DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

2014
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

Kübra HEREDAĞ

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Kübra HEREDAĞ

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

KARABÜK
Haziran 2014

Kübra HEREDAĞ tarafından hazırlanan "DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan: Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr.Hakan KUTUCU (KBÜ)	....

.../.../2014

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Mustafa BOZ ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Kübra HEREDAĞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU KULLANILARAK LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

Kübra HEREDAĞ

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ

Haziran 2014, 68 sayfa

Bu tezde, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak lineer ve lineer olmayan, sabit ve değişken katsayılı kompleks denklemlerden oluşan diferansiyel denklem sistemleri çözüldü. Bunu yaparken denklemler reel ve imajiner kısımlarına ayrılarak kısmi türevli denklem sistemi elde edildi. Bu sistemin çözümünden istenen fonksiyonun reel ve imajiner kısımları elde edilmiştir.

Anahtar Sözcükler : Diferansiyel dönüşüm metodu, diferansiyel denklem sistemleri.

Bilim Kodu : 204.1.138

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

SOLUTION OF LINEER AND NONLINEER DIFFERENTIAL EQUATION SYSTEM BY USING DIFFERENTAL TRANSFORM METHOD

Kübra HEREDAĞ

Karabük University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assist. Prof. Dr. Murat DÜZ

June 2014, 68 pages

In this thesis, using two dimensional differential transform method of linear and non-linear, complex equations systems with constant and variable coefficients are solved. To solve these equations, it is obtained partial equation system by seperating real and imaginary parts of these equations. It is obtained real and imaginary parts of the desired function which is the solution of this system.

**Key Word : ** Differential transform method, equations systems.
Science Code : 204.1.138

TEŞEKKÜRLER

Bu tez çalışmasının başından sonuna kadar her aşamasında yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarımı titizlikle inceleyerek yapıcı eleştiri ve katkılar sunan, çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren Sayın Hocam Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca KBÜ öğretim üyelerine ve tüm desteğinden dolayı eşim Mehmet HEREDAĞ'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$y(x)$: başlangıç fonksiyonu

$Y(k)$: dönüşüm fonksiyonu

$\frac{d^k}{dx^k}$: x’e göre k. türevi

$U(k)$: $u(x)$’in diferansiyel dönüşümü

$V(k)$: $v(x)$’in diferansiyel dönüşümü

$W(k,h)$: ters diferansiyel dönüşümü $w(x,y)$

$\bar{z}$: z’nineşleniği

$\sum$: toplam sembolü

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Diferansiyel denklemler günümüzde geniş uygulama alanı bulan matematiğin önemli bir dalıdır. Özellikle fizik ve mühendislikte problemlerin çözümünde diferansiyel denklemler karşımıza çıkar. Son yıllarda yapılan çalışmalar ile diferansiyel denklem sistem çözümleri için diferansiyel dönüşüm metodu uygulanmaktadır. Bu metot ilk kez Zahou tarafından 1986'da ortaya atıldı. Zahou bu metot ile lineer ve lineer olmayan başlangıç değer problemleri çözümüne ulaştı. Chen ve Shing Huei Ho bir boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunu özdeğer problemlerini çözümünde kullandı [1]. Diferansiyel dönüşüm sistemleri, iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak çözülmüştür [2]. Diferansiyel dönüşüm metodunun sayısal çözümü ve diferansiyel denklem sistemi için Laplace dönüşüm metodu karşılaştırılmıştır [3]. İntegral denklemleri, kesirli diferansiyel denklemler, integral ve integro diferansiyel denklemler de diferansiyel dönüşüm yardımıyla çözülmüştür [4-8].

Bu metot, taylor seri açılımına dayanan ve diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini elde etmek için kullanılan bir dönüşüm tekniğidir (J.K. Zhou, 1986). Fakat iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodu yüksek mertebeli Taylor serisi metodundan farklıdır. Taylor serisi metodu büyük mertebeler için çok daha fazla hesaplama gerektirir. Jang bu metodun diferansiyel denklemlerin Taylor serisini çözümlerini elde etmek için alternatif bir metot olduğunu ifade eder. Bu metot hesaplamanın boyutunu indirger ve birçok probleme uygulanabilir.

BÖLÜM 2

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

x bağımlı, t bağımsız değişken olmak üzere n. mertebeden en genel bir adi diferansiyel denklem

$$F\left(t, x, x', x'', \dots, x^{(n)}\right) = 0$$

biçimindedir. Bu denklemin iki bilinmeyen fonksiyon haline genelleştirilmesi iki denklemden oluşan

$$\begin{gathered} F_1\left(t, x, x', x'', \dots, x^{(k)}, y, y', y'', \dots, y^{(m)}\right) = 0 \\ F_2\left(t, x, x', x'', \dots, x^{(k)}, y, y', y'', \dots, y^{(m)}\right) = 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

sistemidir. Burada x ve y; t nin bilinmeyen fonksiyonları, F_1, F_2 de verilmiş fonksiyonlardır. k ve m sırasıyla x ve y nin en yüksek mertebeden türevlerinin mertebesidir. Görüldüğü gibi bir diferansiyel denklem sistemi iki veya daha çok bilinmeyen fonksiyon ve bunların türevlerini ihtiva eden diferansiyel denklemlerin bir cümlesidir. Örneğin;

$$\begin{aligned} &x'' - t^2 y'' + t x' = 1 \\ &y'' - (x')^2 = t \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} 2x' + 3y' - 2x + y &= t^2 \\ x' - 2y' + 3x + 4y &= e^t \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} &x' = y \\ &y' = z \\ &z' = -x + 4y - 3z + e^t \end{aligned} \tag{2.4}$$

Denklem cümleleri birer adi diferansiyel denklem sistemidir. (2.2) ve (2.3) sistemlerinde bilinmeyen fonksiyonlar x ve y (2.4) sisteminde ise bilinmeyen fonksiyonlar x,y ve z ile göstermiştir. t bağımsız değişkendir.

Her üç sistem bilinmeyen sayısı kadar denklem ihtiva etmektedir. Bu denklem sistemlerinden birincisi ikinci mertebeden ikincisi ve üçüncüsü ise birinci mertebedendir. Eğer (2.1) sistemindeki $F_{1,}F_2$ fonksiyonları, bağımlı değişkenler ve bağımlı değişkenlerin tüm türevlerine göre birinci dereceden ise sisteme lineerdir denir. (2.3) ve (2.4) sistemleri lineer, (2.2) sistemi lineer değildir. (2.4) sistemi özel bir sistemdir. Sistemin her bir denkleminde bilinmeyenlerden sadece birinin birinci mertebeden türevi bulunmaktadır. (2.3) sistemi de böyle yazılabilir. (2.2) sisteminin denklemleri bilinmeyenlerin birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin ihtiva etmektedir. Acaba bu sistem, (2.3) ve (2.4) sistemleri gibi, her bir denkleminde bilinmeyenlerden sadece birinin birinci mertebeden türevinin bulunduğu bir sisteme indirgenebilir mi? Bu sorunu cevabını sistemin en yüksek türevlere göre ortak çözülebilir olması halinde evet olduğunu söyleyebiliriz. Gerçekten (2.2) sistemi en yüksek mertebeden türevlere göre çözülürse

$$x'' = t^2(x')^2 - t.x' + t^3 + 1$$
$$y'' = (x')^2 + t$$

bulunur. Buradan $u_1 = x, u_2 = x', u_3 = y, u_4 = y'$ konumu ile kolayca

$$u_1' = u_2$$
$$u_2' = t^2{u_2}^2 - tu_2 + t^3 + 1$$
$${u_3}' = u_4$$
$${u_4}' = {u_2}^2 + t$$

sistemi elde edilir.

TANIM 2.1:

Her bir denkleminde bilinmeyenlerden sadece birinin birinci mertebeden türevi bulunan sistemlere normal sistemler denir. Bu tanıma göre n bilinmeyenli normal sistem

$$x_1{}' = f_1(t\,,x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)$$
$$x_2{}' = f_2(t\,,x_1\,,x_2\,,\dots,x_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n{}' = f_n(t\,,x_1\,,x_2\,,\dots,x_n) \tag{2.5}$$

biçimindedir. Burada $x_{1,}x_2,\dots,x_n$ bilinmeyen fonksiyonlar; $f_1,f_2,\dots,f_n$ de $t,x_1,x_2,\dots,x_n$ in fonksiyonlarıdır.

TANIM 2.2:
Eğer bir $I \subset R$ açık aralığında birinci mertebeden sürekli türevlere sahip olan bir $\{x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\dots,x_n = x_n(t)\}$ fonksiyon cümlesi (2.5) sisteminin tüm denklemlerini özdeş olarak sağlıyorsa, bu fonksiyon cümlesine I aralığında (2.5) sisteminin bir çözümü denir [9].

TANIM 2.3:
Aşağıdaki şekilde yazılabilen birinci mertebeden bir denklem sistemine lineer denklem sistemi denir.

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \cdots + a_{2n}(t)x_2 + f_2(t)$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \tag{2.6}$$

Burada t bağımsız değişken, $x_1\,,\ x_2\,,\dots,x_n$ bağımlı değişkenler, a_{ij} $(1 \le i\,,j \le n)$ katsayı fonksiyonları ve $f_i(t)$ $(i = 1\,,2\,,\dots,n)$ ise kuvvet fonksiyonlarıdır. Katsayı fonksiyonların tümü sabitse denklem sistemine sabit katsayılı denklem sistemi, kuvvet fonksiyonlarının tümü özdeş olarak sıfırsa, denklem sistemine homojen denklem sistemi denir. Katsayı fonksiyonlarından en az biri sabit değilse bu durumda sisteme değişken katsayılı denklem sistemi ve kuvvet fonksiyonlarından en az biri sıfırdan farklı ise bu durumda sisteme homojen olmayan denklem sistemi adı verilir. Eğer

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ & & \vdots & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{bmatrix},$$

$$f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{bmatrix}$$

olarak tanımlanırsa (2.6) sistemi kısaca

$$X'(t) = A(t)X(t) + f(t)$$

olarak yazılabilir.

TANIM 2.4 **:**

$I \subset R, t_0 \epsilon\ I, x_{10}\ ,\ x_{20}\ , \dots , x_{n0}$ herhangi reel sayılar olmak üzere (2.5) sisteminin

$$x_1(t_0) = x_{10}\ , x_2(t_0) = x_{20}\ , \dots , x_n(t_0) = x_{n0} \tag{2.7}$$

koşulunu sağlayan çözümünü bulma problemine denklem sistemleri için başlangıç değer problemi denir.

TEOREM 2.5 (Normal sistemler için varlık ve teklik teoremi):

Eğer f_i ve $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(i,j = 1,2,..,n)$ fonksiyonları $|t - t_0| < a,\ |x_i - x_{i0}| < b_i(i = 1,2,\dots,n)$ için sürekli ise (2.5) sisteminin t_0 ın bir komşuluğunda (2.7) başlangıç koşullarını sağlayan bir ve yalnız bir $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ çözümü mevcuttur [10].

