1^2 {x_2}^2 \end{cases} \tag{5.14}$$

sisteminin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ stabillite halinin dayanıklılığını araştırınız.

Çözüm: (5.14) sisteminin uygun birinci yaklaşımlar sistemi;

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

şeklindedir. Bu sistemin katsayılar matrisi A olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 1 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

olup $f(\lambda)$ fonksiyonunun kökleri $\lambda_1 = 1 - i$ ve $\lambda_2 = 1 + i$ olup karakteristik değerlerinin hepsinin reel kısımları pozitiftir.

(5.14) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = tx_1^2x_2$, $f_2(t,x) = x_1^2{x_2}^2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned}
\|f(t,x)\|^2 &= |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2 \\
&= |tx_1^2x_2|^2 + |x_1^2{x_2}^2|^2 \\
&= |t|^2|x_1|^4|x_2|^2 + |x_1|^4|x_2|^4 \\
&= |x_1|^4|x_2|^2(|t|^2 + |x_2|^2) \\
&\leq |x_1|^4|x_2|^2(|t|^2|x_1|^2 + |t|^2|x_2|^2) \\
&= |x_1|^4|x_2|^2|t|^2\|x\|^2
\end{aligned}$$

olup $\|f(t,x)\| \leq |x_1|^2|x_2||t|\|x\|$ bulunur. O halde

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \leq \lim_{\|x\|\to 0} \frac{|x_1|^2|x_2||t|\|x\|}{\|x\|} = 0 \tag{5.15}$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \geq 0 \tag{5.16}$$

dır. Buna göre (5.15) ve (5.16) dan (4.2) şartı sağlanır.

O halde Teorem 5.7 ye göre verilen sistemin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ stabillite hali tamamen dayanıksızdır.

Not 5.9: (2.5) sistemi sadece dayanıklı olduğunda (4.1) sisteminin $x = 0$ stabilite halinin dayanıklılığı birinci yaklaşımlar yöntemi ile araştırılırken yukarıda verilen teoremler işe yaramaz. O zaman (4.1) sisteminin $x = 0$ çözümü dayanıklı veya dayanıksız olabilir.

Bu durumu aşağıdaki örneklerle açıklayalım:

Örnek 5.10:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2{x_2}^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_1^3 \end{cases} \tag{5.17}$$

sistemine uygun birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 \end{cases} \tag{5.18}$$

dir. (5.18) sisteminin dayanıklı olduğu; fakat asimptotik dayanıklı olmadığını gösterelim:

A, (5.18) sisteminin katsayılar matrisi olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$$

olup $f(\lambda)$ fonksiyonunun kökleri $\lambda_1 = -i$ ve $\lambda_2 = i$ olup karakteristik değerlerinin reel kısmı sıfırdır ve bu karakteristik değerlere uygun Jordan hücreleri 1 elemanlı olduğundan Teorem 2.7 den dolayı sistem dayanıklıdır.

Pozitif tanımlı $w(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1^4 + x_2^4$ fonksiyonunun (5.17) sistemine göre türemesi

$$\dot{w}_{(5.17)}(x_1, x_2) = \frac{dw}{dx_1} f_1(x) + \frac{dw}{dx_2} f_2(x)$$
$$= (2x_1 + 4x_1^3)(x_2 + 2{x_2}^3) + (2x_2 + 4x_2^3)(-x_1 + 2x_1^3)$$
$$= 8x_1^3 x_2 + 16x_1^3 x_2^3$$

olup $\dot{w}_{(5.17)}(x_1, x_2) \equiv 0$ olduğundan Teorem 3.3 e göre bu sistemin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ stabillite hali dayanıklıdır.

Örnek 5.11: Açıktır ki (5.18) sistemi

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \tag{5.19}$$

sisteminin de birinci yaklaşımlar sistemidir.

Pozitif tanımlı $w(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ fonksiyonunun (5.19) sistemine göre türemesi

$$\dot{w}_{(5.19)}(x_1, x_2) = \frac{dw}{dx_1} f_1(x) + \frac{dw}{dx_2} f_2(x)$$
$$= 2x_1\big(x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)\big) + 2x_2\big(-x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)\big)$$
$$= 2(x_1^2 + x_2^2)^2$$

Pozitif değerli olduğundan Çetayev teoremine göre (5.19) sisteminin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ stabilite hali dayanıksızdır.

Sonuç 5.12: Verilen sistemini stabilite halinin dayanıklılığını araştırmak için Lyapunov fonksiyonları metodu daha geneldir.

BÖLÜM 6

ALIŞTIRMALAR

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ \dot{x}_2 = 3x_2 - 2{,}4x_3 \\ \dot{x}_3 = 8x_1 - 6x_3 \end{cases} \tag{6.1}$$

sisteminin dayanıklılığını araştırınız.

Çözüm: (6.1) sisteminin katsayılar matrisi A olmak üzere;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & -2{,}4 \\ 8 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

dır.

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -3 & 3 \\ 0 & \lambda - 3 & 2{,}4 \\ -8 & 0 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 3{,}6$$

olur. $f(\lambda)$ fonksiyonunun Gurviç fonksiyonu olup olmadığını inceleyelim;

$$\Delta_1 = a_1 = 2$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3{,}6 & 3 \end{vmatrix} = 2{,}4$$

$$\Delta_3 = a_3 \Delta_2 = 3{,}6 . 2{,}4 = 8{,}64$$

olup $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ ve $\Delta_3 > 0$ olduğundan Gurviç Teoremi gereğince $f(\lambda)$ Gurviç fonksiyonudur. O halde $f(\lambda)$ nın köklerinin reel kısmı negatif olup Teorem 2.9 dan sistem asimptotik dayanıklıdır.

α, β nın hangi değerleri için

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \alpha x_2 + \beta x_3 \\ \dot{x}_2 = \alpha x_1 - x_2 - \alpha x_3 \\ \dot{x}_3 = -\beta x_1 - \alpha x_2 - x_3 \end{cases} \tag{6.2}$$

sistemi asimptotik dayanıklıdır?

Çözüm: (6.2) sisteminin katsayılar matrisi A olmak üzere;

$$A = \begin{bmatrix} -1 & \alpha & \beta \\ \alpha & -1 & -\alpha \\ -\beta & -\alpha & -1 \end{bmatrix}$$

dır.

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -\alpha & -\beta \\ -\alpha & \lambda+1 & \alpha \\ \beta & \alpha & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda^3 + 3\lambda^2 + (3 - 2\alpha^2 + \beta^2)\lambda + (1 - 2\alpha^2 + \beta^2)$$

bulunur. Sistemin asimptotik dayanıklı olması için Teorem 2.9 dan dolayı $f(\lambda)$ fonksiyonunun köklerinin hepsinin reel kısmı negatif olmalıdır. Dolayısıyla Lenar-Şipar şartı sağlanır:

$n = 3$ olup; $a_3 = 1 - 2\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ve $a_2 = 3 - 2\alpha^2 + \beta^2 > 0$

$$\Delta_{3-1} = \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 - 2\alpha^2 + \beta^2 & 3 - 2\alpha^2 + \beta^2 \end{vmatrix}$$

$$= 8 - 4\alpha^2 + 2\beta^2$$

$$= 8 + 2(-2\alpha^2 + \beta^2) > 0$$

olmalıdır.

