LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA KISMİ TÜREVLİ DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

2015
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

Neşe BARCIN

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA KISMİ TÜREVLİ DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

Neşe BARCIN

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

KARABÜK
Haziran 2015

Neşe BARCIN tarafından hazırlanan "LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA KISMİ TÜREVLİ DENKLEM ÇÖZÜMLERİ" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 17/06/2015

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ (BEÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ (KBÜ)	....

....../....../2015

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nevin AYTEMİZ ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Neşe BARCIN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA KISMİ TÜREVLİ DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

Neşe BARCIN

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Yrd.Doç. Dr. Murat DÜZ
Haziran 2015, 66 sayfa

Bu tezde, bir integral dönüşüm olan Laplace dönüşümlerinden bahsedilmiştir. Laplace dönüşümleri diferensiyel denklemlere, kısmi türevli diferensiyel denklemlere ve bazı kompleks diferensiyel denklemlerine uygulanması irdelenmiştir. Birinci bölüm giriş kısmı olup integral denklemlerin genel tanımı ve Laplace dönüşümünün kullanım alanları verilmiştir. İkinci bölümde Laplace dönüşümü tanımı, Laplace dönüşümünün varlığı için gerekli durumlar ve Laplacedönüşümünün özellikleri ile Ters Laplace dönüşümü ele alınarak ilgili teoremlerle ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde bu dönüşümün uygulamalarına yer verilmiştir. Dördüncü bölümde kompleks diferensiyel denklemlerin Laplace dönüşümü kullanılarak çözümlerine yer verilmiştir. Beşinci bölümde ise Laplace Ayrışım Metoduna yer verilmiştir.

Anahtar Sözcükler **:** Laplace dönüşümü, ters Laplace dönüşümü, başlangıç değer problemi, Laplace ayrışım metod.

Bilim Kodu **:** 204.1.138

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOLUTIONS OF PARTIAL DERIVATIVE DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING THE LAPLACE TRANSFORMS

Neşe BARCIN

Karabük University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assist. Prof. Dr. Murat DÜZ
June 2015, 66 pages

In this thesis, the Laplace transformation, which is an integral transformation, is mentioned. Laplace transformations are discussed that they are implemented to differential equations, partial derivative differential equations and some complex equations. The first part is the introduction part in which the general definition of integral equations and Laplace transformation's areas of usage are given. In the second part; the definition of the Laplace transform, theconditions for the existence of Laplace Transform, the characteristics of Laplace Transform and Inverse Laplace Transform are expressed by considering the relevant theorems. In the third part, the implementation of this transformation is given. In the fourth part, the solution of complex differential equations by using Laplace Transformation is take place. In the fifth part, The Laplace Decomposition Method is mentioned.

Key Words : Laplace transform, inverse Laplace transform, initial value problems, Laplace decomposition method.

Science Code :204.1.138

TEŞEKKÜR

Yüksek lisansa başladığım andan itibaren tezimin hazırlanması aşamasında bilgisini, alakasını, zor durumda anlayışını ve yardımlarını esirgemeyen sayın Danışmanım ve hocam;

Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ'e

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalının değerli Öğretim Üyelerine, ve Prof. Dr. Nizamettin KAHRAMAN ile Prof. Dr. Ramazan KAÇAR'a, Çalışmalarım esnasında manevi desteğini esirgemeyen ve bana inanan sevgili annem Ayşe BARCIN ve sevgili babam Raif BARCIN'a teşekkürlerimi sunarım.

Karabük, 2015

Neşe BARCIN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\mathcal{L}$	:	Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}$	:	Ters Laplace Dönüşümü
Γ	:	Gamma Fonksiyonu
J_n	:	Bessel Fonksiyonu
δ	:	İmpuls (Dirac Delta) Fonksiyonu

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Bir fonksiyonu integral altında başka bir fonksiyona dönüştüren dönüşümlere *integral dönüşüm* denir.

Bu integral dönüşümlerden biri de Laplace dönüşümüdür.

1749-1827 Piere Simeonel Laplace, Fransız matematikçisidir. Matematiğin birçok dallarında önemli çalışmaları vardır. Laplace dönüşümü Matematik'in haricinde Mühendislikte zamandan bağımsız doğrusal sistemleri modellemekte kullanılan bir dönüşümdür.

Laplace dönüşümü çok kullanışlı bir metoddur. Örnek vermek gerekirse bazı fonksiyonların integralini almak bilinen integral alma kuralları altında oldukça güçtür, hatta imkansız olanları vardır. Bu gibi fonksiyonların integralleri Laplace dönüşümü altında rahatlıkla alınıp sonuca ulaşılır.

Laplace dönüşümünü matematikte kullandığımız alanlar;

1. Sabit katsayılı diferensiyel denklemler
2. Değişken katsayılı diferensiyel denklemler
3. Adi diferensiyel denklem sistemleri
4. Kısmi türevli diferensiyel denklemler
5. İntegral denklemler
6. İntegro denklemler
7. İntegro diferensiyel denklemler
8. Fark denklemleri
9. İntegro fark denklemleri

dir. Ayrıca bu tezde bunların dışında Kompleks Diferensiyel Denklemler'in çözümünde de çalışmalar yapılmıştır. Dördüncü Bölüm de konuyla ilgili örnekler verilmiştir. Son bölüm olan Beşinci Bölüm de Laplace Ayrışım metodundan bahsedilmiştir. Adi veya kısmi diferensiyel denklemlerin lineer olmayan kısımlarında Laplace dönüşümünün nasıl alınacağı hakkında bilgi verilip Daffing denklemi üzerinde Elçin Yusufoğlu'nun makalesi incelenmiştir.

BÖLÜM 2

TEMEL BİLGİLER

2.1. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

Tanım: $F(t)$, t nin $t > 0$ için tanımlanmış bir fonksiyonu olmak üzere $F(t)$nin Laplace dönüşümü,

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \tag{2.1}$$

biçiminde tanımlanır. Bu integralin sonucu s nin bir fonksiyonu olduğundan

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$$

yazılabilir.

(2.1) ile verilen integral s nin bir değerine yakınsıyorsa $F(t)$nin *Laplace dönüşümüvardır* denir.

2.2. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN VARLIĞI

Laplace dönüşümünü tanımlayan (2.1) integrali her f fonksiyonu için yakınsak değildir. O halde her fonksiyonun Laplace dönüşümü mevcut değildir. Örneğin; $\frac{1}{x}$ fonksiyonunun Laplace dönüşümü mevcut değildir. Laplace dönüşümünün varlığını garanti etmek için f üzerine bazı koşullar gereklidir. Bu koşullardan önce parçalı süreklilik ve üstel mertebeden fonksiyonu ifade edelim [4].

2.2.1. Parçalı Süreklilik

Bir fonksiyon ve bir $\alpha \leq t \leq \beta$ aralığı verilsin. $\alpha \leq t \leq \beta$aralığı, her birinde, bu fonksiyonun sürekli ve sonlu sağ ve sol limitlerinin bulunduğu sonlu sayıda alt aralığa ayrılabiliyorsa, bu taktirde söz konusu fonksiyona bu aralıkta *parçalı süreklidir* denir [4].

2.2.2. Üstel Mertebeden Fonksiyon

Her $t > 0$ için $|F(t)| < M.e^{\gamma t}$ olacak biçimde $\mu > 0$ ve $\gamma \epsilon R$ büyüklükleri mevcut ise $F(t)$ ye $t \rightarrow \infty$ için üstel mertebesi γ olan bir fonksiyon veya kısaca *üstel mertebeden bir fonksiyon* denir [4].

2.3.LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN MEVCUT OLMASI İÇİN GEREKLİ DURUMLAR

Teorem 2.1.1: $F(t)$fonksiyonu, sonlu her $[0, N]$ aralığında parçalı sürekli ve $t > N$ için üstel mertebesi γ olan bir fonksiyon ise, her $s > \gamma$ için $F(t)$ nin Laplace dönüşümü mevcuttur.

Yeterli şartların gerçekleştiği durumda Laplace dönüşümünün mevcut olduğunu görelim.

Herhangi pozitif bir N sayısı için

$$\int_0^\infty e^{-st} F(t)dt = \int_0^N e^{-st} F(t)dt + \int_N^\infty e^{-st} F(t)dt \qquad (2.2)$$

yazılabilir. $0 \leq t \leq N$ aralığında F fonksiyonu parçalı sürekli olduğundan sağ taraftaki birinci integral mevcuttur. Diğer taraftan $t > N$ için $F(t)$, γ mertebeli üstel fonksiyon olduğundan

$$\left|\int_{N}^{\infty} e^{-st} F(t)dt\right| \leq \int_{\boldsymbol{N}}^{\infty} |\boldsymbol{e}^{-st} F(t)|\, dt = \int_{N}^{\infty} e^{-st} |F(t)| dt \leq \int_{N}^{\infty} e^{-st} \mu . e^{\gamma . t} dt$$
$$= \frac{\mu}{s-\gamma}$$

yazılabilir. Böylece $s > \gamma$ için (2.2) eşitliğindeki ikinci integralinde mevcut olduğu ortaya çıkmış oldu [4].

Örnek: $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$ olduğunu gösterelim.

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} F(t)dt$$
$$\mathcal{L}\{1\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} .1 \;\, dt = \lim_{k \to \infty} \int_{0}^{k} e^{-st}\, dt$$
$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

2.4. LAPLACE DÖNÜŞÜMLERİNİN BAZI ÖNEMLİ ÖZELLİKLERİ

2.4.1. Lineerlik Özelliği

c_1 ve $c_2$sabit sayılar ve F_1 ve F_2 Laplace dönüşümleri sırasıyla $f_1(s)$ ve $f_2(s)$ olan fonksiyonlar ise

$\mathcal{L}\{c_1F_1(t) + c_2F_2(\mathrm{t})\} = c_1\mathcal{L}\{F_1(t)\} + c_2\mathcal{L}\{F_2(t)\} = c_1 f_1(s) + c_2\, f_2(s)$dir [4].

2.4.2. Birinci Kaydırma Özelliği

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ise $\mathcal{L}\{e^{at} F(t)\} = f(s-a)$ dir [4].

2.4.3. İkinci Kaydırma Özelliği

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ve $G(t) = \begin{cases} F(t-a), & t > a \\ 0 \quad , & t < a \end{cases}$ ise

$$\mathcal{L}\{G(t)\} = e^{-as} f(s) \text{ dir [4].}$$

2.4.4. Skalar Değiştirme Özelliği

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) \text{ ise } \mathcal{L}\{F(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right) \; dir \text{ [4].}$$

2.4.5. Son Değer Teoremi

Eğer limitler mevcut ise;

$$\lim_{t\to\infty} F(t) = \lim_{s\to 0} sf(s) \text{ dir [4].}$$

2.4.6. Periyodik Fonksiyonların Laplace Dönüşümü

$F(t)$ fonksiyonu $p > 0$ olmak üzere p peryodlu bir fonksiyon ise;

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-sp}} \int_0^p e^{-st} F(t) dt \text{ dir [4].}$$

2.4.7. Bazı Fonksiyonların Laplace Dönüşümleri

Çizelge 2.1. Bazı elemanter fonksiyonların Laplace dönüşümleri.

$\boldsymbol{F(t)}$	$\boldsymbol{\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)}$	
1	$\frac{1}{s}$	$s > 0$
t	$\frac{1}{s^2}$	$s > 0$
$t^n, \quad n = 0,1,2,\ldots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s > a$

Çizelge 2.1. (devam ediyor).

$sinat$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$cosat$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
$sinhat$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$
$coshat$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\|a\|$

2.4.8. Türevlerin Laplace Dönüşümleri

Birinci mertebeden türevin Laplace dönüşümü;

$\mathcal{L}\{Ft)\} = f(s)$ $0 \le t \le N$ aralığında $F(t)$ sürekli ve $t > N$ için üstel mertebeden ise ve $0 \le t \le N$ aralığında $F^{'}(t)$ parçalı sürekli ise;

$$\mathcal{L}\{F'(t)\} = sf(s) - F(0)$$

şeklindedir.

