PROJEKTİF MODÜLLER ÜZERİNE

2014
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

Yasemin AYVALIK

PROJEKTİF MODÜLLER ÜZERİNE

Yasemin AYVALIK

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

KARABÜK
Eylül 2014

Yasemin AYVALIK tarafından hazırlanan "PROJEKTİF MODÜLLER ÜZERİNE" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 12/09/2014

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan : Prof. Dr. Derya KESKİN TÜTÜNCÜ (HÜ)	....
Üye : Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ (KBÜ)	....
Üye : Doç. Dr. Ayşe NALLI (KBÜ)	....

....../....../2014

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Mustafa BOZ ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Yasemin AYVALIK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

PROJEKTİF MODÜLLER ÜZERİNE

Yasemin AYVALIK

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ
Eylül 2014, 59 sayfa

Bu tezin genel amacı, projektif modüllerin bazı karakterizasyonlarını vermek ve özelliklerini incelemektir.

İlk bölümde; modül ve halka teorilerinin temel özellikleri hakkında bilgiler verilmiştir. Ayrıca projektif modüller için gerekli olan önbilgileri içermektedir.

İkinci bölümde; projektif modüller ve duali olan injektif modüllerin tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde; injektiflik ve projektiflik bölgesi tanımları verilmiştir. Açıktır ki, M projektiftir ancak ve ancak M' nin projektiflik bölgesi tüm sağ R- modüllerdir. M modülünün projektiflik bölgesi sadece yarıbasit modüllerden oluşursa M 'ye projektif

olarak fakir modül $(projectively - poor)$ denir. Projektif olarak fakir modüllerin bazı özellikleri incelenmiştir. Bir sağ R-modülü ya projektif ya da projektif olarak fakir ise, R' ye projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan halka denir ve bu halkaların bazı özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Sözcükler : Projektif modüller, projektiflik bölgesi, projektif olarak fakir modüller ve projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan halkalar.

Bilim Kodu : 204.1.025

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON PROJECTIVE MODULES

Yasemin AYVALIK

Karabük University
Graduate School of Natural and Applied Science
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assoc. Prof. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ
September 2014, 59 pages

In this thesis, the main aim is to examine properties about projective modules and give their characterizations.

In the first part, some general informations about modules and rings are given. This part contains some background about projective modules.

In the second part, some properties and definitions of projective modules and injective modules (the dual of projective modules) are given.

In the third part, the definitions of injectivity domain and projectivity domain are given. It is clear that M is projective if and only if the projectivity domain of M is all right R-modules. Let M and N be right R-modules. M is called projectively poor (briefly p-poor) if whenever M is N-projective, then N is semisimple.Some properties of p-poor modules are examined. Also, we consider rings over which every module is either projective or projectively poor and call them rings with no p-middle class and give some properties of them.

Key Words : Projective modules, projectivity domain, p-poor modules and rings with no right p-middle class.

Science Code : 204.1.025

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın oluşmasında beni yönlendiren araştırmaların her aşamasında bilgi, beceri, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek çalışmanın ilerlemesinde katkıda bulunan danışman hocam sayın Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ' a çok teşekkür ederim.

Tezi okuyarak, değerli fikir ve yorumları ile tezin gelişimine katkıda bulunan sayın Prof. Dr. Noyan ER' e teşekkürü bir borç bilirim.

Çalışmalarım boyunca bir çok fedakarlık gösteren sevgili meslektaşlarım Gümrah UYSAL ve Ulvi KANBUR' a çok teşekkür ederim.

Tüm eğitim hayatım boyunca yanımda olan aileme, çalışmalarım süresince maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen Merve AYVALIK ve Serdar YALÇIN' a çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar kümesi
$< S >$	: S kümesi tarafından üretilen modül
$< a >$	: a elemanı tarafından üretilen devirli modül
1_P	: P' nin birim dönüşümü
$Kerf$	: f homomorfizmasının çekirdeği
Imf	: $f : M \to N$ homomorfizmasının görüntüsü
$Mod - R$	: Sağ R-modüllerin kategorisi
$SSMod - R$	: Yarı basit sağ R-modüllerin sınıfı
$\leq$	: Altmodül
$\ll$	: Atık altmodül
$\leq_e$	: Esas altmodül
$g \mid_A$	: g' nin A' da kısıtlanışı
$\prod_{k\in K} A_k$	: $\{A_k\}_{k\in K}$ modüller topluluğunun direkt çarpımı
$\oplus_{k\in K} A_k$	: $\{A_k\}_{k\in K}$ modüller topluluğunun direkt toplamı
$\sum_{k\in K} A_k$	: $\{A_k\}_{k\in K}$ altmodüller topluluğunun toplamı
$Hom_R(A, B)$	: A R-modülünden B R-modülüne homomorfizmalar grubu
$End(M)$	: $f : M \to M$'ye modül homomorfizması
$Z_r(R)$	: R' nin sağ tekil ideali
Pr^{-1}	: Projektiflik bölgesi
In^{-1}	: İnjektiflik bölgesi
$ann_l(X)$	: X' in sol sıfırlayanı
$ann_r(X)$	: X' in sağ sıfırlayanı

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bu bölümde tez için gerekli olan tanımlar verilecektir. Halkalar birimli olmak üzere, modüller birimsel sağ R-modül olarak alınacaktır. Genellikle bir R halkası üzerindeki bütün sağ R-modüllerin kategorisi $Mod-R$ ve bütün yarıbasit sağ R-modüllerin sınıfı $SSMod-R$ ile ifade edilecektir. Aksi durumlar belirtilecektir.

1.1. MODÜLLER

Bu bölümde modül kavramı ve buna bağlı olarak bazı gerekli tanımlar verilecektir.

<u>*Tanım*</u> 1.1.1. $(M,+)$ değişmeli bir grup ve R birimli bir halka olsun. M' deki elemanların, R' deki elemanlarla skalar çarpımı, $M \times R \to M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M' ye *sağ R-modül* $(right\ R-module)$ denir. Her $r,s \in R$ ve $x,y \in M$ için ;

(i) $(x+y)r = xr + yr$

(ii) $x(r+s) = xr + xs$

(iii) $(xr)s = x(rs)$

(iv) $x1_R = x \in M$.

Tanım 1.1.2. M bir sağ R-modül ve N, M' nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

(i) Her $a, b \in N$ için $a - b \in N$,

(ii) Her $a \in N, r \in R$ için $ar \in N$

koşulları sağlanıyorsa N' ye M' nin bir *R-altmodülü* $(submodule)$ denir.

Tanım 1.1.3. M ve N iki sağ R-modül ve $f : M \to N$ fonksiyon olsun. Her $x, y \in M$ ve $r \in R$ için,

(i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

(ii) $f(xr) = f(x)r$

ise f' ye M' den N' ye bir *R-modül homomorfizması* $(module\ homomorphism)$ denir.

M'den N'ye bütün homomorfizmaların kümesi $Hom(M, N)$ ile gösterilir.

$f : M \to N$ modül homomorfizması; birebir ise f' ye bir *modül monomorfizması*, örten ise f' ye bir *modül epimorfizması* ve hem birebir hem de örten ise f' ye bir *modül izomorfizması* denir. $f : M \to N$ modül homomorfizmasında $M = N$ ise f' ye bir *modül endomorfizması* denir.

Tanım 1.1.4. R, S iki halka ve M değişmeli bir grup olsun. M bir hem sol R modül hem de sağ S modülü ve her $r \in R$, $s \in S$ ve $m \in M$ için $(rm)s = r(ms)$ olursa M' ye $R - S$*-bimodül* denir.

Tanım 1.1.5. R bir halka ve $x \in R$ olsun. $x^2 = x$ ise x' e *eşkare eleman* (idempotent element) denir.

Tanım 1.1.6. R bir halka ve $a \in R$ olsun. Eğer n pozitif tamsayısı için $a^n = 0$ oluyorsa a elemanına R' nin *üstel sıfır elemanı* (nilpotent) denir.

Tanım 1.1.7. D bir grup olmak üzere, her n pozitif tamsayısı için $nD = D$ ise, D' ye *bölünebilir grup* (divisible group) denir.

Tanım 1.1.8. R bir halka olsun. Her $r \in R$ için en az bir $x \in R$ vardır öyle ki $r = rxr$ ise R halkasına *düzenli halka* $(Von - Neumann\ regular)$ denir.

Tanım 1.1.9. R bir halka ve I, R' nin toplamsal altgrubu olsun. Eğer her $a \in I$ ve $r \in R$ için $ar \in I$ ise I' ya R' nin bir sağ ideali $(right\ ideal)$ denir. Her $a \in I$ ve $r \in R$ için $ra \in I$ ise I' ya R' nin bir sol ideali $(left\ ideal)$ denir.

Teorem 1.1.10. (Alizade ve Pancar, 1999) F bir modül, $X = \{x_k \mid k \in K\}$ de F' nin bir altkümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir:

1) Her $a \in F$ elemanı, sadece sonlu sayıda r_k katsayıları sıfırdan farklı (veya hepsi sıfır) olmak üzere, tek türlü olarak $a = \sum_{k \in K} x_k r_k$ şeklinde yazılabilir.

2) Her $k \in K$ için $f_k(r) = x_k r$ şeklinde tanımlanan $f_k : R \to x_k R$ fonksiyonu bir izomorfizma olup, $F = \oplus_{k \in K} x_k R$ 'dir.

Önteorem 1.1.11. (Modüler Kuralı) $A, B, C \leq M$ ve $A \leq C$ ise

$$(A + B) \cap C = A + (B \cap C)$$

dir.

İspat. $a + b = c \in (A + B) \cap C$ $(a \in A,\ b \in B,\ c \in C)$ olsun. $A \leq C$ olduğundan $b = c - a \in B \cap C$' dir. Bu durumda $a + b \in A + (B \cap C)$ olur. O halde $(A + B) \cap C \subseteq A + (B \cap C)$' dir.

Diğer taraftan, $a + x \in A + (B \cap C)$ $(a \in A,\ x \in B \cap C)$ için $a + x \in A + B$ olduğu açıktır. $a \in A \subseteq C$ ve $x \in C$ olduğundan $a + x \in C$ olur. Dolayısıyla $a + x \in (A + B) \cap C$' dir. Böylece, $A + (B \cap C) \subseteq (A + B) \cap C$ elde edilir. □

1.2. ESAS VE ATIK ALTMODÜLLER

Bu bölümde esas ve atık altmodül kavramları tanımlanacak ve esas ve atık altmodüllerin bazı özellikleri verilecektir.

<u>Tanım</u> 1.2.1. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir modül ve $A \leq M$ olsun. M' nin sıfırdan farklı her K altmodülü için $A \cap K \neq 0$ ise A' ya M' nin *esas altmodülü* (essential submodule), M' ye A' nın *esas genişlemesi* (essential extension) denir ve $A \leq_e M$ ile gösterilir.
Sıfırdan farklı bir M modülünün her sıfırdan farklı altmodülü M' de esas ise M' ye *düzgün modül* $(uniform)$ denir.

<u>Tanım</u> 1.2.2. R bir halka, A ve B birer sağ R-modül ve $f : A \to B$, R-modül monomorfizması olsun. $f(A)$, B' nin esas altmodülü ise f' ye *esas monomorfizma* denir.

<u>Önerme</u> 1.2.3. (Anderson ve Fuller, 1992) $K \leq M$ için aşağıdakiler denktir.

(i) $K \leq_e M$,

(ii) $i_k : K \to M$ esas monomorfizmadır,

(iii) Her N modülü ve $h \in Hom(M, N)$ için $(Kerh) \cap K = 0$ ise $Kerh = 0$' dır.

<u>İspat.</u> $(i) \Rightarrow (ii)$ $K \leq_e M$ olsun. $i_k : K \underset{k \mapsto k}{\rightarrowtail} M$ için $i_k(K) = K \leq_e M$ olur. Böylece i_k esas monomorfizma olur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $h : M \to N$ bir homomorfizma ve $(Kerh) \cap K = 0$ olsun. $i_K : K \to M$ esas monomorfizma olduğundan $K \leq_e M$' dir. Böylece $Kerh = 0$ elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$ $T \leq M$ için $T \cap K = 0$ olsun. $\pi : M \to M/T$ doğal dönüşümü gözönüne alınsın. Açıktır ki $Ker\pi = T$' dir. Kabulden $Ker\pi = T = 0$ olur. $\square$

<u>Önerme</u> 1.2.4. (Anderson ve Fuller, 1992) $K \leq N \leq M$ ve $H \leq M$ modülleri için

(i) $K \leq_e M \Leftrightarrow K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$' dir.

(ii) $H \cap K \leq_e M \Leftrightarrow H \leq_e M$ ve $K \leq_e M$' dir.

İspat. (i) $(\Rightarrow)$ $K \leq_e M$, $L \leq N$ ve $K \cap L = 0$ olsun. $L \leq M$ ve $K \leq_e M$ olduğundan; $L = 0$ olur. Böylece $K \leq_e N$ elde edilir. $T \leq M$ ve $N \cap T = 0$ olsun. $K \cap (N \cap T) = K \cap T = 0$' dır. $K \leq_e M$ olduğundan, $T = 0$ olur. Böylece $N \leq_e M$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $K \leq_e N$ ve $N \leq_e M$ olsun. $L \leq M$ için $L \cap K = 0$ olsun. $N \cap (L \cap K) = (N \cap L) \cap K = 0$' dır. $K \leq_e N$ olduğundan $N \cap L = 0$' dır. $N \leq_e M$ olduğundan, $L = 0$ olur. Böylece $K \leq_e M$ elde edilir.

(ii) $(\Rightarrow)$ $L \leq M$ ve $H \cap L = 0$ olsun. $(H \cap L) \cap K = (H \cap K) \cap L = 0$ dır. $H \cap K \leq_e M$ olduğundan; $L = 0$ olur. Böylece $H \leq_e M$ elde edilir. Benzer şekilde $K \leq_e M$ gösterilebilir.

$(\Leftarrow)$ $H \leq_e M$ ve $K \leq_e M$ olsun. $L \leq M$ ve $(H \cap K) \cap L = 0$ olsun. $H \cap (K \cap L) = 0$ ve $H \leq_e M$ olduğundan $K \cap L = 0$ olur. $K \leq_e M$ olduğundan $L = 0$ elde edilir. Böylece $H \cap K \leq_e M$ dir. $\square$

Yardımcı Teorem 1.2.5. (Anderson ve Fuller, 1992) $K \leq M$ olmak üzere $K \leq_e M$' dir ancak ve ancak her $0 \neq x \in M$ için $r \in R$ vardır öyle ki $0 \neq xr \in K$' dır.

İspat. $(\Rightarrow)$ $K \leq_e M$ olsun. $0 \neq x \in M$ alınsın. $0 \neq xR \leq M$' dir. $K \leq_e M$ olduğundan, $xR \cap K \neq 0$ dır. Böylece $0 \neq a \in xR \cap K$ vardır. Yani $0 \neq a = xr \in K$ olacak şekilde $r \in R$ vardır.

$(\Leftarrow)$ $0 \neq N \leq M$ olsun. O zaman, $0 \neq n \in N \leq M$ vardır. Kabulden öyle bir $r \in R$ vardır ki, $0 \neq nr \in K$' dır. Böylece $0 \neq nr \in N \cap K$ elde edilir. Yani $N \cap K \neq 0$' dır. $\square$

Sonuç 1.2.6. (Anderson ve Fuller, 1992) $f : L \rightarrowtail M$ bir esas monomorfizmadır ancak ve ancak bütün uygun h homomorfizmaları için hf birebir ise h birebirdir.

İspat. $(\Rightarrow)$ $M \xrightarrow{h} X$ dönüşümü alınsın ve hf birebir olsun. $x \in Kerh \cap f(L)$ olsun. O zaman $h(x) = 0$ ve $x = f(l)$ olacak şekilde $l \in L$ vardır. $h(x) = hf(l) = 0$' dır. hf birebir olduğundan $l = 0$ olur. Böylece $f(l) = f(0) = 0 = x$ elde edilir. Böylece $Kerh \cap f(L) = 0$ olur. $f(L) \leq_e M$ olduğundan, $Kerh = 0$' dır.