O halde elde edilen

$$1 - 2\alpha^2 + \beta^2 > 0$$
$$3 - 2\alpha^2 + \beta^2 > 0$$
$$8 + 2(-2\alpha^2 + \beta^2) > 0$$

eşitsizliklerinde $2\alpha^2 - \beta^2 = k$ denirse;

$$1 - k > 0 \ \Rightarrow k < 1$$
$$3 - k > 0 \Rightarrow k < 3$$
$$8 - 2k > 0 \Rightarrow k < 4$$

olup buradan $k < 1$ elde edilir. Buradan $1 - k > 0$ olup sistemin asimptotik dayanıklı olması için $1 - 2\alpha^2 + \beta^2 > 0$ olması gerekir.

<u>Aşağıdaki denklemlerin trivial çözümlerinin dayanıklılığını Gurviç Teoremi veya Mikaylov Şartı yardımıyla gösteriniz.</u>

a. $x^{\text{ıv}} + 7\dddot{x} + 12\ddot{x} + 23\dot{x} + 10x = 0$ (6.3)

b. $x^{\text{ıv}} + 2\dddot{x} + 6\ddot{x} + 3\dot{x} + 5x = 0$ (6.4)

c. $x^{v} + x^{\text{ıv}} + 10\dddot{x} + 8\ddot{x} + 24\dot{x} + 15x = 0$ (6.5)

<u>Çözüm:</u> *a.* (6.3) denkleminin karakteristik denklemi;

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 7\lambda^3 + 12\lambda^2 + 23\lambda + 10$$

dır. Gurviç Teoremi yardımıyla dayanıklılığı inceleyelim:

$$\Delta_1 = a_1 = 7,$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 23 & 12 \end{vmatrix} = 61,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 23 & 12 & 7 \\ 0 & 10 & 23 \end{vmatrix} = 913\,,$$

$$\Delta_4 = a_4\Delta_3 = 10.913 = 9130$$

$\Delta_i > 0,\ i = 1,2,3,4$ olduğundan Gurviç teoremi gereğince $f(\lambda)$ Gurviç fonksiyonu olup köklerinin reel kısmı negatiftir. O halde Teorem 2.9 dan (6.3) denklemi asimptotik dayanıklıdır.

b. (6.4) denkleminin karakteristik denklemi;

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 6\lambda^2 + 3\lambda + 5$$

dır. Gurviç Teoremi yardımıyla dayanıklılığı inceleyelim:

$$\Delta_1 = a_1 = 2,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 9$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 7\,,$$

$$\Delta_4 = a_4\Delta_3 = 5.7 = 35.$$

$\Delta_i > 0,\ i = 1,2,3,4$ olduğundan Gurviç teoremi gereğince $f(\lambda)$ Gurviç fonksiyonu olup köklerinin reel kısmı negatiftir. O halde Teorem 2.9 dan (6.4) denklemi asimptotik dayanıklıdır.

c. (6.5) denkleminin karakteristik denklemi;

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 10\lambda^3 + 8\lambda^2 + 24\lambda + 15$$

dır. Mikaylov Şartı yardımıyla dayanıklılığı inceleyelim:

$n = 5$ olup $a_5 a_4 = 24.15 = 360 > 0$ dır.

$$a_5 - a_3\xi + a_1\xi^2 = 0 \ \Rightarrow \xi^2 - 8\xi + 15 = 0$$
$$a_4 - a_2\eta + a_0\eta^2 = 0 \ \Rightarrow \eta^2 - 10\eta + 24 = 0$$

olup $\xi_1 = 3, \xi_2 = 5, \eta_1 = 4, \eta_2 = 6$ kökler olup $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2$ şartı sağlanır. O halde Mikaylov şartından $f(\lambda)$ Gurviç fonksiyonu olup köklerinin reel kısmı negatiftir. O halde Teorem 2.9 dan (6.5) denklemi asimptotik dayanıklıdır.

a ve b nin hangi değerleri için

$$\dddot{x} + 3\ddot{x} + a\dot{x} + b = 0 \tag{6.6}$$

denkleminin trivial çözümü asimptotik dayanıklıdır?

Çözüm: (6.6) denkleminin karakteristik denklemi;

$$f(\lambda) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + a\lambda + b$$

dir. Gurviç teoremine göre denklemin asimptotik dayanıklı olması için

$$\Delta_1 = a_1 = 3 > 0,$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ b & a \end{vmatrix} = 3a - b > 0 \tag{6.7}$$

$$\Delta_3 = a_3\Delta_2 = b(3a - b) > 0 \tag{6.8}$$

sağlanmalıdır. O halde (6.7) ve (6.8) den $b > 0$ ve $3a > b$ olmalıdır.

$$w(x_1, x_2) = \frac{17}{4}x_1^2 - \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{1}{7}x_2^2$$

fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -6x_1 - x_2 \\ \dot{x_2} = -4x_1 - 3x_2 \end{cases} \tag{6.9}$$

<u>sisteminin asimptotik dayanıklı olduğunu gösteriniz.</u>

<u>Çözüm:</u> Öncelikle (6.9) sisteminin karakteristik değerlerinin işaretlerini inceleyelim:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi olmak üzere;

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 6 & 1 \\ 4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = (\lambda + 6)(\lambda + 3) - 4 = \lambda^2 + 9\lambda + 14$$

olup denklemin kökleri $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = -2$ olup (6.9) sisteminin

$$w(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

şeklinde Lyapunov fonksiyonu vardır. Bu kuadratik formun pozitif tanımlı olması için

$$a > 0\,, ac - b^2 > 0 \tag{6.10}$$

olmalıdır. Diğer taraftan $w(x_1, x_2)$ fonksiyonunun (6.9) sistemine göre türemesi

$$\begin{aligned} \dot{w}(x_1, x_2) &= \frac{dw}{dx_1} f_1(x) + \frac{dw}{dx_2} f_2(x) \\ &= (2ax_1 + 2bx_2)(-6x_1 - x_2) + (2bx_1 + 2cx_2)(-4x_1 - 3x_2) \\ &= -2[(ax_1 + bx_2)(6x_1 + x_2) + (bx_1 + cx_2)(4x_1 + 3x_2)] \\ &= (-12 - 8b)x_1^2 + (-2a - 18b - 8c)x_1x_2 + (-2b - 6c)\, x_2^2 \end{aligned}$$

olup türemenin negatif olması için;

$$-12 - 8b < 0 \text{ ve } (-12 - 8b)(-2b - 6c) - (-a - 9b - 4c)^2 > 0 \tag{6.11}$$

olmalıdır.

Soruda verilen fonksiyonun $a = \frac{17}{4}$, $b = \frac{-1}{3}$, $c = \frac{1}{7}$ katsayıları (6.10) ve (6.11) eşitsizliklerini sağladığından $w(x_1, x_2) = \frac{17}{4}x_1^2 - \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{1}{7}x_2^2$ fonksiyonu Lyapunov fonksiyonudur.

