FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ YARDIMI İLE DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

2015
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

Ercan KÖMEÇ

FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ YARDIMI İLE DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

Ercan KÖMEÇ

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır.

KARABÜK
Ocak 2015

Ercan KÖMEÇ tarafından hazırlanan "FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ YARDIMI İLE DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir. 19 / 01 / 2015

Unvanı, Adı SOYADI (Kurumu)		İmzası
Başkan	: Doç. Dr. Ahmet DEMİR (KBÜ)	....
Üye	: Doç. Dr. Ayşe NALLI (KBÜ)	....
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ (KBÜ)	....

...../...../2015

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Mustafa BOZ ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Ercan KÖMEÇ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ YARDIMI İLE DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

Ercan KÖMEÇ

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ
Ocak 2015, 117 sayfa

Bu çalışmada, Dirichlet koşulları altında periyodik fonksiyonların Fourier Serileri tanımlanmıştır. Fourier Serilerinden, Fourier İntegraline ve Fourier Dönüşümüne geçişler yapılmıştır. Dirichlet Koşullarını sağlayan fonksiyonların yanı sıra sağlamayan fonksiyonların da Fourier Dönüşümlerinin olduğu gösterilmiştir.

Fourier Dönüşümleri yardımıyla sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin özel çözümleri bulunmuştur. Diferansiyel denklemin ikinci kısmı, Dirichlet koşullarını sağlayan ya da sağlamayan fonksiyonlar olması durumlarını inceledik. Her iki durumda da çözümün bulunabileceğini gösterdik.

Bu çalışmada, sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemler ile de ilgilendik. Diferansiyel denklemin ikinci kısmındaki sıfır yerine Dirac Delta fonksiyonunu kullandık. Böylece diferansiyel denklemin özel bir çözümünün bulunabileceğini gördük.

Ayrıca kısmî türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri, Fourier dönüşümü kullanılarak yapılmıştır.

Anahtar Sözcükler : Fourier Serisi, Fourier Dönüşümü, Diferansiyel denklemler.
Bilim Kodu **:** 204.1.138

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS BY USING THE FOURIER TRANSFORMS

Ercan KÖMEÇ

Karabük University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Asst. Prof. Dr. Murat DÜZ

January 2015, 117 pages

In this thesis study, the Fourier series of periodical functions that provide Dirichlet Conditions are defined. Transfers are made from the Fourier series to the Fourier Integral and the Fourier Transform. It is shown that the functions that provide the Dirichlet Conditions as well as the ones that do not provide them have the Fourier Transforms.

Using the Fourier Transforms, a special solution of constant coefficient differential equations solutions are given. We have studied the second part of the differential equations, the instances where are functions that provide and do not provide the Dirichlet Conditions. We have shown that a solution can be found in both cases.

In this study, we investigated solutions of homogeneous differential equations with constant coefficients. We used Dirac Delta function in place of zero in the second

part of these equations. Thus we have seen that a special solution can be found in this way.

Also, the solutions of partial derivative differential equations have been found by using the Fourier Transforms.

**Key Words : ** Fourier Series, Fourier Transforms, Differential equations.
Science Code : 204.1.138

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans çalışmalarımın her aşamasında bana rehberlik eden, büyük yardımlarını ve desteklerini gördüğüm değerli tez danışmanım;

Yrd. Doç. Dr. Murat DÜZ'e

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalının değerli Öğretim Üyelerine ve beni her konuda destekleyen sevgili eşim Funda KÖMEÇ'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Karabük, 2015

Ercan KÖMEÇ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

a_0	:	Fourier Serisi Katsayısı
a_n	:	Fourier Serisi Katsayısı
b_n	:	Fourier Serisi Katsayısı
c_n	:	Kompleks Fourier Serisinin Katsayısı
erf	:	Hata fonksiyonu
H	:	Birim Basamak (Heaviside) Fonksiyonu
T	:	Periyot
$\mathcal{F}$	:	Fourier Dönüşümü
$\mathcal{F}^{-1}$	:	Ters Fourier Dönüşümü
δ	:	İmpuls (Dirac Delta) fonksiyonu

KISALTMALAR

SGN	:	İşaret (Signum) Fonksiyonu
PDEs	:	Partial Differential Equations (Kısmî Türevli Diferansiyel Denklemler)

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Jean-Baptiste Joseph Fourier'in bilim dünyasına sunduğu hediyelerden biri olan Fourier dönüşümleri; matematik, fizik ve mühendisliğin birçok alanında kullanılan bir integral dönüşümüdür. Örneğin genelleştirilmiş integraller, integral denklemler, adi diferansiyel denklemler, kısmî diferansiyel denklemler Fourier dönüşümleri yardımıyla çözülebilir.

Kullanım alanına başka bir örnek vermek gerekirse; her insanın sesi sinüs ve kosinüslerin toplamı olarak ifade edilebilir. Her sesin frekans tayfı farklı olduğundan sinüs ve kosinüslerin toplamının her birinin frekansı farklı olacaktır. Böylece bir ses kaydının kime ait olduğunu Fourier dönüşümlerinin yardımıyla bulabiliriz. Gerçekte bu işlemi kulağımız bizim yerimize otomatik olarak yapmaktadır.