$(\Leftarrow)$ $f : L \rightarrowtail M$ monomorfizma, $K \leq M$ ve $f(L) \cap K = 0$ olsun. $L \overset{f}{\rightarrowtail} M \overset{\pi}{\rightarrow} M/K$ dönüşümü ele alınsın. $x \in Ker\pi f$ olsun.

$$\pi(f(x)) = 0 \Rightarrow f(x) \in Ker\pi = K$$
$$\Rightarrow f(x) \in f(L) \cap K = 0$$

olur. Böylece $x \in Kerf = 0$ olur. Yani $x = 0$' dır. Böylece πf birebir elde edilir. Kabulden π birebir yani $K = 0$ olur. □

Tanım 1.2.7. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir sağ R-modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $L \leq M$ için $M = N + L$ iken $M = L$ ise N'ye M'nin ***atık altmodülü*** $(small\ submodule)$ denir ve $N \ll M$ ile gösterilir. Her öz altmodülü atık ise bu modüle ***dar*** $(hollow)$ denir.

Tanım 1.2.8. (Anderson ve Fuller, 1992) R bir halka, A ve M birer sağ R-modül ve $f : M \to A$, R-modül epimorfizması olsun. $Kerf$, M' nin atık altmodülü ise f' ye ***atık epimorfizma*** $(small\ epimorphism)$ denir.

Önerme 1.2.9. (Anderson ve Fuller, 1992) $K \leq M$ için aşağıdakiler denktir.

(i) $K \ll M$,

(ii) $P_K : M \to M/K$ doğal dönüşümü atık epimorfizmadır,

(iii) Her N modülü ve $h \in Hom(N, M)$ için $Imh + K = M$ ise $Imh = M$' dir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ $P_K : M \to M/K$ doğal dönüşümü için, $KerP_K = K$' dır. $K \ll M$ olduğu için $KerP_K \ll M$ olur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Bir N modülü ve bir $h : N \to M$ homomorfizması için $(Imh) + K = M$ olsun. $M \overset{P_K}{\to} M/K$ epimorfizması atık olduğundan $K \ll M$ olur. Dolayısıyla $Imh = M$ elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Her N modülü ve $h : N \to M$ homomorfizması için $Imh + K = M$ ise $Imh = M$ olsun. $L \leq M$ için $K + L = M$ olsun. $f : L \hookrightarrow M$ içerim dönüşümü için $M = K + (Imf)$' dir. Kabulden $Imf = M$ olur. Böylece $K \ll M$ elde edilir. □

<u>*Önerme*</u> 1.2.10. (Anderson ve Fuller, 1992) $K \leq N \leq M$ ve $H \leq M$ modülleri için

(i) $N \ll M \Leftrightarrow K \ll M$ ve $N/K \ll M/K$' dır.

(ii) $H + K \ll M \Leftrightarrow H \ll M$ ve $K \ll M$' dir.

(iii) $K \ll M$ ve $f : M \to N$, R-modül homomorfizması ise $f(K) \ll N$' dir. Özel olarak $K \ll M \leq N$ ise $K \ll N$' dir.

(iv) $K \ll M$ ve $K \leq L \leq_d M$ ise $K \ll L$' dir. Özel olarak $K \ll M$ ve $K \leq_d M$ ise $K = 0$' dır.

<u>İspat.</u> (i) $(\Rightarrow)$ $N \ll M$ olsun. $L \leq M$ için $M = K + L$ olsun.

$$K \leq N \Rightarrow K + L \leq N + L$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow M \leq N + L \leq M \\ &\Rightarrow N + L = M, (N \ll M) \\ &\Rightarrow M = L \end{aligned}$$

olur. Böylece $K \ll M$ elde edilir.
$\frac{M}{K} = \frac{N}{K} + \frac{L}{K}$ olsun.

$$\frac{M}{K} = \frac{N}{K} + \frac{L}{K} \Rightarrow M = N + L, (N \ll M)$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow M = L \\ &\Rightarrow \tfrac{M}{K} = \tfrac{L}{K} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $N/K \ll M/K$ olur.

($\Leftarrow$) $L \leq M$ için; $M = N + L$ olsun. $\frac{M}{K} = \frac{N}{K} + \frac{L+K}{K}$ ve $\frac{N}{K} \ll \frac{M}{K}$ olduğundan, $\frac{M}{K} = \frac{L+K}{K}$ olur. Böylece $M = L + K$ elde edilir. $K \ll M$ olduğundan $M = L$ olur. Böylece $N \ll M$ elde edilir.

(ii) ($\Rightarrow$) $L \leq M$ için; $M = H + L$ olsun.

$$M = H + L \Rightarrow M + K = H + K + L$$

$$\Rightarrow M = (H + K) + L, (H + K \ll M)$$
$$\Rightarrow M = L$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$M = K + L \Rightarrow M + H = (H + K) + L$$

$$\Rightarrow M = (H + K) + L, (H + K \ll M)$$
$$\Rightarrow M = L$$

olur.

($\Leftarrow$) $L \leq M$ için; $M = (K + H) + L$ olsun. $H \ll M$ olduğundan $M = K + L$ elde edilir. $K \ll M$ olduğundan $M = L$ elde edilir. Böylece $H + K \ll M$' dir.

(iii) $K \ll M$ ve $f : M \to N$ R-modül homomorfizması ve $N = f(K) + L$ olsun. O zaman $M = f^{-1}(N) = K + f^{-1}(L)$ olur. $K \ll M$ olduğundan $M = f^{-1}(L)$ elde edilir. O zaman, $f(M) = ff^{-1}(L) \subseteq L$ olur. $f(K) \subseteq f(M)$ olduğundan $f(K) \leq L$ olur. Böylece $N = L$' dir.
Özel olarak $K \ll M \leq N$ olsun. $f : M \to N$ içerim dönüşümü için $f(K) = K$' dır. Böylece $K \ll M$ olması $K = f(K) \ll N$ olmasını gerektirir.

(iv) $K \ll M$ ve $L \leq_d M$ olsun. $M = L \oplus S$ olacak şekilde $S \leq M$ vardır. $L = K + T$ olsun.

$$M = L + S \Rightarrow M = K + T + S$$

dir. $K \ll M$ olduğundan $M = T + S$' dir. $T \leq L$ ve $T \cap S \leq L \cap S = 0$ olduğundan $M = T \oplus S = L \oplus S$ olur. Buradan $T = L$ elde edilir.

Özel olarak $K \ll M$ ve $K \leq_d M$ olsun. $M = K \oplus S$ olacak şekilde $S \leq M$ vardır. $K \ll M$ olduğundan $M = S$ elde edilir. Böylece $K = 0$ olur. □

Önerme 1.2.11. (Anderson ve Fuller, 1992) $K_1 \leq M_1 \leq M$, $K_2 \leq M_2 \leq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun.

(i) $K_1 \oplus K_2 \ll M \Leftrightarrow K_1 \ll M_1$ ve $K_2 \ll M_2$' dir.

(ii) $K_1 \oplus K_2 \leq_e M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow K_1 \leq_e M_1$ ve $K_2 \leq_e M_2$' dir.

İspat. (i) $(\Rightarrow)$ Önerme 1.2.10 (i)' den açıktır.

$(\Leftarrow)$ $T \leq M$ için, $M = K_1 \oplus K_2 + T$ olsun. $K_1 \ll M_1$ ve $K_2 \ll M_2$ olduğundan $K_1 \ll M$ ve $K_2 \ll M$' dir. Böylece $M = T$ olur.

(ii) $(\Rightarrow)$ İlk olarak $K_1 \leq_e M_1$ olduğu gösterilecektir. $0 \neq m_1 \in M_1$ alınsın. $0 \neq m_1+0 \in M_1 \oplus M_2$ olur. $K_1 \oplus K_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ olduğu için $0 \neq r \in R$ vardır öyle ki $0 \neq (m_1+0)r \in K_1 \oplus K_2$' dir. $(m_1+0)r = k_1+k_2$ olacak şekilde $k_1 \in K_1$ ve $k_2 \in K_2$ vardır. $m_1 r = k_1 + k_2$ olduğundan $m_1 r - k_1 = k_2$ olur. $m_1 r - k_1 \in M_1$ ve $k_2 \in M_2$ olduğundan $m_1 r - k_1 = k_2 \in M_1 \cap M_2 = 0$' dır. Buradan da $0 \neq m_1 r = k_1 \in K_1$ olur. Böylece $K_1 \leq_e M_1$ olur. Benzer şekilde $K_2 \leq_e M_2$ olduğu gösterilebilir.

$(\Leftarrow)$ $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$ olmak üzere $0 \neq x_1 + x_2 \in M_1 \oplus M_2$ olsun. $x_1 \neq 0$ veya $x_2 \neq 0$' dir. $x_1 \neq 0$ olduğu kabul edilsin. $0 \neq x_1 \in M_1$ ve $K_1 \leq_e M_1$ olduğu için bazı $r_1 \in R$ için $0 \neq x_1 r_1 \in K_1$ olur. $x_2 r_1 \in K_2$ olsun. Eğer $(x_1+x_2)r_1 = x_1 r_1 + x_2 r_1 = 0$ ise $x_1 r_1 = 0$ olur. Bu ise çelişkidir. Böylece $0 \neq (x_1 + x_2)r_1 \in K_1 \oplus K_2$ olur. Eğer $x_2 r_1 \notin K_2$ ise $0 \neq x_2 r_1 \in M_2$ ve $K_2 \leq_e M_2$ olduğundan, $r_2 \in R$ vardır öyle ki $0 \neq x_2 r_1 r_2 \in K_2$' dir. Sonuç olarak $0 \neq (x_1 + x_2) r_1 r_2 = x_1 r_1 r_2 + x_2 r_1 r_2 \in K_1 \oplus K_2$' dir. Böylece $K_1 \oplus K_2 \leq_e M_1 \oplus M_2$ olur. □

Sonuç 1.2.12. (Anderson ve Fuller, 1992) $g : M \to N$ atık epimorfizmadır ancak ve ancak her uygun h homomorfizması için eğer gh örten ise h örtendir.

İspat. ($\Rightarrow$) gh örten olacak şekilde uygun bir $h : X \to M$ homomorfizması alınsın. Buradan $gh(X) = N = g(M)$ olur. g atık epimorfizma olduğu için $Kerg \ll M$' dir. $g^{-1}g(h(X)) = g^{-1}(N) = g^{-1}g(M)$ olduğundan $h(X) + Kerg = M$ olur. $Kerg \ll M$ olduğundan $h(X) = M$ olur. Böylece h örten olur.

($\Leftarrow$) $g : M \to N$ bir epimorfizma olsun. $L \leq M$ için $Kerg + L = M$ olsun. $gh : L \overset{h}{\hookrightarrow} M \xrightarrow{g} N$ dönüşümü ele alınsın. $gh(L) = g(L) = g(Kerg + L) = g(M) = N$ olur. Kabulden h örten olur. h örten ise $M = L = h(L) = g(Kerg + L)$' dir. Böylece $Kerg \ll M$ olur. $\square$

1.3. HOM FUNKTOR, TAM DİZİLER

Bu bölümde hom funktor ve tam dizi tanımları ile bazı özellikleri verilecektir. M ve N iki sağ R-modül olsun. $f, g \in Hom(M, N)$ olmak üzere $f + g$ toplamı her $m \in M$ için $(f + g)(m) = f(m) + g(m)$ olarak tanımlansın. $f + g, 0, -f \in Hom(M, N)$ olduğundan $Hom(M, N)$ bir abel grup oluşturur. Bu gruba *homomorfizmalar grubu* denir.

Tanım 1.3.1. A, B, C sağ R-modüller olsun. $f : B \to C$ bir modül homomorfizması ise;

$$f_* = Hom(A, f) : Hom(A, B) \to Hom(A, C)$$

fonksiyonu $f_*(g) = fg$ ile tanımlansın. f ve g homomorfizma ve $f_*(g + h) = f(g + h) = fg + fh = f_*(g) + f_*(h)$ olduğundan f_* bir homomorfizmadır. Ayrıca;

$$Hom(A, f + h)(g) = (f + h)(g) = fg + hg$$

$$= Hom(A, f)(g) + Hom(A, h)(g)$$
$$= (Hom(A, f) + Hom(A, h))(g)$$

olur. $Hom(A,-)$' ya bir *kovariant funktor* denir. Benzer şekilde $f : A \to C$ bir modül homomorfizması için,

$$f^* = Hom(f,B) : Hom(C,B) \to Hom(A,B)$$

homomorfizması $f^*(g) = gf$ ile tanımlanır. $Hom(-,B)$' ye *kontravariant funktor* denir.

<u>Tanım</u> 1.3.2. (Anderson ve Fuller, 1992) $\{M_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ modüller topluluğundan ve bunların

$$f_n : M_n \to M_{n-1}$$

homomorfizmalarından oluşan

$$... \to M_{n+1} \overset{f_{n+1}}{\to} M_n \overset{f_n}{\to} M_{n-1} \to ...$$

dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $Im(f_{n+1}) \subseteq Ker(f_n)$ ise, bu dizeye kompleks, $Im(f_{n+1}) = Ker(f_n)$ ise, bu diziye *tam dizi* denir.

<u>Önerme</u> 1.3.3. (Anderson ve Fuller, 1992) $0 \to A \overset{g}{\to} B \overset{h}{\to} C \to 0$ dizisi tam ise, g bir monomorfizma, ve h bir epimorfizmadır. Ayrıca, $Img \cong A$ ve $C \cong B/Img$' dir. Böylece $C \cong B/A$' dır.

<u>Tanım</u> 1.3.4. (Anderson ve Fuller, 1992) $0 \to A \to B \to C \to 0$ şeklindeki tam diziye *kısa tam dizi* denir.

<u>Yardımcı Teorem</u> 1.3.5. Aşağıdaki diyagram değişmeli ve tam satırları mevcut olsun.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"'] & D \arrow[r] \arrow[d, "\delta"'] & E \arrow[d, "\epsilon"'] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

(i) α örten, β ve δ birebir ise γ örtendir.

(ii) ϵ birebir, β ve δ örten ise γ örtendir.

(iii) α, β, δ ve ϵ izomorfizma ise γ da izomorfizmadır.

Teorem 1.3.6. (Anderson ve Fuller, 1992) R bir halka olsun. L, M, N birer R-modül ve

$$0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

bir kısa tam dizi ise aşağıdakiler denktir.

(i) $g\alpha = 1_N$ olacak şekilde bir $\alpha : N \to M$, R-homomorfizması vardır.

(ii) $\beta f = 1_L$ olacak şekilde bir $\beta : M \to L$, R-homomorfizması vardır.

(iii) $M \cong L \oplus N$' dir.

Tanım 1.3.7. (Anderson ve Fuller, 1992) Teorem 1.3.6' daki denk koşullardan birini sağlayan kısa tam diziye *parçalanır* denir.

Tanım 1.3.8. (Anderson ve Fuller, 1992) F bir funktor ve $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ tam dizi olsun.

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C)$$

dizisi tam ise F' ye *sol tam funktor* ve

$$F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

dizisi tam ise *sağ tam funktor* denir. Hem sağ hem de sol tam ise F' ye *tam funktor* $(exact\ functor)$ denir.

Teorem 1.3.9. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir sağ R-modül olsun. O zaman $Hom(M, -)$ ve $Hom(-, M)$ sol tam funktorlardır.

1.4. ARTİN VE NOETHER HALKALAR VE MODÜLLER

Bu bölümde Artin ve Noether halkalar ve modüller hakkında temel bilgiler verilecektir.

Tanım 1.4.1. (Hungerford, 1974) A bir sağ R modül olsun. A' nın

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq ...$$

altmodüllerinin zinciri varsa, her $i \geq n$ için $A_i = A_n$ olacak şekilde $n \in \mathbb{Z}$ varsa bu zincire *artan zincir kuralı* $(ascending\ chain\ condition)$ denir.

Tanım 1.4.2. (Hungerford, 1974) B bir sağ R modül olsun. B' nin

$$B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq ...$$

altmodüllerinin zinciri varsa, her $i \geq m$ için $B_i = B_m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{Z}$ varsa bu zincire *azalan zincir kuralı* $(descending\ chain\ condition)$ denir.

Tanım 1.4.3. M bir sağ R-modül olsun. M altmodüller üzerine artan (azalan) zincir koşulunu sağlarsa M' ye *Noether (Artin) modül* $(Noetherian\ (Artinian))$ denir.