O halde bu fonksiyon yardımıyla verilen sistemin dayanıklılığını inceleyelim:

$$w(x_1, x_2) = \frac{17}{4}x_1^2 - \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{1}{7}x_2^2$$

fonksiyonu $a = \frac{17}{4} > 0$ ve $\Delta = \frac{4}{9} - 4\frac{17}{4}\frac{1}{7} = -1{,}984 < 0$ olduğundan pozitif tanımlıdır. Bu fonksiyonun (6.9) sistemine göre türemesi;

$$\begin{aligned}\dot{w}(x_1, x_2) &= \frac{dw}{dx_1}f_1(x) + \frac{dw}{dx_2}f_2(x)\\ &= \left(\frac{17}{2}x_1 - \frac{2}{3}\mathrm{x}_2\right)(-6x_1 - x_2) + \left(-\frac{2}{3}x_1 + \frac{2}{7}x_2\right)(-4x_1 - 3x_2)\\ &= -48{,}333x_1^2 - 3{,}642x_1x_2 - 0{,}190x_2^2\end{aligned}$$

elde edilir.

$$a' = -48{,}333 < 0 \text{ ve } \Delta = 3{,}642^2 - 4(48{,}333)(0{,}19) = -23{,}468 < 0$$

olup $\dot{w}(x_1, x_2)$ negatif tanımlıdır. O halde Teorem 3.5 den verilen sistem asimptotik dayanıklıdır.

a. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1 - 4x_2\end{cases}$ (6.12)

b. $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1\end{cases}$ (6.13)

sistemlerine uygun Lyapunov Fonksiyonu kurunuz.

Çözüm: *a.* Öncelikle (6.12) sisteminin karakteristik değerlerinin işaretlerini inceleyelim:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi olmak üzere;

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ 1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 4) + 2 = \lambda^2 + 5\lambda + 6$$

olup denklemin kökleri $\lambda_1 = -3,\ \lambda_2 = -2$ olup sistemin Teorem 3.9 dan dolayı

$$w(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

şeklinde Lyapunov fonksiyonu vardır. Bu kuadratik formun pozitif tanımlı olması için

$$a > 0\,,\ ac - b^2 > 0 \tag{6.14}$$

sağlanmalıdır. Diğer taraftan $w(x_1, x_2)$ fonksiyonunun (6.12) sistemine göre türemesi;

$$\begin{aligned} \dot{w}(x_1, x_2) &= \frac{dw}{dx_1} f_1(x) + \frac{dw}{dx_2} f_2(x) \\ &= (2ax_1 + 2bx_2)(-x_1 + 2x_2) + (2bx_1 + 2cx_2)(-x_1 - 4x_2) \\ &= -2(a + b)x_1^2 + 2(2a - 5b - c)x_1x_2 + 4(b - 2c)x_2^2 \end{aligned}$$

olup türemenin negatif olması için;

$$-2(a + b) < 0, \quad -8(a + b)(b - 2c) - (2a - 5b - c)^2 > 0 \tag{6.15}$$

olmalıdır. $w(x_1, x_2)$ fonksiyonunun (6.12) sisteminin Lyapunov fonksiyonu olması için a, b, c katsayıları (6.14) ve (6.15) den

$a > 0\,,\ ac - b^2 > 0,\ -2(a+b) < 0,\ -8(a+b)(b-2c) - (2a-5b-c)^2 > 0$
eşitsizliklerini sağlamalıdır.

Bu durumda $a > 0$ olduğundan $a = 1$ seçelim.

$ac - b^2 > 0$ ve $-2(a+b) < 0$ eşitsizliklerinden sırasıyla $b^2 < c$ ve $b < 1$ elde edilir. Buradan $b = 0$ seçilip bilinenler

$$-8(a+b)(b-2c) - (2a-5b-c)^2 > 0$$

eşitsizliğinde yerine yazılırsa;

$$\begin{gathered} -8(1+0)(0-2c) - (2-c)^2 > 0 \\ \Rightarrow -8(-2c) - (2-c)^2 > 0 \\ \Rightarrow 16c - c^2 + 4c - 4 > 0 \\ \Rightarrow c^2 - 20c + 4 < 0 \end{gathered}$$

eşitsizliği $c = 1$ için sağlanır.

O halde $a = 1,\ b = 0,\ c = 1$ alınırsa;

$$w(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

fonksiyonu (6.12) sistemi için Lyapunov fonksiyonudur.

b. Öncelikle (6.13) sisteminin karakteristik değerlerinin işaretlerini inceleyelim:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

katsayılar matrisi olmak üzere;

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ 0 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2$$

olup denklemin kökleri $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1$ olup sistemin Teorem 3.9 dan dolayı

$$w(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

şeklinde Lyapunov fonksiyonu vardır. Bu kuadratik formun pozitif tanımlı olması için $a > 0\,, ac - b^2 > 0$ olmalıdır. Diğer taraftan $w(x_1, x_2)$ fonksiyonunun (6.13) sistemine göre türemesi;

$$\begin{aligned}\dot{w}(x_1, x_2) &= \frac{dw}{dx_1} f_1(x) + \frac{dw}{dx_2} f_2(x)\\ &= (2ax_1 + 2bx_2)(-x_1 + x_2) + (2bx_1 + 2cx_2)(-x_2)\\ &= -2ax_1^2 + 2(a - 2b)x_1x_2 + 2(b - c)x_2^2\end{aligned}$$

olduğundan türemenin negatif tanımlı olması için;

$$-2a < 0\,, -4a(b - c) - (a - 2b)^2 > 0$$

olmalıdır.

Buna göre $w(x_1, x_2)$ fonksiyonunun (6.13) sisteminin Lyapunov fonksiyonu olması için a, b, c katsayıları

$$a > 0\,,\ ac - b^2 > 0,\ -2a < 0 \text{ ve } -4a(b - c) - (a - 2b)^2 > 0$$

eşitsizliklerini sağlamalıdır.

Özel olarak $a = 0.5$, $b = 0.25$, $c = 0.75$ değerleri yukarıdaki eşitsizlikleri sağlar. Bu durumda

$$w(x_1, x_2) = 0.5x_1^2 + 0.5x_1x_2 + 0.75x_2^2$$

fonksiyonu verilen sistem için Lyapunov fonksiyonudur.

$w(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ fonksiyonu yardımıyla

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 - 6x_1^3 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - 2x_1^2 x_2 \end{cases} \quad (6.16)$$

sisteminin $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ stabilite halinin asimptotik dayanıklılığını araştırınız.

Çözüm: (6.16) sisteminin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \end{cases} \quad (6.17)$$

olup bu sistemin asimptotik dayanıklılığını inceleyelim.

(6.17) sisteminin katsayılar matrisi;

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & -1 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 3) + 1 = \lambda^2 + 4\lambda + 4$$

olup denklemin kökleri $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2$ olup (6.17) sisteminin

$$w(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$$

şeklinde Lyapunov fonksiyonu vardır. Bu kuadratik formun pozitif tanımlı olması için

$$a > 0\,, ac - b^2 > 0 \quad (6.18)$$

olmalıdır. Diğer taraftan $w(x_1, x_2)$ fonksiyonunun (6.17) sistemine göre türemesi;

$$\dot{w}(x_1,x_2) = \frac{dw}{dx_1} f_1(x) + \frac{dw}{dx_2} f_2(x)$$
$$= (2ax_1 + 2bx_2)(-3x_1 + x_2) + (2bx_1 + 2cx_2)(-x_1 - x_2)$$
$$= (2b - 6a)x_1^2 + (2a - 8b - 2c)x_1x_2 + (2b - 2c)x_2^2$$

olduğundan türemenin negatif tanımlı olması için;

$$2b - 6a < 0,\ \ (2b - 2c)(2b - 6a) - (a - 4b - c)^2 > 0 \qquad (6.19)$$

olmalıdır.