Bu çalışmada; Fourier serileri kullanılarak sonsuz toplamların, Fourier integrali yardımıyla genelleştirilmiş integrallerin hesaplanabileceği gösterilmiştir. Bunların yanı sıra Fourier dönüşümlerinin diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilecek güçlü bir araç olduğu gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasının birinci bölümü “Giriş” olup burada çalışmanın kısa özeti verilmiştir

İkinci bölümde Fourier Serileri için gerekli ön bilgiler ve bazı integral sonuçları verilmiştir.

Üçüncü bölümde Fourier serileri ile seri açılımı için gerekli koşullar verilmiştir. Bazı fonksiyonların Fourier serileri bulunmuş, bu seri açılımları yardımıyla bazı sonsuz toplamlar hesaplanmıştır. Ayrıca Fourier kosinüs ve sinüs serileri ile kompleks

Fourier serilerinin tanımları verilmiş, böylece dördüncü bölümü oluşturan Fourier integrali ve Fourier dönüşümü için ön hazırlık yapılmıştır.

Dördüncü bölümde ise, Fourier integrali ve Fourier dönüşüm formülleri ortaya konulmuş, bazı genelleştirilmiş integrallerin sonuçları hesaplanmıştır. Bu bölümde Fourier Dönüşümünün özellikleri ile bazı fonksiyonların Fourier Dönüşümleri gösterilmiştir.

Beşinci bölümde sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin çözümüne dair örnekler yapılmıştır. Diferansiyel denklemin ikinci kısmındaki fonksiyonun türüne göre özel çözümlerin bulunması ile ilgili örnekler verilmiştir.

Altıncı bölümde de kısmî türevli diferansiyel denklemlerin çözümü için açıklama ve örnekler yer almıştır.

Yedinci ve son bölümde, yapılan çalışmalar sonucunda elde edilen sonuçlar sıralanmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL BİLGİLER

2.1. PERİYODİK FONKSİYONLAR

f, reel sayılar kümesinin bir A altkümesinden reel sayılar kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $t \in A$ için $f(t+T) = f(t)$ koşulunu sağlayan sıfırdan farklı T reel sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonuna *periyodik fonksiyon* denir ve T reel sayısına da f fonksiyonunun *periyodu* denir. Pozitif en küçük T sayısına da *esas periyot* ya da *temel periyot* adı verilir.

Örnek 2.1: $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ için,

$$sin(t+2k\pi) = \sin t \quad , \quad cos(t+2k\pi) = \cos t$$
$$tan(t+k\pi) = \tan t \quad , \quad cot(t+k\pi) = \cot t$$

eşitlikleri her $t \in IR$ için sağlandığı için sinüs, kosinüs, tanjant ve kotanjant fonksiyonları periyodik fonksiyonlardır. $2k\pi$ sayılarının pozitif en küçüğü olan 2π sayısı sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının esas periyodu olurken, $k\pi$ sayılarının pozitif en küçüğü olan π sayısı tanjant ve kotanjant fonksiyonlarının esas periyodudur.

Örnek 2.2: Her $t \in A$ için $f(t) = c$ seklinde tanımlanan f sabit fonksiyonu periyodiktir. Sıfırdan farklı her sabit reel sayı, periyottur.

Teorem 2.1: f ile g aynı T periyoduna sahip iki periyodik fonksiyon olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

1. $f+g$ fonksiyonu T periyotlu bir periyodik fonksiyondur.
2. $\alpha \neq 0$ sabiti için $\alpha.f$ fonksiyonu T periyotlu bir periyodik fonksiyondur;
3. $f.g$ fonksiyonu T periyotlu bir periyodik fonksiyondur.

2.2. TEK VE ÇİFT FONKSİYONLAR

Başlangıç noktasına göre simetrik bir A aralığında tanımlanan f fonksiyonunu ele alalım. Eğer f fonksiyonu A aralığındaki her t elemanı için

1. $f(-t) = f(t)$ oluyorsa f fonksiyonuna çift fonksiyon denir. Çift fonksiyonların grafikleri y-eksenine göre simetriktir.
2. $f(-t) = -f(t)$ oluyorsa f fonksiyonuna tek fonksiyon denir. Tek fonksiyonların grafikleri orijine göre simetriktir.

Örnek 2.3: $[-l, l] \subset IR$ aralığında tanımlı $f(t) = \cos(nt)$ fonksiyonları ile $g(t) = t^{2n}$ fonksiyonları çift fonksiyonlardır.

Örnek 2.4: $[-l, l] \subset IR$ aralığında tanımlı $f(t) = \sin(nt)$ fonksiyonları ile $g(t) = t^{2n-1}$ fonksiyonları tek fonksiyonlardır.