Önerme 1.4.4. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdakiler denktir:

$1)$ M Noether modüldür;

$2)$ M' nin her altmodülü sonlu üretilmiştir;

$3)$ M' nin altmodüllerinin boştan farklı her kümesinin maksimal elemanı vardır.

Önerme 1.4.5. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdakiler denktir:

$1)$ M Artin modüldür;

$2)$ M' nin her bölümü sonlu eş-üretilmiştir;

$3)$ M' nin altmodüllerinin boştan farklı her kümesinin minimal elemanı vardır.

Tanım 1.4.6. (Hungerford, 1974) R bir halka olsun. R sağ idealleri üzerinde artan zincir kuralını sağlıyor ise R' ye *sağ Noether halka* $(right\ Noetherian)$ denir. R hem sağ hem de sol Noether ise R' ye *Noether halka* denir.

Tanım 1.4.7. (Hungerford, 1974) R bir halka olsun. R sağ idealleri üzerinde azalan zincir kuralını sağlıyor ise R' ye *sağ Artin halka* $(right\ Artinian)$ denir. R hem sağ hem de sol Artin ise R' ye *Artin halka* denir.

Önerme 1.4.8. (Anderson ve Fuller, 1992) $0 \to K \to M \to N \to 0$ sağ R-modüllerin tam dizisi olsun. M' nin Artin (Noether) olması için gerek ve yeter şart K ve N' nin Artin (Noether) olmasıdır.

Sonuç 1.4.9. (Anderson and Fuller, 1992) $M = M_1 \oplus ... \oplus M_2$ olsun. M Artin (Noether) olması için gerek ve yeter koşul $(i = 1, ..., n)$ için M_i' nin Artin (Noether) olmasıdır.

1.5. YARIBASİT MODÜLLER

Bu bölümde yarıbasit modül ve sokul kavramları hakkında temel bilgiler ve bazı özellikler verilecektir.

Tanım 1.5.1. (Anderson ve Fuller, 1992) M sıfırdan farklı bir sağ R-modül olsun. M' nin kendinden ve sıfırdan farklı bir altmodülü yoksa M' ye *basit modül* $(simple)$ denir.

Önerme 1.5.2. (Anderson ve Fuller, 1992) T, R-modülü basit sağ R-modüldür ancak ve ancak M, R' nin maksimal sağ ideali olmak üzere $T \cong R/M$' dir.

Tanım 1.5.3. (Anderson ve Fuller, 1992) $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$, M' nin basit altmodüllerinin bir ailesi olsun.

$$M = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$$

parçalanışı varsa M' ye *yarıbasit modül* $(semisimple)$ denir.

Teorem 1.5.4. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir sağ R-modül olsun. Aşağıdakiler denktir;

(i) M yarıbasit modüldür.

(ii) M basit altmodüllerin toplamıdır.

(iii) M' nin her altmodülü diktoplanandır.

(iv) Her R-modüllerinin tam dizisi,

$$0 \to K \to M \to N \to 0$$

parçalanır.

Tanım 1.5.5. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir sağ R-modül olsun.

$$Soc(M) = \sum\{K \leq M \mid K, M\text{'nin basit altmodülü}\} = \cap\{L \leq M \mid L \leq_e M\}$$

olarak tanımlanan $Soc(M)$ altmodülüne M' nin *sokulu* $(socle)$ denir.

Önerme 1.5.6. (Anderson ve Fuller, 1992) M ve N iki sağ R-modül olsun. $f : M \to N$ bir modül homomorfizması olmak üzere,

$$f(Soc(M)) \leq Soc(N)$$

olur.

Sonuç 1.5.7. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir sağ R-modül ve $K \leq M$ olsun.

$$Soc(K) = K \cap Soc(M)$$

ve

$$Soc(Soc(M)) = Soc(M)$$

olur.

Önerme 1.5.8. (Anderson ve Fuller, 1992) $M = \oplus_{\alpha \in A} M_\alpha$ olsun.

$$Soc(M) = \oplus_{\alpha \in A} Soc(M_\alpha)$$

dır.

Önteorem 1.5.9. (Anderson ve Fuller, 1992) $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$ bir M modülünün basit altmodüllerinin bir ailesi olsun. Eğer $M = \sum_A T_\alpha$ ise M' nin her K altmodülü için $M = K \oplus (\oplus_B T_\beta)$ olacak şekilde $B \subseteq A$ vardır.

1.6. JACOBSON RADİKALİ VE YEREL HALKALAR

Bu bölümde Jacobson radikali ve yerel halka kavramları ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 1.6.1. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir sağ R-modül olsun.

$$Rad(M) = \cap\{N \leq M \mid N \text{maksimal altmodül}\} = \sum\{K \leq M \mid K \ll M\}$$

altmodülüne M modülünün *Jacobson radikali* $(Jacobson\ radical)$ denir. $M = R$ ise $Rad(M) = J(R)$ ile gösterilir.

Önteorem 1.6.2. (Goodearl, 1976) R bir halka olsun.
$J(R)$= $\{r \in R \mid \forall s \in R$ için $1 - rs$ sağ tersinir$\}$
$J(R)$= $\{r \in R \mid \forall s \in R$ için $1 - sr$ sol tersinir$\}$' dir.

Önerme 1.6.3. (Anderson ve Fuller, 1992) M ve N iki sağ R-modül ve $f : M \to N$ bir modül homomorfizması olsun. O zaman

$$f(Rad(M)) \leq Rad(N)$$

olur.

Önerme 1.6.4. (Anderson ve Fuller, 1992) $\{M_i \mid i \in I\}$ sağ R modüllerin bir ailesi olsun. Ozaman

$$\oplus_{i \in I} Rad(M_i) = Rad(\oplus_{i \in I} M_i)$$

olur.

Tanım 1.6.5. (T.Y. Lam, 2001) R bir halka olsun. Her $r \in R$ için r ya da $1 - r$ tersinir ise R halkasına *yerel halka* $(local\ ring)$ denir.

Tanım 1.6.6. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir modül olsun. M' nin en büyük altmodülü var ise M'ye *yerel modül* $(local\ module)$ denir. Buna denk olarak M devirli, $M \neq 0$ ve tek maksimal altmodülü vardır.

Önerme 1.6.7. (Anderson ve Fuller, 1992) Yerel modüllerin bölüm modülleri de yereldir.

İspat.M yerel modül olsun. $N \lneq M$ olmak üzere M/N bölüm modülü ele alınsın. $T/N \lneq M/N$ olsun. $T \lneq M$ ve M yerel olduğundan, $T \ll M$ olur. Böylece $T/N \ll M/N$ elde edilir. Yani her öz altmodülü dar olur. şimdi $Rad(M/N) \neq M/N$ olduğu gösterilecektir. $RadM \neq M$ olduğundan, M' nin bir K maksimal altmodülü vardır. $M/K \rightarrow M/(N+K) \rightarrow 0$ epimorfizması düşünülsün.M/K basit olduğundan $M/(N+K)$ basit olur. Böylece $N+K$, M' nin maksimal altmodülü olur. $\frac{M/N}{(N+K)/N} \cong M/(N+K)$ olduğundan, $(N+K)/N$, M/N' nin maksimal altmodülü olur. Böylece $Rad(M/N) \neq M/N$ elde edilir. □

Tanım 1.6.8. (T.Y. Lam, 2001) R bir halka olsun. $R/J(R)$ yarıbasit ve $J(R)$ üstel sıfır eleman ise R halkasına *yarıasıl* $(semiprimary)$ denir.

Tanım 1.6.9. (T.Y. Lam, 2001) R bir halka olsun. $R/Rad(R)$ yarıbasit halka ise R halkasına *yarıyerel* $(semilocal)$ denir.

Önerme 1.6.10. (Anderson ve Fuller, 1992) Bir R halkası için aşağıdakiler denktir.

(i) R yerel halkadır.

(ii) R birtek maksimal ideale sahiptir.

(iii) $J(R)$ tek maksimal idealdir.

(iv) R'nin sol tersleri olmayan elemanlarının kümesi toplama altında kapalıdır.

(v) $J(R)$=$\{x \in R \mid xR \neq R\}$

(vi) $R/J(R)$ bölümlü halkadır.

(vii) $J(R)$=$\{x \in R$ | x tersinir değildir$\}$.

Sonuç 1.6.11. (Anderson ve Fuller, 1992) R bir halka ve $J = J(R)$ olsun. Her M sağ R-modülü için,

$$MJ(R) \leq RadM$$

dir.
$R/J(R)$ yarıbasit modül ise, her M sağ R-modülü için,

$$MJ(R) = RadM$$

ve $M/MJ(R)$ yarıbasittir.

Önerme 1.6.12. (Hungerford, 1974) R sağ Artin halka ise $J(R)$ üstel sıfır idealdir.

Yardımcı Teorem 1.6.13. $(Nakayama's\ Lemma)$ R bir halka ve I sağ ideali olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) $I \leq J(R)$

(ii) Her sonlu üreteçli sağ R-modül M için, $MI = M$ ise $M = 0$' dır.

(iii) Her sonlu üreteçli sağ R-modül M için $MI \ll M$' dir.

Önerme 1.6.14. (Anderson ve Fuller, 1992) Bir sağ R-modül M için aşağıdakiler denktir;

(i) $Rad(M) = 0$ ve M Artin,

(ii) $Rad(M) = 0$ ve M sonlu eş-üretilendir,

(iii) M yarıbasit ve sonlu üreteçlidir,

(iv) M yarıbasit ve Noetherdir,

(v) M basit altmodüllerin sonlu kümesinin diktoplamıdır.

BÖLÜM 2

İNJEKTİF VE PROJEKTİF MODÜLLER

Bu bölümde halkaların karakterizasyonunda önemli bir yer alan projektif ve injektif modüller incelenecektir.

2.1. İNJEKTiF MODÜLLER

<u>*Tanım*</u> 2.1.1. A ve N iki R-modül olsun. A modülünün her X-altmodülü için her $f : X \to N$ homomorfizması $h : A \to N$ homomorfizmasına genişliyorsa, yani, $g : X \to A$ içerim dönüşüm olmak üzere $hg = f$ oluyorsa N' ye A-*injektif (injective) modül* denir. Eğer N, N-injektif ise N' ye *yarı-injektif (quasi injective) modül* denir. Eğer her A modülü için N, A-injektif ise N' ye *injektif modül* denir.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"] & A \arrow[dl, dotted, "h"] \\ & N & \end{tikzcd}$$

<u>*Teorem*</u> 2.1.2. (Anderson ve Fuller, 1992) $\{J_i \mid i \in I\}$ bir modüller topluluğu olsun. $\prod_{i \in I} J_i$ direkt çarpımının injektif modül olması için gerek ve yeter koşul J_i modüllerinin $(i \in I)$ herbirinin injektif olmasıdır.

<u>*Teorem*</u> 2.1.3. (Anderson ve Fuller, 1992) (Baer Kriteri) J modülünün injektif olması için gerek ve yeter koşul her U sağ ideali ve $k : U \to J$ homomorfizmasının bir $m : R \to J$ homomorfizmasına genişletilebilmesidir.

<u>*Teorem*</u> 2.1.4. (Anderson ve Fuller, 1992) Her injektif modül bölünebilirdir.

<u>*Teorem*</u> 2.1.5. (Anderson ve Fuller, 1992) Her A grubu için, D injektif grup olmak üzere bir $f : A \to D$ monomorfizması bulunur.

Yardımcı Teorem 2.1.6. (Anderson ve Fuller, 1992) A ve B birer R modül olsun.

1) Her $a \in A$ ve $r \in R$ için $e(a)(r) = ar$ ile tanımlanan $e : A \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, A)$ fonksiyonu bir modül monomorfizmasıdır.

2) $f : A \to B$ bir modül homomorfizması ise, her $\alpha \in Hom_{\mathbb{Z}}(R, A)$ için $f_*(\alpha) = f\alpha$ olarak tanımlanan

$$f_* : Hom_{\mathbb{Z}}(R, A) \to Hom_{\mathbb{Z}}(R, B)$$

fonksiyonu bir modül homomorfizmasıdır. f bir monomorfizma ise, f_* da bir modül monomorfizmasıdır.

Teorem 2.1.7. (Anderson ve Fuller, 1992) D injektif (yani bölünebilir) grup ise, $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ injektif sol R-modüldür.

Teorem 2.1.8. (Anderson ve Fuller, 1992) Her A modülü için, J injektif modül olmak üzere bir $f : A \to J$ monomorfizması bulunur.

Teorem 2.1.9. (Anderson ve Fuller, 1992) Bir J sağ R-modülü için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) J injektiftir;

(ii) $Hom(-, J)$ funktoru tamdır;

(iii) $0 \to J \to A \to B \to 0$ şeklinde olan her kısa tam dizi parçalanandır;

(iv) J modülü, D bölünebilir bir grup olmak üzere, $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$ şeklinde bir modülün direkt toplam terimine izomorftur.

Teorem 2.1.10. (Anderson ve Fuller, 1992) Her bölünebilir (injektif) D grubu, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ şeklinde olan grupların direkt toplamına izomorftur.

Tanım 2.1.11. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir sağ R-modül olsun. J injektif modülüne, $f : M \to J$ esas monomorfizması ile birlikte M modülünün *injektif zarfı* ($injective\ hull$) denir ve $E(M)$ ile gösterilir.

Önerme 2.1.12. (Anderson ve Fuller, 1992) $f : M \to N$ esas monomorfizma ve K modülü $g : N \to K$ monomorfizması ile birlikte N' nin injektif zarfı ise, K modülü $gf : M \to K$ monomorfizması ile M' nin injektif zarfıdır.

Teorem 2.1.13. (Anderson ve Fuller, 1992) Her modülün bir injektif zarfı bulunur ve injektif zarf izomorfizma farkıyla tektir.

Önerme 2.1.14. (Anderson ve Fuller, 1992) M modülü için aşağıdakiler denktir.

(i) M injektiftir ancak ve ancak $M = E(M)$' dir.

(ii) $M \leq_e N$ ise $E(M) = E(N)$' dir.

(iii) Q injektif ve $M \leq_e Q$ ise $Q = E(M)$' dir.

2.2. PROJEKTİF MODÜLLER

Tanım 2.2.1. (Anderson ve Fuller, 1992) A ve N birer R-modül olsun. A'nın her X altmodülü için $f : N \to A/X$ homomorfizması $h : N \to A$ homomorfizmasını yükseliyorsa, yani $\pi : A \to A/X$ doğal dönüşümü için $\pi h = f$ olur ise N modülüne *A-projektif modül* denir. N modülü N-projektif ise N' ye *yarı-projektif (quasi-projective) modül* denir. Her A modülü için N, A-projektif ise N' ye *projektif modül* denir.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ A \arrow[r, "\pi"] & A/X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Teorem 2.2.2. (Anderson ve Fuller, 1992) $\{P_k \mid k \in K\}$ sağ R-modüller topluluğu olsun.

$$P = \oplus_{k\in K} P_k$$

direkt toplamının projektif olması için gerek ve yeter koşul her $k \in K$ için P_k modülünün projektif olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$) $P = \oplus_{k\in K} P_k$ projektif ve $k \in K$ olsun. $f : A \to B$ epimorfizması ve $g : P_k \to B$ homomorfizması alınsın. $p_k : P \to P_k$' ya k.izdüşüm homomorfizması ve $i_k : P_k \to P$' ye içerim dönüşümü olsun. Aşağıdaki diyagram ele alınırsa;

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[ddl, dashed, "h"'] \arrow[d, "p_k"] & \\ & P_k \arrow[d, "g"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

P projektif olduğundan, $gp_k : P \to B$ homomorfizması için $gp_k = fh$ olacak şekilde bir $h : P \to A$ homomorfizması vardır. Şimdi $h_k : P_k \to A$ homomorfizması $h_k = hi_k$ olarak tanımlansın. $fh_k = f(hi_k) = (fh)i_k = (gp_k)i_k = g(p_k i_k) = (g1_{P_K}) = g$ elde edilir. Böylece her $k \in K$ için P_k projektif modüldür.