BÖLÜM 3

LİNEER DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMİNİN ÇÖZÜM YOLLARI

3.1. YOK ETME METODU

Bu bölümde

$$\begin{aligned} L_{11}(D)x_1 + L_{12}(D)x_2 + \cdots + L_{1n}(D)x_n &= f_1(t) \\ L_{21}(D)x_1 + L_{22}(D)x_2 + \cdots + L_{2n}(D)x_n &= f_2(t) \\ &\vdots \\ L_{n1}(D)x_1 + L_{n2}(D)x_2 + \cdots + L_{nn}(D)x_n &= f_n(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

biçimindeki sabit katsayılı lineer sistemleri çözmek için yok etme yöntemini vereceğiz. Bu yöntem, cebirsel lineer denklem sistemlerini çözmek için kullanılan yönteme benzerdir. Yok etme yönteminde verilen diferansiyel denklem sistemi yerine, sisteme denk ancak çözmek için nispeten daha basit bir sistem elde edilmeye çalışılır. Eğer iki denklem sistemi aynı çözümlere sahipse, bu sistemlere denk sistem denir. Bir sistemi daha basit bir sisteme indirgeme bir dizi işlemle başarılır ve her bir işlem verilen sisteme denk bir sisteme yol açar. Bu işlemler şunlardır:

(1) Sistemin herhangi iki denkleminin yeri değiştirilebilir.
(2) Sistemin bir denklemi bir sabitle çarpılabilir.
(3) Sistemin bir denkleminin her iki tarafı bir $Q(D)$polinomu ile çarpılabilir ve sistemin başka bir denklemine ilave edilebilir.
(4) ü açıklamak için (3.1) sisteminin i. ve j. denklemlerini, yani

$$\begin{aligned} L_{i1}(D)x_1 + L_{i2}(D)x_2 + \cdots + L_{in}(D)x_n &= f_i(t) \\ L_{j1}(D)x_1 + L_{j2}(D)x_2 + \cdots + L_{jn}(D)x_n &= f_j(t) \end{aligned}$$

denklemlerini göz önüne alalım. $i.$ denklemin her iki tarafı $Q(D)$ ile çarpılır. Ve sonra sonucu $j.$ denkleme ilave edilirse, $i.$ ve $j.$ denklemleri

$$L_{i1}(D)x_1 + L_{i2}(D)x_2 + \cdots + L_{in}(D)x_n \;=\; f_i(t)$$
$$\left[L_{ji}(D) + Q(D)L_{i1}(D)\right]x_1 + \cdots + \left[\, L_{jn}(D) + Q(D)L_{in}(D)\right]x_n \;=\; f_i(t) + Q(D)f_i(t)$$

olan (3.1) ya denk yeni bir sistem elde edilir [9].

ÖRNEK 3.1.1:

$$x' = 2x + y + t$$
$$y' = \; x + 2y + t^2$$

sistemini çözünüz.

ÇÖZÜM:

$$x' - 2x - y = t$$
$$-x + y' - 2y = \; t^2$$

Şimdi sistemi operatör formda yazalım.

$$(D-2)x - y = t$$
$$-x + (D-2)y = \; t^2 \tag{3.2}$$

Bu sistemde y' yi yok edelim. Bunun için birinci denklemi $(D-2)$ ile çarpalım.

$$(D-2)^2x - (D-2)y = 1 - 2t$$
$$-x + (D-2)y = \; t^2$$

sistemi bulunur. Şimdi 2 denklemi taraf tarafa toplarsak

$$(D^2 - 4D + 3)x = \; t^2 - 2t + 1$$

veya

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = t^2 - 2t + 1$$

elde edilir.

Önce homojen kısmı çözelim.

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0$$
$$r^2 - 4r + 3 = 0$$
$$(r-1)(r-3) = 0$$

$r = 1$ ve $r = 3$ bulunur.

$$x(t) = c_1e^t + c_2e^{3t}$$

genel çözümdür. İkinci taraftaki fonksiyon 2. Dereceden polinom olduğundan özel çözüm $x_p = at^2 + bt + c$ olarak belirlenir.

$x_p = at^2 + bt + c$ ise $x_p' = 2at + b$ ve $x_p'' = 2a$

elde edilir.

$2a - 4(2at + b) + 3(at^2 + bt + c) = t^2 - 2t + 1$

Eşitliğin her iki tarafına bakarak polinom eşitliğinden

$$3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3},$$
$$3b - 8a = -2 \Rightarrow 3b - \frac{8}{3} = -2 \Rightarrow b = \frac{2}{9},$$
$$2a - 4b + 3c = 1 \Rightarrow \frac{2}{3} - \frac{8}{9} + 3c = 1 \Rightarrow 3c = 1 + \frac{2}{9} = \frac{11}{9} \Rightarrow c = \frac{11}{27}$$
$$x_p = \frac{1}{3}t^2 + \frac{2}{9}t + \frac{11}{27}$$

denklemin özel çözümüdür. Böylece

$$x = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + \frac{1}{3}\, t^2 + \frac{2}{9} t + \frac{11}{27}$$

bulunur. Bulunan bu değer sistemdeki ilk denklemde yerine yazılırsa y(t) çözümü şu şekilde bulunur:

$$y(t) = x'(t) - 2x(t) - t$$

$$y = c_1 e^t + 3c_2 e^{3t} + \frac{2}{3}\, t + \frac{2}{9} - 2c_1 e^t - 2c_2 e^{3t} - \frac{2}{3}\, t^2 + \frac{4}{9} t - \frac{22}{27} - t$$

$$= -c_1 e^t + c_2 e^{3t} + \frac{2}{3}\, t^2 - \frac{7}{9} t - \frac{16}{27}$$

elde edilir [10].

3.2. LAPLACE DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ

TANIM 3.2.1:

$f, [0, \infty)$ aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

integrali mevcut (veya yakınsak) ise, s nin bir fonksiyonu olan

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx$$

ye f fonksiyonun Laplace dönüşümü denir.

Sabit katsayılı lineer diferansiyel denklem sisteminin $t = 0$ noktasındaki başlangıç koşullarını sağlayan ve $t \geq 0$ için tanımlı olan çözümlerini elde etmek için diğer bir yöntem Laplace dönüşümünü kullanmaktır. Bu yöntemde, verilen sabit katsayılı diferansiyel denklem sistemi

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^n L\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) s^{n-2} f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

formülü yardımıyla bilinmeyenlerin Laplace dönüşümlerine göre bir lineer cebirsel denklem sistemine dönüştürülür [9].

TEOREM 3.2.2:
$L[F(x)] = f(s)$ ise $\mathrm{L}[e^{ax}F(x)] = f(s-a)$ dır.

ÖRNEK 3.2.3:

$$x' = 3x + 2y\,, \qquad x(0) = 0$$
$$y' = -5x + y\,, \qquad y(0) = 1$$

başlangıç değer problemini Laplace dönüşüm yöntemini kullanarak çözünüz.

ÇÖZÜM:
$L[x] = X(s) = X, L[y] = Y(s) = Y$ olarak tanımlanırsa ve her iki denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa

$$sX - x(0) = 3X + 2Y$$
$$sY - y(0) = -5X + Y$$

olur. Bu koşulları kullanırsa

$$(s-3)X - 2Y = 0$$
$$(s-1)Y + 5X = 1$$

ve bu iki denklem arasında Y yok edilirse

$$X = \frac{2}{s^2 - 4s + 13} = \frac{2}{(s-2)^2 + 9}$$

cebirsel denklemi elde edilir. Laplace dönüşümleri ile ilgili özelliklerden

$$L[e^{bt}sinat] = \frac{a}{(s-b)^2 + a^2}$$

olduğu hatırlanırsa ve

$$X = \frac{2}{3}\frac{3}{(s-2)^2 + 9}$$

olarak yeniden düzenlenirse, son eşitliğe ters Laplace dönüşümü uygulanması sonucunda

$$x(t) = \frac{2}{3}e^{2t}sin3t$$

olduğu görülür. Bulunan bu $x(t)$ değeri verilen denklem sisteminin birinci denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2}(x' - 3x) = \frac{1}{2}x' - \frac{3}{2}x \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(2e^{2t}sin3t + 3e^{2t}cos3t) - \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}e^{2t}sin3t\right) \\ &= e^{2t}\left(cos3t - \frac{1}{3}sin3t\right) \end{aligned}$$

çözümü elde edilir [10].

3.3. LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÖZDEĞER VE ÖZVEKTÖR YARDIMI İLE ÇÖZÜMÜ

TANIM 3.3.1:

A matrisi elemanları reel olan bir nxn matris olsun. Eğer sıfırdan farklı bir u vektörü

$$\mathrm{Au} = \lambda\mathrm{u} \tag{3.3}$$

olacak şekilde mevcutsa λ ya A matrisinin bir özdeğeri ve u ya da A matrisinin λ ya karşılık gelen özvektörü denir. (3.3) eşitliği

$$(\lambda I - A)u = 0 \tag{3.4}$$

olarak yazılabilir. Eğer (λI – A) matrisinin tersi mevcutsa bu ters matris (3.4) ile soldan çarpılır ve $u = 0$ bulunur. Fakat özvektörler sıfır olmayacağından (λI – A) matrisinin tersinin mevcut olmadığı ve dolayısıyla $det(\lambda I - A) = 0$ olduğu sonucuna varılır. Bu sonuç aşağıdaki teoremde ifade edilmiştir.

TEOREM 3.3.2:
A bir nxn matris olsun. λ 'nın A matrisinin bir özdeğeri olması için gerekli ve yeterli koşul

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0 \tag{3.5}$$

sağlanmasıdır.

TANIM 3.3.3:
(3.5) eşitliğine A' nın karakteristik denklemi ve $P(\lambda)$ ya da A' nın karakteristik polinomu denir.

TEOREM 3.3.4:
A bir nxn matrisi olsun. Bu matrisin farklı özdeğerleri λ_1 , λ_2 , … , λ_n ise bu özdeğerlere karşılık gelen u_1 , u_2 , … , u_n özvektörleri lineer bağımsızdır [9].

ÖRNEK 3.3.5:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

matrisinin özdeğerlerini ve bu değerlere karşılık gelen lineer bağımsız özvektörleri bulunuz.

ÇÖZÜM:

$$\det(\lambda I - A) = det \begin{pmatrix} \lambda - 3 & -2 & -4 \\ -2 & \lambda & -2 \\ -4 & -2 & \lambda - 3 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^3 - 6\lambda^2 - 15\lambda - 8 = (\lambda + 1)^2 (\lambda - 3)$$

olduğundan özdeğerler $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ (çift katlı özdeğer) bulunur. Şimdi bu özdeğerlere karşılık gelen lineer bağımsız özvektörleri hesaplayalım. $\lambda_1 = 8$ için

$$(A - 8I)u = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 4 \\ 2 & -8 & 2 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oluşturulursa

$$-5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0$$
$$2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0$$
$$4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin son iki denkleminden

$$-2x_2 + x_3 = 0$$

veya $x_3 = 2x_2$ olur. Bulunan bu x_3 değeri birinci ve ikinci denklemlerde yerine yazılırsa

$$-5x_1 + 10x_2 = 0$$
$$2x_1 - 4x_2 = 0$$

ve buradan da $x_1 = 2x_2$ olduğu görülür. O halde $\lambda_1 = 8$ özdeğerine karşılık gelen özvektör $u_1 = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_2 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ve $x_2 = 1$ alınırsa $u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ olarak elde edilir.