İkinci mertebeden türevin Laplace dönüşümü;

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s),\ F(t)$ ve $F^{'}(t)$fonksiyonları $0 \le t \le N$ aralığında sürekli ve $t > N$ için üstel mertebeden ise ve $0 \le t \le N$ aralığında $F''(t)$ parçalı sürekli ise

$$\mathcal{L}\{F''(t)\} = s^2 f(s) - sF(0) - F^{'}(0)$$

şeklindedir.

n inci mertebeden türevin Laplace dönüşümü ise;

$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s),\ F(t),\ F^{'}(t),\ F^{''}(t),\ \dots F^{(n-1)}$ fonksiyonları

$0 \leq t \leq N$ aralığında sürekli ve $t > N$ için üstel mertebeden ise ve $0 \leq t \leq N$ aralığında$F^{(n)}$(t) parçalı sürekli ise

$$\mathcal{L}\{F^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - s^{n-1}F(0) - s^{n-2}F'(0) - \cdots$$
$$\ldots sF^{(n-2)}(0) - F^{(n-1)}(0)$$

dir.

2.4.9. Başlangıç Değer Teoremi

Eğer limitler mevcut ise

$$\lim_{t\to 0} F(t) = \lim_{s\to\infty} sf(s) \text{ dir.}$$

Gerçekten de,

$$\mathcal{L}\big(F'(t)\big) = sf(s) - F(0) \text{ idi.}$$

$F'(t)$ fonksiyonu parçalı sürekli ve üstel mertebeden ise;

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^\infty e^{-st} F'(t)dt = 0$$
$$\lim_{s\to\infty} [sf(s) - F(0)] = 0$$
$$\lim_{s\to\infty} sf(s) = F(0)$$
$$\lim_{s\to\infty} sf(s) = \lim_{t\to 0} F(t) \text{ dir [4].}$$

2.4.10. İntegrallerin Laplace Dönüşümleri

$$L\{F(t)\} = f(s) \; ise$$
$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u)du\right\} = \frac{f(s)}{s} \text{ dir [4].}$$

2.4.11. t^n ile Çarpmanın Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)\text{ise}$$
$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} f(s) = (-1)^n f^{(n)}(s)\text{dir[4].}$$

2.4.12. t ile Bölmenin Laplace Dönüşümü

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s) \text{ ve } \lim_{t\to 0}\frac{F(t)}{t} \text{ mevcut ise}$$
$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty f(u)du \text{ dir[4].}$$

2.4.13. $s \to \infty$ İçin $f(s)$ Değeri

$$L\{F(t)\} = f(s) \text{ ise}$$
$$\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$$

dir. Gerçektende ,

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)dts \to \infty \text{ için limit alırsak}$$
$$\lim_{s\to\infty} f(s) = \lim_{s\to\infty}\int_0^\infty e^{-st} F(t)dt$$
$$= \int_0^\infty \lim_{s\to\infty} e^{-st} F(t)dt$$
$$= 0 \text{ dır [4].}$$

2.5. BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR

2.5.1. Gamma Fonksiyonu

$n > 0$ ise gamma fonksiyonu

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty u^{n-1} e^{-u} du$$

eşitliği ile tanımlanır.

Aşağıda gamma fonksiyonun bazı önemli özellikleri ifade edilmiştir.

$$\Gamma(n+1) = \mathrm{n}\,\Gamma(n) \;\; n > 0$$

$\Gamma(1) = 1$ olduğundan $\Gamma(2) = 1,\ \Gamma(3) = 2! = 2,\ \Gamma(4) = 3!$ dır ve genel olarak, n pozitif bir tamsayı ise $\Gamma(n+1) = n!$ dir. Bu nedenle gamma fonksiyonuna *faktöriyel fonksiyonu* da denir.

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(p)\Gamma(p-1) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \qquad 0 < p < 1$$

n in büyük değerleri için

$$\Gamma(n+1) \sim \sqrt{2-n}\, n^n e^{-n}$$

dir. $\sim$, n in büyük değerleri için yaklaşık olarak eşit anlamına gelir.
$n < 0$için$\Gamma(n)$ i

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n}$$

eşitliği ile tanımlayabiliriz.

2.5.2. Bessel Fonksiyonu

n inci mertebeden Bessel fonksiyonunu

$$J_n(t) = \frac{t^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{t^2}{2(2n+2)} + \frac{t^4}{2.4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\}$$

eşitliği ile tanımlarız.

Aşağıda bessel fonksiyonun bazı önemli özellikleri ifade edilmiştir.

n pozitif tam sayı ise $J_{-n}(t) = (-1)^n J_n(t)$ dır.

$$J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t} J_n(t) - J_{n-1}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\{ t^n J_n(t) = t^n J_{n-1}(t) n = 0 \text{ ise } J'_0(t) = -J_1(t) \text{ dir.}$$

$e^{\frac{1}{2}t(u-1/u)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) u^n$ buna bessel fonksiyonunun üreteç fonksiyonu denir.

$J_n(t)$, bessel diferensiyel denklemi diye bilinen $t^2Y''(t) + tY'(t) + (t^2 - n^2)Y(t) = 0$ eşitliğini gerçekler.

$J_n(it) = i^{-n} I_n(t)$ yazabiliriz. $I_n(t)$ ye n inci mertebeden düzeltilmiş *bessel fonksiyonu* denir.

2.5.3. Birim Basamak Fonksiyonu

Birim basamak fonksiyonu

$$U(t-a) = \begin{cases} 0 & t < a \\ 1 & t > a \end{cases}$$

eşitliği ile tanımlanır.

2.5.4. Dirac Delta Fonksiyonu

$$F_a(t) = f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a}, & 0 \leq t \leq a \\ 0, & t > a \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Burada $a > 0$ dir.

$$\int_0^\infty F_a(t)dt = 1$$

dır. Bu düşünce bazı mühendis ve fizikçileri $a \to 0$ için $F_a(t)$ ya yakınsayan $\delta(t)$ ile gösterilen limit fonksiyonunu düşünmeye sevk etmiştir .Bu limit fonksiyonuna *Dirac Delta Fonksiyonu* denir.
Bu fonksiyonun özelliklerinden bazıları şöyledir.

$$\int_0^\infty \delta\,(t) = 1$$

$$\int_0^\infty \delta(t)G(t)dt = G(0)$$

$$\int_0^\infty \delta\,(t-a)G(t)dt = G(a)$$

2.5.5. Sıfır Fonksiyonu

$t > 0$için *t* nin fonksiyonu olan $\mathcal{N}(t)$

$$\int_0^t \mathcal{N}(u)du = 0$$

bağıntısı gerçekleşiyorsa $\mathcal{N}(t)$ ye *sıfır fonksiyonu* denir.

2.6. TERS LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ

2.6.1. Tanım

Bir $F(t)$fonksiyonunun laplace dönüşümü $f(s)$ ise, yani $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$ ise $F(t)$ ye $f(s)$ nin *Ters Laplace Dönüşümü* denir ve sembolik olarak

$$F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$$

olarak ifade edilir. $\mathcal{L}^{-1}$ ye *Ters Laplace Dönüşüm Operatörü* denir.

2.6.2. Ters Laplace Dönüşümünün Özellikleri

Teorem: $c_1$ve c_2 sabit sayılar $f_1(s)$ ve $f_2(s)$ de sırasıyla $F_1(t)$ ve $F_2(t)$ nin ters Laplace dönüşümleri ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{c_1 f_1(s) + c_2 f_2(s)\} = c_1 \mathcal{L}^{-1}\{f_1(s)\} + c_2 \mathcal{L}^{-1}\{f_2(s)\} = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t)$$

dir.

Teorem: $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s-a)\} = e^{at} F(t) \text{ dir.}$$

Teorem: : $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as} f(s)\} = \begin{cases} F(t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$$

dir.

Teorem: $\mathcal{L}^{-1}\{\text{f}(s)\} = F(t)$ ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(as)\} = \frac{1}{a}\, f\left(\frac{t}{a}\right)$$

dir.

Teorem:$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{f^{n}(s)\} =: \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d^{n}}{ds^{n}} f(s)\right\} = \ (-1)^{n} t^{n} F(t)\text{dir.}$$

Teorem*:* $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ise

$$: \mathcal{L}^{-1}\left\{\int_{s}^{\infty} f(u)du\right\} = \frac{F(t)}{t}$$

dir.

Teorem: $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)\ ve\ F(0) = 0$ ise

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\, f(s)\} = F^{'}(t)$$

dır. Görüldüğü gibi s ile çapmanın $F(t)$yi türetme biçiminde etkisi olmaktadır. $F(0) \neq 0$ ise $\delta(t)$, delta Dirac fonksiyonu veya birim basamak fonksiyonu olmak üzere,

$$\mathcal{L}^{-1}\{s\, f(s)\} - F(0) = F^{'}(t)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{s\, f(s)\} = F^{'}(t) + F(0)\delta(t)$$

dir.

Teorem:$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$ ise

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{f(s)}{s}\right\} = \int_0^t F(u)du$$

dir. Görüldüğü gibi s ile bölmenin veya $\frac{1}{s}$ ile çarpmanın $F(t)$ yi 0 dan t ye kadar integre etme biçiminde etkisi görülmektedir.

Teorem (Konvolüsyon Özelliği):

$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)\ ve\ \mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(t) \text{ ise}$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)g(s)\} = \int_0^t F(u)G(t-u)du = F * G$$

dir. $F * G$ ye F ve G nin konvolüsyonu ve bu teoreme de konvolüsyon teoremi veya özelliği denir.

$$F * G = G * F \text{ dir.}$$

2.7. LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ İLE İLGİLİ ÖRNEKLER

Örnek 1: $\mathcal{L}\{-9cost - 4t^2 + 1\} =?$

$$\mathcal{L}\{-9cost - 4t^2 + 1\} = -9\mathcal{L}\{cost\} - 4\mathcal{L}\{t^2\} + \mathcal{L}\{1\}$$
$$\mathcal{L}\{-9cost - 4t^2 + 1\} = \frac{-9}{s^2+1} - \frac{8}{s^3} + \frac{1}{s}$$

Örnek 2: $\mathcal{L}\{e^{2t} \cos 5t + e^{-4t}.t^3\} =?$

$$\mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2+a^2} \quad , \qquad \mathcal{L}\{e^{bt} cosat\} = \frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$$
$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad , \qquad \mathcal{L}\{e^{bt}.t^n\} = \frac{n!}{(s-b)^{n+1}}$$

olduğuna göre

$$\mathcal{L}\{e^{2t}\cos 5t + e^{-4t}.t^3\} = \frac{s-2}{(s-2)^2+25} + \frac{6}{(s+4)^4} s > 2$$

Örnek 3: $\mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\} = ?$

$$\mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2!}{s^3} = \frac{2}{s^3} \Longrightarrow \mathcal{L}\{t^2 e^{3t}\} = \frac{2}{(s-3)^3} s > 3$$

Örnek 4 : $\mathcal{L}\left\{\int_0^t e^u\, sinu + e^u u^{\mathbf{3}}\right\} = ?$

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t (e^{-u}\sin 2u + \ e^u u^3)du\right\}$$
$$= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{e^{-u}\sin 2u + \ e^u u^3\} =$$
$$= \frac{1}{s}\left[\frac{2}{(s+1)^2+4} + \frac{6}{(s-1)^4}\right]$$

Örnek 5: $\int_0^\infty t.e^{-2t}.\cos tdt = \frac{3}{25}$ olduğunu gösteriniz.

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}\,F(t)dt$$
$$\mathcal{L}\{t^n F(t)\} = (-1)^n \frac{d}{ds^n}\mathcal{L}\{F(t)\}$$
$$\mathcal{L}\{tcost\} = \int_0^\infty e^{-st}\,tcostdt = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(cost)$$
$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \left(\frac{s^2+1-2s^2}{(s+1)^2}\right) = \frac{s^2-1}{(s+1)^2}$$
$$s = 2 \quad \text{için}$$
$$\int_0^\infty t.e^{-2t}.\cos tdt = \frac{3}{25}$$

Örnek 6: $\int_0^\infty \frac{e^{-t}sint}{t}dt = \frac{\pi}{4}$ olduğunu gösteriniz.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{sint}{t}\right\} = \int_0^{\infty} e^{-st}\,\frac{sint}{t}\,dt$$

$$= \int_s^{\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du$$

$$\lim_{A\to\infty}\int_s^{A} \frac{du}{u^2+1} = \lim_{A\to\infty}[arctanu]_s^A$$

$$\lim_{A\to\infty}(arctanA - arctans)$$

$$= \frac{\pi}{2} - arctans$$

$$s = 1\ için \int_0^{\infty} e^{-st}\,\frac{sint}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - arctan1 = \frac{\pi}{4}$$

Örnek 7: $\mathcal{L}\left\{\frac{sint}{t}\right\} =?$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{F(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} f(u)du \;=\; \mathcal{L}\{F(t)\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{sint}{t}\right\} = \int_s^{\infty} \mathcal{L}\{sint\}du$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{sint}{t}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du = \lim_{h\to\infty}\int_s^{h} \frac{du}{u^{2+1}} = \lim_{n\to\infty}[arctanu]_s^h$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{sint}{t}\right\} = \lim_{h\to\infty}(arctanh - arctans) = \frac{\pi}{2} - arctans$$

Örnek 8: Peryodu 2π olan

$F(t) = \begin{cases} sint, & 0 < t < 0 \\ 0, & \pi < t < 2\pi \end{cases}$ olan fonksiyonun Laplace dönüşümünü bulunuz.