Teorem 2.2: f ile g aynı aralıkta tanımlı fonksiyonlar olsun. Bu takdirde aşağıdakiler sağlanır:

1. $f\ ve\ g$ tek fonksiyonlar ise $f + g$ fonksiyonu tek fonksiyondur.
2. $f\ ve\ g$ çift fonksiyonlar ise $f + g$ fonksiyonu çift fonksiyondur.
3. $f\ ve\ g$ tek fonksiyonlar ise $f.g$ fonksiyonu çift fonksiyondur.
4. $f\ ve\ g$ çift fonksiyonlar ise $f.g$ fonksiyonu çift fonksiyondur.
5. $f\ ve\ g$ biri çift diğeri tek fonksiyonlar ise $f.g$ fonksiyonu tek fonksiyondur.

2.2.1. Tek ve Çift Fonksiyonların İntegrallerine Ait Bazı Özellikler

1. f tek ise $\int_{-l}^{l} f(t).dt = 0$
2. f çift ise $\int_{-l}^{l} f(t).dt = 2.\int_{0}^{l} f(t).dt$

2.3. BAZI YARDIMCI İNTEGRALLER VE SONUÇLARI

Örnek 2.5: $\int_{-\pi}^{\pi} sinmt.sinnt.dt$ integralinin sonucunu inceleyelim.

$sinmx$ ve $sinnx$ fonksiyonları tek ve çarpımları ise çift fonksiyondur. Buna göre integrali

$$2.\int_{0}^{\pi} sinmt.sinnt.dt$$

biçiminde yazabiliriz. Ters dönüşüm formülü yardımıyla

$$= 2.\frac{-1}{2}\int_{0}^{\pi}[cos(m+n)t - cos(m-n)t]dt$$
$$= -\int_{0}^{\pi}[cos(m+n)t - cos(m-n)t]dt$$

elde edilir. Bu noktada iki durum ile karşı karşıya geliyoruz.

1. m=n olursa

$$= -\int_{0}^{\pi}[cos2nt - 1]dt$$
$$= -\left[\frac{sin2nt}{2n} - t\right]_{0}^{\pi}$$
$$= \pi$$

bulunur.

2. $m \neq n$ olursa

$$= -\left[\frac{sin(m+n)t}{m+n} - \frac{sin(m-n)t}{m-n}\right]_{0}^{\pi}$$
$$= 0$$

bulunur. Sonuçta;

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinmt.sinnt.dt = \begin{cases} \pi, & m = n \; ise \\ 0, & m \neq n \; ise \end{cases}$$

elde edilir.

<u>Örnek 2.6:</u> $\int_{-\pi}^{\pi} cosmt.cosnt.dt$ integralinin sonucunu inceleyelim.

$cosmt$ ve $cosnt$ fonksiyonları ile çarpımları çift fonksiyondur. Buna göre integrali

$$2.\int_{0}^{\pi} cosmt.cosnt.dt$$

biçiminde yazabiliriz. Ters dönüşüm formülü yardımıyla

$$= 2.\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} [cos(m+n)t + cos(m-n)t]dt$$
$$= \int_{0}^{\pi} [cos(m+n)t + cos(m-n)t]dt$$

elde edilir. Bu noktada iki durum ile karşı karşıya geliyoruz.

1. m=n olursa

$$= \int_{0}^{\pi} [cos2nt + 1]dt$$
$$= \left[\frac{sin2nt}{2n} + t\right]_{0}^{\pi}$$
$$= \pi$$

bulunur.

2. $m \neq n$ olursa

$$= \left[\frac{sin(m+n)t}{m+n} + \frac{sin(m-n)t}{m-n}\right]_0^{\pi}$$
$$= 0$$

bulunur. Sonuçta;

$$\int_{-\pi}^{\pi} cosmt.cosnt.dt = \begin{cases} \pi, & m = n\ ise \\ 0, & m \neq n\ ise \end{cases}$$

elde edilir.

<u>Örnek 2.7:</u> $\int_{-\pi}^{\pi} sinmt.cosnt.dt$ integralinin sonucunu inceleyelim.
$sinmx$ fonksiyonu tek, $cosnt$ fonksiyonu çift ve çarpımları ise tek fonksiyondur. Tek fonksiyonların simetrik aralıktaki integralinin *"0"* olduğunu bildiğimize göre her *m, n* için integralin sonucu *"0"*dır, deriz.

Sonuçta;

$$\int_{-\pi}^{\pi} sinmt.cosnt.dt = 0\ ; \quad her\ m, n\ için$$

elde edilir.

2.4. PARÇALI SÜREKLİ FONKSİYONLAR

<u>Tanım 2.4.1. (Sürekli Fonksiyon):</u> Bir *f* fonksiyonunun t_0 noktasındaki sağdan ve soldan limitleri eşit ve bu değer fonksiyonun t_0 noktasındaki değerine eşitse fonksiyon t_0 *noktasında süreklidir* denir. Yani *f* fonksiyonu t_0 noktasında sürekli ise $f(t_0^+) = f(t_0^-) = f(t_0)$'dır. Eğer fonksiyon tanım aralığının tüm noktalarında sürekli ise fonksiyona *Sürekli Fonksiyon* denir.