$w(x_1,x_2)$ fonksiyonunun verilen sistemin Lyapunov fonksiyonu olması için a, b, c katsayıları (6.18) ve (6.19) dan

$$a > 0\ , ac - b^2 > 0, 2b - 6a < 0,\ \ (2b - 2c)(2b - 6a) - (a - 4b - c)^2 > 0$$

eşitsizliklerini sağlamalıdır.

Özel olarak $a = 1, b = 0, c = 1$ değerleri yukarıdaki eşitsizlikleri sağlar.

Bu durumda

$$w(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$$

fonksiyonu verilen sistem için Lyapunov fonksiyonudur.

$w(x_1,x_2)$ fonksiyonu tanımlanışı gereği pozitif tanımlıdır ve (6.17) sisteme göre türemesi;

$$\dot{w}(x_1,x_2) = \frac{dw}{dx_1} f_1(x) + \frac{dw}{dx_2} f_2(x)$$
$$= 2x_1(-3x_1 + x_2) + 2x_2(-x_1 - x_2)$$
$$= -6x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 - 2x_2^2$$
$$= -(6x_1^2 + 2x_2^2) < 0$$

olup negatif tanımlıdır. O halde Teorem 3.5 den dolayı (6.17) Birinci Yaklaşımlar Sistemi asimptotik dayanıklıdır.

(6.16) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = -6x_1^3$, $f_2(t,x) = -2x_1^2x_2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|^2 &= |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2 \\ &= |-6x_1^3|^2 + |-2x_1^2x_2|^2 \\ &= 6|x_1|^6 + 2|x_1|^4|x_2|^2 \\ &\leq 6|x_1|^6 + 6|x_1|^4|x_2|^2 \\ &= 6|x_1|^4(|x_1|^2 + |x_2|^2) \\ &= 6|x_1|^4\|x\|^2 \end{aligned}$$

olup $\|f(t,x)\| \leq \sqrt{6}|x_1|^2\|x\|$ bulunur. O halde

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \leq \lim_{\|x\|\to 0} \frac{\sqrt{6}|x_1|^2\|x\|}{\|x\|} = 0 \tag{6.20}$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \geq 0 \tag{6.21}$$

dır. Buna göre (6.20) ve (6.21) den (4.2) şartı sağlanır.

O halde Teorem 4.2 ye göre verilen sisteminin $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ stabilite halinin asimptotik dayanıklıdır.

Birinci yaklaşımlar sistemi ile aşağıdaki sistemlerin stabilite çözümlerinin dayanıklılığını araştırınız.

a $\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1x_2 - 7 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_1x_2 - 13\end{cases}$ (6.22)

b $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + (x_1 - 2x_2)^2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 + x_1x_2\end{cases}$ (6.23)

c $\begin{cases}\dot{x}_1 = x_1 - 0{,}5x_2 + (x_1 - 0{,}5x_2)^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 - 2x_1x_2 - 3\end{cases}$ (6.24)

Çözüm: *a.* (6.22) sistemin çözümü olan değerleri bulalım:

$$0 = -x_1 + x_2 + x_1x_2 - 7$$
$$0 = x_1 - x_2 + x_1x_2 - 13$$

denklemleri taraf tarafa toplanırsa;

$$0 = 2x_1x_2 - 20 \Rightarrow \; x_1x_2 = 10$$
$$\Rightarrow \; {x_1}^{(1)} = 5,\; {x_2}^{(1)} = 2,\; {x_1}^{(2)} = -2,\; {x_2}^{(2)} = -5 \text{ dir.}$$

i. (5,2) çözümünün dayanıklılığını araştıralım:

Bunun için $x_1 = x_1 + 5\,,\; x_2 = x_2 + 2$ dönüşümü uygulayalım:

Bu durumda (6.22) sisteminin (5,2) noktasındaki dayanıklılığı problemi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - 5 + x_2 + 2 + (x_1 + 5)(x_2 + 2) - 7 \\ &= -x_1 + x_2 - 3 + x_1x_2 + 5x_2 + 2x_1 + 3 \\ &= x_1 + 6x_2 + x_1x_2 \qquad (6.25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= x_1 + 5 - x_2 - 2 + (x_1 + 5)(x_2 + 2) - 13 \\ &= x_1 - x_2 + 3 + x_1x_2 + 2x_1 + 5x_2 - 3 \\ &= 3x_1 + 4x_2 + x_1x_2 \qquad (6.26)\end{aligned}$$

(6.25) ve (6.26) dan

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 6x_2 + x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 + x_1x_2 \end{cases} \tag{6.27}$$

sisteminin (0,0) daki dayanıklılığı problemine dönüşür.

(6.27) sisteminin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + 6x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 + 4x_2 \end{cases} \tag{6.28}$$

olup asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -6 \\ -3 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda - 14$$

olup denklemin kökleri $\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -2$ dir. Yani denklemin köklerinden birisi pozitiftir.

(6.27) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = x_1x_2$, $f_2(t,x) = x_1x_2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|^2 &= |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2 \\ &= |x_1x_2|^2 + |x_1x_2|^2 \\ &= 2(x_1^2x_2^2) \\ &\le 2(x_1^2x_2^2)\|x\|^2 \end{aligned}$$

olup $\|f(t,x)\| \le \sqrt{2}x_1x_2\|x\|$ bulunur. O halde

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \le \lim_{\|x\|\to 0} \frac{\sqrt{2}x_1x_2\|x\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\|\to 0} \sqrt{2}x_1x_2 = 0 \tag{6.29}$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \geq 0 \tag{6.30}$$

dır. Buna göre (6.29) ve (6.30) dan (4.2) şartı sağlanır. (6.31)

O halde Teorem 5.4 e göre (6.22) sisteminin $(5,2)$ çözümü dayanıksızdır.

ii. $(-2,-5)$ çözümünün dayanıklılığını araştıralım:

Bunun için $x_1 = x_1 - 2$, $x_2 = x_2 - 5$ dönüşümü uygulayalım:

Bu durumda (6.22) sisteminin $(-2,-5)$ noktasındaki dayanıklılığı problemi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 + 2 + x_2 - 5 + (x_1 - 2)(x_2 - 5) - 7\\ &= -x_1 + x_2 - 3 + x_1x_2 - 2x_2 - 5x_1 + 3\\ &= -3x_1 - 4x_2 + x_1x_2\end{aligned} \tag{6.32}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= x_1 - 2 - x_2 + 5 + (x_1 - 2)(x_2 - 5) - 13\\ &= x_1 - x_2 + 3 + x_1x_2 - 2x_1 - 5x_2 - 3\\ &= -x_1 - 6x_2 + x_1x_2\end{aligned} \tag{6.33}$$

(6.32) ve (6.33) dan

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -3x_1 - 4x_2 + x_1x_2\\ \dot{x}_2 = -x_1 - 6x_2 + x_1x_2\end{cases} \tag{6.34}$$

sisteminin (0,0) daki dayanıklılığı problemine dönüşür.