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} sinte^{-st}dt$$

$$sint = u \quad costdt = du, \qquad e^{-st}dt = dv \qquad \frac{e^{-st}}{-s} = v$$

$$\int_0^{\pi} sint.e^{-st}dt = \left[sint.\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{s}\int_0^{\pi} e^{-st}.costdt$$

$$cost = u \quad -sintdt = du \quad , \quad e^{-st}dt = dv \quad \frac{e^{-st}}{-s} = v$$

$$1 + \frac{1}{s^2}\int_o^{\pi} e^{-st}\,sintdt = \frac{1}{s^2}e^{-s\pi} + \frac{1}{s^2}$$

$$\int_0^{\pi} e^{-st}\,sintdt = \frac{1}{s^2+1}(1 + e^{-s\pi})$$

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\int_0^{\pi} sint\,e^{-st}\,dt$$

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \frac{1}{1-e^{-2\pi s}}\,.\frac{(1+e^{-s\pi})}{s^2+1}$$

Örnek 9: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3} + \frac{4s}{s^2+9} - \frac{5}{s^2}\right\}$ =?

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3} + \frac{4s}{s^2+9} - \frac{5}{s^2}\right\} = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+9}\right\} - 5\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3} + \frac{4s}{s^2+9} - \frac{5}{s^2}\right\} = 2e^{-3t} + 4cost - 5t$$

Örnek 10: $\mathcal{L}^{\mathbf{-1}}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20} + \frac{4s+12}{s^2+8s+16}\right\}$ =?

$$\mathcal{L}^{\mathbf{-1}}\left\{\frac{6(s-2)+8}{s^2-4s+20}\right\} + \mathcal{L}^{\mathbf{-1}}\left\{\frac{4(s+4)-4}{s^2+8s+16}\right\}$$

$$6\mathcal{L}^{\mathbf{-1}}\left\{\frac{s-2}{(s-2)^2+16}\right\} + 8\mathcal{L}^{\mathbf{-1}}\left\{\frac{1}{(s-2)^2+16}\right\} + 4\mathcal{L}^{\mathbf{-1}}\left\{\frac{s+4}{(s+4)^2}\right\}$$

$$-4\mathcal{L}^{\mathbf{-1}}\left\{\frac{1}{(s+4)^2}\right\}$$

$$6e^{2t}cos4t + \frac{8}{4}e^{2t}sin4t + 4e^{-4t} - 4te^{-4t}$$

Örnek 11: $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+1}{s^3-s^2+s-1}\right\}$ =?

$$\frac{3s+1}{s^3-s^2+s-1} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-1}$$

$$(As+B)(s-1) + C(s^2+1) = 3s+1$$

$$As^2 - As + Bs - B + Cs^2 + C = 3s + 1$$

$$A + C = 0$$

$$-A + B = 3$$

$$-B + C = 1$$

$$A = -2 \quad B = 1 \quad C = 2 \quad olur$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2s + 1}{s^2 + 1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s - 1}\right\} = -2cost + sint + 2e^t$$

BÖLÜM 3

LAPLACE DÖNÜŞÜMÜNÜN UYGULAMALARI

3.1. SABİT KATSAYILI DİFERENSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

Sabit katsayılı adi diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemlerinden biri de Laplace dönüşümleridir. Bu tür denklemleri çözmek için

$$\mathcal{L}\{y^{(n)}\} = s^n\mathcal{L}\{y\} - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)$$

özelliği kullanılacaktır.

Örnek: $y'' - 3y' + 2y = 0$ denkleminin

$$y(0) = 2 \qquad y'(0) = 3$$

koşullarını sağlayan çözümünü bulunuz.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = 0$$
$$(s^2 - 3s + 2)Y(s) - 2s = -3$$
$$Y(s) = \frac{2s-3}{s^2-3s+2} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}$$

bu son elde edile eşitliğin ters Laplace alınırsa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-2}\right\} = e^t + e^{2t}$$

Örnek: $y'' - 3y' + 2y = 4t \ + \ e^{3t}$ denkleminin

$$y(0) = 1 \qquad y'(0) = 1$$

koşullarını sağlayan çözümünü bulunuz.

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) = \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s-3}$$

$$(s^2 - 3s + 2)\,Y(s) - s - 1 + 3 = \frac{4}{s^2} + \frac{1}{s-3}$$

$$Y(s) = \frac{4s - 12 + s^2 + s^4 - 5s^3 + 6s^2}{s^2(s-3)(-1)(s-2)}$$

$$\frac{4s - 12 + s^2 + s^4 - 5s^3 + 6s^2}{s^2(s-3)(s-1)(s-2)} = \frac{As+B}{s^2} + \frac{C}{s-3} + \frac{D}{s-1} + \frac{E}{s-2}$$

$$A = 3 \qquad B = 2 \qquad C = \frac{1}{2} \qquad D = \frac{-5}{2} \qquad E = 0$$

$$Y(s) = \frac{3s+2}{s^2} + \frac{1}{2(s-3)} - \frac{5}{2(s-1)}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3s+2}{s^2} + \frac{1}{2(s-3)} - \frac{5}{2(s-1)}\right\} = 3 + 2t + \frac{1}{2}e^{3t} - \frac{5}{2}e^{t}$$

3.2. DEĞİŞKEN KATSAYILI DİFERENSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

Bazı değişken katsayılı adi diferansiyel denklemlerin çözümünde Laplace dönüşümü kullanılabilir. $t^m Y^{(n)}(t)$ biçiminde olan diferansiyel denklemin Laplace dönüşümü $(-1)^m \frac{d^m}{ds^m}\mathcal{L}\{Y^{(n)}(t)\}$ dır.

Örnek: $y'' + 2ty' - 4y = 1 \qquad y(0) = 0 \quad y'(0) = 0$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 2.\frac{-d}{ds}[sY(s) - y(0)] - 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2Y(s) + 2\big(-Y(s) - sY'(s)\big) - 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$s^2Y(s) - 2Y(s) - 2sY'(s) - 4Y(s) = \frac{1}{s}$$

$$(s^2 - 6)Y(s) - 2sY'(s) = \frac{1}{s}$$

$$Y'(s) + \frac{6-s^2}{2s}Y(s) = \frac{-1}{s(2s)}$$

$$e^{\int\left(\frac{6}{2s}-\frac{s}{2}\right)ds} = e^{3lns-\frac{s^2}{4}} = s^3 e^{\frac{-s^2}{4}}$$

$$s^3 e^{\frac{-s^2}{4}} Y'(s) + \frac{6-s^2}{2s} s^3 e^{\frac{-s^2}{4}} Y(s) = \frac{-1}{2s^2} s^3 e^{\frac{-s^2}{4}}$$

$$\left(s^3 e^{\frac{-s^2}{4}} Y(s)\right)' = \frac{-1}{2s^2} s^3 e^{\frac{-s^2}{4}}$$

$$s^3 e^{\frac{-s^2}{4}} Y(s) = e^{\frac{-s^2}{4}}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s^3}$$

$$y(t) = \frac{t^2}{2}$$

3.3. ADİ DİFERENSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİ

İki veya daha fazla diferensiyel denklemden oluşan diferensiyel denklem sistemlerinin çözümünde de Laplace dönüşümü kullanılabilir.

Örnek: Başlangıç koşulları $x(0) = 8$ ve $y(0) = 3$ olan

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = y - 2x$$

diferensiyel denklem sistemini çözünüz.

$$sX(s) - x(0) = 2X(s) - 3Y(s)$$

$$sY(s) - y(0) = Y(s) - 2X(s)$$

$$(s-2)X(s) + 3Y(s) = 8$$

$$2X(s) + (s-1)Y(s) = 3$$

$$\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix} = s^2 - 3s - 4$$

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{s^2-3s-4} = \frac{8s-17}{(s+1)(s-4)} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{s^2-3s-4}=\frac{3s-22}{s^2-3s-4}=\frac{3s-22}{(s+1)(s-4)}=\frac{5}{s+1}-\frac{2}{s-4}$$

olup

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+1}+\frac{3}{s-4}\right\}=5e^{-t}+3e^{4t}$$
$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s+1}+\frac{3}{s-4}\right\}=5e^{-t}-2e^{4t}$$

Örnek: Başlangıç koşulları $x(0)=1 \quad y(0)=0$olduğuna göre

$$\frac{dx}{dt}-6x+3y=8e^{t}$$
$$\frac{dy}{dt}-2x-y=4e^{t}$$

diferensiyel denklem sistemini çözünüz.

Laplace dönüşümü alınırsa;

$$sX(s)-x(0)-6X(s)+3Y(s)=\frac{8}{s-1}$$
$$sy(s)-Y(0)-2x(s)-y(s)=\frac{4}{s-1}$$
$$(s-6)\,X(s)+3Y(s)=\ \frac{8}{s-1}-1=\frac{9-s}{s-1}$$
$$-2x(s)+(s-1)y(s)=\frac{4}{s-1}$$
$$\begin{vmatrix} s-6 & 3 \\ -2 & s-1 \end{vmatrix}=s^2-7s+12$$
$$X(s)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{9-s}{s-1} & 3 \\ \frac{4}{s-1} & s-1 \end{vmatrix}}{s^2-7s+12}=\frac{(9-s)(1-s)-12}{(1-s)(s-3)(s-4)}=\frac{s^2-10s+21}{(1-s)(s-3)(s-4)}$$
$$=\frac{7-s}{(s-1)(s-4)}$$

$$\frac{7-s}{(s-1)(s-4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-4}$$

$$A=-2 \qquad B=1$$

$$X(s)=\frac{1}{s-4}-\frac{2}{s-1}$$

$$Y(s)=\frac{\begin{vmatrix} s-6 & \frac{9-s}{s-1} \\ -2 & \frac{4}{s-1} \end{vmatrix}}{s^2-7s+12}=\frac{4s-24+18-2s}{(s-1)(s-3)(s-4)}=\frac{2}{(s-1)(s-4)}$$

$$\frac{2}{(s-1)(s-4)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s-4}$$

$$A=\frac{-2}{3} \qquad B=\frac{2}{3}$$

$$Y(s)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{s-4}-\frac{1}{s-1}\right)$$

olup ters Laplace alınırsa

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}-\frac{2}{s-1}\right\}=e^{4t}-2e^{t}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{s-4}-\frac{1}{s-1}\right)\right\}=\frac{2}{3}e^{4t}-\frac{2}{3}e^{t}$$

elde edilir.

Örnek: Başlangıç koşulları

$$x(0)=0\ , \qquad x'(0)=0\ , \qquad y(0)=0\ , \quad y'(0)=0$$

olduğuna göre

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x+5\frac{dy}{dt}=t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4y-2\frac{dx}{dt}=-2$$

diferensiyel denklem sistemini çözünüz.

Laplace dönüşümü alınırsa;

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) - X(s) - 5\big(sY(s) - y(0)\big) = \frac{1}{s^2}$$

$$s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) - 4Y(s) - 2\big(sX(s) - x(0)\big) = \frac{-2}{s}$$

$$(s^2 - 1)X(s) + 5s\,Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$-2sX(s) + (s^2 - 4)Y(s) = \frac{-2}{s}$$

$$\begin{vmatrix} s^2 - 1 & 5s \\ -2s & s^2 - 4 \end{vmatrix} = s^4 + 5s^2 + 4$$

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1}{s^2} & 5s \\ \frac{-2}{s} & s^2 - 4 \end{vmatrix}}{s^4 + 5s^2 + 4} = \frac{11s^2 - 4}{s^2(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{-1}{s^2} + \frac{5}{s^2 + 1} - \frac{4}{s^2 + 4}$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2 - 1 & \frac{1}{s^2} \\ -2s & \frac{-2}{s} \end{vmatrix}}{s^4 + 5s^2 + 4} = \frac{-2s^2 + 4}{s(s^2 + 1)(s^2 + 4)} = \frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{5}{s^2 + 4}$$

olup

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s^2} + \frac{5}{s^2 + 1} - \frac{4}{s^2 + 4}\right\} = -t + 5sint - 2sin2t$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{2s}{s^2 + 1} + \frac{5}{s^2 + 4}\right\} = 1 - 2cost\ + cos2t$$

3.4. KISMİ TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Başlangıç koşullarına bağlı bazı kısmi türevli denklemlerde Laplace dönüşümü yardımıyla çözülebilir.