Şimdi de iki katlı kök olan $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özvektörleri hesaplayalım. $\lambda_2 = -1$ için

$$(A + I)u = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sisteminden

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

veya

$$x_2 = -2x_1 - 2x_3$$

bulunur. O halde u vektörü iki keyfi sabite bağlı olarak

$$u = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2\,x_2 \, - 2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$
$$= x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

şeklinde yazılırsa x_1 = 0 , x_3 = 1 için

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ve x_1 = 1 , x_3 = 0 için

$$u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Böylece $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ özdeğerine karşılık iki lineer bağımsız özvektör elde edilmiş olur [10].

$$\mathrm{X}'(\mathrm{t}) = \mathrm{AX}(\mathrm{t}) \tag{3.6}$$

denkleminin $e^{rt}.U$ biçiminde bir çözümü olması için r bir özdeğer U da bu özdeğere karşı gelen bir özvektör olmalıdır. Böylece problem, aslında A matrisinsin özdeğer ve özvektörlerinin bulunmasına indirgenmektedir. Üç hal ortaya çıkarabilir:

i. A matrisinin $r_1, r_{2,} \dots, r_n$ özdeğerlerinin tümünün reel ve birbirinden farklı olması hali

A matrisinin $r_1, r_2, \dots, r_n$ özdeğerlerine karşı gelen özvektörler sırasıyla $U_1, U_2, \dots, U_n$ olsun. Lineer cebirden biliniyor ki $U_1, U_2, \dots, U_n$ özvektörleri lineer bağımsızdır. Böylece

$$X_i(t) = e^{r_i t} U_i \qquad (i = 1,2, \dots, n)$$

fonksiyonları (3.4) homojen denkleminin çözümüdür. Bu çözümlerin Wronskianı

$$W[X_1, X_2, \dots, X_n](t) = |\mathrm{e}^{\mathrm{r}_1 \mathrm{t}}\mathrm{U}_1\ \mathrm{e}^{\mathrm{r}_2 \mathrm{t}}\mathrm{U}_2 \dots \mathrm{e}^{\mathrm{r}_\mathrm{n} \mathrm{t}}\mathrm{U}_\mathrm{n}\ | = e^{(\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2 + \dots + \mathrm{r}_\mathrm{n})t} |U_1\ U_2 \dots U_n\ |$$

dir. $U_1, U_2, \dots, U_n$ ler lineer bağımsız olduğundan $|U_1\ U_2 \dots U_n\ | \neq 0$, dolayısıyla $W[X_1, X_2, \dots, X_n](t) \neq 0$ dır. Böylece $\{e^{r_1 t}U_1,\ e^{r_2 t}U_2, \dots, e^{r_n t}U_n\}$, (3.4.4) denkleminin bir temel çözüm cümlesi ve

$$X = c_1 e^{r_1 t} U_1 + c_2 e^{r_2 t} U_2 + \dots + c_n e^{r_n t} U_n$$

de genel çözümüdür. Burada $c_1, c_2, \dots, c_n$ ler keyfi sabitlerdir [9].

ÖRNEK 3.3.6:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X \tag{3.7}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM :

A matrisinin karakteristik denklemi

$$P(r) = |A - rI| = \begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 2 & 4-r \end{vmatrix} = (1-r)(4-r) + 2 = r^2 - 5r + 6 = 0$$

olup bunun $r_1 = 2, r_2 = 3$ kökleri A matrisinin özdeğerleridir.

$r_1 = 2$ özdeğerine karşı gelen özvektörü bulmak için $(A - r_1 I)U = 0$ yani

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistemini çözmeliyiz. Dikkat edilirse bu sistem

$$u_1 + u_2 = 0$$

skaler denklemine denktir. Buradan derhal k bir keyfi sabit olmak üzere $u_1 = k, u_2 = -k$ bulunur. Böylece $r_1 = 2$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$U_1 = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dir. Benzer şekilde $r_2 = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü bulmak için $(A - r_2 I)U = 0$ veya buna denk

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sistemini çözmeliyiz. Buradan k bir keyfi sabit olmak üzere $u_1 = k, u_2 = -2k$ bulunur. Böylece $r_2 = 3$ özdeğerine karşılık gelen özvektör

$$U_2 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dir. $k = 1$ alınırsa

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece (3.7) denkleminin genel çözümü

$$X = c_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{3t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

dir. Genel çözüm bileşenler cinsinden

$$x = c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t}$$
$$y = -c_1 e^{2t} - 2c_2 e^{3t}$$

olarak da yazılabilir [9].

ii. Bazı özdeğerlerin kompleks olması hali

$r_1 = \alpha + i\beta,$ A matrisini bir kompleks özdeğeri olsun. Bu taktirde, karakteristik denklemin katsayıları reel olduğundan r_1 in eşleniği yani $r_2 = \overline{r_1} = \alpha - i\beta$ da A nın bir özdeğeridir. Eğer Z_1 ve Z_2 reel sabit vektörler olmak üzere $U_1 = Z_1 + iZ_2$ $r_1 = \alpha + i\beta$ özdeğerine karşı gelen özvektör ise, $U_2 = \overline{U_1} = Z_1 - iZ_2$, $r_2 = \alpha - i\beta$ özdeğere karşı gelen özvekördür. Bunu görmek için $(A - r_1 I)U_1 = 0$ ın kompleks eşleniğini alalım. İki matrisin çarpımının eşleniğinin, matrislerin eşleniğinin çarpımı olduğu göz önünde tutularak

$$(A-\overline{r_1}I)\overline{U_1}=0$$
$$(A-\overline{r_2}I)\overline{U_1}=0$$

elde edilir. Yani, $r_2=\alpha-i\beta$ özdeğerine karşı gelen vektördür. Böylece r_2 ve r_2 eşlenik özdeğerleri için (3.6) nın

$$W_1(t)=e^{r_1t}U_1=e^{(\alpha+i\beta)t}(Z_1+iZ_2)$$
$$W_2(t)=e^{r_2t}U_2=e^{(\alpha-i\beta)t}(Z_1-iZ_2)$$

kompleks çözümleri elde edilir.

Uygulamada reel çözümler kompleks çözümlerden daha kullanışlıdır. Reel çözümleri elde etmek için, sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemlerdeki gibi, kompleks çözümlerin reel ve sanal kısımlarını almak yeterlidir. Böylece

$$W_1(t)=e^{\alpha t}(\cos\beta t+i\sin\beta t)(Z_1+iZ_2)$$

kompleks çözümünden

$$X_1(t)=ReW_1(t)=(e^{\alpha t}\cos\beta t)Z_1-(e^{\alpha t}\sin\beta t)Z_2$$
$$X_2(t)=ImW_1(t)=(e^{\alpha t}\cos\beta t)Z_1+(e^{\alpha t}\sin\beta t)Z_2$$

lineer bağımsız reel değerli çözümleri elde edilir. Dikkat ediniz ki $W_2(t)$ kompleks çözümünden elde dilen reel çözümler $X_1(t), X_2(t)$ ile lineer bağımlıdır.

A matrisi r_1 ve r_2 den farklı başka eşlenik kompleks özdeğerlere sahipse bunlara karşı gelen reel çözümler benzer şekilde elde edilebilir [9].

ÖRNEK 3.3.7:

$$X' = \begin{pmatrix}-1 & 1\\ -5 & 3\end{pmatrix}X$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM :

A = $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ matrisinin karakteristik denklemi

$$|A - rI| = \begin{vmatrix} -1-r & 1 \\ -5 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 2r + 2 = 0$$

ve özdeğerleri $r_1 = 1+i, r_2 = 1-i$ dir.

$r_1 = 1+i$ için $(A - r_1 I)U = 0$ denklemi açık olarak

$$\begin{pmatrix} -2-i & 1 \\ -5 & 2-i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$(-2-i)\,u_1 + u_2 = 0$$
$$-5u_1 + (2-i)\,u_2 = 0$$

olur. Buradan $u_1 = k\,, u_2 = (2+i)k$ elde edilir. Böylece $r_1 = 1+i$ özdeğerine karşı gelen özvektör (k = 1 seçilerek)

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dir. $r_2 = 1-i$ özdeğerine karşı gelen özvektörün

$$U_2 = \overline{U_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

olduğu kolayca doğrulanabilir. Böylece

$$W(t) = e^{(1+i)t}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$
$$= e^{t}(cost + isint)\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

kompleks çözümünün reel ve sanal kısımları

$$X_1 = Re[W(t)] = \; e^t \, cost \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - e^t sint \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = Im[W(t)] = \; e^t \, cost \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^t sint \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

reel çözümlerini verir. Bu çözümler lineer bağımsızdır. Böylece

$$X = \; c_1 \left[e^t \, cost \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] + \; c_2 \left[e^t \, cost \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - e^t sint \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

veya

$$X = \; c_1 \, e^t \begin{pmatrix} cost \\ 2cost - sint \end{pmatrix} + \; c_2 \, e^t \begin{pmatrix} sint \\ cost + 2sint \end{pmatrix}$$

istenen genel çözümüdür [9].

iii. Bazı özdeğerlerin katlı (çakışık) olması hali

Birinci mertebeden sabit katsayılı normal sistemler için (i) ve (ii) de elde edilen sonuçlar, notasyon dışında $n.$ mertebeden sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemler için verilenlerle aynıdır. Bununla beraber eğer, A matrisinin özdeğerleri katlı ise, farklı bir durum ortaya çıkar. Bu noktayı açıklamak için r_1, A matrisinin iki katlı (çakışık) bir reel özdeğeridir. Bu $(r - r_1)^2$ nin $P(r) = |A - rI|$ karakteristik polinomunun bir çarpanı olduğunu ifade eder. İki durumla karşılaşılabilir:

(1) İki katlı r_1 özdeğeri için lineer bağımsız iki özvektör bulunabilir. Bu özvektörler U_1 ve U_2 ise iki katlı r_1 özdeğeri için (3.6) denkleminin

$$X_1(t) = e^{r_1 t} U_1, \; X_2(t) = e^{r_2 t} U_2$$

çözümleri derhal elde edilir ve bunlar lineer bağımsızdır.

(2) İki katlı r_1 özdeğeri için sadece bir U_1 özvektörü bulunabilir. Bu durumda (3.6) sistemi aşikar olmayan $X_1(t) = e^{r_1 t} U_1$ çözümüne sahiptir. Sistemin

genel çözümünü elde etmek için $X_1(t)$den bağımsız ikinci bir çözüme ihtiyaç vardır. Sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemlerden edindiğimiz deneyim, ikinci çözümün

$$X_2(t) = te^{r_2 t}U_1$$

şeklinde olabileceğini ima eder. Ancak bu doğru değildir. Doğru olan şey, bu durumda sistemin

$$X_2(t) = te^{r_2 t}B + e^{r_2 t}C$$

şeklinde bir çözümün olduğudur. Burada B ve C belirtilecek sabit sütun vektörleridir.

Bu sonuç, r_1 in m katlı bir özdeğer olması haline de genelleştirilebilir.

TEOREM 3.3.8 :
r_1, in nxn tipindeki A matrisinin m katlı bir reel kökü olsun. Bu taktirde $X' = AX$ denkleminin

$$X_1(t) = B_{11}e^{r_i t}$$
$$X_2(t) = B_{21}e^{r_2 t} + B_{22}e^{r_i t}$$
$$\vdots$$
$$X_m(t) = B_{m1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{r_i t} + B_{m2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{r_i t} + \cdots + B_{mm}e^{r_i t}$$

şeklinde lineer bağımsız m çözümü vardır. Bununla B_{ij} ler belirtilecek sütun vektörlerdir.

Benzer bir sonuç katlı kompleks özdeğerler için de geçerlidir [9].