(6.34) sisteminin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 - 4x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 6x_2 \end{cases} \tag{6.35}$$

olup asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 3 & 4 \\ 1 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 9\lambda + 14$$

olup denklemin kökleri $\lambda_1 = -7$, $\lambda_2 = -2$ dir. Karakteristik değerlerin reel kısımları negatif olduğundan (6.35) sistemi asimptotik dayanıklıdır.

Ayrıca (6.31) den sistem (4.2) şartını sağlar. O halde Teorem 4.2 den dolayı (6.22) sisteminin $(-2, -5)$ çözümü asimptotik dayanıklıdır.

b. Öncelikle (6.23) sisteminin çözümü olan değerleri bulalım:

$$0 = x_1 - 2x_2 + (x_1 - 2x_2)^2 \tag{6.36}$$

$$0 = 3x_1 - 4x_2 + x_1 x_2 \tag{6.37}$$

denklemlerinde $a = x_1 - 2x_2$ diyelim. O halde (6.36) denkleminden $a = 0$ veya $a = -1$ dir. Buna göre;

<u>$a = 0$ ise:</u> $x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2$ olup bu ifade (6.37) de yerine yazılırsa;

$$0 = 6x_2 - 4x_2 + 2{x_2}^2$$
$$\Rightarrow 2{x_2}^2 + 2x_2 = 0$$

olup ${x_2}^{(1)} = -1, {x_2}^{(2)} = 0$ bulunur. Dolayısıyla ${x_1}^{(1)} = -2, {x_1}^{(2)} = 0$ olup $(-2, -1)$ ve $(0,0)$ çözümdür.

<u>$a = -1$ ise:</u> $x_1 - 2x_2 = -1 \Rightarrow$ $x_1 = 2x_2 - 1$ olup bu ifade (6.37) de yerine yazılırsa;

$$0 = 6x_2 - 3 - 4x_2 + (2x_2 - 1)x_2$$
$$\Rightarrow 2x_2 - 3 + 2{x_2}^2 - x_2 = 0$$
$$\Rightarrow 0 = 2{x_2}^2 + x_2 - 3$$

olup ${x_2}^{(1)} = -\frac{3}{2}, {x_2}^{(2)} = 1$ bulunur. Dolayısıyla ${x_1}^{(1)} = -4, {x_1}^{(2)} = 1$ olup $(-4, -\frac{3}{2})$ ve $(1{,}1)$ çözümdür.

Şimdi bu çözüm noktalarında dayanıklılığı inceleyelim:

i. $(-2, -1)$ çözümünün dayanıklılığı araştıralım:

Bunun için $x_1 = x_1 - 2$, $x_2 = x_2 - 1$ dönüşümü uygulayalım:

Bu durumda (6.23) sisteminin $(-2, -1)$ noktasındaki dayanıklılığı problemi

$$\dot{x}_1 = x_1 - 2 - 2x_2 + 2 + (x_1 - 2 - 2x_2 + 2)^2$$
$$\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + (x_1 - 2x_2)^2 \qquad (6.38)$$

$$\dot{x}_2 = 3x_1 - 6 - 4x_2 + 4 + (x_1 - 2)(x_2 - 1)$$
$\dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 + x_1x_2$(6.39)

(6.38) ve (6.39) dan

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + {x_1}^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 + x_1x_2 \end{cases} \qquad (6.40)$$

sisteminin (0,0) daki dayanıklılığı problemine dönüşür.

(6.40) sisteminin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 - 6x_2 \end{cases} \qquad (6.41)$$

olup asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda + 6 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda - 4$$

olup Gurviç fonksiyonu olup olmadığını inceleyelim:

$$\Delta_1 = a_1 = 5\,,$$
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = -20$$

$\Delta_2 < 0$, olduğundan Gurviç teoremi gereğince $f(\lambda)$ Gurviç fonksiyonu değildir. O halde denklemin en az bir kökünün reel kısmı pozitiftir.

(6.40) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$, $f_2(t,x) = x_1x_2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|^2 &= |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2 \\ &= |x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2|^2 + |x_1x_2|^2 \\ &\leq\ 16(x_1 + x_2)^4\|x\|^2 \end{aligned}$$

olup $\|f(t,x)\| \leq 4(x_1 + x_2)^2\|x\|$ bulunur. O halde

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \leq \lim_{\|x\|\to 0} \frac{4(x_1 + x_2)^2\|x\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\|\to 0} 4(x_1 + x_2)^2 = 0 \qquad (6.42)$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \geq 0 \tag{6.43}$$

dır. Buna göre (6.42) ve (6.43) den (4.2) şartı sağlanır. (6.44)

O halde Teorem 5.7 ye göre (6.23) sisteminin $(-2,-1)$ çözümü dayanıksızdır.

ii. $(0,0)$ çözümünün dayanıklılığı araştıralım:

(6.23) sisteminin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 4x_2 \end{cases} \tag{6.45}$$

olup asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -3 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 2$$

olup denklemin kökleri $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$ dir. O halde Teorem 2.9 dan sistem asimptotik dayanıklıdır.

(6.23) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = (x_1 - 2x_2)^2$, $f_2(t,x) = x_1x_2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|^2 &= |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2 \\ &= |(x_1 - 2x_2)^2|^2 + |x_1x_2|^2 \\ &= x_1^4 - 8x_1^3x_2 + 25x_1^2x_2^2 - 32x_1x_2^3 + 16x_2^4 \\ &\leq (x_1^4 + 8x_1^3x_2 + 24x_1^2x_2^2 + 32x_1x_2^3 + 16x_2^4)\|x\|^2 \\ &= |(x_1 + 2x_2)^2|^2\|x\|^2 \end{aligned}$$

olup $\|f(t,x)\| \leq |(x_1+2x_2)^2|\|x\|$ bulunur. O halde

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \leq \lim_{\|x\|\to 0}\frac{(x_1+2x_2)^2\|x\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\|\to 0}(x_1+2x_2)^2 = 0 \qquad (6.46)$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \geq 0 \qquad (6.47)$$

dır. Buna göre (6.46) ve (6.47) dan (4.2) şartı sağlanır.

O halde Teorem 4.2 den dolayı (6.23) sisteminin (0,0) çözümü asimptotik dayanıklıdır.

iii. (1,1) çözümünün dayanıklılığı araştıralım:

Bunun için $x_1 = x_1 + 1$, $x_2 = x_2 + 1$ dönüşümü uygulayalım:

Bu durumda (6.23) sisteminin $(1,1)$ noktasındaki dayanıklılığı problemi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 1 - 2x_2 - 2 + (x_1 - 2x_2 - 1)^2 \\ &= -x_1 + 4x_2 + x_1^2 - 4x_1x_2\end{aligned} \qquad (6.48)$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= 3x_1 + 3 - 4x_2 - 4 + x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1 \\ &= 4x_1 - 3x_2 + x_1x_2\end{aligned} \qquad (6.49)$$

(6.48) ve (6.49) dan

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + 4x_2 + x_1^2 - 4x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 3x_2 + x_1x_2\end{cases} \qquad (6.50)$$

sisteminin (0,0) daki dayanıklılığı problemine dönüşür.