($\Leftarrow$) $f : A \to B$ epimorfizması ve $g : P \to B$ homomorfizması alınsın. Her $k \in K$ için P_k modülü projektif olsun. $i_k : P_k \to P$'ye içerim dönüşümü olsun.

$$\begin{tikzcd} & P_k \arrow[d, "i_k"] \arrow[ddl, dashed, "h_k"'] & \\ & P \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h"] & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

P_k projektif olduğundan $gi_k : P_k \to B$ homomorfizması için $gi_k = fh_k$ olacak şekilde bir $h_k : P_k \to A$ homomorfizması bulunur. Her $k \in K$ için, $fh_k = gi_k$ olduğundan $h : P \to A$ dönüşümü; $p_i \in P$ için $h(\sum p_i) = \sum(h_k p_i)$ olarak tanımlanırsa $fh = g$ olur. Böylece P projektiftir. $\square$

<u>*Tanım*</u> 2.2.3. (Anderson ve Fuller, 1992) Bir F, R-modül için aşağıdaki koşullar denktir:

(i) F bir tabana sahiptir.

(ii) $F = \oplus_{i \in I} A_i$ ve her $i \in I$ için $A_i \cong R_R$

Bu koşullardan birini sağlayan F modülüne *serbest modül* ($free\ module$) denir.

<u>*Teorem*</u> 2.2.4. (Alizade ve Pancar, 1999) F serbest bir modül ve $X = \{x_k \mid k \in K\}$, F' nin bir tabanı olsun. Bu durumda her B modulü ve $f : X \to B$ fonksiyonu için $g\mid_X = f$ olacak şekilde tek bir $g : F \to B$ homomorfizması bulunur.

<u>*Yardımcı Teorem*</u> 2.2.5. (Anderson ve Fuller, 1992) Her serbest F modülü projektiftir.

<u>İspat.</u> $f : A \to B$ bir epimorfizma ve $g : F \to B$ bir homomorfizma olsun. $X = \{x_k \mid k \in K\}$, F' nin bir tabanı olsun.

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dotted, "h"'] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Yukarıdaki diyagrama göre, f bir epimorfizma olduğundan dolayı $k \in K$ için $f(a_k) = g(x_k)$ olacak şekilde bir $a_k \in A$ vardır. Her $k \in K$ için $s(x_k) = a_k$ olacak şekilde bir $s : X \to A$ dönüşümü alınsın. Teorem 2.2.4' den her $k \in K$ için $h(x_k) = s(x_k) = a_k$ olacak şekilde bir $h : F \to A$ homomorfizması bulunur. O halde her $b = \sum_{k\in K} x_k r_k \in F$ için,

$$(fh)(b) = f(h(\sum_{k\in K} x_k r_k) = f(\sum_{k\in K} h(x_k) r_k)$$

$$= \sum_{k\in K} f(a_k) r_k = \sum_{k\in K} g(x_k) r_k$$
$$= g(\sum_{k\in K} x_k r_k) = g(b)$$

olur. Böylece $fh = g$ elde edilir. Yani F projektif olur. □

<u>*Sonuç*</u> 2.2.6. (Anderson ve Fuller, 1992) Her modül bir serbest modülün epimorfik görüntüsüdür. Ayrıca her sonlu üretilmiş modül, sonlu tabanlı bir serbest modülün epimorfik görüntüsüdür.

<u>*Teorem*</u> 2.2.7. (Anderson ve Fuller, 1992) Bir P modülü için aşağıdaki koşullar denktir;

(i) P projektiftir;

(ii) $Hom(P, -)$ tam funktordur;

(iii) $0 \to A \to B \to P \to 0$ şeklinde olan her tam dizi parçalanır;

(iv) P bir serbest modülün direkt toplam termine izomorftur.

<u>İspat.</u> $(i) \Rightarrow (ii)$ Herhangi bir $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ tam dizisi için

$$0 \to Hom(P, A) \xrightarrow{f_*} Hom(P, B) \xrightarrow{g_*} Hom(P, C) \to 0$$

dizisinin tam olduğunun gösterilmesi gerekir. Teorem 1.3.9' dan g_*' ın epimorfizma olduğunu göstermek yeterlidir. Keyfi $s \in Hom(P, C)$ alınsın. Aşağıdaki diyagram gözönüne alınsın.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dotted, "t"'] \arrow[d, "s"] & \\ B \arrow[r, "g"] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

P projektif olduğundan, $s = gt = g_*(t)$ olacak şekilde bir $t \in Hom(P, B)$ bulunur. Dolayısıyla g_* epimorfizmadır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ $Hom(P, -)$ funktorunu $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to 0$ tam dizisine uygulayarak

$$0 \to Hom(P, A) \xrightarrow{f_*} Hom(P, B) \xrightarrow{g_*} Hom(P, P) \to 0$$

tam dizisi elde edilir. O halde g_* epimorfizmadır ve dolayısıyla $1_P \in Hom(P, P)$ için $gu = g_*(u) = 1_P$ olacak şekilde bir $u \in Hom(P, B)$ bulunur. Teorem 1.3.6' dan

$$0 \to A \to B \xrightarrow{g} P \to 0$$

dizisi parçalanır.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ Her modül bir serbest modülün epimorfik görüntüsü olduğu için, F, serbest modül olmak üzere bir $f : F \to P$ epimorfizması vardır. Bu durumda (iii)' den dolayı i, içerim homomorfizması olmak üzere

$$0 \to Ker(f) \xrightarrow{i} F \xrightarrow{f} P \to 0$$

kısa tam dizisi parçalanır. Teorem 1.3.6' dan $F \cong Ker(f) \oplus P$ izomorfizması elde edilir. Böylece P, bir serbest modülün direkt toplam terimine izomorftur.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Teorem 2.2.2 ve Yardımcı Teorem 2.2.5' ten serbest modülün direkt toplam terimi bir projektif modüldür. $\square$

Teorem 2.2.8. (Wisbauer, 1991) $M = U \oplus N$ bir R modül olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) N, U-projektif modüldür.

(ii) $M = U + V$ koşulunu sağlayan M' nin her V altmodülü için $M = V' \oplus U$ olacak şekilde V' nin bir V' altmodülü vardır.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ $M = U + V$ ve N, U-projektif olsun. $\pi : M \to M/V$ doğal, $i_U : U \to M$ ve $i_N : N \to M$ içerim dönüşümleri olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} & & N \arrow[d, "\pi i_N"] \arrow[dll, dashed, "f"'] & \\ U \arrow[r, "i_u"'] & M \arrow[r, "\pi"'] & M/V \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı gözönüne alınsın. $\pi i_U(U) = \pi(U) = \frac{U+V}{V} = M/V$ olduğundan πi_U örtendir. N, U projektif olduğundan, $f : N \to U$ homomorfizması vardır öyle ki $\pi i_U f = \pi i_N$' dir. Her $n \in N$ için $\pi i_U f(n) = \pi i_N(n) = n + V = f(n) + V$ olur. Böylece $(1 - f)(N) \subseteq V$ elde edilir. $(1 - f)(N) = V'$ olarak adlandırılsın. $M = U + N \subseteq U + (1 - f)(N)$ olur. Buradan $M = U + V'$ olur. $U \cap (1 - f)(N) = 0$ olduğu gösterilecektir. $u \in U$ ve $n \in N$ için $u = (1 - f)(n)$ olsun. $u = n - f(n)$ olduğundan, $n = u + f(n) \in U \cap N = 0$ elde edilir. Böylece $u = 0$, yani $U \cap (1 - f)(N) = 0$ olur.

$(ii) \Rightarrow (i)$ $M = N \oplus U$, $p : U \to W$ epimorfizma ve $f : N \to W$ homomorfizma olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ U \arrow[r, "p"] & W \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı gözönüne alınsın.

$$P = \{u - n \in M \mid u \in U, n \in N \quad ve \quad p(u) = f(n)\}$$

alınsın. $m \in M$ olsun. $M = U \oplus N$ olduğundan, $m = u + n$ olacak şekilde $u \in U$ ve $n \in N$ vardır. p örten olduğundan, $f(n) = p(u')$ olacak şekilde $u' \in U$ vardır. $m = u + n - u' + u' \in P + U$ olur. Kabulden $P' \subseteq P$ vardır öyle ki $M = U \oplus P'$ olur. $e : M \to U$ doğal dönüşüm ve $i_N : N \to M$ içerim dönüşümü olmak üzere $ei_N : N \to$

$M \to U$ dönüşümü elde edilir. e doğal dönüşüm olduğu için $(1-e)(N) \subseteq P' \subseteq P$ olur. Her $n \in N$, $n - e(n) \in P$ için $f(n) = p(en)$ olur. Böylece N, U-projektiftir. $\square$

Örnek 2.2.9. Temel ideal bölgesindeki (P.I.D.) her projektif modül serbesttir.

İspat. P projektif modül ve R temel ideal bölgesi olsun. Teorem 2.2.7' den $P \cong K \leq_d F$ olacak şekilde F serbest modülü vardır. Temel ideal bölgesindeki serbest modülün diktoplananı da serbest modül olduğu için P serbest modül olur. $\square$

Örnek 2.2.10. $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Q}$ projektif değildir.

İspat. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ projektif modül olduğu kabul edilsin. Böylece, $\mathbb{Q}$' nun, $\{x_i\}_{i\in I}$ tabanlı bir serbest $\mathbb{Z}$-modül F' nin bir altmodülüne izomorf olur. Böylece ancak sonlu sayıda $m_i \neq 0$ olmak üzere, $1 = \sum m_i x_i$ olur. Hiçbir $m_i \neq 0$ tamsayısını bölmeyen bir $p \in \mathbb{Z}$ asal tamsayısı alınsın. $\frac{1}{p}$ rasyonel sayısı da tabandaki elemanların sonlu toplamı şeklinde yazılabilir. $\frac{1}{p} = \sum n_i x_i$ (sonlu $n_i \neq 0$) ve $1 = \sum (pn_i) x_i$ olduğundan, 1' in taban elemanlarının toplamı olarak tek türlü yazılışından, $pn_i = m_i$ olur, yani p/m_i çelişkisi elde edilir. Böylece $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ projektif modül değildir. $\square$

Tanım 2.2.11. M bir R-modül ve P projektif R-modül olsun. $Ker(f) \ll P$ olacak şekilde $f : P \to M$ epimorfizması varsa (P,f) ikilisine M' nin *projektif örtüsü* $(projective\ cover)$ denir. Her modül projektif örtüye sahip olmak zorunda değildir.

Örnek 2.2.12. $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ projektif örtüye sahip değildir.

İspat. Kabul edilsin ki, $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ projektif örtüye sahip olsun. Yani, P projektif olmak üzere $f : P_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ epimorfizması ve $Kerf \ll P$ olsun. $\mathbb{Z}$ temel ideal bölgesi olduğu için, $P = \oplus\mathbb{Z}$' dir. $Rad\mathbb{Z} = 0$ olduğundan $RadP = 0$ olur. $Kerf \subseteq RadP$ olduğundan $Kerf = 0$ olur. Böylece, $P \cong \mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ olur. Buradan $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ projektif olur. Örnek 2.2.10' dan $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$ projektif değildir. Böylece $\mathbb{Q}_{\mathbb{Z}}$' nin projektif örtüsü yoktur. $\square$

Önerme 2.2.13. (Anderson ve Fuller, 1992) Bir modülün projektif örtüsü varsa, bu örtü izomorfizma farkıyla tektir.

İspat. P ve Q projektif modüller, $f : P \to M$ ve $g : Q \to M$ epimorfizmaları ile M modülünün projektif örtüleri olsun.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dotted, "h"'] \\ Q \arrow[r, "g"] & M \end{tikzcd}$$

diyagramı düşünülsün. P projektif olduğundan $gh = f$ olacak şekilde bir $h : P \to Q$ homomorfizması vardır. $gh(P) = f(P) = M = g(Q)$ ve $Kerg \ll Q$ olduğundan, $h(P) = Q$ elde edilir. Böylece h epimorfizma olur. Q projektif olduğundan h epimorfizması parçalanır ve $P = Kerh \oplus S$, $S \cong Q$ olmak üzere $S \leq P$ bulunur. $Kerh \leq Kerf$, $P = Kerf + S$ ve $Kerf \ll P$ olduğundan $P = S$ elde edilir. O halde $Kerh = 0$ olur. Dolayısıyla h monomorfizmadır. Böylece $P \cong Q$ elde edilir.

□

<u>*Yardımcı Teorem*</u> 2.2.14. (Anderson ve Fuller, 1992) M bir sağ R-modül ve $p : P \to M$, M' nin projektif örtüsü olsun. Q_R projektif ve $q : Q \to M$ bir epimorfizma ise Q' nun bir parçalanışı vardır öyle ki,

$$Q = P' \oplus P''$$

olur. Üstelik,

(i) $P' \cong P$

(ii) $P'' \leq Kerq$

(iii) $(q \mid P' : P' \to M)$, M' nin projektif örtüsüdür.

<u>İspat.</u>

$$\begin{tikzcd} & Q \arrow[d, "q"] & \\ P \arrow[r, "p"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı alınsın. Q projektif olduğundan $ph = q$ olacak şekilde $h : Q \to P$

homomorfizması vardır. $ph(Q) = q(Q) = M = p(M)$ olduğundan $P = h(Q) + Kerp$ elde edilir. $Kerp \ll P$ olduğundan, $P = h(Q)$ olur. Böylece h örtendir. Fakat P projektif olduğundan h parçalanır. $g : P \to Q$ bir monomorfizması vardır öyle ki $hg = 1_P$ ve böylece $Q = Img \oplus Kerh$ olur. $Img = P'$ ve $Kerh = P''$ alınsın. g birebir olduğundan $P' \cong P$ olur. $ph = q$ olduğundan $P'' \leq Kerq$ elde edilir. Böylece $q(P') = q(Q) = M$ olur öyle ki,

$$P' \xrightarrow{q|P'} M \to 0$$

dizisi tamdır. $(ph)g = p(hg) = p$ ve $Ker(q \mid P') = g(Kerp)$, $g(P) = P'$' nin atık altmodülü olduğundan (iii) sağlanır. $\square$

<u>*Önerme*</u> 2.2.15. (Anderson ve Fuller, 1992) M sonlu üreteçli ve (P, f), M' nin projektif örtüsü olsun. O zaman P de sonlu üreteçlidir.

<u>İspat.</u> M sonlu üreteçli olduğundan, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $g : R^n \to M$ epimorfizması bulunur. Aşağıdaki diyagram gözönüne alınırsa;

$$\begin{tikzcd}
 & R^n \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\
P \arrow[r, "f"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

R^n projektif olduğundan dolayı $fh = g$ olacak şekilde bir $h : R^n \to P$ homomorfizması vardır ve $fh(R^n) = g(R^n) = f(P)$ ve $Kerf \ll P$ olduğundan, h epimorfizmadır. P projektif olduğundan h parçalanır ve $R^n = P \oplus K$ olacak şekilde bir $K \leq R^n$ vardır. Böylece P sonlu üreteçli olur. $\square$

<u>*Önerme*</u> 2.2.16. (Anderson ve Fuller, 1992) U ve M birer sağ R modül olsun. Aşağıdaki koşullar denktir.

(i) U, M-projektiftir;

(ii) M_R' deki her

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$$

olacak şekildeki her tam dizi için,

$$0 \to Hom_R(U,K) \stackrel{f_*}{\to} Hom_R(U,M) \stackrel{g_*}{\to} Hom_R(U,N) \to 0$$

dizisi tamdır.

İspat. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Teorem 2.2.7' den (ii)' nin olması için gerek ve yeter koşulu her

$$M \stackrel{g}{\to} N \to 0$$

dizisi tam ise

$$Hom_R(U,M) \stackrel{g_*}{\to} Hom_R(U,N) \to 0$$

dizisinin tam olmasıdır. Fakat g_* örtendir ancak ve ancak herbir $\gamma \in Hom(U,N)$ için, $\overline{\gamma} \in Hom(U,M)$ vardır öyle ki, $\gamma = g_*(\overline{\gamma}) = g\overline{\gamma}$ olur. □

Önerme 2.2.17. (Anderson ve Fuller, 1992) U sağ R-modül olsun. O zaman,

(i) U, M-projektif ve

$$0 \to M' \stackrel{h}{\to} M \stackrel{k}{\to} M'' \to 0$$

dizisi tam ise U hem M' hem de M''-projektiftir.