$a \leq x \leq b \quad t > 0$ için tanımlanmış $U(x,t)$ fonksiyonu verilmektedir.

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \int_0^\infty e^{-st}\,\frac{\partial U}{\partial t}\,dt = \lim_{p\to\infty}\int_o^p e^{-st}\,\frac{\partial U}{\partial t}\,dt$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}.dt = dv \qquad u(x,t) = v$$

$$e^{-st} = u \qquad -se^{-st}dt = du$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\left\{[\,e^{-st}\ U(x,t)]_0^p + \int_0^p e^{-st}U(x,t)dt\right\}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial t}\right\} = s\int_o^\infty e^{-st}U(x,t)dt - U(x,0) = \ s\,u(x,s) - U(x,0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{U}{\partial t}\right\} = s\,u(x,s) - \ U(x,0)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \int_0^p e^{-st}\,\frac{\partial U}{\partial x}\ dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \frac{d}{dx}\int_0^\infty e^{-st}U(x,t)dt$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial U}{\partial x}\right\} = \frac{\partial}{\partial x}\ u(x,s)$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = ?$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v \ \text{ dersek}$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right\} = \mathcal{L}\left\{\frac{\partial v}{\partial t}\right\} = s\,\mathcal{L}\{v\} - \ v(x,0)$$

$$= s[su(x,s) - U(x,0)] - \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)$$

$$= \ s^2u(x,s) - sU(x,0) - U_t(x,0)$$

Örnek:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}^2} \qquad \mathrm{U(x,0)} = 3\sin 2\pi\mathrm{x}$$

$$U(0,t) = 0 \quad U(1,t) = 0 \qquad 0 < x < 1 \qquad t > 0\ ;$$

kısmi türevinin diferensiyel denkleminin Laplace dönüşümünü alıp;

$$U_t(x,0) = \frac{\partial U}{\partial t}(t=0) \quad ve \quad u = u(x,s) = L\{U(x,t)\}$$

kullanırsak

$$su(x,s) \, - \, U(x,0) = u_{xx}$$

bulunur.

$$U_{xx} - su = 3\,sin\,2\pi x$$
$$u(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}.x} + c_2 e^{-\sqrt{s}.x}$$
$$u_{xx} - su = 0 \qquad u_h(x,s) = e^{r.x}$$
$$r^2 e^{rx} - se^{rx} \; = 0 \quad e^{rx}(r^2 - s) = 0 \quad r^2 = s$$
$$u_p = c_1 \sin 2\pi x + c_2 \cos 2\pi x$$
$$u_p^{'} = 2\pi\, c_1 \cos 2\pi x - \; 2\pi\, c_2 sin2\pi x$$
$$u_p^{''} = -4\pi^2 c_1 sin2\pi x - 4\pi^2 c_2 cos2\pi x$$
$$-4\pi^2 c_1 sin2\pi x - 4\pi^2 c_2 cos2\pi x - \, s\, c_1\; sin2\pi x - s\; c_2 cos2\pi x = -3sin2\pi x$$
$$(-4\pi^2 - s)c_1 = -3 \qquad (4\pi^2 + s)c_2 = 0$$
$$c_1 = \frac{3}{(4\pi^2 + s)} c_2 = 0$$
$$u = c_1 e^{\sqrt{s}.x} + c_2 e^{-\sqrt{s}.x} + \; \frac{3}{(4\pi^2 + s)} \sin 2\pi x$$
$$\mathcal{L}\big(U(0,t)\big) = u(0,s) = 0$$
$$\mathcal{L}\big(U(1,t)\big) = u(1,s) = 0$$
$$c_{1+}c_2 = 0$$
$$c_1 e^{\sqrt{s}} + c_2 e^{-\sqrt{s}} = 0$$
$$c_{1=}c_2 = 0$$
$$U(x,t) = \frac{3}{(4\pi^2 + s)} \sin 2\pi x$$
$$U(x,t) = 3e^{4\pi^2 t} \sin 2\pi x$$

Örnek: $U_t + xU_x = x$ ve $x > 0$ $t > 0$

$$x > 0 \text{ için } U(x,0) = 0$$
$$t > 0 \text{ için } U(0,t) = 0$$

Laplace dönüşümü alınırsa;

$$s\,u(x,s) - U(x,0) + x\frac{d}{dx}\,u(x,s) = \frac{x}{s}$$
$$x\frac{u}{dx} + su = \frac{x}{s}$$
$$\frac{du}{dx} + \frac{s}{x}u = \frac{1}{s}$$
$$\lambda = e^{\int \frac{s}{x}dx} = x^s$$
$$x^s\frac{du}{dx} + s\,x^{s-1}u = \frac{x^s}{s}$$
$$\frac{d}{dx}(x^s u) = \frac{x^s}{s}$$
$$x^s u = \frac{x^{s+1}}{s(s+1)} + c$$
$$u = \frac{x}{s(s+1)} + \frac{c}{x^s}$$

$$\mathcal{L}\{U(0,t)\} = u(0,s) = 0 \text{ olduğundan } c = 0$$

$$u = x(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1})$$
$$U(x,t) = x(1 - e^{-t})$$

3.5. KONVOLÜSYON TİPİNDE İNTEGRAL DENKLEMLER

Konvolüsyon tipindeki denklem $Y(t) = F(t) + \int_0^t K(t-u)Y(u)du$ şeklindedir ve

$$Y(t) = F(t) + K(t) * Y(t)$$

biçiminde yazılır. Her iki yanın Laplace dönüşümü alınırsa

$\mathcal{L}\{\mathrm{F}(t)\} = f(s)$ $\mathcal{L}\{\mathrm{K}(t)\} = k(s)y(s)$ olduğunu düşünürsek

$$y(s) = f(s) + k(s)y(s)$$
$$y(s) = \frac{f(s)}{1 - k(s)}$$

elde edilir. Ters dönüşümle istenen çözüm bulunabilir.

Örnek: Aşağıdaki integral denklemi çözünüz.

$$\int_0^t \cos(t-u)\, y(u) du = sint$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(s)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{g(s)\} = G(s)$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{\, f(s).g(s)\} = \int_0^t F(u).G(t-u)du \text{ ise}$$
$$f(s).g(s) = \mathcal{L}\left\{\int_0^t F(u).G(t-u)du\right\}$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t \cos(t-u)\, y(u)\, du\right\} = \mathcal{L}\{sint\}$$
$$Y(s)\frac{s}{s^2+1} = \frac{1}{s^2+1}$$
$$y(s) = \frac{1}{s}$$
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}$$
$$y(t) = 1$$

Örnek: $Y(t) = t^2 + \int_0^t Y(u)\sin(t-u)\, du$ integral denklemini çözünüz.

İntegral denklem $Y(t) = t^2 + Y(t) * sint$ biçiminde yazılabilir. Laplace dönüşümünü alır ve konvolüsyon teoremini kullanırsak $y = \mathcal{L}\{Y\}$ olmak üzere

$$\frac{2}{s^3} + \frac{y}{s^2+1}$$

buluruz. y ye göre çözelim:

$$y = \frac{2(s^2+1)}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5}$$

ters dönüşümle de

$$Y = 2\frac{t^2}{2!} + 2\frac{t^4}{4!} = t^2 + \frac{1}{12}t^4$$

bulunur.

Örnek: $Y(t) = \frac{1}{2}\, sin2t + \int_0^t Y(u)Y(t-u)du$ integral denklemini çözünüz.

İntegral denklem $Y(t) = \frac{1}{2}\, in2t + Y(t) * Y(t)$ biçiminde yazılabilir. Laplace dönüşümünü alır ve konvolüsyon teoremini kullanırsak,

$$y(s) = \frac{1}{s^2+4} + \{y(s)\}^2$$

$$\{y(s)\}^2 - y(s) + \frac{1}{s^2+4} = 0$$

buluruz.

$$y(s) = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{4}{s^2+4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{s}{\sqrt{s^2+4}}$$

öyleyse

$$y_1(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}+s}{\sqrt{s^2+4}}\right)$$

ve

$$y_2(s) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right)$$

dir. $y_2(s)$ den aşağıdaki çözümü buluruz.

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{s^2+4}-s}{\sqrt{s^2+4}}\right)\right\} = J_1(2t)$$

3.6. İNTEGRO DİFERENSİYEL DENKLEMLER

Bilinmeyen fonksiyonun türevini integral işareti altında bulunduran denkleme *integro diferensiyel denklem* denir.

Bu tür bir denklemin başlangıç koşullarına bağlı çözümü Laplace Dönüşümleri ile elde edilir.

Örnek: $Y(0) = 2$ ise $Y'(t) + 5\int_0^t cos2(t-u)Y(u)du = 10$ denklemini çözünüz.

Denklem, $Y'(t) + 5cos2t * Y(t) = 10$ biçiminde yazılabilir. Laplace dönüşümünü alıp

$$sy - Y(0) + \frac{5sy}{s^2+4} = \frac{10}{s}$$

$$y = \frac{2s^3 + 10s^2 + 8s + 40}{s^2(s^2+9)}$$

$$Y = 1/27\,(24 + 120t + 30cos3t + 50sin3t)$$

dir. 0 dan $t$ye kadar integre edip $Y(0) = 2$bağıntısını kullanarak verilen integro-diferensiyel denklem

$$Y(t) + 5\int_0^t (t-u)cos2(t-u)Y(u)du = 10t + 2$$

integral denklemine dönüştürülebilir.

Örnek: $Y(0) = 1$ olmak üzere

$$\int_0^t Y(u)\cos(t-u)\,du = Y'(t)$$

denklemini çözünüz.

$$y(s)\frac{s}{s^2+1} = s\,y(s) - Y(0)$$

$$y(s)\left(\frac{s}{s^2+1} - s\right) = -1$$

$$y(s) = \frac{-(s^2+1)}{-s^3} = \frac{(s^2+1)}{s^3}$$

$$y(s) = \frac{1}{s} + \frac{1}{s^3}$$

$$Y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$$

Örnek: $Y(0) = 0$ olmak üzere

$$\int_0^t Y'(u)\,\mathrm{Y}(t-u)\,du = 24t^3$$

denklemini çözünüz.

$$[s\,y(s) - Y(0)]\,y(s) = 24.\frac{3!}{s^4}$$

$$[y(s)]^2 = \frac{24.6}{s^5}$$

$$y(s) = \frac{12}{s^2\sqrt{s}} = \frac{12}{s^{\frac{5}{2}}}$$

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{12}{s^{\frac{5}{2}}}\right\} = \frac{12}{\frac{3}{2}!}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\left(\frac{3}{2}\right)!}{s^{\frac{5}{2}}}\right\}$$

$$Y(t) = \frac{12}{\left(\frac{3}{2}\right)!} t^{\frac{3}{2}}$$

Gamma fonksiyonu

$$\left(\frac{3}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

olduğundan

$$Y(t) = \frac{12\, t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}$$

$$Y(t) = \frac{16\, t^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}$$

3.7. FARK DENKLEMLERİ

a bir sabit olmak üzere $Y(t)$fonksiyonu ile bir veya daha fazla $Y(t-a)$fonksiyonları arasındaki ilişkiyi içeren denkleme *fark denklemi* denir.

Örnek: $t < 0$ için $Y(t) = 0$ ise

$$3Y(t) - 4Y(t-1) + Y(t-2) = t$$

denklemini çözünüz.