Tanım 2.4.2. (Düzgün Süreksizlik Noktası): Bir f fonksiyonunun t_0 noktasındaki sağdan ve soldan limitleri sonlu değerler olmasına rağmen, birbirine eşit değil ise t_0 noktasına f fonksiyonunun *Düzgün Süreksizlik Noktası* denir.

Tanım 2.4.3. (Parçalı Sürekli Fonksiyon): $[a,\ b]$ aralığında sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası dışında sürekli olan fonksiyona $[a,\ b]$ aralığında *Parçalı Sürekli Fonksiyon* denir.

Örnek 2.8: $f\colon [-2,4] \to IR$, $f(t) = \frac{|t|}{t}$ fonksiyonu parçalı sürekli bir fonksiyondur.

Örnek 2.9: $g\colon [-2,4] \to IR$, $g(t) = \frac{1}{t}$ fonksiyonu parçalı sürekli bir fonksiyon değildir. Çünkü $g(0^+)$ ve $g(0^-)$ limitleri sonlu değildir.

BÖLÜM 3

FOURIER SERİSİ

$(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlı 2π periyotlu $f(t)$ fonksiyonu bazı koşullar altında trigonometrik bir seri ile gösterilebilir.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n . \cos nt + b_n . \sin nt) \tag{3.1}$$

biçimindeki seriye *FOURIER SERİSİ* denir. $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Serisine açılabilmesi için gereken koşullara *Dirichlet Koşulları* adı verilir.

3.1. DIRICHLET KOŞULLARI

2π periyotlu $f(t)$ fonksiyonu $(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlı olsun.

1. $f(t)$, $(-\pi, \pi)$ aralığında sürekli ya da parçalı süreklidir.
2. $f(t)$, $(-\pi, \pi)$ aralığında sonlu sayıda ekstremuma sahiptir.
3. $f(t)$, $(-\pi, \pi)$ aralığında mutlak integrallenebilir yani $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt < \infty$ olmalıdır.

Dirichlet Koşullarını sağlayan $f(t)$ fonksiyonu her $t \in (-\pi, \pi)$ değeri için yakınsak olan ve toplamı;

1. *t* bir süreklilik noktası ise $f(t)$'ye,
2. *t* bir düzgün süreksizlik noktası ise $\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2}$ 'ye,
3. Aralığın uç noktalarında $f(-\pi) = f(\pi) = \frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$ ‘ye

eşit olan bir Fourier Serisine açılabilir.

3.2. FOURIER SERİSİ VE FOURIER KATSAYILARI

$(-\pi,\pi)$ aralığında tanımlı, *2π* periyotlu Dirichlet Koşullarını sağlayan $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Serisi

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos nt+b_n\,.\sin nt)$$

şeklindedir. Bu açılımdaki a_0, a_n, b_n katsayılarına *Fourier Katsayıları* denir.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt \tag{3.2}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t).\cos nt\,dt \tag{3.3}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t).\sin nt\,dt \tag{3.4}$$

3.3. FOURIER KATSAYILARININ BULUNMASI

3.3.1. a_0 Katsayısının Bulunması

Dirichlet Koşullarını sağlayan $f(t)$ fonksiyonun Fourier Serisinin $(-\pi,\pi)$ aralığında integralini alalım.

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos nt+b_n\,.\sin nt)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t).dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}.dt+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi}a_n.\cos nt\,.dt+\int_{-\pi}^{\pi}b_n.\sin nt\,.dt\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(t).dt=\frac{a_0}{2}.[t]_{-\pi}^{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}2.a_n.\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t).dt = \frac{a_0.2\pi}{2}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).dt$$

3.3.2. a_n Katsayılarının Bulunması

Dirichlet Koşullarını sağlayan $f(t)$ fonksiyonun Fourier Serisini $\cos mt$ ile çarpıp $(-\pi,\pi)$ aralığında integralini alalım.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos nt + b_n.\sin nt)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\cos mt.dt = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}.\cos mt.dt$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n.\cos nt.\cos mt.dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n.\sin nt.\cos mt.dt\right]$$

Bu integrallerin sonuçlarını daha önce bulmuştuk (Örnek 2.6 ve Örnek 2.7). Bu sonuçlarla birlikte integrali düzenleyelim.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\cos nt.dt = \pi.a_n$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\cos nt.dt$$

3.3.3. b_n Katsayılarının Bulunması

Dirichlet Koşullarını sağlayan $f(t)$ fonksiyonun Fourier Serisini $sin\,mt$ ile çarpıp $(-\pi,\pi)$ aralığında integralini alalım.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos nt + b_n.\sin nt)$$