(ii) U, $M_1, M_2, ..., M_n$-projektif ise U modülü $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$-projektiftir. Üstelik U sonlu üreteçli, bir indeks kümesi A ve her $\alpha \in A$ için M_α-projektif ise U, $\bigoplus_A M_\alpha$-projektiftir.

İspat. (i) U, M-projektif ve

$$0 \to M' \stackrel{h}{\to} M \stackrel{k}{\to} M'' \to 0$$

dizisi tam olsun. İlk olarak U' nun, M'-projektif olduğu gösterilecektir. $X \leq M'$

olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "f"] & \\ M' \arrow[r, "\pi'"] & M'/X \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı düşünülsün. $h' : M'/X \to M/h(X)$ dönüşümü; $m' \in M'$ olmak üzere, $h'(m' + X) = h(m') + h(X)$ olarak tanımlansın. $\pi : M \to M/X$ doğal dönüşümü olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, "f"] & \\ M' \arrow[r, "\pi'"] \arrow[d, "h"] & M'/X \arrow[r] \arrow[d, "h'"] & 0 \\ M \arrow[r, "\pi"] & M/h(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı ele alınırsa; U, M-projektif olduğundan $\alpha : U \to M$ dönüşümü vardır öyle ki $\pi\alpha = h'f$' dir. $u \in U$ olmak üzere, $\pi\alpha(u) = h'f(u)$' dur. $\pi\alpha(u) = \alpha(u) + X = h'f(u) = m' + X$ olacak şekilde $m' \in M$ vardır. Buradan, $\alpha(u) - m' \in X \leq M'$ olur. Böylece $\alpha(u) \in M'$ elde edilir. Yani $Im\alpha \leq M'$ olur. Dolayısıyla; $\alpha : U \to M'$ olur. Böylece $\pi'\alpha = f$ elde edilir. Yani U, M'-projektif olur. Benzer şekilde U, M''-projektiftir.

(ii) Sadece $i = 2$ durumu için ispatlamak yeterlidir. U, M_1 ve M_2-projektif olsun. $K \leq M_1 \oplus M_2$ olsun. $n_K : M_1 \oplus M_2 \to (M_1 \oplus M_2)/K$ doğal dönüşümü olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r] \arrow[d, "n_1"'] & M_1 \oplus M_2 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[r] \arrow[d, "n_2"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & (M_1 + K)/K \arrow[r] & (M_1 \oplus M_2)/K \arrow[r] & (M_2 + K)/K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

satırları ve sütunları tam dizi olan değişmeli bir diyagram alınsın. Bu diyagrama, $Hom(U,-)$ funktoru uygulandığında U, M_1 ve M_2-projektif olduğundan,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Hom(U,M_1) \arrow[r] \arrow[d, "(n_1)_*"'] & Hom(U,M_1\oplus M_2) \arrow[r] \arrow[d, "(n_k)_*"'] & Hom(U,M_2) \arrow[r] \arrow[d, "(n_2)_*"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & Hom(U,\frac{M_1+K}{K}) \arrow[r] & Hom(U,\frac{M_1\oplus M_2}{K}) \arrow[r] & Hom(U,\frac{M_2+K}{K}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

satır ve sütunları tam dizi olan diyagram ve $(n_k)_* : Hom(U,M_1\oplus M_2) \to Hom(U,(M_1\oplus M_2)/K)$ dönüşümü elde edilir. Yardımcı Teorem 1.3.5' den, $(n_1)_*$ ve $(n_2)_*$ örten olduğundan $(n_k)_*$ da örtendir. Böylece U, $M_1\oplus M_2$ projektif olur.
Son olarak U sonlu üreteçli ve U her $\alpha\in A$ için M_α-projektif olsun.

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[d, "f"] & \\
\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha \arrow[r, "g"] & N \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramı alınsın. U sonlu üreteçli olduğundan Imf sonlu üreteçlidir. g örten olduğundan bazı $\{x_1,...,x_n\} \in \bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ vardır, öyle ki Imf, $\{g(x_1),...,g(x_n)\}$ kümesini kapsar. $M' = x_1R+...+x_nR \leq \bigoplus_A M_\alpha$ olsun. M', $\bigoplus_F M_\alpha \leq \bigoplus_A M_\alpha$' nın sonlu direk toplamının içinde olduğundan, (i) ve (ii)' den U, M'-projektiftir. Böylece, üstteki diyagram gözönüne alınırsa $h : M \to M'$ vardır öyle ki,

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[dl, dotted, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
M' \arrow[r, "g|M'"] & Imf \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramını değişmeli yapar. Böylece $gh = f$ elde edilir. Yani U, $\oplus_A M_\alpha$-projektif olur. □

Teorem 2.2.18. (Anderson ve Fuller, 1992) M, N ve T birer sağ R-modül olsun. Eğer $M\oplus N$, T-projektif ise M, T-projektif olur.

İspat. $B \leq T$ olmak üzere, $f : T \to T/B$ bir epimorfizma ve $g : M \to T/B$ herhangi bir homomorfizma olsun. $p_M : M \oplus N \to M$ doğal dönüşüm ve $i_M : M \to M \oplus N$ içerim dönüşüm olmak üzere aşağıdaki diyagram ele alınırsa;

$$\begin{tikzcd}
 & M \oplus N \arrow[d, "p_M"] \arrow[ddl, dashed, "h"'] & \\
 & M \arrow[d, "g"] \arrow[dl, dashed, "h_M"] & \\
T \arrow[r, "f"'] & T/B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$M \oplus N, T$-projektif olduğundan $gp_M : M \oplus N \to B$ homomorfizması için $gp_M = fh$ olacak şekilde bir $h : M \oplus N \to T$ homomorfizması vardır. Şimdi $h_M : M \to T$ homomorfizması $h_M = hi_M$ olarak tanımlansın. $fh_M = (fh)i_M = (gp_M)i_M = g1_M = g$ elde edilir. Böylece M, T-projektif olur. $\square$

<u>*Sonuç*</u> 2.2.19. (Hungerford, 1974) R bir halka olsun. Aşağdakiler denktir:

(i) Her R-modül projektiftir.

(ii) Her kısa tam dizi parçalanır.

(iii) Her R-modül injektiftir.

<u>İspat.</u> $(i) \Rightarrow (ii)$ Her R-modül projektif olsun.

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$$

tam dizisi alınsın. C projektif olduğundan Teorem 2.2.7'den dizi parçalanır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ J bir sağ R-modül olsun ve

$$0 \to J \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} B \to 0$$

kısa tam dizisi alınsın. Kabulden dizi parçalanır. Teorem 2.1.9'dan J injektif olur.

$(iii) \Rightarrow (i)$ P bir sağ R-modül olsun ve

$$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} P \to 0$$

kısa tam dizisi alınsın. Teorem 2.1.9' dan A injektif olduğundan, dizi parçalanır. Böylece P projektif olur. $\square$

Önerme 2.2.20. (Anderson ve Fuller, 1992) R bir halka olsun. P sağ R-modülü projektif ise $Rad(P) = PJ(R)$' dir.

İspat. P serbest modülün dik toplananına izomorf olduğundan $P \oplus P' \cong R^A$ olacak şekilde bir indeks kümesi A vardır. $Rad(P) \oplus Rad(P') = Rad(R^A) = (RadR)^A = (J(R))^A = J(R).R^A \subseteq PJ(R) \oplus P'J(R)$ olur. Sonuç 1.6.11' den dolayı her sağ R-modül P için $PJ(R) \leq RadP$ ve $P'J(R) \leq RadP'$' dir. Yani $RadP \oplus RadP' = PJ(R) \oplus P'J(R)$' dir. Böylece $Rad(P) = PJ(R)$ elde edilir. $\square$

Örnek 2.2.21. $J = J(R)$ olsun.

1) e, R' nin eşkare elamanı ise Önerme 2.2.20' den dolayı $eJ = Rad(eR) \ll eR$' dir. Böylece eR projektif olduğundan $n : eR \to eR/eJ$ doğal dönüşüm olmak üzere, (eR, n) ikilisi eR/eJ' nin projektif örtüsüdür.

2) R yerel bir halka ve M_R sonlu üreteçli olsun. R/J bölüm halkası ve M/MJ, R/J üzerinde sonlu boyutlu vektör uzayı olur. M/MJ' nin k boyutlu olduğu kabul edilsin, öyle ki $P = R^{(k)}$ olsun. $Kerq = PJ$ olacak şekilde $q : P \to M/MJ$' ye bir R-epimorfizması vardır.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[ld, dotted, "p"'] \arrow[d, "q"] & \\ M \arrow[r, "n"] & M/MJ \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı alınırsa, P projektif ve $n : M \to M/MJ$ doğal dönüşüm olduğu için $np = q$ olacak şekilde $p : P \to M$ homorfizması vardır. Yardımcı Teorem 1.6.13' ten $MJ \ll M$ ve n atık epimorfizma olur. Böylece p örtendir. Fakat $Kerp \leq Kerq = PJ \ll P$ olduğu için, (P, p) M' nin projektif örtüsüdür.

Önerme 2.2.22. (Anderson ve Fuller, 1992) P projektif sağ R-modül, $S = End(P_R)$ endomorfizma halkası ve $a \in S$ olsun. Bu durumda,

$$a \in J(S) \Leftrightarrow Ima \ll P_R$$

Sonuç 2.2.23. (Anderson and Fuller, 1992) $J = J(R)$ olsun. P projektif sağ R-modül öyle ki, $PJ \ll P$ ise, $J(End(P_R)) = Hom(P, PJ)$ ve $End(P_R)/J(End(P_R)) \cong End(P_R/PJ)$ olur.

Önerme 2.2.24. (Anderson ve Fuller, 1992) Sıfırdan farklı her projektif modül maksimal bir altmodül içerir.

Tanım 2.2.25. (Anderson ve Fuller, 1992) M sağ R-modül, $(x_\alpha)_{\alpha \in I}$ M' de ve $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ $Hom(M, R)$' de olmak üzere, eğer her $x \in M$ için

(i) hemen hemen her $\alpha \in I$ için $f_\alpha(x) = 0$

(ii) $x = \sum_{\alpha \in I} f_\alpha(x) x_\alpha$

koşulları sağlanıyorsa $((x_\alpha)_{\alpha \in I}, (f_\alpha)_{\alpha \in I})$ çiftine M' nin *dual tabanı* $(dual\ basis)$ denir.

Önerme 2.2.26. (Anderson ve Fuller, 1992) (Dual Taban Teoremi) M projektif sağ R-modüldür ancak ve ancak M dual tabana sahiptir.

Önerme 2.2.27. (Anderson ve Fuller, 1992) P_R sıfırdan farklı bir projektif modül olsun. O zaman P basit modülün projektif örtüsüdür ancak ve ancak P' nin her sıfırdan farklı bölüm modülü parçalanamazdır.

İspat. Kabul edilsin ki, P basit bir modülün projektif örtüsü olsun. Böylece P yerel olur. Önerme 1.6.7 'den yerel modüllerin bölüm modülleri de yerel olduğu için ve her yerel modül parçalanamaz olduğu için P' nin sıfırdan farklı bölüm modülü parçalanamaz olur.

Tersine, P' nin sıfırdan farklı her bölüm modülü parçalanamaz olsun. Her projektif modül en az bir maksimal altmodül içerdiği için, K, P' nin maksimal altmodülü olsun. P/K basit modüldür. Eğer $K \ll P$ olduğu gösterilirse ispat biter. Kabul edilsin ki, K, P' nin atık altmodülü olmasın. Böylece $P = K + J$ olacak şekilde, P' nin J öz altmodülü vardır. $\frac{P}{K\cap J}$ bölüm modülü kabulden parçalanamazdır. Fakat $\frac{P}{K\cap J} = \frac{K}{K\cap J} \oplus \frac{J}{K\cap J}$ dir. Bu ise çelişkidir. Böylece P, P/K' nın projektif örtüsü olur. $\square$

Önerme 2.2.28. (Anderson ve Fuller, 1992) R bir halka ve $J(R) = 0$ olsun. O zaman projektif olmayan hiçbir R-modül projektif örtüye sahip olamaz.

İspat. M projektif olmayan bir modül olsun. (P, f), M' nin projektif örtüsü olsun. $Kerf \ll P$ olduğu için $Kerf \subseteq RadP$ elde edilir. $RadP = P.RadR = PJ(R) = P0 = 0$ olduğundan $Kerf = 0$ olurdu. Yani $P \cong M$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. $\square$

Önerme 2.2.29. (Anderson ve Fuller, 1992) Eğer $p_i : P_i \to M_i$, $(i = 1, 2, ..., n)$ projektif örtüleri ise $(\oplus_{i=1}^{n} p_i) : \oplus_{i=1}^{n} P_i \to \oplus_{i=1}^{n} M_i$ bir projektif örtü olur.

İspat. $i = 2$ için ispat verilecektir.P_1 ve P_2 projektif modüller olmak üzere, $f_1 : P_1 \to M_1$, $Kerf_1 \ll P_1$ ve $f_2 : P_2 \to M_2$, $Kerf_2 \ll P_2$ olsun.

$$f : f_1 + f_2 : P_1 \oplus P_2 \to M_1 \oplus M_2$$

$$(p_1, p_2) \mapsto (f_1(p_1), f_2(p_2))$$

olarak tanımlansın. $(p_1, p_2) = (p_1', p_2') \in P_1 \oplus P_2$ ise $p_1 = p_1'$, $p_2 = p_2'$ olur. $f_1(p_1) = f(p_1')$ ve $f_2(p_2) = f(p_2')$ olur. $f(p_1, p_2) = (f_1(p_1), f_2(p_2)) = (f(p_1'), f(p_2')) = f(p_1', p_2')$' dir. Yani f iyi tanımlıdır. f_1 ve f_2 modül homomorfizmaları olduğu için f de modül homomorfizmasıdır. $(m_1, m_2) \in M_1 \oplus M_2$ olsun. $f_1(p_1) = m_1$ olacak şekilde $p_1 \in P_1$ ve $f_2(p_2) = m_2$ olacak şekilde $p_2 \in P_2$ vardır. O zaman $f(p_1, p_2) = (m_1, m_2)$ olur ki f örten olur. $Kerf = Kerf_1 \oplus Kerf_2 \ll M_1 \oplus M_2$' dir. Böylece $(f, M_1 \oplus M_2)$, $P_1 \oplus P_2$' nin projektif örtüsüdür. $\square$

Önerme 2.2.30. (Anderson ve Fuller, 1992) M ve $M \oplus N$ projektif örtüye sahip ise N de projektif örtüye sahiptir.

İspat. $P \xrightarrow{\pi} M \to 0$ ve $P' \xrightarrow{\pi'} M \oplus N \to 0$ projektif örtüler olsun. $\pi \oplus 1_N : P \oplus N \to M \oplus N$ dönüşümü $p \in P$ ve $n \in N$ olmak üzere $(\pi \oplus 1_N)(p + n) = \pi(p) + n$ olarak tanımlansın. π örten olduğundan $\pi \oplus 1_N$ de örten olur.

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[d, "\pi'"] & \\ P \oplus N \arrow[r, "\pi\oplus 1_N"] & M \oplus N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı gözönüne alınsın. P' projektif olduğu için $\gamma : P' \to P \oplus N$ dönüşümü vardır öyle ki $(\pi \oplus 1_N)\gamma = \pi'$ olur. $Ker\pi' \ll P'$ olduğundan, $Ker\gamma \ll P'$ olur. Böylece γ örten olur. $\epsilon : P \oplus N \to P$ doğal dönüşümü olmak üzere;

$$0 \to Ker(\epsilon\gamma) \to P' \stackrel{\epsilon\gamma}{\to} P \to 0$$

tam dizisi ele alınsın. P projektif olduğu için bu dizi parçalanır. Böylece $\gamma^{-1}(N) = Ker(\epsilon\gamma)$, P'' nin dik toplananıdır. Yani $\gamma^{-1}(N)$ projektif olur. $Ker\gamma \ll P'$ olduğundan;

$$0 \to Ker(\gamma) \to \gamma^{-1}(N) \stackrel{\gamma}{\to} N \to 0$$

tam dizisi N' nin projektif örtüsüdür. □

2.3. SI-HALKALAR VE PCI HALKALAR

Bu bölümde SI-halka ve PCI halka kavramları tanımlanıp, bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 2.3.1. (T.Y.Lam, 1998) M bir sağ R-modül olsun. $m \in M$ için $\{r \in R \mid mr = 0(rm = 0)\}$ kümesine m' nin *sıfırlayıcısı* $(annihilator)$ denir ve $ann_r(m)(ann_l(m))$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.2. (T.Y.Lam, 1998) M bir sağ R-modül olsun. Eğer $m \in M$ için $ann_r(m) \leq_e R_R$ ise m' ye *tekil* $(singular)$ eleman denir. M' nin tekil elemanlarının kümesi $Z(M)$ ile gösterilir.