Her iki yanın Laplace dönüşümünü alalım.

$$3\,\mathcal{L}\{Y(t)\} - 4\,\mathcal{L}\{Y(t-1)\} + \mathcal{L}\{Y(t-2)\} = \mathcal{L}\{t\}$$

$$1.\, \mathcal{L}\{Y(t-1)\} = \int_0^t e^{-st} Y(t-1) dt$$

$$t - 1 = u \Rightarrow t = u + 1 \qquad dt = du$$

$$\mathcal{L}\{Y(t-1)\} = \int_{-1}^{\infty} e^{-s(u+1)} Y(u) du$$

$$\mathcal{L}\{Y(t-1)\} = e^{-s}\left[\int_{-1}^{0} Y(u)e^{-su} du + \int_{0}^{\infty} Y(u)e^{-su} du\right]$$

$$\mathcal{L}\{Y(t-1)\} = e^{-s} y(s)$$

$$2. \mathcal{L}\{Y(t-2)\} = \int_{0}^{t} e^{-st} Y(t-2) dt$$

$$t-2 = u \Rightarrow t = u+2 \qquad dt = du$$

$$\mathcal{L}\{Y(t-2)\} = \int_{-2}^{\infty} e^{-s(u+2)} Y(u) du$$

$$\mathcal{L}\{Y(t-2)\} = e^{-2s}\left[\int_{-2}^{0} Y(u)e^{-su} du + \int_{0}^{\infty} Y(u)e^{-su} du\right]$$

$$\mathcal{L}\{Y(t-2)\} = e^{-2s} y(s)$$

olduğundan

$$3\,\mathcal{L}\{Y(t)\} - 4\,\mathcal{L}\{Y(t-1)\} + \mathcal{L}\,Y(t-2) = \mathcal{L}\{t\}$$

$$3\,y(s) - 4\,e^{-s}y(s) + e^{-2s}y(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$y(s)[3 - 4e^{-s} + e^{-2s}] = \frac{1}{s^2}$$

$$y(s) = \frac{1}{s^2(3 - 4e^{-s} + e^{-2s})}$$

$$y(s) = \frac{1}{s^2(e^{-s} - 3)(e^{-s} - 1)}$$

$$y(s) = \frac{1}{2s^2}\left(\frac{1}{e^{-s} - 3} - \frac{1}{e^{-s} - 1}\right)$$

$$y(s) = \frac{1}{2s^2}\left(\frac{1}{1 - e^{-s}} - \frac{1}{3(1 - \frac{e^{-s}}{3})}\right)$$

$$y(s) = \frac{1}{2s^2}[1 + e^{-s} + e^{-2s} + e^{-3s} + \cdots] - \frac{1}{6s^2}\left[1 + \frac{e^{-s}}{3} + \frac{e^{-2s}}{9} + \frac{e^{-3s}}{27} + \cdots\right]$$

$$y(s) = \frac{1}{3s^2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)(t-n)$$

olacaktır. Buradan

$$Y(t)=\frac{t}{3}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{[\![t]\!]}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)(t-n)$$

Burada $[\![t]\!]$, t ye eşit veya t den küçük olan en büyük tam sayıdır.

Örnek: $t<0$ için $Y(t)=0$ ise

$$Y(t)-3Y(t-1)+2\,Y(t-2)=1$$

denklemini çözünüz.

Her iki yanın Laplace dönüşümünü alalım.

$$\mathcal{L}\{Y(t)\}-3\,\mathcal{L}\{Y(t-1)\}+2\mathcal{L}\{Y(t-2)\}=\mathcal{L}\{1\}$$

$$y(s)-3e^{-s}y(s)+2e^{-2s}y(s)=\frac{1}{s}$$

$$y(s)[1-3e^{-s}+2e^{-2s}]=\frac{1}{s}$$

$$y(s)=\frac{1}{s(2e^{-2s}-3e^{-s}+1)}=\frac{1}{s(e^{-s}-1)(2e^{-s}-1)}$$

$$y(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{1}{e^{-s}-1}-\frac{2}{2e^{-s}-1)}\right)$$

$$y(s)=\frac{1}{s}\left(\frac{2}{1-2e^{-s})}-\frac{1}{1-e^{-s}}\right)$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \text{ olduğundan}$$

$$y(s)=\frac{1}{s}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}(2e^{-s})^n-\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-s})^n\right]$$

$$y(s)=\frac{1}{s}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)e^{-ns}\right]$$

$$y(s)=\sum_{n=0}^{\infty}(2^{n+1}-1)\frac{e^{-ns}}{s}$$

$$y(s) = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} (2^{n+1} - 1) \frac{e^{-ns}}{s}$$

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = 1 + \sum_{n=1}^{[\![t]\!]} (2^{n+1} - 1) \,.\, 1 = 1 + \sum_{n=1}^{[\![t]\!]} 2^{n+1} - [\![t]\!]$$

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = 1 + 2.\left(2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots 2^{[\![t]\!]}\right)$$

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = 1 + 2.\left(1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots 2^{[\![t]\!]}\right) - 2 - [\![t]\!]$$

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{y(s)\} = 1 + 2.\left(\frac{1 - 2^{[\![t]\!]+1}}{1 - 2}\right) - 2 - [\![t]\!]$$

$$Y(t) = 2^{[\![t]\!]+2} - [\![t]\!] - 3$$

Örnek: $t < 0$ için $Y(t) = 0$ ve

$$F(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2, & t > 0 \end{cases}$$

olmak üzere

$$3Y(t) - 5Y(t-1) + 2\,Y(t-2) = F(t)$$

denklemini çözünüz.

$$3\mathcal{L}\{Y(t)\} - 35\mathcal{L}\{Y(t-1)\} + 2\mathcal{L}\{Y(t-2)\} = \mathcal{L}\{t^2\}$$

$$3y(s) - 5e^{-s}y(s) + 2e^{-2s}y(s) = \frac{2}{s^3}$$

$$y(s)[3 - 5e^{-s} + 2e^{-2s}] = \frac{2}{s^3}$$

$$y(s) = \frac{2}{s^3(3 - 5e^{-s} + 2e^{-2s})}$$

$$y(s) = \frac{2}{s^3(1 - e^{-s})(3 - 2e^{-s})}$$

$$2 = \frac{A}{1 - e^{-s}} + \frac{B}{3 - 2e^{-s}}$$

$$A(3 - 2e^{-s}) + B(1 - e^{-s}) = 2$$

$$3A + B = 2 \quad , \quad -2A - B = 0$$

$$A = 2 \quad , \quad B = -4$$

$$y(s) = \frac{1}{s^3}\left[\frac{2}{1-e^{-s}} - \frac{4}{3-2e^{-s}}\right]$$

$$y(s) = \frac{1}{s^3}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-s})^n - \frac{4}{3\left(1-\frac{2}{3}e^{-s}\right)}\right]$$

$$y(s) = \frac{1}{s^3}\left[2\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-s})^n - \frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}e^{-s}\right)^n\right]$$

$$y(s) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(2 - \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}\right)\frac{e^{-ns}}{s^3}$$

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{[\![t]\!]}\left(2 - \frac{2^{n+2}}{3^{n+1}}\right)\frac{(t-n)^2}{2}$$

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{[\![t]\!]}\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)(t-n)^2$$

3.8. İNTEGRO FARK DENKLEMLERİ

İçinde türevinde olduğu fark denklemlere denir.
$Y'(t) = Y(t-1) + 2t$ şeklindeki denklemler bir diferensiyel fark denklemidir.

Bilinmeyen $Y(t)$fonksiyonunun integral işareti altında da ortaya çıktığı diferensiyel fark denklemler de vardır. Bu tür denklemlere *integro fark denklemi* de denir.

Örnek: $t < 0$ için $Y(t) = 0$ ise

$$Y'(t) + Y(t-1) = t^2$$

denklemini çözünüz.
Her iki yanın Laplace dönüşümünü alınız.

$$\mathcal{L}\{Y'(t)\} + \mathcal{L}\{Y(t-1)\} = \frac{2}{s^3}$$
$$\mathcal{L}\{Y'(t)\} = s\,\mathcal{L}\{Y(t)\} - Y(0) = sy(s) - 0 = sy(s)$$

olup

$$sy(s) + e^{-s}y(s) = \frac{2}{s^3}$$

$$y(s) = \frac{2}{s^3(s + e^{-s})}$$

$$y(s) = \frac{2}{s^4(1 + \frac{e^{-s}}{s})}$$

$$y(s) = \frac{2}{s^4}\left(1 - \frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^3} + \cdots\right)$$

$$y(s) = \frac{2}{s^4} - \frac{2e^{-s}}{s^5} + \frac{2e^{-2s}}{s^6} - \frac{2e^{-3s}}{s^7} + \cdots$$

$$y(s) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}$$

olur.

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-ns}}{s^{n+4}}\right\} = \begin{cases} \dfrac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!} & t \geq n \\ 0 & t \text{ nin diğer değerleri} \end{cases}$$

dir. Buradan da

$$Y(t) = 2\sum_{0}^{[\![t]\!]} \frac{(t-n)^{n+3}}{(n+3)!}$$

bulunur.

Örnek: $F(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 2t, & t > 0 \end{cases}$

$$Y''(t) - Y(t-1) = F(t)$$

denklemini çözünüz.

Her iki yanın Laplace dönüşümünü alınız.

$$\mathcal{L}\{Y''(t)\} - \mathcal{L}\{Y(t-1)\} = \mathcal{L}\{F(t)\}$$
$$\mathcal{L}\{Y''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{Y(t)\} - s\,Y(0) - Y'(0) = s^2 y(s) - 0 - 0 = s^2 y(s)$$
$$\left(s^2 y(s) - e^{-s} y(s)\right) = \frac{2}{s^2}$$
$$y(s) = \frac{2}{s^2(s^2 - e^{-s})}$$
$$y(s) = \frac{2}{s^4\left(1 - \frac{e^{-s}}{s^2}\right)}$$
$$y(s) = \frac{2}{s^4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{s}}{s^2}\right)^n = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{ns}}{s^{2n+4}}$$
$$y(t) = 2\sum_{n=0}^{[\![t]\!]}\frac{(t+n)^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

elde edilir.

Örnek:

$$\int_0^x G(u)\,G(x-u)\,du = 8(sinx - xcosx)$$

denklemini gerçekleştiren $G(x)$ i bulunuz.

$$g(s)^2 = \frac{8}{s^2+1} - 8.(-1)^1\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)$$
$$g(s)^2 = \frac{8}{s^2+1} + 8\left(\frac{s^2+1-2s.s}{(s^2+1)^2}\right)$$
$$g(s)^2 = \frac{8(s^2+1)}{(s^2+1)^2} + \frac{8(1-s^2)}{(s^2+1)^2}$$
$$g(s)^2 = \frac{16}{(s^2+1)^2}$$
$$g(s) = \pm\frac{4}{s^2+1}$$

$$G(x) = \pm 4sinx$$

BÖLÜM 4

KOMPLEKS DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜ

4.1. KOMPLEKS KISMİ TÜREVLER

$w(z,\bar{z})$ kompleks değişkenli bir fonksiyon olsun. $w(z,\bar{z})$ fonksiyonunun z ve $\bar{z}$ değişkenlerine göre kısmi türevleri

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$
$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

dir.

$$w(z,\bar{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}$$

olduğundan

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$w(,\bar{z})$ fonksiyonunun z ve $\bar{z}$ değişkenlerine göre ikinci mertebeden türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2i\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$
$$w(z,\bar{z}) = u(x,y) + iv(x,y)$$

olmak üzere

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right]$$

4.2. KOMPLEKS DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA ÇÖZÜMÜNE ÖRNEKLER

Kompleks diferensiyel denklemde reel ve sanal kısımlarına ayrılarak iki değişkene sahip iki bilinmeyenli bir diferensiyel denklem sistemi elde edilir. Daha sonra bu denklemlerin Laplace dönüşümleri alınarak aranan fonksiyonun reel ve sanal kısımlarının Laplace dönüşümleri bulunur. Ters Laplace dönüşümü yardımıyla aranan fonksiyon elde edilir.