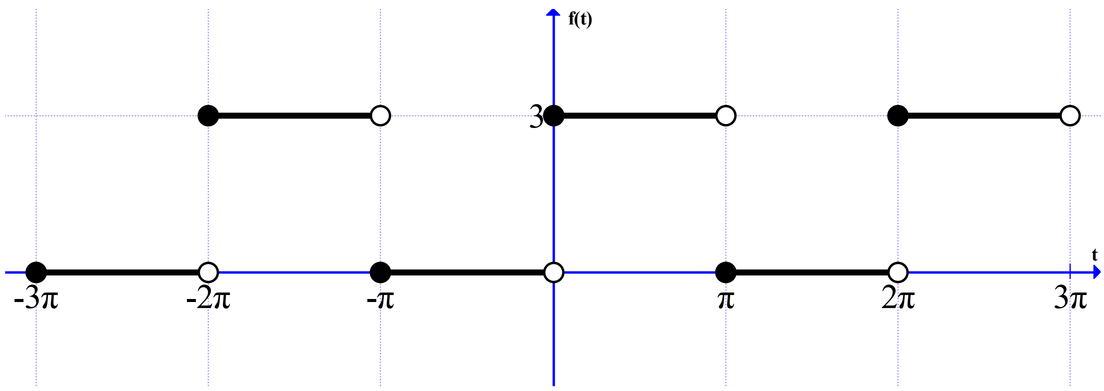
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sin mt\,.\,dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}.\sin mt\,.\,dt$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} a_n.\cos nt\,.\sin mt\,.\,dt + \int_{-\pi}^{\pi} b_n.\sin nt\,.\sin mt\,.\,dt\right]$$

Bu integrallerin sonuçlarını daha önce bulmuştuk (Örnek 2.5 ve Örnek 2.7). Bu sonuçlarla birlikte integrali düzenleyelim.

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sin nt\,.\,dt = \pi.\,b_n$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sin nt\,.\,dt$$

Örnek 3.1: $f(t) = \begin{cases} 0; & -\pi \le t < 0 \\ 3\ ; & 0 \le t < \pi \end{cases}$ biçiminde tanımlanan *2π* periyotlu $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Serisini bulalım.

Öncelikle $f(t)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



Şekil 3.1. $f(t) = \begin{cases} 0; & -\pi \le t < 0 \\ 3\ ; & 0 \le t < \pi \end{cases}$ fonksiyonunun grafiği.

Grafiğinden (Şekil 3.1)'de görüldüğü gibi $f(t)$ fonksiyonu Dirichlet Koşullarını sağlamaktadır.

$t_1 = 0$ süreksizlik noktasında fonksiyon, $f(0) = \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$ değerine yakınsar.

$[-\pi, \pi]$ aralığının uç noktalarında ise fonksiyon,

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{f(-\pi^{+}) + f(\pi^{-})}{2} = \frac{0+3}{2} = \frac{3}{2}$$

değerine yakınsar.

Şimdi Fourier Katsayılarımızı bulalım.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3.dt$$

$$a_0 = \frac{3}{\pi}.[t]_0^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{3}{\pi}.[\pi - 0]$$

$$a_0 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\cos nt\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3.\cos nt\, dt$$

$$a_n = \frac{3}{\pi}.\left[\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{3}{\pi}.\left[\frac{\sin n\pi}{n} - \frac{\sin 0}{n}\right]$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sin nt\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 3.\sin nt\, dt$$

$$b_n = \frac{3}{\pi}.\left[\frac{-\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{3}{\pi}.\left[\frac{\cos 0}{n} - \frac{\cos n\pi}{n}\right]$$

$$b_n = \frac{3}{\pi}.\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right]$$

olarak bulunur. Bulduğumuz katsayıları yerine yazıp düzenlediğimizde $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Serisini elde etmiş oluruz.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos nt + b_n\,.\sin nt)$$

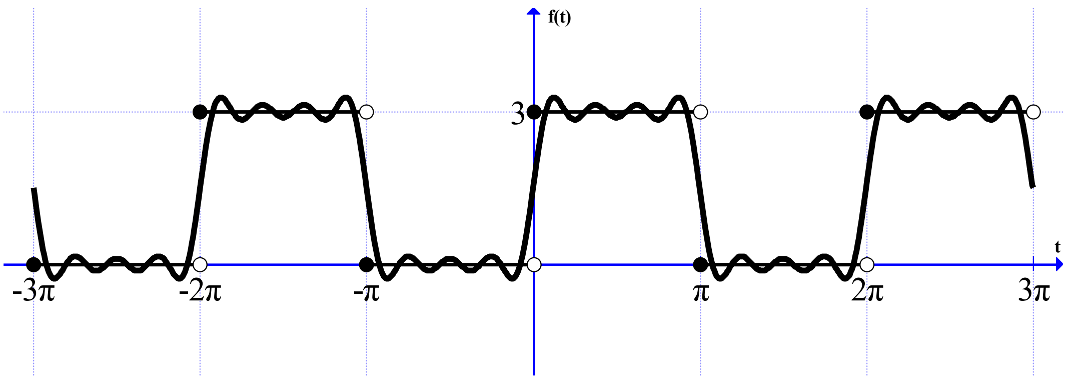
$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi}.\left[\frac{1-(-1)^n}{n}\right].\sin nt\right)$$

$$f(t) = \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\pi}.\left[\frac{2}{2n-1}\right].\sin(2n-1)t\right)$$

$$f(t) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}.\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$$

$$f(t) = \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}.\left[\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} + \cdots\right]$$

Bu serinin fonksiyona yakınsamasını aşağıdaki grafikte (Şekil 3.2) görmemiz mümkündür.