ÖRNEK 3.3.9:

$$X' = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X \tag{3.8}$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

ÇÖZÜM :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

matrisinin karakteristik polinomu

$$P(r) = \begin{vmatrix} -2-r & -3 \\ 3 & 4-r \end{vmatrix} = (r-1)^2$$

dir. Buradan A nın özdeğerleri $r_1 = r_2 = 1$ di. Yani $r = 1$ iki katlı bir özdeğerdir. $r = 1$ karşı gelen özvektörü bulmak için

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

veya

$$-3u_1 - 3u_2 = 0$$
$$3u_1 + 3u_2 = 0$$

sisteminin aşikar olmayan bir çözümünü arayalım. Kolayca $u_1 = k,\ u_2 = -k$ (k keyfi) bulunur. Böylece $r = 1$ e karşılık gelen özvektör

$$U_1 = k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

dir. Görüldüğü gibi, iki katlı $r = 1$ özdeğeri için sadece bir özvektör bulundu. Buradan (3.8) sisteminin

$$X_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

çözümü elde edilir. Genel çözümü yazabilmek için X_1 den bağımsız ikinci bir çözüm daha bulmalıyız. Teorem (3.8) gereğince

$$X_2(t) = te^tB + e^tC \tag{3.9}$$

şeklinde bir çözüm arayalım. Bu (3.8) sisteminde yerine konur ve benzer terimler bir araya gelirse, her t için

$$(AB - B)te^t + (AC - C - B)e^t = 0$$
$$(A - I)Bte^t + [(A - I)C - B]e^t = 0$$

elde edilir. Buradan

$$(A - I)B = 0$$
$$(A - I)C = B$$

denklemleri bulunur. İlk denklem B nin bir özvektör olduğunu gösterir. Yani $B = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$ alınabilir.$(A - I)C = B$ denklemi açıkça yazılırsa,

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

veya

$$-3c_1 - 3c_2 = 3$$
$$3c_1 + 3c_2 = -3$$

olur. Buradan $c_1 = k - 1, c_2 = -k$ bulunur. $k = 1$ alınarak

$$C = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Böylece (3.9)

$$X_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

olur. Artık (3.8) denkleminin genel çözümü yazılabilir. Genel çözüm

$$X(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^t \right]$$

dir [9].

BÖLÜM 4

DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

4.1. BİR BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

$y(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$Y(k) = \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0} \tag{4.1}$$

ki burada $y(x)$ başlangıç fonksiyonu ve $Y(k)$ dönüşüm fonksiyonudur.

Burada $\frac{d^k}{dx^k}$, x'e göre k. mertebeden türevi gösterir. $Y(k)$' nın ters diferansiyel dönüşümü

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} Y(k)x^k \tag{4.2}$$

olarak tanımlanır.

(4.1) ve (4.2) yi birleştirerek

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}y(x)\right]_{x=0} x^k \tag{4.3}$$

elde ederiz.

(4.1) ve (4.2) deki temel matematik işlemlerinin yardımı ile aşağıdaki teoremler elde edilir. $U(k)$, $u(x)$'in diferansiyel dönüşümü, $V(k)$ da $v(x)$'in diferansiyel dönüşümü olmak üzere;

TEOREM 4.1.1:

$$y(x) = u(x) \pm v(x) \text{ } ise \text{ } Y(k) = U(k) \pm V(k)$$

olur [2].

TEOREM 4.1.2:

$$y(x) = c.u(x) \text{ } ise \text{ } Y(k) = c.U(k)$$

olur [2].

TEOREM 4.1.3:

$$y(x) = \frac{d^r u(x)}{dx^r} \text{ } ise \text{ } Y(k) = \frac{(k+r)!}{k!} U(k+r)$$

olur [2].

TEOREM 4.1.4:

$$y(x) = u(x).v(x)$$

ise

$$Y(k) = U(k) \otimes V(k) = \sum_{r=0}^{k} U(r).V(k-r)$$

olur [2].

TEOREM 4.1.5:

$$y(x) = x^n \text{ } ise \text{ } Y(k) = \delta(k-n) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & diğeri \end{cases}$$

olur [2].

TEOREM 4.1.6:

$$y(x) = x^n u(x) \text{ } ise \text{ } Y(k) = U(k-n)$$

olur [2].

4.2. İKİ BOYUTLU DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM METODU

TANIM 4.2.1:

$w(x,y)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h) = \frac{1}{k!h!} \quad [\frac{\partial^{k+h} w(x,y)}{\partial x^k \partial y^h}]_{(0,0)} \tag{4.4}$$

fonksiyonu olarak tanımlanır.

TANIM 4.2.2 :

$W(k,h)$ fonksiyonunun ters diferansiyel dönüşümü olarak

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} W(k,h) x^k y^h \tag{4.5}$$

gösterilir.

(4.2.1) ve (4.2.2) den

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!} \quad [\frac{\partial^{k+h} w(x,y)}{\partial x^k \partial x^y}]_{(0,0)} x^k y^h \tag{4.6}$$

elde edilir.

TEOREM 4.2.3:

Eğer

$$w(x,y) = u(x,y) \pm v(x,y)$$

ise

$$W(k,h) = U(k,h) \pm V(k,h)$$

olur [11,12].

İSPAT :

$$U(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}},$$

$$V(k,h) = \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} v(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}},$$

$$W(k,h) = \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}[u(x,y)+v(x,y)]\right]_{\substack{x=0\\y=0}},$$

$$W(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}[u(x,y)]\right]_{\substack{x=0\\y=0}} + \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}[v(x,y)]\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olduğundan

$$W(k,h) = U(k,h) \pm V(k,h)$$

elde edilir [11].

TEOREM 4.2.4:
Eğer

$$w(x,y) = cu(x,y)$$

ise

$$W(k,h) = cU(k,h)$$

c sabittir [11,12].

İSPAT:

$$U(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}},$$

$$W(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}[\alpha u(x,y)]\right]_{\substack{x=0\\y=0}},$$

$$W(k,h) = c\,\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}[u(x,y)]\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

ve buradan

$$W(k,h) = cU(k,h)$$

olur [11].

TEOREM 4.2.5:
Eğer

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

ise

$$W(k,h) = (k+1)U(k+1,h)$$

olur [11,12].

İSPAT:

$$W(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\right]\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{(k+1)}{(k+1)!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^{k+1} \partial y^h}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= (k+1).\frac{1}{(k+1)!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^{k+1} \partial y^h}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olur. Buradan

$$W(k,h) = (k+1)U(k+1,h)$$

eşitliği elde edilir [11].

TEOREM 4.2.6:
Eğer

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}$$

ise

$$W(k,h) = (h+1)U(k,h+1)$$

olur [11,12].

İSPAT:

$$W(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\right]\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{(h+1)}{k!\,(h+1)!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^k \partial y^{h+1}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{(h+1)}{k!\,(h+1)!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^k \partial y^{h+1}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= (h+1).\frac{1}{k!\,(h+1)!}\left[\frac{\partial^{k+h+1}}{\partial x^k \partial y^{h+1}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olur. Buradan

$$W(k,h) = (h+1)U(k,h+1)$$

eşitliği elde edilir [11].

TEOREM 4.2.7:

Eğer

$$w(x,y)=\frac{\partial^{r+s}u(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}$$

ise

$$W(k,h)=(k+1)(k+2)\ldots..(k+r)(h+1)(h+2)\ldots\ldots(h+s)U(k+r,h+s)$$

olur [11,12].

İSPAT:

$$W(k,h)=\frac{1}{k!\,h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k\partial y^h}\left[\frac{\partial^{r+s}u(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}\right]\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)\ldots..(k+r)(h+1)(h+2)\ldots\ldots(h+s)}{(k+r)!\,(h+s)!}\left[\frac{\partial^{k+h+r+s}}{\partial x^{k+r}\partial y^{h+s}}u(x,y)\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

olur. Bu ise

$$W(k,h)=(k+1)(k+2)\ldots..(k+r)(h+1)(h+2)\ldots\ldots(h+s)U(k+r,h+s)$$

olduğunu gösterir [11].

TEOREM 4.2.8:

Eğer

$$w(x,y)=u(x,y)v(x,y)$$

ise

$$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}U(r,h-s)V(k-r,s)$$

olur [11,12].

İSPAT:

$$w(x,y) = u(x,y)v(x,y)$$

fonksiyonunun diferansiyel dönüşümü

$$W(k,h) = \frac{1}{k!\,h!}\ \left[\frac{\partial^{k+h}[u(x,y)v(x,y)]}{\partial x^k \partial y^h}\right]_{(0,0)}$$

tanımından

$$W(0,0) = [u(x,y)v(x,y)]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= U(0,0)V(0,0)$$

$$W(1,0) = \frac{1}{1!\,0!}\frac{\partial}{\partial x}[u(x,y)v(x,y)]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}v(x,y) + u(x,y)\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= U(1,0)V(0,0) + U(0,0)V(1,0)$$

$$W(2,0) = \frac{1}{2!\,0!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[u(x,y)v(x,y)]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= U(2,0)V(0,0) + U(1,0)V(1,0) + U(0,0)V(2,0)$$

$$W(0,1) = U(0,1)V(0,0) + U(0,0)V(0,1)$$

$$W(1,1) = U(1,1)V(0,0) + U(1,0)V(0,1) + U(0,1)V(1,0) + U(0,0)V(1,1)$$

$$W(1,2) = U(1,2)V(0,0) + U(1,1)V(0,1) + U(1,0)V(0,2) + U(0,2)V(1,0) + U(0,1)V(1,1) + U(0,0)V(1,2)$$

$$W(0,2) = U(0,2)V(0,0) + U(0,1)V(0,1) + U(0,0)V(0,2)$$

$$W(2,1) = U(2,1)V(0,0) + U(2,0)V(0,1) + U(1,1)V(1,0) + U(1,0)V(1,1) + U(0,1)V(2,0) + U(0,0)V(2,1)$$

$$W(2,2) = U(2,2)V(0,0) + U(2,1)V(0,1) + U(2,0)V(0,2) + U(1,2)V(1,0) + U(1,1)V(1,1) + U(1,0)V(1,2) + U(0,2)V(2,0) + U(0,1)V(2,1) + U(0,0)V(2,2)$$

olur. Bu eşitlikleri genelleştirerek

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U(r,h-s)V(k-r,s)$$

eşitliğini elde ederiz [11].

TEOREM 4.2.9:

Eğer

$$w(x,y) = x^m y^n$$

ise

$$W(k,h) = \delta(k-m,h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n)$$

dir. Burada

$$\delta(k-m,h-n) = \begin{cases} 1, & k = m \; ve \; h = n \\ 0, & k \neq m \; ve \; h \neq n \end{cases}$$

olur [11,12].

İSPAT:

Eğer

$$w(x,y) = x^m y^n$$

ise

$$\left[\frac{\partial w(x,y)^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = \begin{cases} k!\,h! & , \quad k = m \; ve \; h = n \\ 0 & , \quad k \neq m \; veya \; h \neq n \end{cases}$$

olduğundan

$$W(k,h) = \left[\frac{1}{k!\,h!}\frac{\partial w(x,y)^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \delta(k-m, h-n) = \delta(k-m)\delta(h-n)$$

$$\delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$$

$$\delta(h-n) = \begin{cases} 1, & h = n \\ 0, & h \neq n \end{cases}$$

olur [11].

TEOREM 4.2.10:

Eğer

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

ise

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)V(k-r+1,s)$$

dir [12].

İSPAT:

$$W(0,0) = \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = U(1,0)V(1,0)$$

$$W(1,0) = \frac{1}{1!\,0!}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{1}{1!\,0!}\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= 2U(2,0)V(1,0) + 2U(1,0)V(2,0)$$

$$W(2,0) = \frac{1}{2!\,0!}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= 3U(3,0)V(1,0) + 4U(2,0)V(2,0) + 3U(1,0)V(3,0)$$
$$W(0,1) = U(1,1)V(1,0) + U(1,0)V(1,1)$$
$$W(1,1) = 2U(2,1)V(1,0) + 2U(2,0)V(1,1) + 2U(1,1)V(2,0) + 2U(1,0)V(2,1)$$
$$W(2,2) = 3U(3,2)V(1,0) + 3U(3,1)V(1,1) + 3U(3,0)V(1,2) + 4U(2,2)V(2,0)$$
$$+ 4U(2,1)V(2,1) + 4U(2,0)V(2,2) + 3U(1,2)V(3,0)$$
$$+ 3U(1,1)V(3,1) + 3U(1,0)V(3,2)$$

Bu eşitlikleri genelleştirerek

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)V(k-r+1,s)$$

olur [12].