Örnek 1:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0 \text{ denkleminin}$$

$$w(x,0) = x^2 \text{çözümünü bulunuz.}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] = 0$$

Reel ve sanal kısımlarını ayırıp eşitliği kullanırsak;

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemlerin Laplace dönüşümleri alınırsa,

$$\frac{\partial U}{\partial x} - [sV(x,s) - v(x,0)] = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + [sU(x,s) - u(x,0)] = 0$$

ve $w(x,0) = x^2$ olduğundan $u(x,0) + iv(x,0) = x^2$

$$u(x,0) = x^2$$

$$v(x,0) = 0$$

olur. Bu denklemleri yukarıdaki denklemde yerlerine yazarsak

$$\frac{\partial U}{\partial x} - sV(x,s) = 0$$

$$sU(x,s) + \frac{\partial V}{\partial x} = x^2$$

ifadeleri elde edilir. Cramer Metodunu uygulayıp $U(x,s)$ ve $V(x,s)$ bilinmeyenlerini buluruz.

$$\begin{vmatrix} D & -s \\ s & D \end{vmatrix} = D^2 + s^2$$

$$U(x,s)=\frac{\begin{vmatrix}0 & -s\\ x^2 & D\end{vmatrix}}{D^2+s^2}=\frac{x^2s}{D^2+s^2}$$

$$=\frac{1}{s^2\left(1+\frac{D^2}{s^2}\right)}(x^2)$$

$$=\frac{1}{s^2}\left(1-\frac{D^2}{s^2}+\frac{D^4}{s^4}-\cdots\right)(x^2s)$$

$$=\frac{1}{s^2}\left(x^2s-\frac{2s}{s^2}+0\right)=\frac{x^2}{s}-\frac{2}{s^3}$$

$U(x,s)$ nin ters Laplace alınarak $u(x,y)$ bulunur.

$$u(x,y)=\mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\}$$

$$u(x,y)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{x^2}{s}-\frac{2}{s^3}\right\}$$

$$u(x,y)=x^2-y^2 \qquad \ldots(1)$$

$$V(x,s)=\frac{\begin{vmatrix}D & 0\\ s & x^2\end{vmatrix}}{D^2+s^2}=\frac{2x}{D^2+s^2}$$

$$=\frac{1}{s^2\left(1+\frac{D^2}{s^2}\right)}(2x)$$

$$=\frac{1}{s^2}\left(1-\frac{D^2}{s^2}+\frac{D^4}{s^4}-\cdots\right)(2x)$$

$$=\frac{1}{s^2}(2x-0)=\frac{2x}{s^2}$$

$V(x,s)$ nin ters Laplace alınarak $v(x,y)$ bulunur.

$$v(x,y)=\mathcal{L}^{-1}\{V(x,s)\}$$

$$v(x,y)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2x}{s^2}\right\}$$

$$v(x,y)=2xy \qquad \ldots(2)$$

(1) ve (2) den;

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$
$$= x^2 - y^2 + i(2xy)$$
$$= (x+iy)^2$$
$$w(x,y) = z^2$$

olur.

Örnek 2:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 3z^2 \text{denkleminin}$$

$$w(x,0) = x^3 + x \text{ çözümünü bulunuz.}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 3z^2$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y} = 6z^2$$

Reel ve sanal kısımlarını ayırıp eşitliği kullanırsa;

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) - i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] = 6z^2$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 6(x^2 - y^2)$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 12xy$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemlerin Laplace dönüşümleri alınırsa,

$$\frac{\partial U}{\partial x} + [sV(x,s) - v(x,0)] = \frac{6x^2}{s} - \frac{12}{s^3}$$
$$\frac{\partial V}{\partial x} - [sU(x,s) - u(x,0)] = \frac{12x}{s^2}$$

ve $(x,0) = x^3 + x$ olduğundan $u(x,0) + iv(x,0) = x^3 + x$

$$u(x,0) = x^3 + x$$
$$v(x,0) = 0$$

olur. Bu denklemleri yukarıdaki denklemde yerlerine yazarsak;

$$\frac{\partial U}{\partial x} + sV(x,s) = \frac{6x^2}{s} - \frac{12}{s^3}$$
$$-sU(x,s) + \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{12x}{s^2} - x^3 - x$$

elde edilir. Cramer Metodu uygulanarak çözüme ulaşılır.

$$\begin{vmatrix} D & s \\ -s & D \end{vmatrix} = D^2 + s^2$$

$$U(x,s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{6x^2}{s} - \frac{12}{s^3} & s \\ \frac{12x}{s^2} - x^3 - x & D \end{vmatrix}}{D^2 + s^2} = \frac{\frac{12x}{s} - \frac{12x}{s} + x^3 s + xs}{D^2 + s^2} = \frac{x^3 s + xs}{D^2 + s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2\left(1 + \frac{D^2}{s^2}\right)}(x^3 s + xs)$$
$$= \frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{D^2}{s^2} + \frac{D^4}{s^4} - \cdots\right)(x^3 s + xs)$$
$$= \frac{1}{s^2}\left(x^3 s + xs - \frac{6xs}{s^2}\right) = -\frac{6x}{s^3} + \frac{x^3 + x}{s}$$
$$u(x,y) = \mathcal{L}^{-1}[U(x,s)]$$
$$u(x,y) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{6x}{s^3} + \frac{x^3 + x}{s}\right]$$
$$u(x,y) = x^3 + x - 3xy^2 \qquad \dots (1)$$

$$V(,s) = \frac{\begin{vmatrix} D & \frac{6x^2}{s} - \frac{12}{s^3} \\ -s & \frac{12x}{s^2} - x^3 - x \end{vmatrix}}{D^2 + s^2} = \frac{\frac{12}{s^2} - 3x^2 - 1 + 6x^2 - \frac{12}{s^2}}{D^2 + s^2} = \frac{3x^2 - 1}{D^2 + s^2}$$
$$= \frac{1}{s^2\left(1 + \frac{D^2}{s^2}\right)}(3x^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{D^2}{s^2} + \frac{D^4}{s^4} - \cdots\right)(3x^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(3x^2 - 1 - \frac{6}{s^2}\right) = -\frac{6}{s^4} + \frac{3x^2 - 1}{s^2}$$

$$v(x,y) = \mathcal{L}^{-1}[V(x,s)]$$

$$v(x,y) = \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{6}{s^4} + \frac{3x^2 - 1}{s^2}\right]$$

$$v(x,y) = -y^3 + 3x^2y - y \quad \ldots(2)$$

(1) ve (2) den;

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$= x^3 + x - 3xy^2 + i(-y^3 + 3x^2y - y)$$

$$= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + x - iy$$

$$= (x + iy)^3 + x - iy$$

$$w(x,y) = z^3 + \bar{z}$$

olur.

Örnek 3:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + 2\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 3z^2 + 2 \text{ denklemini}$$

$$w(x,0) = x^3 + x \text{ çözümünü bulunuz.}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} + 2\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y} + 2\frac{\partial w}{\partial x} + 2i\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 3z^2 + 2$$

$$3\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y} = 6z^2 + 4$$

$$3\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = 6z^2 + 4$$

$$3\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 6(x^2 - y^2) + 4$$

$$3\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 12xy$$

yukarıdaki denklemlerin Laplace dönüşümleri alınırsa,

$$3\frac{\partial U}{\partial x} - [sV(x,s) - v(x,0)] = \frac{6x^2+4}{s} - \frac{12}{s^3}$$

$$3\frac{\partial V}{\partial x} + [sU(x,s) - u(x,0)] = \frac{12x}{s^2}$$

ve $w(x,0) = x^3 + x$ olduğundan $u(x,0) + iv(x,0) = x^3 + x$

$$u(x,0) = x^3 + x$$

$$v(x,0) = 0$$

olur.

$$3\frac{\partial U}{\partial x} - sV(x,s) = \frac{6x^2+4}{s} - \frac{12}{s^3}$$

$$sU(x,s) + 3\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{12x}{s^2} + x^3 + x$$

denklemlerine Cramer Metodu uygulanırsa;

$$\begin{vmatrix} 3D & -s \\ s & 3D \end{vmatrix} = 9D^2 + s^2$$

$$U(x,) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{6x^2+4}{s} - \frac{12}{s^3} & -s \\ \frac{12x}{s^2} + x^3 + x & 3D \end{vmatrix}}{9D^2 + s^2} = \frac{3.\frac{12x}{s} + \frac{12x}{s} + s(x^3+x)}{9D^2+s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2\left(1 + \frac{9D^2}{s^2}\right)}\left(\frac{48x}{s} + s(x^3+x)\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{9D^2}{s^2} + \frac{81D^4}{s^4} - \cdots\right)\left(\frac{48x}{s} + s(x^3+x)\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(\frac{48x}{s} + s(x^3+x) - \frac{54x}{s}\right) = -\frac{6x}{s^3} + \frac{x^3+x}{s}$$

$$u(x,y) = \mathcal{L}^{-1}[U(x,s)]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{6x}{s^3} + \frac{x^3+x}{s}\right]$$

$$= x^3 + x - 3xy^2 \qquad \text{... (1)}$$

$$V(x,s) = \frac{\begin{vmatrix} 3D & \frac{6x^2+4}{s} - \frac{12}{s^3} \\ s & \frac{12x}{s^2} + x^3 + x \end{vmatrix}}{9D^2 + s^2} = \frac{3.\left(\frac{12}{s^2} + 3x^2 + 1\right) - 6x^2 - 4 + \frac{12}{s^2}}{9D^2 + s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2\left(1 + \frac{9D^2}{s^2}\right)}\left(\frac{48}{s^2} + 9x^2 - 6x^2 - 1\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{9D^2}{s^2} + \frac{81D^4}{s^4} - \cdots\right)\left(3x^2 - 1 + \frac{48}{s^2}\right)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(3x^2 - 1 + \frac{48}{s^2} - \frac{54}{s^2}\right) = -\frac{6}{s^4} + \frac{3x^2 - 1}{s^2}$$

$$v(x,y) = \mathcal{L}^{-1}[V(x,s)]$$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{6}{s^4} + \frac{3x^2 - 1}{s^2}\right]$$

$$= -y^3 + 3x^2y - y \qquad \ldots (2)$$

(1) ve (2) den;

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$= x^3 + x - 3xy^2 + i(-y^3 + 3x^2y - y)$$

$$= x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3 + x - iy$$

$$= (x + iy)^3 + x - iy$$

$$w(x,y) = z^3 + \bar{z}$$

olur.

Örnek 4:

$$2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 4z + 1 \text{ denklemini}$$

$$w(x,0) = x^2 + 5x \text{ çözümünü bulunuz.}$$

.

$$2\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 2\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - i\frac{\partial w}{\partial y}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 4z + 1$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} - 3i\frac{\partial w}{\partial y} = 8z + 2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}-3i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y}\right)=8(x+iy)+2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+3\frac{\partial v}{\partial y}=8x+2$$

$$-3\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=8y$$

yukarıdaki denklemlerin Laplace dönüşümleri alınırsa,

$$\frac{\partial U}{\partial x}+3[sV(x,s)-v(x,0)]=\frac{8x+2}{s}$$

$$-3[sU(x,s)-u(x,0)]+\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{8}{s^2}$$

ve $w(x,0)=x^2+5x$ olduğundan $u(x,0)+iv(x,0)=x^2+5x$

$$u(x,0)=x^2+5x$$

$$v(x,0)=0$$

olur.

$$\frac{\partial}{\partial x}+3sV(x,s)=\frac{8x+2}{s}$$

$$-3sU(x,s)+\frac{\partial V}{\partial x}=\frac{8}{s^2}-3x^2-15x$$

Cramer Metodu uygulanırsa;

$$\begin{vmatrix} D & 3s \\ -3s & D \end{vmatrix}=D^2+9s^2$$

$$U(x,s)=\frac{\begin{vmatrix} \frac{8x+2}{s} & 3s \\ \frac{8}{s^2}-3x^2-15x & D \end{vmatrix}}{D^2+9s^2}$$

$$U(x,s)=\frac{1}{D^2+9s^2}\left(-\frac{16}{s}+9x^2s+45xs\right)$$

$$U(x,s)=\frac{1}{9s^2\left(1+\frac{D^2}{9s^2}\right)}\left(-\frac{16}{s}+9x^2s+45xs\right)$$

$$U(x,s)=\frac{1}{9s^2}\left(1-\frac{D^2}{9s^2}+\frac{D^4}{81s^4}-\cdots\right)\left(-\frac{16}{s}+9x^2s+45xs\right)$$

$$U(x,s)=\frac{1}{9s^2}\left[-\frac{16}{s}+9x^2s+45xs-\frac{18s}{9s^2}\right]$$

$$u(x,y)=\mathcal{L}^{-1}[U(x,s)]$$

$$u(x,y)=\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{16}{9s^3}+\frac{x^2+5x}{s}-\frac{2}{9s^3}\right]$$

$$u(x,y)=-\frac{8}{9}y^2+x^2+5x-\frac{1}{9}y^2$$

$$u(x,y)=x^2+5x-y^2 \quad \ldots(1)$$

$$V(x,s)=\frac{\begin{vmatrix} D & \frac{8x+2}{s} \\ -3s & \frac{8}{s^2}-3x^2-15x \end{vmatrix}}{D^2+9s^2}$$

$$V(x,s)=\frac{1}{D^2+9s^2}(18x-9)$$

$$V(,s)=\frac{1}{9s^2\left(1+\frac{D^2}{9s^2}\right)}(18x-9)$$

$$V(x,s)=\frac{1}{9s^2}\left(1-\frac{D^2}{9s^2}+\frac{D^4}{81s^4}-\cdots\right)(18x-9)$$

$$V(x,s)=\frac{1}{9s^2}[18x-9]$$

$$v(x,y)=\mathcal{L}^{-1}[V(x,s)]$$

$$v(x,y)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2x-1}{s^2}\right]$$

$$v(x,y)=2xy-y \quad \ldots(2)$$

(1) ve (2) den;

$$w(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$$
$$=x^2+5x-y^2+i(2xy-y)$$
$$=x^2+2ixy-y^2+3(x-iy)+2(x+iy)$$
$$w(x,y)=z^2+3\bar{z}+2 \text{ olur.}$$

Örnek 5:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 2\bar{z}\text{denklemini}$$

$w(x,0) = x^2 + 3x - 1$ çözümünü bulunuz.