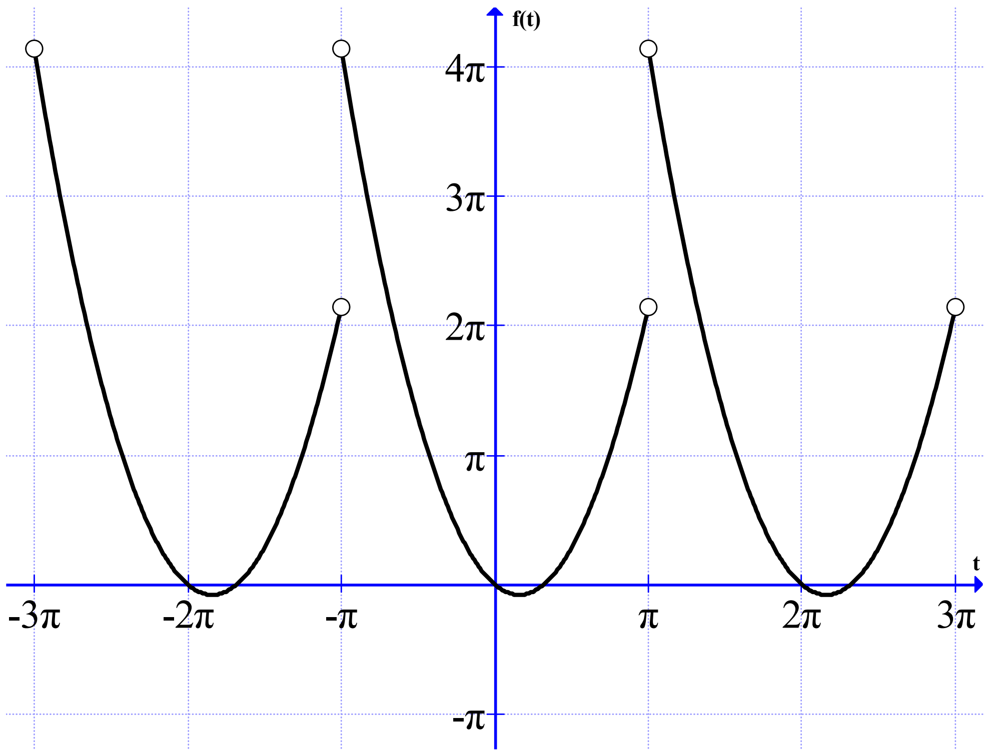


Şekil 3.2. Fourier serisinin $f(t) = \begin{cases} 0; & -\pi \le t < 0 \\ 3\ ; & 0 \le t < \pi \end{cases}$ fonksiyonuna yakınsaması.

Şekil 3.2'te serinin $n=4$'e kadar açılımının yakınsaması görülmektedir. n için verilen değerlerin artırılması ile serinin fonksiyonunun grafiğine daha çok yakınsayacağı anlaşılmaktadır.

<u>Örnek 3.2:</u> $(-\pi, \pi)$ aralığında $f(t) = t^2 - t$ biçiminde tanımlı, 2π periyotlu fonksiyonun Fourier Serisini bulunuz.

Öncelikle $f(t)$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.



Şekil 3.3. $f(t) = t^2 - t$ fonksiyonunun grafiği.

Grafiğinden (Şekil 3.3) de görüldüğü gibi $f(t)$ fonksiyonu Dirichlet Koşullarını sağlamaktadır.

$(-\pi, \pi)$ aralığının uç noktalarında fonksiyon,

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{[(-\pi)^2 - (-\pi)] + [(\pi)^2 - (\pi)]}{2} = \pi^2$$

değerine yakınsar.

Şimdi Fourier Katsayılarımızı bulalım.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t^2 - t)dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}.\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}.\left[\left(\frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi^2}{2}\right) - \left(\frac{(-\pi)^3}{3} - \frac{(-\pi)^2}{2}\right)\right]$$

$$a_0 = \frac{2.\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\cos nt\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t^2 - t).\cos nt\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t^2.\cos nt).dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t.\cos nt).dt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (t^2.\cos nt).dt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}.\left[t^2.\frac{\sin nt}{n} + 2t.\frac{\cos nt}{n^2} - 2.\frac{\sin nt}{n^3}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}.\left[\pi^2.\frac{\sin n\pi}{n} + 2\pi.\frac{\cos n\pi}{n^2} - 2.\frac{\sin n\pi}{n^3}\right]$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}.\left[2\pi.\frac{(-1)^n}{n^2}\right]$$

$$a_n = 4.\frac{(-1)^n}{n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t).\sin nt\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t^2 - t).\sin nt\, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t^2.\sin nt).dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (t.\sin nt).dt$$

$$b_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(t.\sin nt).dt$$

$$b_n = -\frac{2}{\pi}.\left[-t.\frac{\cos nt}{n} + \frac{\sin nt}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}.\left[\pi.\frac{\cos n\pi}{n} - \frac{\sin n\pi}{n^2}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}.\left[\pi.\frac{(-1)^n}{n}\right]$$