TEOREM 4.2.11:
Eğer

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

ise

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+1)(s+1)U(r,h-s+1)V(k-r,s+1)$$

dir [12].

İSPAT:

$$W(0,0) = \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = U(0,1)V(0,1)$$

$$W(1,0) = \frac{1}{1!\,0!}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{1}{1!\,0!}\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= U(1,1)V(0,1) + U(0,1)V(1,1)$$

$$W(2,0) = \frac{1}{2!\,0!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= U(0,1)V(2,1) + U(1,1)V(1,1) + U(2,1)V(0,1)$$

$$W(0,1) = 2U(0,2)V(0,1) + 2U(0,1)V(0,2)$$

$$W(1,1) = 2U(0,2)V(1,1) + 2U(0,1)V(1,2) + 2U(1,2)V(0,1) + 2U(1,1)V(0,2)$$

$$\begin{aligned} W(2,2) = {} & 3U(0,3)V(2,1) + 4U(0,2)V(2,2) + 3U(0,1)V(2,3) + 3U(1,3)V(1,1) \\ & + 4U(1,2)V(1,2) + 3U(1,1)V(1,3) + 3U(2,3)V(0,1) \\ & + 4U(2,2)V(0,2) + 3U(2,1)V(0,3) \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri genelleştirerek

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(h-s+1)(s+1)U(r,h-s+1)V(k-r,s+1)$$

olur [12].

TEOREM 4.2.12:

Eğer

$$w(x,y) = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

ise

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)$$

olur [12].

İSPAT:

$$W(0,0) = \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}} = U(1,0)V(0,1)$$

$$W(1,0) = \frac{1}{1!\,0!}\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= \frac{1}{1!\,0!}\left[\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x \partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= 2U(2,0)V(0,1) + U(1,0)V(1,1)$$

$$W(2,0) = \frac{1}{2!\,0!}\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right]_{\substack{x=0\\y=0}}$$

$$= 3U(3,0)V(1,0) + 2U(2,0)V(1,1) + U(1,0)V(2,1)$$

$$W(0,1) = 2U(1,0)V(0,2) + U(1,1)V(0,1)$$

$$W(1,1) = 4U(2,0)V(0,2) + 2U(2,1)V(0,1) + 2U(1,0)V(1,2) + U(1,1)V(1,1)$$

$$\begin{aligned} W(2,2) = {} & 9U(3,0)V(0,3) + 6U(3,1)V(0,2) + 3U(3,2)V(0,1) + 6U(2,0)V(1,3) \\ & + 4U(2,1)V(1,2) + 2U(2,2)V(1,1) + 3U(1,0)V(2,3) \\ & + 2U(1,1)V(2,2) + U(1,2)V(2,1) \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri genelleştirerek

$$W(k,h) = \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)$$

olur [12].

BÖLÜM 5

5.1. KOMPLEKS KISMİ TÜREVLER

$w(z,\bar{z})$ kompleks değişkenli kompleks değerli bir fonksiyon olsun. $w(z,\bar{z})$ fonksiyonunun z ve $\bar{z}$ değişkenlerine göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\,\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{5.2}$$

dir.

$$w(z,\bar{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} \tag{5.3}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial y} \tag{5.4}$$

olduğundan

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{5.5}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{5.6}$$

elde edilir.

$w(z,\bar{z})$ fonksiyonunun z ve $\bar{z}$ değişkenlerine göre ikinci mertebeden türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad (5.8)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{4}\Delta w \quad (5.9)$$

$$w(z,\bar{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z} \partial z} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] \quad [13] \quad (5.12)$$

5.2. UYGULAMALAR

Bu kısımda kompleks kısmi türev formülleri ve iki boyutlu diferansiyel dönüşüm metodunu kullanarak kompleks diferansiyel denklem sistemleri çözmeye çalıştık. Verdiğimiz örneklerden birincisi ve ikincisi birinci basamaktan sabit katsayılı, üçüncüsü ikinci basamaktan sabit katsayılı, dördüncüsü birinci basamaktan değişken katsayılı, beşincisi ise birinci basamaktan lineer olmayan denklem sistemi olarak seçildi.

ÖRNEK 1:

Aşağıdaki kompleks diferansiyel denklem sistemini çözünüz.

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{2\partial w_2}{\partial \bar{z}} = 2z + 6 \quad (5.13)$$

$$\frac{3\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} = 5 \tag{5.14}$$

başlangıç değer değerleri

$$w_1(x,0) = x^2 \tag{5.15}$$

$$w_2(x,0) = 8x \tag{5.16}$$

olsun.

$w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2$ ve (5.5), (5.6) olduğundan (5.13), (5.14) eşitlikleri şu şekilde yazılır;

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} + 2\frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + 2\frac{\partial u_2}{\partial x} - 2\frac{\partial v_2}{\partial y} = 4x + 12 \tag{5.17}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} + 2\frac{\partial v_2}{\partial x} - 2\frac{\partial u_2}{\partial y} = 4y \tag{5.18}$$

$$3\frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = \frac{3}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \frac{3}{2}i\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)$$

$$3\frac{\partial u_1}{\partial x} - 3\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 10 \tag{5.19}$$

$$3\frac{\partial v_1}{\partial x} + 3\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \tag{5.20}$$

Diferansiyel dönüşüm metodu ile (5.17) - (5.20) şu şekilde yazılır;

$$(k+1)U_1(k+1,h) + (h+1)V_1(k,h+1) + 2(k+1)U_2(k+1,h) - 2(h+1)V_2(k,h+1) = 4\delta(k-1,h) + 12\delta(k,h) \tag{5.21}$$

$$(k+1)V_1(k+1,h) - (h+1)U_1(k,h+1) + 2(k+1)V_2(k+1,h) + 2(h+1)U_2(k,h+1) = 4\delta(k,h-1) \tag{5.22}$$

$$3(k+1)U_1(k+1,h) - 3(h+1)V_1(k,h+1) + (k+1)U_2(k+1,h) + (h+1)V_2(k,h+1) = 10\delta(k,h) \tag{5.23}$$

$$3(k+1)V_1(k+1,h) + 3(h+1)U_1(k,h+1) + (k+1)V_2(k+1,h) - (h+1)U_2(k,h+1) = 0 \tag{5.24}$$

(5.15) ve (5.16) başlangıç koşulları ile aşağıdakiler elde edilir;

$$U_1(0,0)=0, \quad U_1(1,0)=0, \quad U_1\,(2,0)=1, \quad U_1(i,0)=0 \quad (i>2)$$
$$V_1(i,0)=0 \quad (i\epsilon N)$$
$$U_2(0,0)=0, \quad U_2\ (1,0)=8, \quad U_2(i,0)=0 \quad (i\geq 2) \tag{5.25}$$

(5.21) - (5.22) de $h=0$ yazılırsa;

$$(k+1)U_1(k+1,0)+V_1(k,1)+2(k+1)U_2(k+1,0)-2V_2(k,1)= 4\delta(k-1,0)+12\delta(k,0), \tag{5.26}$$
$$(k+1)V_1(k+1,0)-U_1(k,1)+2(k+1)V_2(k+1,0)+2U_2(k,1)= 0, \tag{5.27}$$
$$3(k+1)U_1(k+1,0)-3V_1(k,1)+(k+1)U_2(k+1,0)+V_2(k,1)= 10\delta(k,0), \tag{5.28}$$
$$3(k+1)V_1(k+1,0)+3U_1(k,1)+(k+1)V_2(k+1,0)-U_2(k,1)= 0 \tag{5.29}$$

elde edilir.

$V_1(i,0)=0$ $(i\epsilon N)$ olduğunu biliyoruz. Böylece (5.27) ve (5.29) ile;

$$\left.\begin{array}{l} U_2(k,1)=3U_1(k,1) \\ 2U_2(k,1)=U_1(k,1) \end{array}\right\} \ U_1(k,1)=U_2(k,1)=0 \tag{5.30}$$

elde edilir.

(5.26) de k$=0$ yazılırsa;

$$U_1(1,0)+V_1(0,1)+2U_2(1,0)-2V_2(0,1)=12,$$
$U_1(1,0)=0$ ve $U_2\ (1,0)=8$

olduğunu biliyoruz. Böylece

$$V_1(0,1) - 2V_2(0,1) = -4 \tag{5.31}$$

(5.28) de k= 0 yazılırsa ;

$$3U_1(1,0) - 3V_1(0,1) + U_2(1,0) + V_2(0,1) = 10$$
$$-3V_1(0,1) + V_2(0,1) = 2 \tag{5.32}$$

elde edilir.

(5.32) eşitliğinin her iki tarafı 2 ile çarpılırsa

$$-6V_1(0,1) + 2V_2(0,1) = 4 \tag{5.33}$$

elde edilir.

(5.31) ve (5.33) taraf tarafa toplanırsa;

$$5V_1(0,1) = 0\ ,$$
$$V_1(0,1) = 0 \text{ ve } \ V_2(0,1) = 2 \tag{5.34}$$

elde edilir.

(5.26) de $\mathrm{k} = 1, \mathrm{h} = 0$ yazılırsa ;

$$2U_1(2,0) + V_1(1,1) + 4U_2(2,0) - 2V_2(1,1) = 4,$$
$$V_1(1,1) - 2V_2(1,1) = 2 \tag{5.35}$$

elde edilir.

(5.28) de $\mathrm{k} = 1$ yazılırsa ;

$$36(2,0) - 3V_1(1,1) + 2U_2(2,0) + V_2(1,1) = 0\ ,$$
$$-3V_1(1,1) + V_2(1,1) = -6 \tag{5.36}$$

elde edilir.

(5.31) eşitliğinin her iki tarafı 2 ile çarpılırsa

$$-6V_1(1,1) + 2V_2(1,1) = -12 \tag{5.37}$$

elde edilir.

(5.35) ve (5.37) taraf tarafa toplanırsa

$$-5V_1(1,1) = -10\ ,$$
$$V_1(1,1) = 2 \text{ and } V_2(1,1) = 0 \tag{5.38}$$

elde edilir.

(5.22) $\mathrm{k} = 0$ ve $\mathrm{h} = 1$ yazılırsa;

$$V_1(1,0) - 2U_1(0,2) + 2V_2(1,1) + 4U_2(0,2) = 0,$$
$$-2U_1(0,2) + 4U_2(0,2) = 2 \tag{5.39}$$

(5.24) eşitliğinde $\mathrm{k} = 0$ ve $\mathrm{h} = 1$ yazılırsa;

$$3V_1(1,1) + 6U_1(0,2) + V_2(1,1) - 2U_2(0,2) = 0,$$
$$6U_1(0,2) - 2U_2(0,2) = -6 \tag{5.40}$$

(5.39) eşitliğinin her iki tarafı 3 ile çarpılır ve (5.35) ve (5.37) taraf tarafa toplanırsa

$$-6U_1(0,2) + 12U_2(0,2) = 6,$$
$$6U_1(0,2) - 2U_2(0,2) = -6,$$
$$10U_2(0,2) = 0\ .$$

Böylece $U_2(0,2) = 0$ ve $U_1(0,2) = 0$ (5.41)

elde edilir.

(5.21) ve (5.23) de $\mathrm{h} = 0$ yazılırsa ve (5.25) kullanılarak

$V_1(k,1) = 2V_2(k,1)$ ve
$3V_1(k,1) = 2V_2(k,1)$

elde edilir.

Bu durum sadece

$$V_1(k,1) = 0, V_2(k,1) = 0 (k \geq 2) \tag{5.42}$$

olduğunda geçerli olur.

(5.22) ve (5.24) de $\mathrm{h} = 0$ yazılır ve (5.25) kullanılırsa

$-2U_1(k,2) + 4U_2(k,2) = 0$ ve
$6U_1(k,2) - 2U_2(k,2) = 0$

elde edilir.