(6.50) sistemin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 4x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 3x_2 \end{cases} \qquad (6.51)$$

olup asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4\lambda - 13$$

olup fonksiyon Gurviç fonksiyonu değildir. Çünkü derecesi 2 ve daha az olan denklemlerin Gurviç fonksiyonu olması için gerek ve yeterli koşul katsayılarının pozitif olmasıydı. O halde $a_2 = -13 < 0$ olup Gurviç fonksiyonu değildir. O halde denklemin en az bir kökünün reel kısmı pozitiftir.

(6.50) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = x_1^2 - 4x_1x_2$, $f_2(t,x) = x_1x_2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|^2 &= |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2 \\ &= |x_1^2 - 4x_1x_2|^2 + |x_1x_2|^2 \\ &\leq 4(|x_1| + |x_2|)^2\|x\|^2 \end{aligned}$$

olup $\|f(t,x)\| \leq 2(|x_1| + |x_2|)\|x\|$ bulunur.
O halde

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \leq \lim_{\|x\|\to 0} \frac{2(|x_1| + |x_2|)\|x\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\|\to 0} 2(|x_1| + |x_2|) = 0 \qquad (6.52)$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \geq 0 \tag{6.53}$$

dır. Buna göre (6.52) ve (6.53) dan (4.2) şartı sağlanır.

O halde Teorem 5.7 ye göre (6.23) sisteminin (1,1) çözümü dayanıksızdır.

$iv. (-4, -\frac{3}{2})$ çözümünün dayanıklılığını inceleyelim:

Bunun için $x_1 = x_1 - 4\,,\; x_2 = x_2 - \frac{3}{2}$ dönüşümü uygulayalım:
Bu durumda (6.23) sisteminin $(-4, -\frac{3}{2})$ noktasındaki dayanıklılığı problemi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 - 4 - 2x_2 + 3 + (x_1 - 4 + 2x_2 + 3)^2 \\ &= x_1 - 2x_2 - 1 + (x_1 + 2x_2 - 1)^2 \\ &= -x_1 + 2x_2 + x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 \end{aligned} \tag{6.54}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= 3x_1 - 12 - 4x_2 + 6 + (x_1 - 4)(x_2 - \frac{3}{2}) \\ &= \frac{3}{2}x_1 - 8x_2 + x_1x_2 \end{aligned} \tag{6.55}$$

(6.54) ve (6.55) den

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 + x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 \\ \dot{x}_2 = \frac{3}{2}x_1 - 8x_2 + x_1x_2 \end{cases} \tag{6.56}$$

sisteminin (0,0) daki dayanıklılığı problemine dönüşür.

(6.56) sisteminin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{3}{2}x_1 - 8x_2 \end{cases} \tag{6.57}$$

olup asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \frac{3}{2} & -8 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -2 \\ -\frac{3}{2} & \lambda + 8 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 5$$

olup fonksiyon Gurviç fonksiyonudur. Çünkü derecesi 2 ve daha az olan denklemlerin Gurviç fonksiyonu olması için gerek ve yeterli koşul katsayılarının pozitif olmasıdır. O halde fonksiyon Gurviç fonksiyonu olduğundan köklerinin reel kısmı negatif olup Teorem 2.9 gereğince (6.57) birinci yaklaşım sistemi asimptotik dayanıklıdır.

(6.56) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$, $f_2(t,x) = x_1x_2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|^2 &= |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2 \\ &= |x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2|^2 + |x_1x_2|^2 \\ &= |(x_1 - 2x_2)^2|^2 + |x_1x_2|^2 \\ &\leq |(x_1 + 2x_2)^2|^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

olup $\|f(t,x)\| \leq (x_1 + 2x_2)^2 \|x\|$ bulunur. O halde

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \leq \lim_{\|x\|\to 0} \frac{(x_1 + 2x_2)^2 \|x\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\|\to 0} (x_1 + 2x_2)^2 = 0 \qquad (6.58)$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \geq 0 \qquad (6.59)$$

dır. Buna göre (6.58) ve (6.59) dan (4.2) şartı sağlanır.

Bu durumda Teorem 4.2 den dolayı (6.23) sisteminin $(-4,-\frac{3}{2})$ çözümü asimptotik dayanıklıdır.

c. Öncelikle (6.24) sisteminin çözümü olan değerleri bulalım:

$$0 = x_1 - 0{,}5x_2 + (x_1 - 0{,}5x_2)^2 \tag{6.60}$$

$$0 = 2x_1 + 3x_2 - 2x_1x_2 - 3 \tag{6.61}$$

Denklemlerinde $a = x_1 - 0{,}5x_2$ diyelim. O halde (6.60) denkleminden $a = 0$ veya $a = -1$ dir. Buna göre;

<u>$a = 0$ ise:</u>

$x_1 - 0{,}5x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0{,}5x_2$ olup bu ifade (6.61) de yerine yazılırsa;

$$0 = x_2 + 3x_2 - {x_2}^2 - 3$$
$$\Rightarrow {x_2}^2 - 4x_2 + 3 = 0$$

olup ${x_2}^{(1)} = 3, {x_2}^{(2)} = 1$ bulunur. Dolayısıyla ${x_1}^{(1)} = -2, {x_1}^{(2)} = 0$ olup $(\frac{1}{2},1)$ ve $(\frac{3}{2},3)$ çözümdür.

<u>$a = -1$ ise:</u>

$x_1 - 0{,}5x_2 = -1 \Rightarrow x_1 = 0{,}5x_2 - 1$ olup bu ifade (6.61) de yerine yazılırsa;

$$0 = 2\left(\frac{1}{2}x_2 - 1\right) + 3x_2 - 2\left(\frac{1}{2}x_2 - 1\right)x_2 - 3$$
$$\Rightarrow 0 = {x_2}^2 - 6x_2 + 5$$

olup ${x_2}^{(1)} = 5, {x_2}^{(2)} = 1$ bulunur. Dolayısıyla ${x_1}^{(1)} = \frac{3}{2}, {x_1}^{(2)} = -\frac{1}{2}$ olup $(\frac{3}{2},5)$ ve $(-\frac{1}{2}\,,1)$ çözümdür.

Şimdi bu çözüm noktalarında dayanıklılığı inceleyelim:

$i.\,(\frac{3}{2},5)$ çözümünün dayanıklılığını araştıralım:

Bunun için $x_1 = x_1 + \frac{3}{2}$, $x_2 = x_2 + 5$ dönüşümü uygulayalım:

Bu durumda (6.24) sisteminin $(\frac{3}{2},5)$ noktasındaki dayanıklılığı problemi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2} + (x_1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{5}{2})^2 \\ &= x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 1 + (x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 1)^2 \\ &= -x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_1^2 + \tfrac{1}{4}x_2^2 - x_1x_2 \end{aligned} \tag{6.62}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= 2x_1 + 3 + 3x_2 + 15 - 2\left(x_1 + \frac{3}{2}\right)(x_2 + 5) - 3 \\ &= -8x_1 - 2x_1x_2 \end{aligned} \tag{6.63}$$

(6.62) ve (6.63) den

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 - x_1x_2 \\ \dot{x}_2 = -8x_1 - 2x_1x_2\end{cases} \tag{6.64}$$

sisteminin (0,0) daki dayanıklılığı problemine dönüşür.