Bu tanıma denk olarak,

$$Z(M) = \{m \in M \mid mI = 0 \quad \text{olacak şekilde } I \leq_e R \text{ vardır}\}$$

şeklinde de ifade edilir.

Önteorem 2.3.3. (T.Y.Lam, 1998) M bir sağ R-modül olsun.

(i) $Z(M)$ altmodüldür (M' nin tekil altmodülü denir).

(ii) $Z(M)Soc(R_R) = 0$' dır.

(iii) $f : M \to N$ herhangi bir R-homomorfizması ise $f(Z(M)) \leq Z(N)$' dir.

(iv) $M \leq N$ ise $Z(M) = M \cap Z(N)$' dir.

Sonuç 2.3.4. (K.R.Goodearl, 1976) R bir halka olsun.

(i) $Z(R_R)$ R' de idealdir.

(ii) $R \neq 0$ ise $Z(R_R) \neq R$' dir.

(iii) $Z(R_R)$ sıfırdan başka eşkare eleman kapsamaz.

Tanım 2.3.5. (K.R.Goodearl, 1976) $Z(M) = M$ ise M' ye ***tekil modül*** $(singular)$ denir. $Z(M) = 0$ ise M' ye ***tekil olmayan modül*** $(non-singular)$ denir. Ayrıca, R bir halka olmak üzere, $Z(R_R)$ idealine R' nin ***sağ tekil ideali*** denir ve Z_r ile gösterilir. Benzer şekilde $Z(_RR)$ idealine R' nin ***sol tekil ideali*** denir ve Z_l ile gösterilir.

Önerme 2.3.6. (K.R.Goodearl, 1976) B tekil olmayan modül ve $A \leq B$ olsun. B/A tekildir ancak ve ancak $A \leq_e B$' dir.

Önerme 2.3.7. (K.R.Goodearl, 1976) P projektif ve $X \leq P$ olsun. P/X tekildir ancak ve ancak $X \leq_e P$' dir. Özel olarak P projektif ve tekil ise $P = 0$' dır.

Örnek 2.3.8. $1)$ Herhangi bir basit halka tekil olmayan halkadır, çünkü R basit halka ise $R \neq 0$' dır.

$2)$ $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ tekil olmayan bir halkadır, çünkü $\mathbb{Z}$' nin sıfırdan farklı her (sağ) ideali esas idealdir.

$3)$ M_R tekildir ancak ve ancak $M \cong B/A$ ve $A \leq_e B$ olacak şekilde A ve B R-modülleri vardır.

Önerme 2.3.9. (K.R.Goodearl, 1976) **(i)** Tekil olmayan tüm sağ R-modüllerin sınıfı altmodüller, dik çarpımlar, esas genişlemeler ve modül genişlemeleri altında kapalıdır. **(ii)** Bütün tekil sağ R-modüllerin sınıfı altmodüller, bölüm modülleri ve dik toplamlar altında kapalıdır.

Önerme 2.3.10. (K.R.Goodearl, 1976) A herhangi bir basit sağ R-modül ise A ya tekil ya da projektiftir.

Sonuç 2.3.11. (K.R.Goodearl, 1976) Her tekil olmayan yarıbasit modül projektiftir.

Tanım 2.3.12. (R.Wisbauer, 1991) R bir halka olsun. R' nin sıfırdan farklı iki yönlü üstel sıfır ideali yoksa R' ye *yarıasal* $(semiprime)$ halka denir.

Tanım 2.3.13. (K.R.Goodearl, 1976) Bütün tekil sağ R-modüller injektif ise R' ye sağ *SI-halka* $(right\ SI-ring)$ denir.

Önerme 2.3.14. (K.R.Goodearl, 1976) Aşağıdaki koşullar denktir;

(i) R bir sağ SI-halkadır,

(ii) Bütün tekil sağ R-modüller yarıbasittir,

(iii) $I_R \leq_e R_R$ olmak üzere R/I yarıbasittir.

Önerme 2.3.15. (T.Y.Lam, 1999) R bir halka ve $S = Soc(R_R)$ R' nin sağ sokulu olsun. O zaman $Z(R_R) \subseteq ann_l(S)$' dir. R sağ Artin ise eşitlik sağlanır. R yarıasal ise $Z(R_R) \cap S = 0$' dır.

Sonuç 2.3.16. (K.R.Goodearl, 1976) R düzenli bir halka olsun. Aşağıdaki koşullar denktir;

(i) R sağ SI-halkadır,

(ii) $R/Soc(R_R)$ yarıbasit halkadır,

(iii) R sol SI-halkadır.

Önerme 2.3.17. (K.R.Goodearl, 1976) $R/Rad(R)$ yarıbasit olsun. Aşağıdaki koşullar denktir;

(i) $Z_r(R) = 0$ ve R sağ SI-halkadır,

(ii) $Z_r(R) = 0$ ve $[Rad(R)]^2 = 0$,

(iii) $Z_l(R) = 0$ ve R sol SI-halkadır.

Tanım 2.3.18. (Anderson ve Fuller, 1992) R' nin bütün sağ (sol) idealleri projektif ise R'ye *sağ (sol) kalıtsal halka* $(right\ (left)\ hereditary)$ denir.

Önerme 2.3.19. (K.R.Goodearl, 1976) R halkası için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) $Z_r(R) = 0$ ve bütün tekil olmayan sağ R-modüller projektiftir.

(ii) $Z_l(R) = 0$ ve bütün tekil olmayan sol R-modüller projektiftir.

(iii) R sağ ve sol kalıtsal Artin ve R' nin maksimal sol ve sağ bölüm halkası çakışır.

Önerme 2.3.20. (K.R.Goodearl, 1976) R sağ SI-halka olsun. O zaman,

(i) $Rad(R) \leq Soc(R_R)$.

(ii) $[Rad(R)]^2 = 0$.

(iii) $I_R \leq_e R_R$ olmak üzere $I^2 = I$' dır.

(iv) R sağ kalıtsaldır.

Tanım 2.3.21. (J. Cozzens ve C. Faith, 1975) R birimli bir halka olsun. Her öz devirli sağ R-modül injektif ise R' ye sağ ***PCI-halkası*** $(right\ PCI - ring)$ denir.

Tanım 2.3.22. (J. Cozzens ve C. Faith, 1975) Yarıbasit olmayan PCI-halkaların oluşturduğu halkaya ***PCI-bölgesi*** $(PCI - domain)$ denir.

Tanım 2.3.23. (K.R.Goodearl, 1976) R bir halka olsun. Her basit sağ R-modül injektif ise R' ye ***sağ V-halka*** $(right\ V - ring)$ denir.

Teorem 2.3.24. (K.R.Goodearl, 1976) R halkası için aşağıdakiler denktir.

(i) R sağ V-halkadır.

(ii) Her öz sağ ideal, maksimal sağ ideallerin kesişimidir.

(iii) Her sağ R- modül M için, $RadM = 0$' dır.

BÖLÜM 3

PROJEKTİF OLARAK FAKİR MODÜLLER
VE
PROJEKTİF OLARAK SAĞ ORTA SINIFA SAHİP OLMAYAN HALKALAR

3.1. PROJEKTİFLİK BÖLGESİ

Cebirsel bir yapının karakterizasyonu için bazı özel sınıflar tanımlanabilir. Projektif ve İnjektif modüller için de bazı özel sınıflar tanımlanmıştır. M ve N sağ R-modüller olmak üzere,

$$In^{-1}(M) = \{N : M, N - injektif\}$$

$$Pr^{-1}(M) = \{N : M, N - projektif\}$$

sırasıyla injektiflik bölgesi ve projektiflik bölgesi ifadeleri literatürde yerini almaktadır. Açıktır ki, M injektiftir ancak ve ancak M' nin injektiflik bölgesi tüm sağ R-modüllerdir. Benzer şekilde M projektiftir ancak ve ancak M' nin projektiflik bölgesi tüm sağ R-modüllerdir. Her modül yarıbasit modüllere göre hem injektif hem de projektif olduğu için, injektiflik bölgesi ve projektiflik bölgesi daima yarıbasit modülleri kapsar. Kısacası, projektiflik ve injektiflik bölgesi boştan farklı ve bir modül injektif ya da projektif modül iken injektiflik ya da projektiflik bölgesi mümkün olabileceği en büyük sınıf olan tüm sağ R-modüllerin kategorisinden oluşmaktadır.

2010 yılında Alahmedi, Alkan ve Lopez bunun aksini düşünerek injektiflik bölgesi sadece mümkün olabileceği en küçük sınıf olan yarıbasit modüllerin kategorisi olduğu modüllerin ne olduğu sorusunu sordular ve bu modüllere fakir $(poor)$ ismini verdiler

[1]. Ayrıca bir sağ modül ya injektif ya da fakir ise bu halkalara sağ orta sınıfa sahip olmayan halka $(no\ right\ middle\ class)$ ismini verdiler. 2011 yılında Er, Lopez ve Sökmez, her halkanın fakir modüle sahip olduğunu ispatlamışlar ve yarıbasit fakir modüllere sahip halkaları karakterize etmişlerdir [10]. Buna bağlı olarak literatürde çok bilinen halkalar ile ilgili ilişkileri ve orta sınıfa sahip halkaların karakterizasyonları verildi [10,4]. Fakir modüllerin projektif versiyonu olarak; projektif olarak fakir modüller Holston, Lopez ve Orhan Ertaş tarafından 2012 yılında verildi [14]. İlk olarak projektiflik bölgesinin bazı özellikleri tartışılacaktır.

Önerme 3.1.1. Projektiflik bölgesi altmodüller altında kapalıdır.

İspat. M bir sağ R modül ve $X \leq N \in Pr^{-1}(M)$ olsun. Açıktır ki M, N- projektiftir. Önerme 2.2.16' dan $X \leq N$ ise M, X-projektiftir. Böylece $X \in Pr^{-1}(M)$ olur. □

Önerme 3.1.2. Projektiflik bölgesi epimorfik görüntü altında kapalıdır.

İspat. M bir sağ R modül ve $N \in Pr^{-1}(M)$ olsun. X, N' nin altmodülü olmak üzere; M N-projektif olduğu için Önerme 2.2.16' dan M, N/X- projektiftir. Böylece $N/X \in Pr^{-1}(M)$ olur. □

Önerme 3.1.3. Projektiflik bölgesi sonlu diktoplamlar altında kapalıdır.

İspat. İki durumu için ispat verilecektir. M bir sağ R-modül olsun ve $A_1, A_2 \in Pr^{-1}(M)$ olsun. M A_1-projektif ve M, A_2-projektif olduğu için Teorem 2.2.16' dan M $A_1 \oplus A_2$-projektiftir. O zaman $A_1 \oplus A_2 \in Pr^{-1}(M)$' dir. □

Önerme 3.1.4. Her R halkası için, $\bigcap_{M \in Mod-R} Pr^{-1}(M) = SSMod - R$' dir.

İspat. "$\subseteq$"$N \in \bigcap_{M \in Mod-R} Pr^{-1}(M)$ ve $T \leqslant N$ olsun. $N \diagup T$ N-projektiftir. Bu yüzden $T \leq_d N$' dir. Böylece N yarıbasit olur.
"$\supseteq$" Açıktır. □

3.2. PROJEKTİF OLARAK FAKİR MODÜLLER

Şimdi projektiflik bölgesinin mümkün olabilen en küçük sınıf olan durumları incelenecektir. Projektif olarak fakir modüllerin bazı özellikleri verilecektir. Bu bölümdeki tüm bilgiler [14] referanstan alınmıştır.

Tanım 3.2.1. M modülünün projektiflik bölgesi sadece yarıbasit modüllerden oluşursa M 'ye *projektif olarak fakir modül* $(projectively - poor)$ denir. Açıktır ki,

$$M \text{ projektif olarak fakir } \Leftrightarrow Pr^{-1}(M) = SS - ModR$$

Önerme 3.2.2. Bir R halkası için aşağıdakiler denktir;

(i) R yarıbasit Artin bir halkadır.

(ii) Her sağ R-modül projektif olarak fakirdir.

(iii) Projektif olarak fakir bir projektif modül vardır.

(iv) $\{0\}$ modülü projektif olarak fakirdir.

(v) R projektif olarak fakir olan bir halkadır.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$ R yarıbasit ve M_R bir modül olsun. $N_R \in Pr^{-1}(M)$ alınsın. R yarıbasit olduğundan N de yarıbasit olur. Böylece M projektif olarak fakir olur.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Her sağ R modül projektif olarak fakir olduğundan R de projektif olarak fakirdir. R projektif olduğundan en az bir tane hem projektif hem de projektif olarak fakir olan modül vardır.

$(iii) \Rightarrow (iv)$ $X \in Pr^{-1}(0)$ olsun. $Pr^{-1}(0) = Mod-R$' dir. (iii)' den P hem projektif hem de projektif olarak fakir olsun. $Pr^{-1}(P) = Mod-R = SS-ModR$' dır. Böylece $\{0\}$ projektif olarak fakirdir.

$(iv) \Rightarrow (v)$ $Pr^{-1}(0) = Mod - R$ ve (iv)' den $\{0\}$ projektif olarak fakir olduğu için $Mod-R = SS-ModR$' dir. Dolayısıyla her modül yarıbasit olur. Böylece R projektif olarak fakirdir.

$(v) \Rightarrow (i)$ R projektif olarak fakir bir halka olsun. R projektif olduğu için $Pr^{-1}(R) = Mod{-}R = SS{-}ModR$' dır. Dolayısıyla her modül yarıbasit olur. Böylece R yarıbasit Artindir. $\square$

<u>*Önerme*</u> 3.2.3. R halkası için, M_R projektif olarak fakir bir modül ise, her $N \in Mod{-}R$ için $M \oplus N$ projektif olarak fakirdir.

<u>İspat.</u> M projektif olarak fakir modül ve N bir sağ R-modül olsun. $T \in Pr^{-1}(M \oplus N)$ alınsın. Yani $M \oplus N$, T-projektiftir. Teorem 2.2.18' den M, T projektiftir. M projektif olarak fakir olduğu için T yarıbasit olur. Böylece $M \oplus N$ projektif olarak fakirdir.
$\square$

Projektif olarak fakir modüllerin varlığını merak etmek doğaldır. Bu yüzden, şimdi her halkanın projektif olarak fakir bir modüle sahip olduğu 2 yolla ispatlanacaktır.

<u>*Önerme*</u> 3.2.4. Her halka projektif olarak fakir bir modüle sahiptir.

<u>İspat.</u>R bir halka olsun. $\{A\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ yarıbasit olmayan devirli sağ R modüllerin izomorfik sınıfının tam kümesi olsun. Her $\gamma \in \Gamma$ için, A_γ yarıbasit değildir. A_γ yarı basit olmadığı için, X_γ' yı A_γ' nın diktoplananı olmayacak şekilde seçilsin. $X = \oplus_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma / X_\gamma$ modülü alınsın. A yarıbasit olmayan devirli modül ve X, A-projektif olsun. Böylece $A \cong A_\gamma$ olacak şekilde bir $\gamma \in \Gamma$ vardır. X, A-projektif olduğu için, A_γ / X_γ, A_γ-projektif olur. Böylece $X_\gamma \leq_d A_\gamma$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Böylece X projektif olarak fakirdir. $\square$

<u>*Uyarı*</u> 3.2.5. $\oplus_{i\in I} M_i^{(I_i)}$ projektif olarak fakir ise $\oplus_{i\in I} M_i$ de projektif olarak fakirdir.