Bu durum sadece

$$U_1(k,2) = 0, U_2(k,2) = 0 \ (k \geq 1) \tag{5.43}$$

olduğunda geçerli olur.

(5.21) ve (5.23) de $h = 2$ yazılır ve (5.43) kullanılırsa

$3V_1(k,3) - 6V_2(k,3) = 0$ ve
$-9V_1(k,3) + 3V_2(k,3) = 0$

elde edilir.

Bu durum sadece

$V_1(k,3) = 0$ and $V_2(k,3) = 0 \ (k \geq 0)$ (5.44)

olduğunda geçerli olur.

(4.2.9) ve (5.23) de $h = 1$ yazılırsa

$$(k+1)U_1(k+1,1) + 2V_1(k,2) + 2(k+1)U_2(k+1,1) - 4V_2(k,2) = 0$$
$$3(k+1)U_1(k+1,1) - 6V_1(k,2) + (k+1)U_2(k+1,1) + 2V_2(k,2) = 0$$

elde edilir.(5.30) eşitliği kullanılarak

$2V_1(k,2) - 4V_2(k,2) = 0$ ve
$-6V_1(k,2) + 2V_2(k,2) = 0$

elde edilir.

Bu durum sadece

$V_1(k,2) = 0$ and $V_2(k,2) = 0 \ (k \epsilon \aleph)$ (5.45)

olduğunda geçerli olur.

(5.22) ve (5.24) de $h = 2$ yazılırsa

$$(k+1)V_1(k+1,2) - 3U_1(k,3) + 2(k+1)V_2(k+1,2) + 6U_2(k,3) = 0,$$
$$3(k+1)V_1(k+1,2) + 9U_1(k,3) + (k+1)V_2(k+1,2) - 3U_2(k,3) = 0$$

elde edilir. (5.45) eşitlikleri kullanılarak

$3U_1(k,3) + 6U_2(k,3) = 0$ ve
$9U_1(k,3) - 3U_2(k,3) = 0$ elde edilir.

Bu durum sadece

$$U_1(k,3) = 0 \text{ ve } U_2(k,3) = 0 \quad (k \epsilon N) \tag{5.46}$$

olduğunda geçerli olur.

(5.25) - (5.46) eşitlikleri kullanılarak U_1, U_2, V_1, V_2 nin bütün bileşenlerinin sıfır olduğu bulunur. Böylece aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_1(k,h)x^k y^h \\ &= x^2 - y^2 \end{aligned} \tag{5.47}$$

$$\begin{aligned} v_1(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V_1(k,h)x^k y^h \\ &= 2xy \end{aligned} \tag{5.48}$$

$$\begin{aligned} u_2(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_2(k,h)x^k y^h \\ &= 8x \end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned} v_2(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V_2(k,h)x^k y^h \\ &= 2y \end{aligned} \tag{5.50}$$

(5.47) - (5.50) den

$$\begin{aligned} w_1(x,y) &= u_1(x,y) + v_1(x,y) \\ &= x^2 - y^2 + i2xy \\ &= z^2 \\ w_2(x,y) &= u_2(x,y) + v_2(x,y) \\ &= 8x + i2y \\ &= 5x + 3x - i3y + i5y \\ &= 3\bar{z} + 5z \end{aligned}$$

elde edilir.

ÖRNEK 2:

Başlangıç koşulları

$$w_1(x,0) = x^3 - 2x \tag{5.51}$$

$$w_2(x,0) = 4x^2 \tag{5.52}$$

olan

$$2\frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} = 6z^2 - 4z \tag{5.53}$$

$$\frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} + 3\frac{\partial w_2}{\partial z} = 12\bar{z} - 2 \tag{5.54}$$

kompleks diferansiyel denklem sistemini çözünüz

(5.53) - (5.54) sisteminde $w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2$ yazılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} - i\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) - \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + i\frac{\partial v_2}{\partial x} + i\frac{\partial u_2}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial y}\right)$$
$$= 12(x+iy)^2 - 8(x+iy) \tag{5.55}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} + i\frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} + 3\frac{\partial u_2}{\partial x} + 3i\frac{\partial v_2}{\partial x} - 3i\frac{\partial u_2}{\partial y} + 3\frac{\partial v_2}{\partial y}$$
$$= 24(\mathrm{x} - \mathrm{iy}) - 4 \tag{5.56}$$

(5.55), (5.56) eşitlikleri reel ve imajiner kısımlarına ayrılırsa aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$2\frac{\partial u_1}{\partial x} + 2\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 12(x^2 - y^2) - 8x \tag{5.57}$$

$$2\frac{\partial v_1}{\partial x} - 2\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 24xy - 8y \tag{5.58}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} - 2\frac{\partial v_1}{\partial y} + 3\frac{\partial u_2}{\partial x} + 3\frac{\partial v_2}{\partial y} = 24x - 4 \tag{5.59}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + 3\frac{\partial v_2}{\partial x} - 3\frac{\partial v_2}{\partial y} = -24y \tag{5.60}$$

(5.51), (5.52) başlangıç koşullarından

$$U_1(0,0) = 0, \quad U_1(1,0) = -2, \quad U_1\,(2,0) = 0, \quad U_1(3,0) = 1,$$
$$U_1(i,0) = 0 \quad (i > 3), \quad V_1(i,0) = 0 \quad (i\epsilon N),$$
$$U_2(0,0) = 0, \quad U_2\ (1,0) = 0, \quad U_2(2,0) = 4,$$
$$U_2(i,0) = 4 \quad (i \geq 3) \quad V_2(i,0) = 0 \quad (i\epsilon N) \tag{5.61}$$

elde edilir.

Diferansiyel dönüşümden (5.57) - (5.60) eşitlikleri aşağıdaki gibi yazılır:

$$2(k+1)U_1(k+1,h) + 2(h+1)V_1(k,h+1) - (k+1)U_2(k+1,h) + (h+1)V_2(k,h+1) \;=\; 12\delta(k-2,h) - \delta(k,h-2) \;\; -8\delta(k-1,h) \tag{5.62}$$

$$2(k+1)V_1(k+1,h) - 2(h+1)U_1(k,h+1) - (k+1)V_2(k+1,h) - (h+1)U_2(k,h+1) = 24\delta(k-1,h-1) - \delta(k,h-2) \tag{5.63}$$

$$(k+1)U_1(k+1,h) - 2(h+1)V_1(k,h+1) + 3(k+1)U_2(k+1,h) + 3(h+1)V_2(k,h+1) = 24\delta(k-1,h) - 4\delta(k,h) \tag{5.64}$$

$$(h+1)U_1(k,h+1) + (k+1)V_1(k+1,h) + 3(k+1)V_2(k+1,h) - 3(h+1)U_2(k,h+1) = -24\,\delta(k,h-1) \tag{5.65}$$

Eğer (5.63) ve (5.65) de $h \;=\; 0$ yazılırsa (5.61) dan

$$U_1(k,1) = U_2(k,1) = 0 \tag{5.66}$$

Eğer (5.62) ve (5.64) de $k \;=\; 0$, $h = 0$ yazılırsa (5.61) dan

$$\mathrm{V}_1(0,1) = \; 2, \mathrm{V}_2(0,1) = \; 0 \tag{5.67}$$

Eğer (5.63) ve (5.65)de $k \;=\; 1$ $h = 0$ yazılırsa (5.61) dan

$$\mathrm{V}_1(1,1) \;=\; \mathrm{V}_2(1,1) \;=\; 0 \tag{5.68}$$

Eğer (5.63) ve (5.65) de $k = 2$, $h = 0$yazılırsa (5.61) dan

$$V_1(2,1) = 3, V_2(2,1) = 0 \tag{5.69}$$

Eğer (5.63) ve (5.65) de $k = 0, h = 1$ yazılırsa (5.61) ve (5.64) den

$$U_1(0,2) = 0, U_2(0,2) = 4 \tag{5.70}$$

Eğer (5.62) ve (5.64)de $h = 1$yazılırsa (5.61) ve (5.66) den

$$V_1(k,2) = V_2(k,2) = 0 \tag{5.71}$$

Eğer (5.63) ve (5.65) de $h = 2$ yazılırsa (5.61) dan

$$U_1(k,3) = U_2(k,3) = 0 \tag{5.72}$$

Eğer (5.63) ve (5.65) de $k = 1, h = 1$yazılırsa (5.65) den

$$U_1(1,2) = -3, U_2(1,2) = 0 \tag{5.73}$$

elde edilir

(5.66) – (5.73) eşitliklerinden U_1, U_2, V_1 ve V_2 nin diğer bileşenlerinin sıfır olduğu görülür. Bu sayede

$$\begin{aligned} u_1(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_1(k,h)x^k y^h \\ &= x^3 - 3xy^2 - 2x \end{aligned} \tag{5.74}$$

$$\begin{aligned} v_1(x,y) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V_1(k,h)x^k y^h \\ &= 3x^2y - y^3 + 2y \end{aligned} \tag{5.75}$$

$$u_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_2(k,h)x^k y^h$$
$$= 4x^2 + 4y^2 \tag{5.76}$$
$$v_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V_2(k,h)x^k y^h$$
$$= 0 \tag{5.77}$$

(5.74) - (5.77) den aşağıdakiler elde edilir.

$$\begin{aligned} w_1(x,y) &= u_1(x,y) + v_1(x,y) \\ &= x^3 - 3xy^2 - 2x + i(3x^2y - y^3 + 2y) \\ &= z^3 - 2\bar{z} \\ w_2(x,y) &= u_2(x,y) + v_2(x,y) \\ &= 4x^2 + 4y^2 \\ &= 4z\bar{z} \end{aligned}$$

ÖRNEK 3:

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial z \partial \bar{z}} = 3 \tag{5.78}$$
$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial z^2} + \frac{\partial w_1}{\partial z} - \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} = z \tag{5.79}$$

Başlangıç koşulları aşağıda verilen kompleks diferansiyel denklem sisteminin çözünüz:

$$w_1(x,0) = x^2 \tag{5.80}$$
$$\frac{\partial w_1}{\partial y}(x,0) = 2ix \tag{5.81}$$
$$w_2(x,0) = x^2 \tag{5.82}$$
$$\frac{\partial w_2}{\partial y}(x,0) = 0 \tag{5.83}$$

$w_1 = u_1 + iv_1$, $w_2 = u_2 + iv_2$ ve (5.7), (5.8), (5.9) dan dolayı sistem aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - 2i\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right) = 3 \quad (5.84)$$

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - 2i\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} - i\frac{\partial w_1}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + i\frac{\partial w_2}{\partial y}\right) = z \quad (5.85)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}\right) - 2i\left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right) = 12 \quad (5.86)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2}\right) - 2i\left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} + i\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2}\right) + 2\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)$$

$$-2i\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + i\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) - 2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + i\frac{\partial v_2}{\partial x}\right) - 2i\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + i\frac{\partial v_2}{\partial y}\right) = 4z \quad (5.87)$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 12 \quad (5.88)$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} = 0 \quad (5.89)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial u_1}{\partial x} + 2\frac{\partial v_1}{\partial y} - 2\frac{\partial u_2}{\partial x} + 2\frac{\partial v_2}{\partial y} = 4x \quad (5.90)$$

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial v_1}{\partial x} - 2\frac{\partial u_1}{\partial y} - 2\frac{\partial v_2}{\partial x} - 2\frac{\partial u_2}{\partial y} = 4y \quad (5.91)$$

(5.80) - (5.83) ve başlangıç koşullarından

$U_1(0,0) = 0,$ $U_1(1,0) = 0,$ $U_1(2,0) = 1,$ $U_1(i,0) = 0$ $(i > 2)$
$V_1(i,0) = 0$ $(i \epsilon N)$ $V_1(0,1) = 0,$ $V_1(1,1) = 2,$ $V_1(i,0) = 0,$
$V_1(i,1) = 0$
$U_2(0,0) = 0,$ $U_2(1,0) = 0,$ $U_2(2,0) = 1$ $V_2(i,0) = 0,$
$U_2(i,1) = V_2(i,1) = 0 (i \epsilon N)$ (5.92)
elde edilir.