(6.64) sisteminin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \dot{x}_2 = -8x_1\end{cases} \tag{6.65}$$

olup asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -\dfrac{1}{2} \\ 8 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 4$$

olup fonksiyon Gurviç fonksiyonudur. Çünkü derecesi 2 ve daha az olan denklemlerin Gurviç fonksiyonu olması için gerek ve yeterli koşul katsayılarının pozitif olmasıdır. O halde fonksiyon Gurviç fonksiyonu olduğundan köklerinin reel kısmı negatif olup Teorem 2.9 gereğince (6.65) birinci yaklaşımlar sistemi asimptotik dayanıklıdır.

(6.64) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 - x_1x_2$, $f_2(t,x) = -2x_1x_2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|^2 &= |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2 \\ &= \left|x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 - x_1x_2\right|^2 + |-2x_1x_2|^2 \\ &= \left|(x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2\right|^2 + |-2x_1x_2|^2 \\ &\le 4\left|(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2\right|^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

olup $\|f(t,x)\| \le 4(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2\|x\|$ bulunur. O halde

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \le \lim_{\|x\|\to 0} \frac{4(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2\|x\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\|\to 0} 4(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 = 0 \qquad (6.66)$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \geq 0 \tag{6.67}$$

dır. Buna göre (6.66) ve (6.67) den (4.2) şartı sağlanır. (6.68)

O halde Teorem 4.2 ye göre (6.24) sisteminin $(\frac{3}{2}, 5)$ çözümü dayanıklıdır.

ii. $(\frac{1}{2}, 1)$ çözümünün dayanıklılığını araştıralım:

Bunun için $x_1 = x_1 + \frac{1}{2}$, $x_2 = x_2 + 1$dönüşümü uygulayalım:

Bu durumda (6.24) sisteminin $(\frac{1}{2}, 1)$ noktasındaki dayanıklılığı problemi

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2} + (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 \\ &= x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \end{aligned} \tag{6.69}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= 2x_1 + 1 + 3x_2 + 3 - 2\left(x_1 + \frac{1}{2}\right)(x_2 + 1) - 3 \\ &= 2x_2 - 2x_1^2 \end{aligned} \tag{6.70}$$

(6.69) ve (6.70) den

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 + x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 - 2x_1^2 \end{cases} \tag{6.71}$$

sisteminin (0,0) daki dayanıklılığı problemine dönüşür.

(6.71) sisteminin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_2 \end{cases} \tag{6.72}$$

olup asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

olup fonksiyonun kökleri $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$ olup reel kısımları pozitiftir.

(6.71) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2,\quad f_2(t,x) = -2x_1^2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned} \|f(t,x)\|^2 &= |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2 \\ &= |x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2|^2 + |-2x_1^2|^2 \\ &\leq |(2x_1 + x_2)^2|^2 \\ &\leq |(2x_1 + x_2)^2|^2 \|x\|^2 \end{aligned}$$

olup $\|f(t,x)\| \leq (2x_1 + x_2)^2 \|x\|$ bulunur.
O halde

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \leq \lim_{\|x\| \to 0} \frac{(2x_1 + x_2)^2 \|x\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\| \to 0} (2x_1 + x_2)^2 = 0 \qquad (6.73)$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\| \to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \geq 0 \qquad (6.74)$$

dır. Buna göre (6.73) ve (6.74) den (4.2) şartı sağlanır.

O halde Teorem 5.7 e göre (6.24) sisteminin $(\frac{1}{2},1)$ çözümü Tamamen dayanıksızdır.

iii. $(\frac{3}{2},3)$ çözümünün dayanıklılığını araştıralım:

Bunun için $x_1 = x_1 + \frac{3}{2}$, $x_2 = x_2 + 3$ dönüşümü uygulayalım:

Bu durumda (6.24) sisteminin $(\frac{3}{2},3)$ noktasındaki dayanıklılığı problemi

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2} + (x_1 - \frac{1}{2}x_2)^2 \\ &= x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2\end{aligned} \tag{6.75}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 &= 2x_1 + 3 + 3x_2 + 9 - 2\left(x_1 + \frac{3}{2}\right)(x_2 + 3) - 3 \\ &= -4x_1 - 2x_1x_2\end{aligned} \tag{6.76}$$

(6.75) ve (6.76) dan

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 + x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 - 2x_1x_2 \end{cases} \tag{6.77}$$

sisteminin (0,0) daki dayanıklılığı problemine dönüşür.

(6.77) sisteminin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 \\ \dot{x}_2 = -4x_1 \end{cases} \tag{6.78}$$

olup asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2$$

olup fonksiyonun kökleri $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2$ olup bir kökün reel kısmı pozitiftir.

(6.77) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2,\ \ f_2(t,x) = -2x_1x_2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned}\|f(t,x)\|^2 &= |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2 \\ &= |x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2|^2 + |-2x_1x_2|^2 \\ &\leq |(2x_1 + x_2)^2|^2 \\ &\leq |(2x_1 + x_2)^2|^2\|x\|^2\end{aligned}$$

olup $\|f(t,x)\| \leq (2x_1 + x_2)^2\|x\|$ bulunur. O halde

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \leq \lim_{\|x\|\to 0} \frac{(2x_1 + x_2)^2\|x\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\|\to 0}(2x_1 + x_2)^2 = 0 \qquad (6.79)$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\|\to 0} \frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \geq 0 \qquad (6.80)$$

dır. Buna göre (6.79) ve (6.80) den (4.2) şartı sağlanır.

O halde Teorem 5.4 e göre (6.24) sisteminin $(\frac{3}{2}, 3)$ çözümü dayanıksızdır.

$iv.$ $(-\frac{1}{2}, 1)$ çözümünün dayanıklılığını araştıralım:

Bunun için $x_1 = x_1 - \frac{1}{2}\ ,\ x_2 = x_2 + 1$ dönüşümü uygulayalım:

Bu durumda (6.24) sisteminin $(-\frac{1}{2}, 1)$ noktasındaki dayanıklılığı problemi

$$\dot{x}_1 = x_1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2} + (x_1 - \frac{1}{2}x_2 - 1)^2$$
$$= -x_1 + \tfrac{1}{2}x_2 + x_1^2 - x_1x_2 + \tfrac{1}{4}x_2^2 \qquad (6.81)$$

$$\dot{x}_2 = 2x_1 - 1 + 3x_2 + 3 - 2\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)(x_2 + 1) - 3$$
$$= 4x_2 - 2x_1x_2 \qquad (6.82)$$

(6.81) ve (6.82) den

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2 \\ \dot{x}_2 = 4x_2 - 2x_1x_2 \end{cases} \qquad (6.83)$$

sisteminin (0,0) daki dayanıklılığı problemine dönüşür.

(6.83) sisteminin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \dot{x}_2 = 4x_2 \end{cases} \qquad (6.84)$$

olup asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4$$

olup fonksiyonun kökleri $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$ olup bütün köklerin reel kısmı pozitiftir.

(6.83) sisteminin $f(t,x)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,x) = x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2$, $f_2(t,x) = -2x_1x_2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\|f(t,x)\|^2 = |f_1(t,x)|^2 + |f_2(t,x)|^2$$
$$= \left|x_1^2 - x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2\right|^2 + |-2x_1x_2|^2$$
$$\le 4|(x_1+x_2)^2|^2$$
$$\le 4|(x_1+x_2)^2|^2\|x\|^2$$

olup $\|f(t,x)\| \le 2(x_1+x_2)^2\|x\|$ bulunur. O halde

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \le \lim_{\|x\|\to 0}\frac{2(x_1+x_2)^2\|x\|}{\|x\|} = \lim_{\|x\|\to 0} 2(x_1+x_2)^2 = 0 \qquad (6.85)$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|x\|\to 0}\frac{\|f(t,x)\|}{\|x\|} \ge 0 \qquad (6.86)$$

dır. Buna göre (6.85) ve (6.86) dan (4.2) şartı sağlanır.