<u>*Önerme*</u> 3.2.6. R bir halka ve Γ devirli sağ R-modüllerin temsillerinin tam kümesi ise $M = \oplus_{N\in\Gamma} N$ projektif olarak fakirdir.

<u>İspat.</u> Önerme 3.2.4' ün ispatındaki notasyonlar kullanılarak, $X' \leq X$ olsun. Uyarı 3.2.5' ten X projektif olarak fakir olduğundan, X' projektif olarak fakirdir. $X' \leq_d M$ olduğundan, Önerme 3.2.3' ten M projektif olarak fakirdir. $\square$

Bu önermenin sonucu olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

<u>*Örnek*</u> 3.2.7. $\mathbb{Z}$-modül, $M = \oplus_{p\ prime} \mathbb{Z}_p$ $(p\ asal)$ projektif olarak fakirdir. Fakat M' nin öz diktoplananları projektif olarak fakir değildir.

Projektif olarak fakir her modülün diktoplananın ve epimorfik görüntüsünün projektif olarak fakir olup olmadığını sormak doğaldır. Aşağıda verilen önerme ile bu durumlar incelenecektir.

Önerme 3.2.8. R halkası için aşağıdaki koşullar denktir;

(i) R yarıbasit Artin bir halkadır.

(ii) Projektif olarak fakir sağ (sol) R-modüller yarıbasittir.

(iii) Projektif olarak fakir sağ R-modülün sıfırdan farklı diktoplananı da projektif olarak fakirdir.

(iv) Projektif olarak fakir sağ R-modülün sıfırdan farklı faktörleri de projektif olarak fakirdir.

İspat. $(i) \Rightarrow (ii)$, (iii) ve (iv) açıktır.

$(ii) \Rightarrow (i)$ M herhangi bir sağ R-modül ve X projektif olarak fakir modül olsun. $X \oplus M$ projektif olarak fakirdir. Kabulden projektif olarak fakir her modül yarıbasit olduğundan $X \oplus M$ yarıbasittir. Böylece M yarıbasit olur.

$(iii) \Rightarrow (i)$ M herhangi bir sağ R-modül ve X projektif olarak fakir modül olsun. $X \oplus M$ projektif olarak fakirdir. Kabulden M projektif olarak fakir olur. Böylece her modül projektif olarak fakirdir. Önerme 3.2.2' den R yarıbasit Artin olur.

$(iv) \Rightarrow (i)$ M herhangi bir sağ R-modül ve X projektif olarak fakir modül olsun. $X \oplus M$ projektif olarak fakirdir. Kabulden $\frac{X \oplus M}{X} \cong M$ projektif olarak fakirdir. Önerme 3.2.2' den R yarıbasit Artin olur. $\square$

Önerme 3.2.9. Her halka projektif olarak fakir yarıbasit bir modüle sahiptir.

İspat. Γ, basit sağ R-modüllerin izomorfik sınıflarının temsillerinin tam kümesi olsun. $S = \oplus_{B \in \Gamma} B$ olarak alınsın. $0 \neq xR \in Pr^{-1}(S)$ ve T, xR' nin maksimal altmodülü olsun. $K = xR/T$ basit modülü gözönüne alınsın. Γ' nın seçiminden dolayı $K \leq_d S$ olur. S, xR-projektif olduğundan; K, xR-projektiftir. Böylece $T \leq_d xR$ olur. Yani xR yarıbasittir. Böylece S projektif olarak fakir bir modül olur. $\square$

[1]' de R sağ Artin halka ise, $(R/J(R))_R$ fakir olduğu ispatlanmıştır. Projektif olarak fakir modüller için daha güçlü bir sonuç verilecektir.

Önerme 3.2.10. R yarıyerel bir halka ise $(R/J(R))_R$ projektif olarak fakirdir.

İspat. Γve S Önerme 3.2.9' daki tanımlanan küme ve modül olsun. Her $B \in \Gamma$ için R' nin M maksimal sağ ideali vardır öyle ki, $B \cong R/M$' dir. $J(R) \subseteq M$ olduğundan $R/J(R)$' den R/M' ye bir epimorfizma vardır. Kabulden, $R/J(R)$ yarıbasit Artin ve B, $R/J(R)$' nin diktoplananına izomorf olur. Böylece, S de aynı özelliğe sahiptir. Önerme 3.2.3' ten $R/J(R)$ projektif olarak fakirdir. $\square$

[1]' de PCI bölgesi üzerindeki modüller ya injektif ya da fakirdir. Projektif olarak fakir modüller için sonuçlar aşağıdaki gibidir.

Yardımcı Teorem 3.2.11. R halkası sağ PCI bölgesi (bölüm halkası olmayan) ise $E(R)$ projektif olarak fakirdir.

İspat. R, PCI bölgesi olduğu için her öz devirli altmodül yarıbasit olduğu için, $E(R)$' nin R- projektif olmadığını göstermek yeterlidir. $g \in Hom(E(R), R)$ olsun. $\frac{E(R)}{Kerg} \cong Img \leq R$' dir. R sağ kalıtsal ve düzgün olduğu için $Kerg = E(R)$ olur. Böylece $Hom(E(R), R) = 0$ elde edilir. R sağ SI-halka olduğu için, $\frac{E(R)}{R}$ yarıbasittir. Böylece S basit altmodülü vardır öyle ki $S \cong \frac{R}{M}$ ve M, R'nin maksimal sağ ideali ve $0 \neq f$:E(R)$\rightarrow$ $S \cong \frac{R}{M}$ dönüşümü vardır. Böylece,

$$\begin{tikzcd} & E(R) \arrow[d, "f"] & \\ R \arrow[r, "\pi"] & S \cong \dfrac{R}{M} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı elde edilir. Eğer $E(R)$, R-projektif olsaydı, $f = 0$ olurdu. Bu ise çelişkidir.

Böylece $E(R)$, R- projektif olamaz. $\square$

<u>*Sonuç*</u> 3.2.12. *R sağ PCI bölgesi ise, her sıfırdan farklı injektif modül projektif olarak fakirdir.*

<u>İspat.</u> İlk olarak, her basit sağ modülün projektif olarak fakir olduğu gösterilecektir. S_R basit olsun. R sağ düzgün olduğundan; S tekil olur, böylece projektif olamaz. Eğer S, R-projektif olsaydı, Önerme 2.2.17' den S projektif olurdu. Bu ise çelişki olur. Böylece R PCI bölgesi olduğu için; S projektif olarak fakir olur. $0 \neq M_R$ injektif modül olsun. Eğer $Soc(M) \neq 0$ ise; M, basit bir S altmodülünü içerir. R PCI bölgesi olduğu için S injektif modül olur. Böylece $S \leq_d M$ olur. Aynı zamanda S projektif olarak fakir olduğundan; Önerme 3.2.3' ten M projektif olarak fakirdir. $Soc(M) = 0$ olsun ve $x \in M$ alınsın. $xR \cong R/ann_r(x)$, $Soc(xR) = 0$ ve R düzgün olduğundan $xR \cong R$' dir. Böylece, $E(xR) = E(R) \leq M$ elde edilir. $E(R) \leq_d M$ olur. Yardımcı Teorem 3.2.11' den $E(R)$ projektif olarak fakirdir. Böylece, Önerme 3.2.3' ten M projektif olarak fakir olur. $\square$

<u>*Tanım*</u> 3.2.13. Projektif olarak fakir bir modül içeren her sağ R-modülün kendisi de projektif olarak fakir modül olan R halkasına ***sağ genetik*** $(right\ genetic)$ denir.

<u>*Önerme*</u> 3.2.14. *Sağ PCI-bölgesi R, sağ genetiktir.*

<u>İspat.</u> Projektif olarak fakir olmayan M_R modülü ve $N \leq M$ alınsın. N' nin projektif olarak fakir olmadığı gösterilecektir. R, PCI bölgesi olduğu için M projektif olarak fakir değil ise M, R-projektif olmak zorundadır. R PCI bölgesi olduğundan dolayı N' nin R-projektif olduğunu göstermek yeterlidir. I, R' nin sağ ideali için $R/I \ncong R$ olsun. $f : N \to R/I$ herhangi bir dönüşüm, $\pi : R \to R/I$ doğal dönüşümü olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[d, "f"] & \\ R \arrow[r, "\pi"] & R/I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı alınsın. R PCI bölgesi olduğu için, R/I injektiftir. Aşağıdaki diyagram

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[dl, dotted, "h"'] \\ R/I & \end{tikzcd}$$

ele alınsın. R/I injektif olduğu için $h : M \to R/I$ dönüşümü vardır, öyle ki $hi = f$' dir.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "k"'] \arrow[d, "h"] & \\ R \arrow[r, "\pi"] & R/I \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

diyagramı ele alınırsa M, R-projektif olduğundan, $k : M \to R$ dönüşümü vardır, öyle ki, $\pi k = h$' dir. Böylece $\pi(ki) = hi = f$ olur. Böylece N, R-projektif olur yani projektif olarak fakir olamaz. □

<u>Önerme</u> 3.2.15. R halkası sağ PCI-bölgesi olsun. M_R ne projektif ne de projektif olarak fakir olmayan bir modül ise M tekil olmayandır. Özellikle, R temel sağ ideal bölgesi ise M' nin sıfırdan farklı her altmodülünün R_R' ye izomorf olan diktoplananı vardır.

<u>İspat.</u> $Z(M) \neq 0$ olsun. R SI halkası olduğundan $Z(M)$ injektiftir. Dolayısıyla $Z(M) \leq_d M$' dir. Sonuç 3.2.12' den $Z(M)$ projektif olarak fakir olduğundan, M de projektif olarak fakirdir. Bu bir çelişkidir. Böylece $Z(M) = 0$ yani M tekil olmayan bir modüldür. şimdi R temel sağ ideal bölgesi olsun. R, V-halka olduğu için M' nin maksimal bir altmodülü vardır. Böylece, S basit altmodülü ve sıfırdan farklı $g : M \to S$ dönüşümü vardır. R PCI-bölgesi ve M projektif olarak fakir olmadığı için M, R-projektif olur. $\pi : R \to S$ doğal dönüşümü olmak üzere,

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dotted, "f"'] \arrow[d, "g"] & \\ R \arrow[r, "\pi"] & S \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ele alınırsa; M, R-projektif olduğundan, $f : M \to R$ dönüşümü vardır öyle ki $\pi f = g$' dir. Böylece $M/Ker(f) \cong Imf \leq R$' dir. R sağ kalıtsal olduğundan Imf projektif olur. Böylece $Ker(f) \leq_d M$ elde edilir. R temel sağ ideal bölgesi olduğundan $Imf = aR \cong R/ann_r(a)$ ve R düzgün olduğundan $ann_r(a) = 0$ olur. Böylece M' nin her sıfırdan farklı altmodülü R_R' ye izomorf olan bir diktoplanan içerir. R sağ genetik olduğu için, M' nin sıfırdan farklı her altmodülü R-projektif olur. Böylece bu altmodül de R' ye izomorf olan bir diktoplanan içerir. □

3.3. PROJEKTİF OLARAK SAĞ ORTA SINIFINA SAHİP OLMAYAN HALKALAR

Bu bölümde, projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan halkaların tanımı ve özellikleri verilecektir. Bu bölümdeki tüm bilgiler [14] referanstan alınmıştır.

<u>*Tanım*</u> 3.3.1. R bir halka olsun. Her sağ R modülü ya projektif ya da projektif olarak fakir ise, R *projektif olarak sağ orta sınıfına* $(no - right - p - middle\ class)$ *sahip olmayan halka* denir.

<u>*Tanım*</u> 3.3.2. M bir sağ R-modül olsun.

$$Soc_0(M) = 0,$$

her ordinal α için

$$Soc_{\alpha+1}(M)/Soc_\alpha(M) = Soc(M/Soc_\alpha(M))$$

ve her limit ordinal β için

$$Soc_\beta(M) = \cup_{\alpha<\beta}(Soc_\alpha(M))$$

M' nin altmodülleri olsun. O zaman,

$$Soc_0(M) \subseteq Soc_1(M) \subseteq ... \subseteq Soc_\alpha(M) \subseteq ...$$

zincirine M' nin *artan Loewy serisi*$(ascending\ Loewy\ series)$ denir. Sıra sayısını gösteren α için $M = Soc_{\alpha}(M)$ ise M modülüne ***Loewy modülü*** denir. $M = Soc_{\alpha}(M)$ olacak şekilde en küçük ordinal α' ya M' nin ***Loewy uzunluğu*** $(Loewy\ length)$ denir.

Yardımcı Teorem 3.3.3. R projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan bir halka ve I, R' nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu durumda

(i) R/I yarıbasit Artin veya $I \leq_d R$' dir.

(ii) $J(R) \neq 0$ ise R yarıyereldir.

(iii) $Soc(R_R) \leq_d R$ ya da R Loewy uzunluğu en fazla 2 olan yarıartindir.

İspat. (i) I, R' nin sıfırdan farklı iki yönlü ideali olsun. R/I projektif ise $I \leq_d R$' dir ya da R/I projektif olarak fakir ise R/I yarıbasit Artindir. (ii) ve (iii), (i)' den açıktır. □

Yardımcı Teorem 3.3.4. R projektif olarak sağ orta sınıfına sahip olmayan bir halka ve $J(R) \neq J(R)^2$ olsun. Bu takdirde $J(R)^2 = 0$' dır.

İspat. $J(R)^2 \neq 0$ olsun. Yardımcı Teorem 3.3.3' ten, $R/J(R)^2$ yarıbasit veya $J(R)^2 \leq_d R$' dir. $J(R)$ eşkare eleman içermediği için, $J(R)^2$, R' de diktoplanan olamaz. Böylece $R/J(R)^2$ yarıbasit olur. Bu takdirde $J(R) = J(R)^2$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Yani $J(R)^2 = 0$ elde edilir. □

Yardımcı Teorem 3.3.5. Projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmama özelliği faktör halkalara taşınır.

İspat. R projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan olan bir halka ve I, R' nin bir ideali olsun. $M_{R/I}$, projektif olarak fakir olmayan sağ R/I-modülü olsun. Böylece $N_{R/I}$ yarıbasit olmayan sağ R/I-modül vardır öyle ki; $M_{R/I}$, $N_{R/I}$-projektiftir. Aynı zamanda M_R, N_R-projektif de olur. N_R yarıbasit olmadığı için, kabulden M_R projektif olur. Böylece $M_{R/I}$ da projektif olur. Yani R/I projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan bir halka olur. □

Yardımcı Teorem 3.3.6. R projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan bir halka ise, $J(R)^2 = 0$ ve R yarıasıl ya da yarıasaldır.

İspat. I, R' nin sıfırdan farklı üstel sıfır olan iki yönlü ideali olsun. Bu takdirde R/I ya projektif olarak fakir ya da projektiftir. R/I projektif ise $I \leq_d R$ olmalıdır. I üstel sıfır ideal olduğu için bu mümkün değildir. Böylece R/I projektif olarak fakirdir. Yardımcı Teorem 3.3.2' den R/I yarıbasit Artin olur. $J(R/I) = 0$ elde edilir. Böylece $I = J(R)$ olur. $J(R)$ üstel sıfır olduğu için R yarıasıldır. Yardımcı Teorem 3.3.4' ten $J(R)^2 = 0$' dır. □

Yardımcı Teorem 3.3.7. R, projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan bir halka ise R sıfırdan farklı ideallerin sonsuz olan bağımsız ailesini içermez.

İspat. $\{I_i\}_{i\in\Gamma}$ sonsuz tane bağımsız R' nin iki yönlü ideallerin ailesi olsun. $\Gamma\backslash\Gamma'$ sonsuz olacak şekilde Γ', Γ' nın sonsuz altkümesi olsun. $A = \oplus_{i\in\Gamma} I_i$ ve $B = \oplus_{i\in\Gamma'} I_i$ kümeleri alınsın. Kabulden, R/B ya projektif ya da projektif olarak fakirdir. R/B projektif ise, $B <_d R$ olurdu. B sonsuz üreteçli olduğu için çelişkidir. Böylece, R/B projektif olarak fakirdir. Önerme 3.2.2' den R/B yarıbasit Artin olur ve böylece $A/B \leq_d R/B$ elde edilir. A/B, R/B' nin sonsuz üretilmiş ideali olduğu için bu bir çelişkidir. Böylece R sıfırdan farklı ideallerin sonsuz olan bağımsız ailesini içermez. □

Sonuç 3.3.8. R projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan bir halka ise, R merkezil dik eşkare elemanların sonsuz kümesini içermez.