$$b_n = 2.\frac{(-1)^n}{n}$$

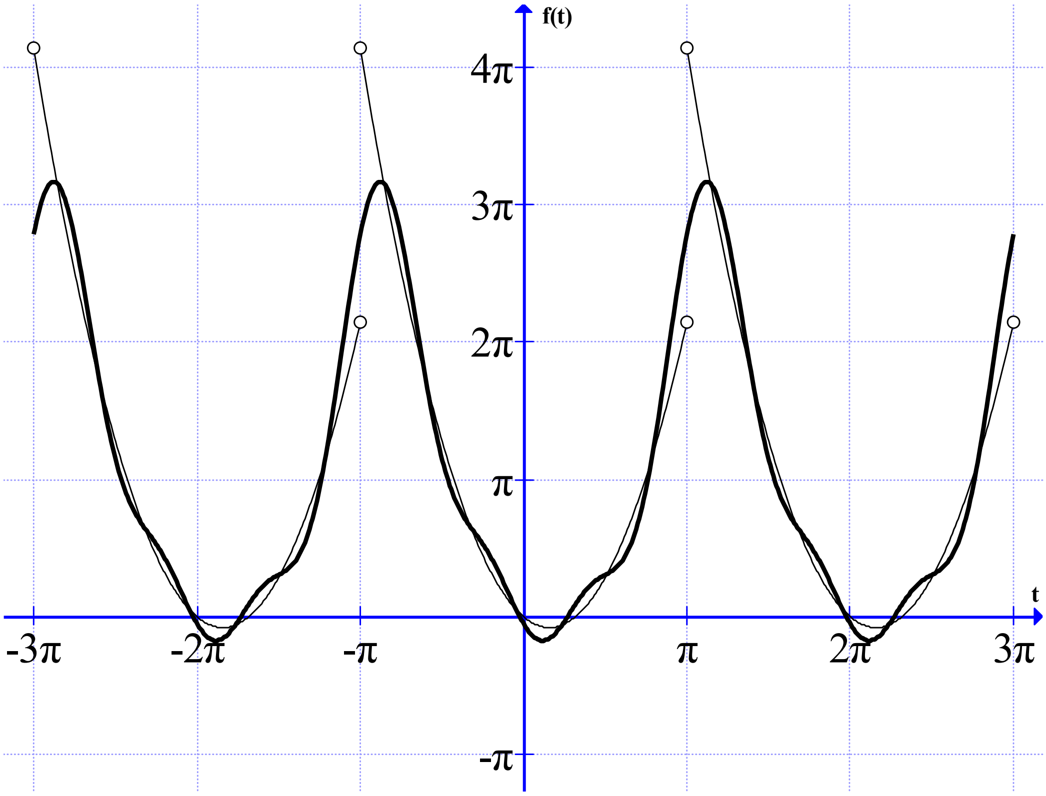
olarak bulunur. Bulduğumuz katsayıları yerine yazıp düzenlediğimizde $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Serisini elde etmiş oluruz.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos nt + b_n\,.\sin nt)$$

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(4.\frac{(-1)^n}{n^2}.\cos nt + 2.\frac{(-1)^n}{n}.\sin nt\right)$$

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos t - 2\sin t + \cos 2t + \sin 2t - \frac{4}{9}cos3t - \frac{2}{3}\sin 3t + \cdots$$

Bu serinin fonksiyona yakınsamasını aşağıdaki grafikte (Şekil 3.4) görmemiz mümkündür.



Şekil 3.4. Fourier serisinin $f(t) = t^2 - t$ fonksiyonuna yakınsaması.

Şekil 3.4'te serinin *n=3*'e kadar açılımının yakınsaması görülmektedir. n için verilen değerler artırıldığında serinin, fonksiyona daha çok yakınsayacaktır.

3.4. FOURIER SİNÜS VE FOURIER KOSİNÜS SERİLERİ

Tek ve çift fonksiyonlar ile integralleri hakkında bilgiler vermiştik. Bu bilgiler ışığında, tek fonksiyonları Fourier Serisine açtığımızda sadece sinüslü terimlerin bulunması gerektiği; çift fonksiyonları Fourier Serisine açtığımızda sadece kosinüslü terimlerin bulunması gerektiği ortaya çıkmaktadır.

3.4.1. Tek Fonksiyonun Fourier Serisi

$f(t)$, tek fonksiyon olsun. Bu durumda Fourier katsayıları

$$a_0 = 0, \;\; a_n = 0 \;\; \text{ve} \;\; b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t).\sin nt\, dt$$

şeklinde olmak üzere

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n . \sin nt) \tag{3.5}$$

biçiminde Fourier serisi olacaktır. Seride sadece sinüslü terimler bulunduğundan *Fourier Sinüs Serisi* olarak adlandırılmaktadır.