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + i\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 2\bar{z}$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right] = 2x - 2iy$$

$$\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = 4x$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -4y$$

yukarıdaki denklemlerin Laplace dönüşümleri alınırsa,

$$\frac{\partial U}{\partial x} - [sV(x,s) - v(x,0)] = \frac{4x}{s}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} + [sU(x,s) - u(x,0)] = -\frac{4}{s^2}$$

ve $w(x,0) = x^2 + 3x - 1$olduğundan $u(x,0) + iv(x,0) = x^2 + 3x - 1$

$$u(x,0) = x^2 + 3x - 1$$

$$v(x,0) = 0$$

olur.

$$\frac{\partial U}{\partial x} - sV(x,s) = \frac{4x}{s}$$

$$sU(x,s) - (x^2 + 3x - 1) + \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4}{s^2}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} - sV(x,s) = \frac{4x}{s}$$

$$sU(x,s) + \frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4}{s^2} + x^2 + 3x - 1$$

Cramer Metodu uygulanırsa;

$$\begin{vmatrix} D & -s \\ s & D \end{vmatrix} = D^2 + s^2$$

$$U(x,s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{4x}{s} & -s \\ -\frac{4}{s^2} + x^2 + 3x - 1 & D \end{vmatrix}}{D^2 + s^2} = \frac{\frac{4}{s} - \frac{4}{s} + x^2 s + 3xs - s}{D^2 + s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2\left(1 + \frac{D^2}{s^2}\right)}(x^2 s + 3xs - s)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{D^2}{s^2} + \frac{D^4}{s^4} - \cdots\right)(x^2 s + 3xs - s)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(x^2 s + 3xs - s - \frac{2}{s}\right) = \frac{x^2}{s} + \frac{3x}{s} - \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3}$$

$$u(x,y) = \mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\}$$

$$u(x,y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{x^2}{s} + \frac{3x}{s} - \frac{1}{s} - \frac{2}{s^3}\right\}$$

$$u(x,y) = x^2 + 3x - 1 - y^2 \quad \ldots(1)$$

$$V(x,s) = \frac{\begin{vmatrix} D & \frac{4x}{s} \\ s & -\frac{4}{s^2} + x^2 + 3x - 1 \end{vmatrix}}{D^2 + s^2} = \frac{2x + 3 - 4x}{D^2 + s^2} = \frac{3 - 2x}{D^2 + s^2}$$

$$= \frac{1}{s^2\left(1 + \frac{D^2}{s^2}\right)}(3 - 2x)$$

$$= \frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{D^2}{s^2} + \frac{D^4}{s^4} - \cdots\right)(3 - 2x)$$

$$= \frac{1}{s^2}(3 - 2x - 0) = \frac{3}{s^2} - \frac{2x}{s^2}$$

$$v(x,y) = \mathcal{L}^{-1}\{V(x,s)\}$$

$$v(x,y) == \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2} - \frac{2x}{s^2}\right\}$$

$$v(x,y) = 3y - 2xy \quad \ldots(2)$$

(1) ve (2) den ;

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$= x^2 + 3x - 1 - y^2 + i(3y - 2xy)$$
$$w(x,y) = \bar{z}^2 + 3z - 1$$

olur.

Örnek 6:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = 2\bar{z}\text{denklemini}$$

$$w(x,0) = x^3 + 3x$$
$$u_y(x,0) = 0$$
$$v_y(x,0) = 3 - x^2$$

çözümünü bulunuz.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z \partial \bar{z}} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 2\bar{z}$$
$$\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right] = 2x - 2iy$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 8x$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = -8y$$

yukarıdaki denklemlerin Laplace dönüşümleri alınırsa,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \left[s^2 U(x,s) - su(x,0) - u_y(x,0)\right] = \frac{8x}{s}$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \left[s^2 V(x,s) - sv(x,0) - v_y(x,0)\right] = -\frac{8}{s^2}$$

ve $w(x,0) = x^3 + 3x$ olduğundan $u(x,0) + iv(x,0) = x^3 + 3x$

$$u(x,0) = x^3 + 3x$$
$$v(x,0) = 0$$

olur.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + [s^2 U(x,s) - s(x^3 + 3x)] = \frac{8x}{s}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + [s^2 V(x,s) + x^2 - 3] = -\frac{8}{s^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + s^2 U(x,s) = \frac{8x}{s} + s(x^3 + 3x)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + s^2 V(x,s) = -\frac{8}{s^2} - x^2 + 3$$

$$(D^2 + s^2)U(x,s) = \frac{8x}{s} + s(x^3 + 3x)$$

$$(D^2 + s^2)V(x,s) = -\frac{8}{s^2} - x^2 + 3$$

$$U(x,s) = \frac{1}{s^2\left(1 + \frac{D^2}{s^2}\right)}\left(\frac{8x}{s} + s(x^3 + 3x)\right)$$

$$U(x,s) = \frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{D^2}{s^2} + \frac{D^4}{s^4} - \cdots\right)\left(\frac{8x}{s} + s(x^3 + 3x)\right)$$

$$U(x,s) = \frac{1}{s^2}\left(\frac{8x}{s} + x^3 s + 3xs - \frac{6xs}{s^2}\right) = \frac{8x}{s^3} + \frac{x^3}{s} + \frac{3x}{s} - \frac{6x}{s^3}$$

$$U(x,s) = \frac{2x}{s^3} + \frac{x^3 + 3x}{s}$$

$$u(x,y) = \mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\}$$

$$u(x,y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2x}{s^3} + \frac{x^3 + 3x}{s}\right\}$$

$$u(x,y) = x^3 + 3x + xy^2 \qquad \ldots (1)$$

$$V(x,s) = \frac{1}{s^2\left(1 + \frac{D^2}{s^2}\right)}\left(-\frac{8}{s^2} - x^2 + 3\right)$$

$$V(x,s) = \frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{D^2}{s^2} + \frac{D^4}{s^4} - \cdots\right)\left(-\frac{8}{s^2} - x^2 + 3\right)$$

$$V(x,s) = \frac{1}{s^2}\left(-\frac{8}{s^2} - x^2 + 3 - \frac{-2}{s^2}\right) = -\frac{8}{s^4} - \frac{x^2}{s^2} + \frac{3}{s^2} + \frac{2}{s^4}$$

$$V(,s) = -\frac{6}{s^4} + \frac{3 - x^2}{s^2}$$

$$v(x,y) = \mathcal{L}^{-1}\{V(x,s)\}$$

$$v(x,y) = \mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{6}{s^4} + \frac{3 - x^2}{s^2}\right\}$$

$$v(x,y) = 3y - x^2y - y^3 \quad \dots(2)$$

(1) ve (2) den;

$$w(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$$
$$w(x,y) = x^3 + 3x + xy^2 + i(3y - x^2y - y^3)$$
$$w(x,y) = (x+iy)(x^2 - 2ixy - y^2) + 3(x+iy)$$
$$w(x,y) = z.\bar{z}^2 + 3z$$

olur.

BÖLÜM 5

LAPLACE AYRIŞIM METODU

$$F(y(x,t) = g(x,t) \ldots \tag{5.1}$$

denklemini göz önüne alalım. Burada Flineer veya lineer olmayan adi veya kısmi diferansiyel operatörüdür. F deki lineer terimleri $L + R$ ile lineer olmayan terimleri ise N ile gösterelim. Len yüksek mertebeden lineer operatör, R geri kalan lineer operatördür.
Böylece (5.1) denklemi

$$Ly + Ry + Ny = g(x,t)(5.2)$$

olarak yazılabilir. (5.2) denklemine Laplace dönüşümünü uygularsak;

$$\mathcal{L}\{Ly + Ry + Ny\} = \mathcal{L}\{g(x,t)\}$$

olur. Türevin Laplace dönüşümü özelliğinden;

$$s^n\mathcal{L}\{y\} - \sum_{k=1}^{n} s^{k-1}y^{n-k}(x,0) + \mathcal{L}\{R(y)\} + \mathcal{L}\{N(y)\} = \mathcal{L}\{g(x,t)\} \tag{5.3}$$

elde edilir.

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^n}\sum_{k=1}^{n} s^{k-1}y^{n-k}(x,0) - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{R(y)\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{N(y)\}$$
$$+\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{g(x,t)\} \tag{5.4}$$

olur.Laplace dönüşümü y çözümünü $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ biçiminde sonsuz bir seri olarak kabul eder. Ny ise A_n adomian polinomları olmak üzere

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \ldots \tag{5.5}$$

biçiminde yazılır.

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i\right)\right] \quad \lambda = 0\,, \;\; n = 0,1,2 \ldots$$

olduğundan

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)\right\} = \frac{1}{s^n}\sum_{k=1}^{n} s^{k-1}y^{n-k}(x,0) - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{R(y)\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{N(y)\} + \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{g(x,t)\}$$
$$\mathcal{L}\{y_0(t)\} = \frac{1}{s^n}\sum_{k=1}^{n} s^{k-1}y^{n-k}(x,0) + \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{g(x,t)\}$$
$$\mathcal{L}\{y_1(t)\} = -\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{R(y_0)\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{A_0 y\}$$
$$\mathcal{L}\{y_2(t)\} = -\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{R(y_1)\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{A_1 y\}$$
$$\mathcal{L}\{y_{n+1}(t)\} = -\frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{R(y_n)\} - \frac{1}{s^n}\mathcal{L}\{A_n y\}$$

elde edilir.

$$y_0(x,t) = G(x,t)$$
$$y_{n+1}(x,t) = -\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^n}\left[\mathcal{L}(A_n) + \mathcal{L}\big(R(y_n)\big)\right]\right\}, \qquad n \geq 0$$

olur.