Yardımcı Teorem 3.3.9. R projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan parçalanamaz bir halka ise, bu takdirde $Soc(R_R) = 0$ veya $J(R)^2 = 0$ ve $Soc(R_R) \leq_e R$' dir.

İspat. Kabulden $R/Soc(R_R)$ projektif ya da projektif olarak fakirdir. $R/Soc(R_R)$ projektif ise $R = Soc(R_R) \oplus A$ olacak şekilde R' nin sağ ideali A vardır. İddia edilsin ki, $Soc(R_R).A = 0$ olsun. $x \in Soc(R_R)$ olsun. $f : A \to xA$ doğal epimorfizması gözönüne alınsın. şimdi $Kerf \leq_e A$ olduğu gösterilecektir. $T \leq A$ ve $Kerf \cap T = 0$ olsun.

$$T \cong \frac{T \oplus Kerf}{Kerf} \leq \frac{A}{Kerf} \cong xA \leq SocR$$

olduğundan T yarıbasit olur. $R = Soc(R_R) \oplus A$ olduğundan $SocA = 0$ elde edilir. $T \leq A$ olduğundan $SocT = T = 0$ olur. Böylece $Kerf \leq_e A$ elde edilir. f epimorfizma olduğundan, $\frac{A}{Kerf} \cong xA$ olur. $Soc(R_R)$ projektif olduğundan xA hem tekil hem de projektif olur. Böylece $xA = 0$ elde edilir. Yani $Soc(R_R).A = 0$ olur. şimdi A' nın iki yönlü ideal olduğu gösterilecektir. $r \in R$ ve $a \in A$ olsun. $R = Soc(R_R) \oplus A$ olduğundan $r = x + y$ olacak şekilde $x \in Soc(R_R)$ ve $y \in A$ vardır. $ra = (x + y)a = xa + ya$ elde edilir. $xa \in Soc(R_R).A$ olduğundan $xa = 0$' dır. Böylece $ra = ya \in A$ elde edilir. Böylece A iki yönlü ideal olur. R parçalanamaz olduğu için, $Soc(R_R) = 0$ ya da $Soc(R_R) = R$ elde edilir. Bu durumda sonuç elde edilir. Eğer $R/Soc(R_R)$ projektif olarak fakir ise Yardımcı Teorem 3.3.3' ten $R/Soc(R_R)$ yarıbasittir. Böylece $Soc(R_R) \leq_e R$ ve $J(R)^2 = 0$' dır. $\square$

<u>*Yardımcı Teorem*</u> 3.3.10. R, projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan parçalanmaz yarıasal halka olsun. R asal halka değil ise, R yarıbasit Artin halkadır.

<u>İspat.</u> I, R' nin sıfırdan farklı iki yönlü ideali olsun. Kabulden R/I ya projektif ya da projektif olarak fakirdir. R/I projektif ise, R' nin sağ ideali K vardır öyle ki $R = I \oplus K$' dır. $KI = 0$ olduğundan $(IK)^2 = (IK)(IK) = I(KI)K = 0$ olur. R yarıasal olduğundan $IK = 0$' dır. Böylece, K R' nin iki yönlü ideali olur. R parçalanamaz olduğundan $I = R$ elde edilir. R/I projektif olarak fakir ise Yardımcı Teorem 3.3.3' ten R/I yarıbasit Artindir. Her iki durumda da R/I yarıbasit Artindir. Şimdi R asal olmasın. A ve B, R' nin sıfırdan farklı iki ideali öyle ki $AB = 0$ olsun. R yarıasal olduğu için $A \cap B = 0$' dır.

$$f : R \to R/A \oplus R/B$$

$$f : r \mapsto (r + A, r + B)$$

dönüşümünden R, $R/A \oplus R/B$ içine gömülebilir. Böylece R yarıbasit Artin olur. $\square$

<u>*Yardımcı Teorem*</u> 3.3.11. R projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan bir halka olsun. $R \cong S \times K$ parçalanışı vardır öyle ki S yarıbasit Artin ve K sıfır ya da aşağıdaki özelliklerden birine sahiptir.

(i) K yarıasıl sağ SI-halka ve $J(K) \neq 0$ ya da;

(ii) K yarıasıl halka ve $Soc(K_K) = Z_r(K) = J(K) \neq 0$ ya da;

(iii) K asal halka ve $Soc(K_K) = 0$ ve $J(K) = 0$ ya da $_KJ(K)$ ve $J(K)_K$ sonsuz üreteçli ya da;

(iv) K asal sağ SI-halka ve $Soc(K_K)$ sonsuz üreteçlidir.

<u>İspat.</u> Sonuç 3.3.8' den $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ R' nin merkezil dik eşkare elemanları var ve her e_iR parçalanamaz halkalar olmak üzere $R = e_1R \oplus e_2R \oplus ... \oplus e_nR$' dir. R yarıbasit Artin halka ise $K = 0$ durumu elde edilir. Aksi durumda; $i \in \{1, ..., n\}$ vardır, öyle ki e_iR yarıbasit değildir. $i \neq j$ olmak üzere, A, e_jR' nin sağ ideali olsun. Kabulden; e_jR/A ya projektif olarak fakir ya da projektiftir.

<u>İddia:</u> e_jR/A, e_iR-projektiftir.
$B \leq e_iR$ ve $f \in Hom(e_jR/A, e_iR/B)$ ve $\phi : e_iR \to \frac{e_iR}{B}$ doğal dönüşümü olmak üzere,

$$\begin{tikzcd}
 & e_jR/A \arrow[d, "f"] & \\
e_iR \arrow[r, "\phi"] & e_iR/B \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

diyagramı gözönüne alınsın. $r \in R$ için; $f(e_jr + A) = e_is + B$ olacak şekilde $s \in R$ vardır. $e_j(e_jf(r + A)) = e_j(e_is + B)$' dir. $e_je_i = 0$ olduğundan $f(e_jr + A) = 0$ elde edilir. Yani $f = 0$ olur. Böylece e_jR/A, e_iR projektif olur. e_iR yarıbasit olmadığı için, e_jR/A projektif olarak fakir olamaz. Kabulden e_jR/A projektif olur. Her $i \neq j$ için e_jR yarıbasit olur. Böylece $R = S \oplus K$ parçalanışı vardır öyle ki; $K = e_iR$ yarıbasit değildir. Yardımcı Teorem 3.3.5' ten K projektif olarak sağ orta sınıf özelliğine sahip olmayan bir halkadır. Yardımcı Teorem 3.3.6' dan, K yarıasıl ve $J(K)^2 = 0$ veya K yarıasal bir halkadır.

<u>$Durum1$:</u> K yarıasıl bir halka ve $J(K)^2 = 0$ olsun.
Eğer $Z_r(K) = 0$ ise, Önerme 2.3.17' den K sağ SI-halkadır. Böylece Teoremin

(i) şartı elde edilmiş olur. $Z_r(K) \neq 0$ ise, kabulden $K/Z_r(K)$ projektif olarak fakir ya da projektiftir. $K/Z_r(K)$ projektif ise, $Z_r(K) \leq_d K$ olur. Bu ise çelişkidir. Böylece $K/Z_r(K)$ projektif olarak fakir olur. Yani $K/Z_r(K)$ yarıbasit Artin bir halka olur. $J(K/Z_r(K)) = 0$ olduğundan, $J(K) \subseteq Z_r(K)$ elde edilir. $J(K)^2 = 0$ olduğundan; $J(K)$, $K/J(K)$-modül olur. Böylece $J(K)$ yarıbasit K-modül olur. Yani, $J(K) \subseteq Soc(K_K)$ elde edilir. Böylece K yarıasıl bir halka olduğu için, f_iK' lar yerel modüller olmak üzere, $K = \oplus_i^n f_iK$ parçalanışı vardır. Her $k \in \{1, ..., n\}$ için $J(f_kK) \subseteq Z_r(f_kK) = f_kK$' dır. $k \in \{1, ..., n\}$ için f_kK modülleri yerel olduğu için $J(K) = Z_r(K)$ elde edilir.

<u>İddia:</u> $J(K) = Soc(K_K)$.

$J(K) \neq Soc(K_K)$ olsun. $J(K) \subseteq Soc(K_K)$ olduğundan $1 \leq t \leq n$ için $f_1K, ..., f_tK$ modülleri parçalanıştaki tüm basit modüller olsun. $I_1 = \{i \in 1, .., n \mid f_iK \cong f_kK\}$ ve $I_2 = \{1, ..., n\} - I_1$ olarak I indeks kümesi iki farklı indeks kümesine ayrılsın. $P = \oplus_{i \in I_1} f_iK$ ve $i \in I_1$, $j \in I_2$ olsun.

<u>İddia:</u> $Hom(f_jK, f_iK) = 0$.

$g \in Hom(f_jK, f_iK)$ olsun. f_iK basit olduğundan, g örten olur. Aşağıdaki diyagram ele alınsın.

$$\begin{tikzcd}
 & f_iK \arrow[d, "1_{f_iK}"] & \\
f_jK \arrow[r, "g"] & f_iK \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

f_iK projektif olduğundan $h : f_iK \to f_jK$ vardır öyle ki $gh = 1_{f_iK}$' dır. Buradan $Kerg \leq_d f_jK$ olur. Fakat f_jK parçalanamaz olduğu için, $Kerg = f_jK$ olur. Böylece $g = 0$ elde edilir.

<u>İddia:</u>$Hom(f_iK, f_jK) = 0$.

$g \in Hom(f_iK, f_jK)$ olsun. f_iK basit olduğundan; $f_iK \cong Img$' dir. $Img \neq f_jK$ olduğundan, $Img \subseteq J(f_jK)$ elde edilir. $J(K) = Z_r(K)$ olduğundan $J(f_jK)$ tekil olur. Böylece $f_iK \cong Img$ hem projektif hem de tekil olduğundan; $g = 0$ elde edilir. K parçalanamaz olduğu için $P = 0$ ya da $P = K$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Böylece, $J(K) = Z_r(K) = Soc(K_K)$ elde edilir. Teoremin (ii) şartı elde edilir.

$\underline{Durum2}$: K yarıasal olsun. Yardımcı Teorem 3.3.10' dan K asal olur. Kabul edilsin ki $Soc(K_K) = 0$ olsun. Eğer $J(K) \neq 0$ ise, Yardımcı Teorem 3.3.4' ten $J(K)^2 = J(K)$'dır. Yardımcı Teorem 1.6.13' ten, J_K ve ${}_KJ$ sonsuz üreteçlidir. Teoremin (iii) şartı elde edilir. Şimdi $Soc(K_K) \neq 0$ olsun. Yardımcı Teorem 3.3.9' dan $Soc(K_K) \leq_e K$ ve $J(K)^2 = 0$' dır. K yarıasal olduğundan $J(K) = 0$ elde edilir. Önerme 2.3.15' ten $Soc(K_K) \cap Z_r(K) = 0$' dır. K asal ve $Soc(K_K) \neq 0$ olduğundan $Z_r(K) = 0$ olur. Teorem 2.3.17' den K asal SI-halka olur. Eğer K sonlu üretilmiş sokula sahip olsaydı, Önerme 1.6.14' ten K_K yarıbasit olurdu. Bu ise bir çelişkidir. Teorem 3.3.9' dan $K/Soc(K_K)$ yarıbasit Artindir. Böylece teoremin (iv) şartı elde edilir. □

<u>*Örnek*</u> 3.3.12. K bir cisim iken $R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ olmak üzere R projektif olarak sağ orta sınıfa sahip olmayan bir halkadır.

<u>İspat.</u> M bir sağ R-modül ve $Z(M) = 0$ olsun. Önerme 2.3.19' dan M projektiftir. Şimdi $Z(M) \neq 0$ olsun. R, SI-halka olduğundan $Z(M)$ yarıbasit ve $Z(M) \leq_d M$' dir. Yardımcı Teorem 3.2.3' ten her tekil basit modülün projektif olarak fakir olduğunu göstermek yeterlidir. Böylece tek tekil modül $S_R = R/Soc(R_R)$ olduğu için, S' nin projektif olarak fakir olduğu gösterilecektir. S, xR-projektif olsun. xR yarıbasit olmasın. Genelliği bozmaksızın $xR \cong \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ alınsın. $f : xR \to S$ aşikar epimorfizması vardır öyle ki S, xR-projektif olduğundan, f homomorfizması parçalanır. Fakat $Kerf = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, xR' nin diktoplananı değildir. Bu ise çelişkidir. Böylece, S projektif olarak fakir olmalıdır. □

KAYNAKLAR

1. Alahmadi, A. N., Alkan, M. and López-Permouth, S. R., ”Poor modules: The opposite injectivity”, ***Glasgow Math. J.***, 52: 7-17 (2010).

2. Alizade, R. ve Pancar, A., ”Homoloji Cebire Giriş”, ***19 Mayıs Üniversitesi Yayınları***, Samsun (1999).

3. Anderson, F. W. and Fuller, K. R., ”Rings and Categories of Modules”, ***Springer-Verlag***, New York (1974).

4. Aydoğdu, P. and Saraç, B., ”On Artinian rings with restricted class of injectivity domain”, ***Journal of Algebra***, 377: 49-65 (2013).

5. Ayvalık, Y. and Orhan Ertaş, N., ”On projective modules”, ***XV. Antalya Algebra Days***, Şirince, İzmir, 16(2013).

6. Boyle, A. K., ”Hereditary QI-rings”, ***Trans. Amer. Soc.***, 97 (1): 1-24 (1974).

7. Cozzens, J. H., ”Homological properties of the ring of differential polynomials”, ***Bull. Amer. Math. Soc.***, 76: 75-79 (1970).

8. Cozzens, J. H. and Faith, C., ”Simple Noetherian Rings”, ***Cambridge Uni. Press***, Cambridge (1975).

9. Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F. and Wisbauer, R., ”Extending Module”, Pitman Research Notes in Mathematics Series, 313, ***Longman***, US (1994).

10. Er, N., López-Permouth, S. R. and Sökmez, N., ”Rings whose modules have maximal or minimal injectivity domain”, ***Journal of Algebra***, 330 (1): 404-417 (2011).

11. Faith, C., ”When are proper cyclics injective”, ***Pac. J. Math.***, 45: 97-112 (1973).

12. Faith, C., ”Algebra II, Ring Theory, Vol:191”, ***Springer Verlag***, New York (1976).

13. Goodearl, K. R., ”Singular torsion and splitting properties”, ***American Mathematical Society, Memoirs of the AMS, No.124***, Providence Rhode Island, US (1972).

14. Holston, C., López-Permouth S. R. and Orhan Ertaş, N., ”Rings whose modules have maximal or minimal projectivity domain”, ***J. Pure Appl.Algebra***, 216 (3): 673-678 (2012).

15. Hungerford, T. W., ”Algebra”, ***Holt Reinhart and Winston***, New York (1974).

16. Huynh, D. V., ”Structure of some Noetherian SI-rings”, ***J. Algebra***, 254 (2): 362-374 (2002).

17. Lam, T. Y., ”Lectures on Modules and Rings”, ***Springer***, Berlin, Heidelberg and New York (1999).

18. Wisbauer, R., ”Foundation of Module and Ring Theory”, ***Gordon and Breach Science Publishers***, Philadelphia, US (1991).

ÖZGEÇMİŞ

Yasemin Ayvalık 1984 yılında Karabük' de doğdu; ilk öğrenimini Düzce' de ve orta öğrenimini Karabük' de tamamladı. 2003 yılında Abant İzzet Baysal Lisesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik (İngilizce) Bölümü' nde öğrenime başlayıp 2009 yılında mezun oldu. 2009-2010 eğitim öğretim yılında Safranbolu Elit Etüt Merkezinde, 2010-2012 yılları arasında Karabük Kadro Dershanesinde ve 2013-2014 eğitim öğretim yılında Karabük Zafer Dershanesinde çalıştı.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Emek Mah. Yonca Sitesi B Blok No:7 Safranbolu / KARABÜK

Tel : (536)4778633

E-posta : yaseminayvalik@gmail.com