O halde Teorem 5.7 ye göre (6.24) sisteminin $(-\frac{1}{2},1)$ çözümü Tamamen dayanıksızdır.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - 3x_2 + (x_2+2t)\sin(x_1-t) + (x_1-t)^2\cos(x_2+2t) - 8t + 1 & (6.87) \\ \dot{x}_2 = 4x_1 - 3x_2(x_2+2t)^2 - 10t - 2 & (6.88) \end{cases}$$

<u>sisteminin $x_1 = t$, $x_2 = -2t$ çözümünün asimptotik dayanıklı olduğunu birinci yaklaşımlar metodu ile gösteriniz.</u>

Çözüm: Verilen sistemde $x_1 = y_1 + t,\ x_2 = y_2 - 2t$ dönüşümlerini uygulayalım. Bu durumda soruda sorulan dayanıklılık problemi

$x_1 = y_1 + t \Rightarrow\ \dot{x_1} = \dot{y_1} + 1 \Rightarrow\ \dot{y_1} = \dot{x_1} - 1$ olup (6.87) den

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= 2x_1 - 3x_2 + (x_2 + 2t)\sin(x_1 - t) + (x_1 - t)^2\cos(x_2 + 2t) - 8t + 1 - 1 \\ &= 2y_1 - 3y_2 + y_2\sin(y_1) + (y_1)^2\cos(y_2) \end{aligned} \tag{6.89}$$

$x_2 = y_2 - 2t \Rightarrow\ \dot{x_2} = \dot{y_2} - 2 \Rightarrow\ \dot{y_2} = \dot{x_2} + 2$ olup (6.88) den

$$\dot{y_2} = 4y_1 - 3y_2 + y_2^2 \tag{6.90}$$

dır. (6.89) ve (6.90) dan

$$\begin{cases} \dot{y_1} = 2y_1 - 3y_2 + y_2\sin(y_1) + (y_1)^2\cos(y_2) \\ \dot{y_2} = 4y_1 - 3y_2 + y_2^2 \end{cases} \tag{6.91}$$

sisteminin (0,0) daki dayanıklılığı problemine dönüşür.

(6.91) sisteminin birinci yaklaşımlar sistemi

$$\begin{cases} \dot{y_1} = 2y_1 - 3y_2 \\ \dot{y_2} = 4y_1 - 3y_2 \end{cases} \tag{6.92}$$

olup asimptotik dayanıklılığını inceleyelim:

Katsayılar matrisi $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ olmak üzere

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 3 \\ -4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda + 6$$

$$\Delta_1 = a_1 = 1,$$

$$\Delta_2 = a_2\Delta_1 = 6,$$

$\Delta_i > 0,\ i = 1{,}2$ olduğundan Gurviç teoremi gereğince $f(\lambda)$ Gurviç fonksiyonu olup köklerinin reel kısmı negatiftir. O halde Teorem 2.9 dan (6.92) sistemi asimptotik dayanıklıdır.

(6.91) sisteminin $f(t,y)$ vektör fonksiyonunun bileşenleri $f_1(t,y) = y_2 \sin(y_1) + (y_1)^2 \cos(y_2)$, $f_2(t,y) = y_2^2$ dir. Buna göre (4.2) şartının sağlanıp sağlanmadığını inceleyelim:

$$\begin{aligned}\|f(t,y)\|^2 &= |f_1(t,y)|^2 + |f_2(t,y)|^2\\ &= |y_2 \sin(y_1) + (y_1)^2 \cos(y_2)|^2 + |y_2^2|^2\\ &\leq |y_2 + {y_1}^2|^2 + |y_2^2|^2\\ &\leq 4|y_2 + {y_1}^2|^2 \|y\|^2\end{aligned}$$

olup $\|f(t,y)\| \leq 2|y_2 + {y_1}^2|\|y\|$ bulunur.

O halde

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{\|f(t,y)\|}{\|y\|} \leq \lim_{\|y\|\to 0} \frac{2|y_2 + {y_1}^2|\|y\|}{\|y\|} = \lim_{\|y\|\to 0} 2|y_2 + {y_1}^2| = 0 \qquad (6.93)$$

dır. Normun özelliğinden dolayı $\frac{\|f(t,y)\|}{\|y\|}$ pozitif fonksiyon olup pozitif fonksiyonun limiti

$$\lim_{\|y\|\to 0} \frac{\|f(t,y)\|}{\|y\|} \geq 0 \qquad (6.94)$$

dır. Buna göre (6.93) ve (6.94) den (4.2) şartı sağlanır.

O halde Teorem 4.2 ye göre (6.91) sisteminin $(0{,}0)$, dolayısıyla verilen sistemin $x_1 = t,\ x_2 = -2t$ çözümü asimptotik dayanıklıdır.

KAYNAKLAR

Ahmedov, G. ve Hesenov, K., “Diferansiyel Denklemler Teorisi”, ***Maarif Basımı,*** Bakü (1977).

Anderson, L. R. and Leighton, W., “Liapunov functions for autonomous systems of second order”, ***Journal of Mathematical Analysis and Applications,*** 23: 645-664 (1968).

Bellman, R. and Milton Wing, G., “Hydrodinamical stability and Poincaré-Lyapunov theory”, ***Proceedings of the National Academy of Sciences,*** 42 (11): 867–870 (1956).

Faubourg, L. and Pomet J., “Control Lyapunov functions for homogeneous “Jurdjevic-Quinn” systems”, ***ESAIM Control Optimisation and Calculus of Variations,*** 5: 293-311 (2000).

Kalman, R. E., “Lyapunov functions for the problem of Lur’e in automatic control”, ***Proceedings of the National Academy of Sciences,*** 49 (2): 201-205 (1963).

Kalman, R. E., “Lyapunov Functions for the Problem of Lur’e in Automatic Control”, ***Research Instıtute for Advanced Study (RIAS),*** Baltimore, US (1962).

Lyapunov, A. M., “General Problem of the Stability Of Motion”, ***CRC Press,*** Florida, US (1992).

Petrovski, İ. G., “Lectures on Partial Differential Equations”, ***Interscience Publishers,*** New York, US (1957).

Shaikhet, L., “Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations”, ***Springer International Publishing,*** Switzerland (2013).

Shaikhet, L., “Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Difference Equations”, ***Springer International Publishing,*** Switzerland (2011).

ÖZGEÇMİŞ

İnci Merve ALTAN 1990'da Karabük'de doğdu; ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı; Karabük Mustafa Yazıcı Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi'nden mezun olduktan sonra 2008 yılında OMÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı; 2012'de bölüm 4.sü olarak mezun oldu; halen 2012 yılında girdiği KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Kartaltepe Mahallesi R.Sami Yazıcı Sokak Altan Apt.
No:8 Kat:4 78100 KARABÜK

Tel : 0541 722 69 46

E-posta : imermermer@hotmail.com