5.1. LAPLACE AYRIŞIM METODUNUN DAFFİNG DENKLEMİNE UYGULAMASI:

Bu bölümde Elçin Yusufoğlu'nun bir makalesindeki aşağıdaki lineer olmayan başlangıç değer probleminin çözümünü bulmak için Laplace ayrışım metodunu uygulayalım.

$$y'' + py' + p_1 y + p_2 y^3 = f(x)$$
$$Y(0) = \alpha\,, \quad Y'(0) = \beta$$

$p,\ p_{1,}p_2,\ \alpha,\ \beta$ reel sayılar olmak üzere
her iki tarafın Laplace dönüşümünü uygularsak;

$$\mathcal{L}\{y''\} + \mathcal{L}\{py'\} + \mathcal{L}\{p_1 y\} + \mathcal{L}\{p_2 y^3\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$$
$$\mathcal{L}\{y''\} + p\mathcal{L}\{y'\} + p_1\mathcal{L}\{y\} + p_2\mathcal{L}\{y^3\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$$

Laplace dönüşümünü alırsak;

$$s^2\mathcal{L}\{y\} - sY(0) - Y'(0) + p[s\mathcal{L}\{y\} - Y(0)] + p_1\mathcal{L}\{y\} + p_2\mathcal{L}\{y^3\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$$
$$s^2\mathcal{L}\{y\} - s\alpha - \beta + p[s\mathcal{L}\{y\} - \alpha] + p_1\mathcal{L}\{y\} + p_2\mathcal{L}\{y^3\} = \mathcal{L}\{f(x)\}$$
$$(s^2 + ps)\mathcal{L}\{y\} = \alpha s + \beta + \alpha p - p_1\mathcal{L}\{y\} - p_2\mathcal{L}\{y^3\} + \mathcal{L}\{f(x)\}$$
$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\alpha s + \beta + \alpha p}{s^2 + ps} - \frac{p_1}{s^2 + ps}\mathcal{L}\{y\} - \frac{p_2}{s^2 + ps}\mathcal{L}\{y^3\} + \frac{1}{s^2 + ps}\mathcal{L}\{f(x)\}$$
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$
$$h(y) = y^3 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$
$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n} h\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right)$$
$$A_0 = {y_0}^3$$
$$A_1 = \frac{1}{1!}\frac{d}{d\lambda} h(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots)(\lambda = 0)$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}[(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3 + \cdots).h^{'}(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots)](\lambda = 0)$$

$$A_1 = y_1 h^{'}(y_0)$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}h(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots)(\lambda = 0)$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d}{d\lambda}[(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3 + \cdots).h^{'}(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots)](\lambda = 0)$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\ (2y_2 h^{'}(y_0) + {y_1}^2 h^{''}(y_0))$$

$$A_2 = y_2 h^{'}(y_0) + \frac{{y_1}^2}{2}h^{''}(y_0)$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}h(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots)(\lambda = 0)$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d^2}{d\lambda^2}[(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3 + \cdots)h^{'}(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots)](\lambda = 0)$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\frac{d}{d\lambda}[(2y_2 + 6\lambda y_3 + \cdots)h^{'}(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots)$$
$$+(y_1 + 2\lambda y_2 + 3\lambda^2 y_3 + \cdots)^2 h^{''}(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \cdots)]$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}[6y_3\ h^{'}(y_0 + \lambda y_1) + 2y_2.y_1.h^{''}(y_0) + 2y_1 2y_2 h^{''}(y_0) + h^{'''}(\quad_0)y_1.{y_1}^2]$$

$$A_3 = \frac{1}{6}[6y_3\ h^{'}(y_0) + 6y_1.y_2.h^{''}(y_0) + {y_1}^3 h^{'''}(y_0)]$$

$$A_3 = \frac{1}{6}[6y_3\ h^{'}(y_0) + 6y_1.y_2.h^{''}(y_0) + {y_1}^3 h^{'''}(y_0)]$$

$$A_3 = y_3\ h^{'}(y_0) + y_1.y_2.h^{''}(y_0) + \frac{{y_1}^3}{6}h^{'''}(y_0)$$

$$A_0 = {y_0}^3 = h(y_0)$$

$$A_1 = 3{y_0}^2 y_1$$

$$A_2 = y_2.3.{y_0}^2 + \frac{{y_1}^2}{2}6y_0 = 3y_2.{y_0}^2 + 3y_0.{y_1}^2$$

$$A_3 = y_3.3.{y_0}^2 + y_1.y_2.6.y_0 + {y_1}^3$$

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right\} = \frac{\alpha s + \beta + \alpha p}{s^2 + ps} - \frac{p_1}{s^2 + ps}\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right\}$$
$$-\frac{p_2}{s^2 + ps}\mathcal{L}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right\} + \frac{1}{s^2 + ps}\mathcal{L}\{f(x)\}$$

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha s + \beta + \alpha p}{s^2 + ps} + \frac{1}{s^2 + ps}\mathcal{L}\{f(x)\}$$

$$\mathcal{L}\{y_1\} = -\frac{p_1}{s^2+ps}\mathcal{L}\{y_0\} - \frac{p_2}{s^2+ps}\mathcal{L}\{A_0\}$$

$$\mathcal{L}\{y_2\} = -\frac{p_1}{s^2+ps}\mathcal{L}\{y_1\} - \frac{p_2}{s^2+ps}\mathcal{L}\{A_1\}$$

$$\mathcal{L}\{y_{n+1}\} = -\frac{p_1}{s^2+ps}\mathcal{L}\{y_n\} - \frac{p_2}{s^2+ps}\mathcal{L}\{A_n\}$$

$f(x)$in Taylor seri açılımından $x_0 = 0$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{K} a_i x^i \; a_i = \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \qquad i = 0,1,2 \ldots K$$

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{\alpha s + \beta + \alpha p}{s^2+ps} + \frac{1}{s^2+ps}\sum_{i=0}^{K}\frac{a_i\, i!}{s^{i+2}}$$

bulunur. Yukarıda tanımlandığı gibi Laplace ayrışım metodu kullanılarak y_0, y_1, y_2,... değerleri elde edilir [5].

Örnek: $y'' + 3y - 2y^3 = cosx\, sin2x$ diferensiyel denkleminin

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

koşullarını sağlayan çözümünü bulunuz.

$$f(x) = cosx\, sin2x = 2(sinx - sin^3x) \text{ dir.}$$

$$\tilde{f}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots - \left(x^3 - 3x^2\frac{x^3}{3!} + 3x\,\frac{x^6}{(3!)^2} - \frac{x^9}{(3!)^3}\cdots\right)$$

$$\tilde{f}(x) = 2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - x^3 + \frac{x^5}{2} - \frac{x^7}{2.6} + \frac{x^9}{6^3 6^3}\cdots\right)$$

$$\tilde{f}(x) = 2\left(x - \frac{7}{3!}x^3 + \frac{61}{5!}x^5 - \frac{547}{7!}x^7\right)$$

$$\tilde{f}(x) = 2x - \frac{7}{3}x^3 + \frac{61}{60}x^5 - \frac{547}{2520}x^7$$

$$y'' + 3y - 2y^3 = \tilde{f}(x)$$

$$y'' + 3y - 2y^3 = 2x - \frac{7}{3}x^3 + \frac{61}{60}x^5 - \frac{547}{2520}x^7$$

$$p = 0\,, \qquad p_1 = 3\,, \qquad p_2 = -2\,, \qquad \alpha = 0\,, \qquad \beta = 1$$

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}\mathcal{L}\{\tilde{f}(x)\}$$

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2}\left(\frac{2}{s^2} - \frac{7}{3}\frac{3!}{s^4} + \frac{61}{60}\frac{5!}{s^6} - \frac{547}{2520}\frac{7!}{s^8} \dots\right)$$

$$\mathcal{L}\{y_0\} = \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^4} - \frac{7}{3}\frac{3!}{s^6} + \frac{61}{60}\frac{5!}{s^8} - \frac{547}{2520}\frac{7!}{s^{10}} \dots$$

$$y_0 = x + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{7}{3}\frac{3!}{5!}x^5 + \frac{61}{60}\frac{5!}{7!}x^7 - \frac{547}{2520}\frac{7!}{9!}x^9 \dots$$

$$y_0 = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{60}x^5 + \frac{61}{2520}x^7 - \frac{547}{181440}x^9 \dots$$

$$\mathcal{L}\{y_1\} = -\frac{3}{s^2}\mathcal{L}\{y_0\} + \frac{2}{s^2}\mathcal{L}\{A_0\}$$

$$A_0 = {y_0}^3$$

$$\mathcal{L}\{y_1\} = -\frac{3}{s^2}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^4} - \frac{7}{3}\frac{3!}{s^6} + \frac{61}{60}\frac{5!}{s^8} \dots\right) + \frac{2}{s^2}\,\mathcal{L}\left\{(x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{60}x^5 \dots)^3\right\}$$

$$\mathcal{L}\{y_1\} = \frac{-3}{s^4} - \frac{6}{s^6} + \frac{7.3!}{s^8} - \frac{61.5!}{20.\,s^{10}} + \frac{2.3!}{s^6} + \frac{2.5!}{s^8} + \frac{2.7!}{3.\,s^{10}} \dots$$

$$\mathcal{L}\{y_1\} = \frac{-3}{s^4} + \frac{3!}{s^6} + \frac{282}{s^8} - \frac{534}{s^{10}} \dots$$

$$y_1 = \frac{-3}{3!}x^3 + \frac{3!}{5!}x^5 + \frac{282}{7!}x^7 - \frac{534}{9!}x^9 \dots$$

$$y_1 = \frac{-1}{2}x^3 + \frac{1}{20}x^5 + \frac{47}{840}x^7 - \frac{89}{60480}x^9 + \cdots$$

$$\mathcal{L}\{y_2\} = -\frac{3}{s^2}\mathcal{L}\{y_1\} - \frac{-2}{s^2}\mathcal{L}\{A_1\}$$

$$\mathcal{L}\{y_2\} = \frac{9}{s^6} - \frac{378}{s^8} - \frac{9414}{s^{10}} + \cdots$$

$$y_2 = \frac{3}{40}x^5 - \frac{3}{40}x^7 - \frac{523}{20160}x^9 + \cdots$$

$$y_3 = \frac{-3}{560}x^7 + \frac{29}{960}x^9 + \cdots$$

$$y_4 = \frac{1}{4480}x^9 + \cdots$$

$$\widetilde{Q_n}(x) = \sum_{m=0}^{n} y_m$$

$$\widetilde{Q_5}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

$$\mathcal{L}\left\{\widetilde{Q_5}(x)\right\} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^4} + \frac{1}{s^6} - \frac{1}{s^8} + \frac{1}{s^{10}}$$

Üstteki ifade de $s = \frac{1}{t}$ yazılırsa $\mathcal{L}\left\{\widetilde{Q_5}(x)\right\} = t^2 - t^4 + t^6 - t^8 + t^{10}$olur. Bu son eşitlikte $L \geq 2, M \geq 2$ ve $L + M \leq 10$ ile $\left[\frac{L}{M}\right]$ pade yaklaşımının tamamı $\left[\frac{L}{M}\right] = \frac{t^2}{1+t^2}$ sonucunu verir.

Eğer $t = \frac{1}{s}$ yazarsak $\left[\frac{L}{M}\right] = \frac{1}{1+s^2}$ elde edilir. Buradan ters Laplace dönüşümü alınarak $y = sinx$ çözümü elde edilir.

BÖLÜM 6

SONUÇLAR

Bu çalışmada, Laplace dönüşümünün mevcut olması için gerekli durumlar ile Laplace dönüşümünün özellikleri verilmiştir. Laplace dönüşümünün ve ters Laplace dönüşümünün özellikleri ile adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemlere uygulamalarını ve bazı kompleks diferensiyel denklemlere uygulamaları verilmiştir. Kompleks diferensiyel denklemler reel ve sanal kısımlarına ayrıldıktan sonra Laplace dönüşümleri alınmıştır. Laplace dönüşümü alınmış olan Kompleks diferensiyel denklemlerin ters Laplace dönüşümleri alınarak istenen fonksiyon elde edilmiştir.

Son olarak da Laplace dönüşümünün ayrışım metodu kullanılarak adi veya kısmi diferensiyel denklemlerin lineer veya lineer olmayan kısımlarının ayrı ayrı Laplace dönüşümünün nasıl alınacağı hakkında bilgi verilip Daffing denklemi üzerinde Elçin Yusufoğlu'nun makalesi ile istenen fonksiyona ulaşılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Çağlayan, M., Çelik, N., Doğan, S., "Adi Diferensiyel Denklemler ", ***Dora Yayın Basımevi*,**Bursa (2012).

2. Yin, F. K., Han, W. Y.and Song, J. Q, "Modified Laplace decomposition method for Lane-Emden Type differential equations", ***International Jaurnal of Applied Physics and Matematics***, 3 (2): 98-102 (2013).

3. Mohamed, M. A. and Torky, M. S., "Numerical solution of nonlinear system of parial differential equations by the Laplace decomposition method and the padeapproximation", ***American Journal of Computational Mathematics*,**3 (3): 175-184 (2013).

4. Spiegel, M. R., "Laplace Transform", Çevirmen:Cerit, C. ve Eraslan, S., ***Bilimsel Kitaplar Yayınevi,*** Ankara(1965).

5. Yusufoğlu, E., "Numerical Solution of duffing equation by the Laplace decomposition algorithm", ***Applied Mathematics and Computation*,**177 (2): 572-580 (2006).

ÖZGEÇMİŞ

Neşe BARCIN 1989'da Bakırköy'de doğdu; ilk ve orta eğitimini İstanbul'da tamamladı; 2007 yılında Kütahya Dumlupınar Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne girdi; 2012'de "iyi" derece ile mezun olduktan sonra dershanelerde matematik öğretmeni olarak görev almaya başladı.

ADRES BİLGİLERİ

Adres: Tuna Mah. Bağcılar Cad.
733. Sok. No.2, D:2
Esenler/İSTANBUL

Tel : (551) 4087955
E-posta : nesesi_3416@hotmail.com