Diferansiyel dönüşümden (5.84) - (5.87) aşağıdaki gibi yazılır:

$$
\begin{aligned}
(k+2)(k+1)U_1(k+2,h) &+ (k+1)(h+1)V_1(k+1,h+1) \\
&- (h+2)(h+1)U_1(k,h+2) + (k+2)(k+1)U_2(k+2,h) \\
&+ (h+2)(h+1)U_2(k,h+2) = 12\delta(k,h)
\end{aligned}
\tag{5.93}
$$

$$
\begin{aligned}
(k+2)(k+1)V_1(k+2,h) &- 2(k+1)(h+1)U_1(k+1,h+1) \\
&- (h+2)(h+1)V_1(k,h+2) + (k+2)(k+1)V_2(k+2,h) \\
&+ (h+2)(h+1)V_2(k,h+2) = 0
\end{aligned}
\tag{5.94}
$$

$$
\begin{aligned}
(k+2)(k+1)U_2(k+2,h) &+ 2(k+1)(h+1)V_2(k+1,h+1) \\
&- (h+2)(h+1)U_2(k,h+2) + 2(k+1)U_1(k+1,h) \\
&+ 2(h+1)V_1(k,h+1) - 2(k+1)U_2(k+1,h) \\
&+ 2(h+1)V_2(k,h+1) = 4\delta(k-1,h)
\end{aligned}
\tag{5.95}
$$

$$
\begin{aligned}
(k+2)(k+1)V_2(k+2,h) &- 2(k+1)(h+1)V_2(k+1,h+1) \\
&- (h+2)(h+1)V_2(k,h+2) + 2(k+1)V_1(k+1,h) \\
&- 2(h+1)U_1(k,h+1) - 2(k+1)V_2(k+1,h) \\
&- 2(h+1)U_2(k,h+1) = 4\delta(k,h-1)
\end{aligned}
\tag{5.96}
$$

(5.88) – (5.91) eşitliklerinde $h = 0$ yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&U_1(0,2) = -1, U_2(0,2) = 1,\ U_2(i,2) = 0,\ \ U_1(i,2) = 0 (i \geq 1), \\
&V_1(i,2) = V_2(i,2) = 0 (i \geq 0)
\end{aligned}
\tag{5.97}
$$

elde edilir.

Benzer şekilde (5.93) – (5.96) da $h = 1$ yazılırsa

$$
U_1(k,3) = U_2(k,3) = V_1(k,3) = V_2(k,3) = 0\ (i \geq 0) \tag{5.98}
$$

elde edilir.

Benzer şekilde işlemlere devam edilir. U_i ve V_i nin diğer bütün bileşenlerinin sıfır olduğu açıktır. Böylece;

$$u_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_1(k,h)x^k y^h$$
$$= x^2 - y^2$$
$$v_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V_1(k,h)x^k y^h$$
$$= 2xy$$
$$u_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_2(k,h)x^k y^h$$
$$= x^2 + y^2$$
$$v_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V_2(k,h)x^k y^h$$
$$= 0$$

elde edilir.

Böylece

$$w_1(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$$
$$w_1(z) = x^2 - y^2 + i2xy = z^2$$

ve

$$w_2(z) = u_2(x,y) + iv_2(x,y)$$
$$w_2(z) = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z.\bar{z}$$

ÖRNEK 4:

$$\frac{\partial w_1}{\partial z} + z\frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} = z^2 + 2z \tag{5.99}$$

$$\bar{z}^2\frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} - 2\frac{\partial w_2}{\partial z} = (\bar{z})^2 - 2\bar{z} \tag{5.100}$$

$$w_1(x,0) = x^2 + x \tag{5.101}$$
$$w_2(x,0) = x^2 \tag{5.102}$$

Başlangıç koşulları aşağıda verilen kompleks diferansiyel denklem sisteminin çözünüz:

$z = x + iy,\ w_1 = u_1 + iv_1\ , w_2 = u_2 + iv_2$ ve (5.5), (5.6) den (5.99), (5.100) sistemi aşağıdaki gibi yazılır:

$$\frac{\partial w_1}{\partial x} - i\frac{\partial w_1}{\partial y} + (x+iy)\left(\frac{\partial w_2}{\partial x} + i\frac{\partial w_2}{\partial y}\right) = 2((x+iy)^2 + 2(x+iy)) \tag{5.103}$$

$$(x-iy)^2\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} + i\frac{\partial w_1}{\partial y}\right) - 2\left(\frac{\partial w_2}{\partial x} - i\frac{\partial w_2}{\partial y}\right) = 2\big((x-iy)^2 - 2(x-iy)\big) \tag{5.104}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} - i\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + i\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + (x+iy)\left[\frac{\partial u_2}{\partial x} + i\frac{\partial v_2}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + i\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\right]$$
$$= 2x^2 - 2y^2 + 4x + i(4xy + 4y) \tag{5.105}$$

$$(x^2 - y^2 - 2ixy)\left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + i\frac{\partial v_1}{\partial x} + i\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + i\frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\right] - 2\left[\frac{\partial u_2}{\partial x} + i\frac{\partial v_2}{\partial x} -\right.$$
$$\left. i\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + i\frac{\partial v_2}{\partial y}\right)\right] = 2x^2 - 2y^2 - 4x - i(4xy + 4y) \tag{5.106}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} + x\frac{\partial u_2}{\partial x} - y\frac{\partial v_2}{\partial x} - x\frac{\partial v_2}{\partial y} - y\frac{\partial u_2}{\partial y} = 2x^2 - 2y^2 + 4x \tag{5.107}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} + x\frac{\partial v_2}{\partial x} + x\frac{\partial u_2}{\partial y} + y\frac{\partial u_2}{\partial x} - y\frac{\partial v_2}{\partial y} = 4xy + 4y \tag{5.108}$$

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial u_1}{\partial x} - (x^2 - y^2)\frac{\partial v_1}{\partial y} + 2xy\frac{\partial v_1}{\partial x} + 2xy\frac{\partial u_1}{\partial y} - 2\frac{\partial u_2}{\partial x} - 2\frac{\partial v_2}{\partial y}$$
$$= 2x^2 - 2y^2 - 4 \tag{5.109}$$

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial v_1}{\partial x} + (x^2 - y^2)\frac{\partial u_1}{\partial y} - 2xy\frac{\partial u_1}{\partial x} + 2xy\frac{\partial v_1}{\partial y} - 2\frac{\partial v_2}{\partial x} - 2\frac{\partial u_2}{\partial y}$$
$$= -4xy + 4y \tag{5.110}$$

(5.107) diferansiyel dönüşüm metodu ile aşağıdaki gibi yazılır:

$$(k+1)U_1(k+1,h)+(h+1)V_1(k,h+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-s)(k-r+1)U_2(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-s-1)(k-r+1)V_2(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-s)(s+1)V_2(k-r,s+1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-s-1)(s+1)U_2(k-r,s+1)$$
$$=2\delta(k-2,h)-2\delta(k,h-2)+4\delta(k-1,h)$$
(5.111)

(5.108) diferansiyel dönüşüm metodu ile aşağıdaki gibi yazılır:

$$(k+1)V_1(k+1,h)-(h+1)U_1(k,h+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-s)(k-r+1)V_2(k-r+1,s)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-s)(s+1)U_2(k-r,s+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-s-1)(k-r+1)U_2(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-s-1)(s+1)V_2(k-r,s+1)$$
$$=4\delta(k-1,h-1)$$
$$+4\delta(k,h-1)$$
(5.112)

(5.109) diferansiyel dönüşüm metodu ile aşağıdaki gibi yazılır:

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-2,h-s)(k-r+1)U_1(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-2-s)(k-r+1)U_1(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-2,h-s)(s+1)V_1(k-r,s+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-2-s)(s+1)V_1(k-r,s+1)$$
$$+2\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-1-s)(k-r+1)V_1(k-r+1,s)$$
$$+2\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-1-s)(s+1)U_1(k-r,s+1)$$
$$-2(k+1)U_2(k+1,h)-2(h+1)V_2(k,h+1)=2\delta(k-2,h)-2\delta(k,h-2)-4\delta(k-1,h) \qquad (5.113)$$

(5.110) diferansiyel dönüşüm metodu ile aşağıdaki gibi yazılır:

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-2,h-s)(k-r+1)V_1(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-2-s)(k-r+1)V_1(k-r+1,s)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-2,h-s)(s+1)U_1(k-r,s+1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r,h-2-s)(s+1)U_1(k-r,s+1)$$
$$-2\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-1-s)(k-r+1)U_1(k-r+1,s)$$
$$+2\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\delta(r-1,h-1-s)(s+1)V_1(k-r,s+1)$$
$$-2(k+1)V_2(k+1,h)-2(h+1)U_2(k,h+1)$$
$$=-4\delta(k-1,h-1)-4\delta(k,h-1) \qquad (5.114)$$

(5.101) ve (5.102) başlangıç koşularından aşağıdaki gibi yazılır:

$U_1(0,0)=0,\quad U_1(1,0)=1,\quad U_1\,(2,0)=1,\quad U_1(i,0)=0 \quad (i>2)$
$V_1(i,0)=0 \quad (i\epsilon N)$

$U_2(0,0) = 0, \qquad U_2\ (1,0) = 0, \qquad U_2\ (2,0) = 1, \quad ,U_2(i,0) = 1 \qquad (i > 2)$
$V_2(i,0) = 0 \qquad (i \epsilon N)$ (5.115)

Eğer (5.111) de $k = 0, h = 0$ yazılırsa ve (5.115) kullanılırsa

$V_1(0,1) = -1$ (5.116)

Eğer (5.111) de $k = 1, h = 0$ yazılırsa ve (5.115) kullanılırsa

$V_1(1,1) = 2$ (5.117)

Eğer (5.113) de $k = 0, h = 0$ yazılırsa ve (5.115) kullanılırsa

$V_2(0,1) = 0$ (5.118)

Eğer (5.112) de $k = 0, h = 1$ yazılırsa ve (5.115) ve (5.118) kullanılırsa

$U_1(0,2) = -1$ (5.119)

Eğer (5.113) te $k = 1, h = 0$ yazılırsa ve (5.115) kullanılırsa

$V_2(1,1) = 0$ (5.120)

Eğer (5.114) de $k = 0, h = 1$ yazılırsa ve (5.120) kullanılırsa

$U_2(0,2) = 1$ (5.121)

Benzer şekilde işlemlere devam edilir. Ve U_i ve V_i nin diğer bütün bileşenlerinin sıfır olduğu açıktır. Böylece;

$$u_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_1(k,h)x^k y^h$$
$$= x^2 - y^2 + x$$

$$v_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V_1(k,h)x^k y^h$$
$$= 2xy - y$$
$$u_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_2(k,h)x^k y^h$$
$$= x^2 + y^2$$
$$v_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V_2(k,h)x^k y^h$$
$$= 0$$

Böylece

$$w_1(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$$
$$w_1(z) = x^2 - y^2 + x + i(2xy - y) = z^2 + \bar{z}$$

ve

$$w_2(z) = u_2(x,y) + iv_2(x,y)$$
$$w_2(z) = x^2 + y^2 = (x+iy)(x-iy) = z.\bar{z}$$

elde edilir.

ÖRNEK 5:

Başlangıç koşulları aşağıda verilen kompleks diferansiyel denklem sisteminin çözünüz:

$$w_2 \frac{\partial w_1}{\partial z} + \frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} = \bar{z} + 2z + 1 \tag{5.122}$$
$$w_1 \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w_2}{\partial z} = 2 \tag{5.123}$$
$$w_1(x,0) = x \tag{5.124}$$
$$w_2(x,0) = 3x \tag{5.125}$$

$w_1 = u_1 + iv_1, w_2 = u_2 + iv_2$ ve (5.5), (5.6) den dolayı (5.122) ve (5.123) eşitlikleri şu şekilde yazıabilir:

$$(u_2 + iv_2)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x}\right)$$
$$= x - iy + 2x + 2yi + 1 \tag{5.126}$$

$$(u_1 + iv_1)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x}\right)\right] + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)$$
$$= 2 \tag{5.127}$$

$$u_2\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial v_1}{\partial y} - v_2\frac{\partial v_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial y} = 6x + 2 \tag{5.128}$$

$$v_2\frac{\partial u_1}{\partial x} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial y} + u_2\frac{\partial v_1}{\partial x} - u_2\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = 2y \tag{5.129}$$

$$u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - u_1\frac{\partial v_1}{\partial y} - v_1\frac{\partial u_1}{\partial y} - v_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} = 4 \tag{5.130}$$

$$v_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - v_1\frac{\partial v_1}{\partial y} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial y} + u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial y} = 0 \tag{5.131}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U_2(r, h-s)\,(k-r+1)U_1(k-r+1, s) \\
&\quad + \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U_2(r, h-s)\,(s+1)\ V_1(k-r, s+1) \\
&\quad - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V_2(r, h-s)\,(k-r+1)V_1(k-r+1, s) \\
&\quad + \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V_2(r, h-s)\,(s+1)U_1(k-r, s+1) \\
&\quad + (k+1)U_2(k+1, h) - (h+1)V_2(k, h+1) \\
&\quad = 6\delta(k-1, h) + 2\delta(k, h)
\end{aligned} \tag{5.132}$$

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V_2(r,h-s)\,(k-r+1)U_1(k-r+1,s)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V_2(r,h-s)\,(s+1)V_1(k-r,s+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U_2(r,h-s)\,(k-r+1)V_1(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U_2(r,h-s)\,(s+1)U_1(k-r,s+1)$$
$$+(h+1)U_2(k,h+1)+(k+1)V_2(k+1,h)=2\delta(k,h-1) \tag{5.133}$$

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U_1(r,h-s)\,(k-r+1)U_1(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U_1(r,h-s)\,(s+1)V_1(k-r,s+1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V_1(r,h-s)\,(s+1)U_1(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V_1(r,h-s)\,(k-r+1)V_1(k-r+1,s)$$
$$+(k+1)U_2(k+1,h)+(h+1)V_2(k,h+1)=4\delta(k,h) \tag{5.134}$$

$$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V_1(r,h-s)\,(k-r+1)U_1(k-r+1,s)$$
$$-\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} V_1(r,h-s)\,(s+1)V_1(k-r,s+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U_1(r,h-s)\,(s+1)U_1(k-r,s+1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U_1(r,h-s)\,(k-r+1)V_1(k-r+1,s)$$
$$+(k+1)V_2(k+1,h)-(h+1)U_2(k,h+1)=0$$

(5.135)

(5.124) ve (5.125) teki başlangıç koşullarından

$$U_1(0,0)=0,\ \ U_1(1,0)=0,\quad U_1(i,0)=0\quad (i>1),\ \ V_1(i,0)=0\qquad (i\epsilon N)$$
$$U_2(0,0)=0,\ \ U_2\ (1,0)=3,\quad U_2(i,0)=0\quad (i\geq 2),\ V_1(i,0)=0\qquad (i\epsilon N)$$

(5.136)

elde edilir.

(5.132) eşitliğinde $h=0$ yazılırsa

$$\sum_{r=0}^{k} U_2(r,0)\,(k-r+1)U_1(k-r+1,0)+\sum_{r=0}^{k} U_2(r,0)\,V_1(k-r,1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k} V_2(r,0)\,(k-r+1)V_1(k-r+1,0)$$
$$+\sum_{r=0}^{k} V_2(r,0)\,U_1(k-r,1)+(k+1)U_2(k+1,0)-V_2(k,1)$$
$$=6\delta(k-1,0)+2\delta(k,0)$$

(5.137)

elde edilir.

(5.137) de k= 0 yazılırsa

$$U_2(0,0)U_1(1,0)+U_2(0,0)V_1(0,1)+U_2(1,0)-V_2(0,1)=2$$
$$V_2(0,1)=1 \qquad (5.138)$$

bulunur.

(5.137) de k= 1 yazılırsa

$$U_2(0,0)2U_1(2,0)+U_2(1,0)U_1(1,0)$$
$$+U_2(0,0)V_1(1,1)+U_2(1,0)V_1(0,1)+U_2(2,0)-V_2(1,1)=6$$

(5.138) den dolayı

$$3 + 3V_1(0,1) - V_2(1,1) = 3$$
$$3V_1(0,1) - V_2(1,1) = 3 \qquad (5.139)$$

elde edilir.

(5.133) eşitliğinde $h = 0$ yazılırsa

$$\sum_{r=0}^{k} V_2(r,0)\,(k-r+1)U_1(k-r+1,0) + \sum_{r=0}^{k} V_2(r,h0)\,V_1(k-r,1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k} U_2(r,0)\,(k-r+1)V_1(k-r+1,0)$$
$$-\sum_{r=0}^{k} U_2(r,0)\,U_1(k-r,1) + U_2(k,1) + (k+1)V_2(k+1,0) = 0$$
$$(5.140)$$

bulunur.

(5.140) da $k = 0$ yazılırsa

$$U_2(0,1) - V_2(1,0) = 0 \qquad (5.141)$$

(5.140) da $k = 1$ yazılırsa

$$-U_2(0,0)U_1(1,1) - U_2(1,0)U_1(0,1) + U_2(1,1) + 2V_2(2,0) = 0 \qquad (5.142)$$
$$-3U_1(0,1) + U_2(1,1) = 0 \qquad (5.143)$$

(5.134) eşitliğinde $h = 0$ yazılırsa

$$\sum_{r=0}^{k} U_1(r,0)\,(k-r+1)U_1(k-r+1,0) - \sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h} U_1(r,0)\,V_1(k-r,1)$$
$$-\sum_{r=0}^{k} V_1(r,0)\,U_1(k-r+1,0)$$
$$-\sum_{r=0}^{k} V_1(r,0)\,(k-r+1)V_1(k-r+1,0) + (k+1)U_2(k+1,0)$$
$$+V_2(k,1) = 4\delta(k,0) \tag{5.144}$$

(5.2.132) de $k=0$ yazılırsa

$$U_1(0,0)U_1(1,0) - U_2(0,0)V_1(0,1) + U_2(1,0) + V_2(0,1) = 4$$
$$U_2(1,0) + V_2(0,1) = 4 \tag{5.145}$$

bulunur. (5.138) dan

$$U_2(1,0) = 3 \tag{5.146}$$

(5.144) de $k=1$ yazılırsa

$$U_1(0,0)2U_1(2,0) + U_1(1,0)U_1(1,0) - U_1(0,0)V_1(1,0) - U_1(1,0)V_1(0,1)$$
$$+2U_2(2,0) + V_2(1,1) = 0 \tag{5.147}$$

(5.136) ten

$$1 - V_1(0,1) + V_2(1,1) = 0 \tag{5.148}$$

elde edilir.

(5.135) eşitliğinde $h=0$ yazılırsa

$$\sum_{r=0}^{k} V_1(r,0)\,(k-r+1)U_1(k-r+1,0) - \sum_{r=0}^{k} V_1(r,0)\,V_1(k-r,1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k} U_1(r,0)\,U_1(k-r,1)$$
$$+\sum_{r=0}^{k} U_1(r,0)\,(k-r+1)V_1(k-r+1,0) + (k+1)V_2(k+1,0)$$
$$- U_2(k,1) = 0 \tag{5.149}$$

(5.149) da $k = 0$ yazılırsa

$$U_1(0,0)U_1(0,1) - U_2(0,1) = 0$$
$$U_2(0,1) = 0 \tag{5.150}$$

bulunur. Benzer şekilde işlemlere devam edilir. U_i ve V_i nin diğer bütün ileşenlerinin sıfır olduğu açıktır. Böylece

$$u_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_1(k,h)x^k y^h = 0$$
$$v_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V_1(k,h)x^k y^h = y$$

,

$$u_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} U_2(k,h)x^k y^h = 3x$$

$$v_2(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} V_2(k,h)x^k y^h = y$$

Böylece

$$w_1(z) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)\,,$$
$$w_1(z) = z$$

ve

$$w_2(z) = u_2(x,y) + iv_2(x,y)\ ,$$
$$w_2(z) = \bar{z} + 2z$$

elde edilir.

KAYNAKLAR

1. Chen, C. K. and Ho, S. H., “Application of differential transformation to eigenvalue problems”, ***Applied Mathematics and Computation,*** 79: 173-188 (1996).

2. Keskin, Y., and Oturanç, G., “The differential transform methods for nonlinear functions and its applications”, ***Journal of Applied Mathematics,*** 9: 169-176 (2008).

3. Ayaz, F., “Solutions of the system of differential equations by differential transform method”, ***Applied Mathematics and Computation,*** 147: 547-567 (2004).

4. Salehbhai, I. A. and Shukla, A. K., “The numerical solutions of differentialtransform method and the laplace transform method for a system of differential equations”, ***Nonlinear Analysis: Hybrid systems,*** 4: 425-431 (2010).

5. Biazar, J., Eslami, M., and Islam, M. R., “Differential transform method for special systems of ıntegral equations”, ***Journal of King Saud University - Science,*** 24 (3): 211–214 (2012).

6. Arikhoglu, A. and Ozkol, I., “Solution of fractional differential equations by using differential transform method”, ***Chaos Solitons & Fractals***, 34 (5): 1473–1481 (2007).

7. Arikhoglu, A. and Ozkol, I., “Solution of difference equations by using differential transform method”, ***Applied Mathematics and Computation,*** 174: 1216–1228 (2006).

8. Arikhoglu, A. and Ozkol, I., “Solutions of ıntegral and ıntegro-differential equations system by usin differential transform method”, ***Computers and Mathematics with Applications,*** 56: 2411–2417 (2008).

9. Çağlıyan, M., Çelik, N. ve Doğan, S., “Adi Diferensiyel Denklemler”, ***Nobel Yayinevi,*** Bursa (2012).

10. Çoşkun, H, “Diferensiyel Denklemler”, ***Karadeniz Teknik Üniversitesi Yayınları,*** Trabzon (2002).

11. Chen, C. K. and Ho, S. H., “Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method”, ***Applied Mathematics and Computation,*** 106: 171-179 (1999).

12. Ayaz, F., “On the two dimensional differential transform method”, ***Applied Mathematics and Computation,*** 143: 361-374 (2003).

13. İlter, U., “Diferansiyel dönüşüm metodu kullanılarak değişken katsayılı kompleks kısmi türevli denklem çözümü”, Yüksek Lisans Tezi, ***Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** Karabük (2013).

ÖZGEÇMİŞ

Kübra HEREDAĞ 7 Mayıs 1988 yılında Karabük'te doğdu; ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı. 2006 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Matematik Öğretmenliği Bölümü kazandı. 2011 yılında mezun oldu.

ADRES BİLGİLERİ

Adres	: Esentepe Mah Taşkent Cad. Yıldırım Apt KARABÜK
Tel	: (505) 3822110
E-posta	: kbrheredag@gmail.com