3.4.2. Çift Fonksiyonun Fourier Serisi

$f(t)$, çift fonksiyon olsun. Bu durumda Fourier katsayıları

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t). dt, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t). \cos nt . dt \quad \text{ve} \quad b_n = 0$$

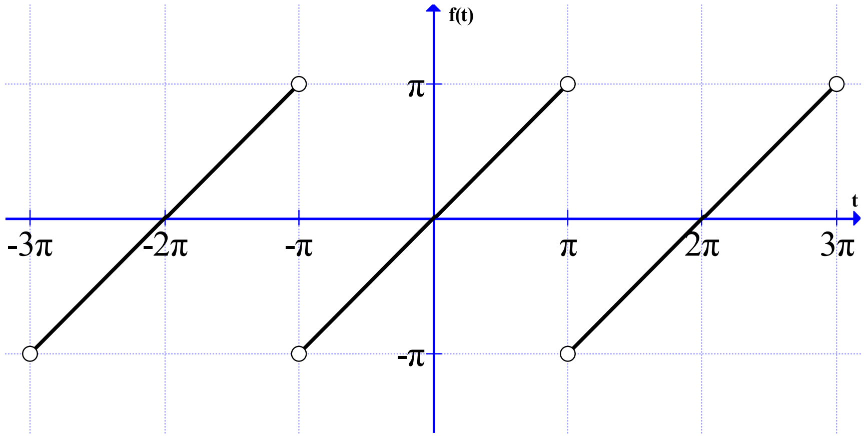
şeklinde olmak üzere

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n . \cos nt) \tag{3.6}$$

biçiminde Fourier serisi olacaktır. Seride sadece kosinüslü terimler bulunduğundan *Fourier Kosinüs Serisi* olarak adlandırılmaktadır.

Örnek 3.3: $(-\pi, \pi)$ aralığında $f(t) = t$ biçiminde tanımlı, *2π* periyotlu fonksiyonun Fourier Serisini bulunuz.

Öncelikle $f(t)$ fonksiyonunun grafiğini (Şekil 3.5) çizelim.



Şekil 3.5. $f(t) = t$ fonksiyonun grafiği.

Şekil 3.5'te görüldüğü üzere $f(t)$ fonksiyonu Dirichlet Koşullarını sağlamaktadır. $(-\pi, \pi)$ aralığının uç noktalarında fonksiyon,

$$f(-\pi) = f(\pi) = \frac{f(-\pi^{+}) + f(\pi^{-})}{2} = \frac{(-\pi) + (\pi)}{2} = 0$$

değerine yakınsar. Aynı zamanda fonksiyonun grafiği $(-\pi, \pi)$ aralığında orijine göre simetrik olduğundan tek fonksiyondur. Dolayısıyla Fourier Katsayıları

$$a_0 = 0, \;\; a_n = 0 \;\; \text{ve} \;\; b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t).\sin nt\, dt$$

olacaktır.

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t).\sin nt\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t.\sin nt\,.dt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}.\left[-t.\frac{\cos nt}{n} + \frac{\sin nt}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}.\left[-\pi.\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n^2}\right]$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}.\left[\pi.\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$$

$$b_n = 2.\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

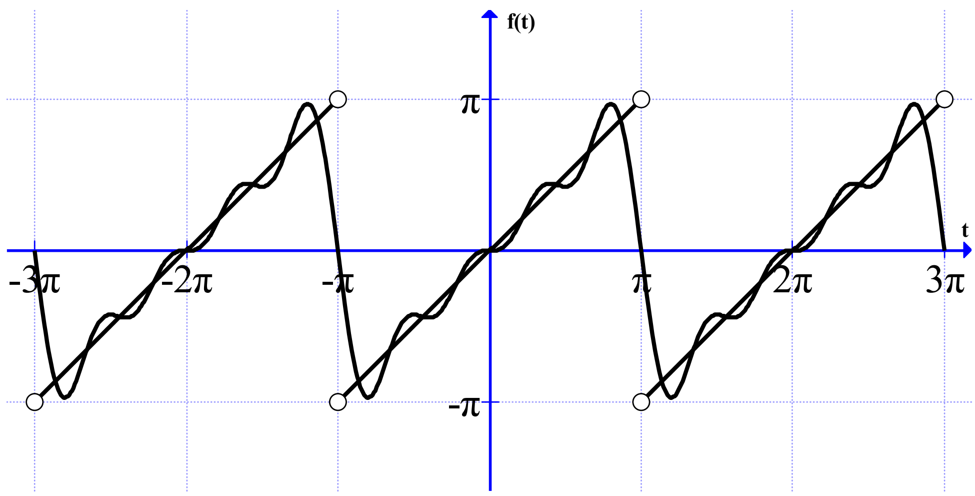
olarak bulunur. Bulduğumuz katsayıları yerine yazıp düzenlediğimizde $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Serisini elde etmiş oluruz.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n . \sin nt$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2.\frac{(-1)^{n+1}}{n} . \sin nt \right)$$

$$f(t) = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t - \frac{1}{2}\sin 4t + \cdots$$

Bu serinin fonksiyona yakınsamasını aşağıdaki grafikte (Şekil 3.6) görmemiz mümkündür.

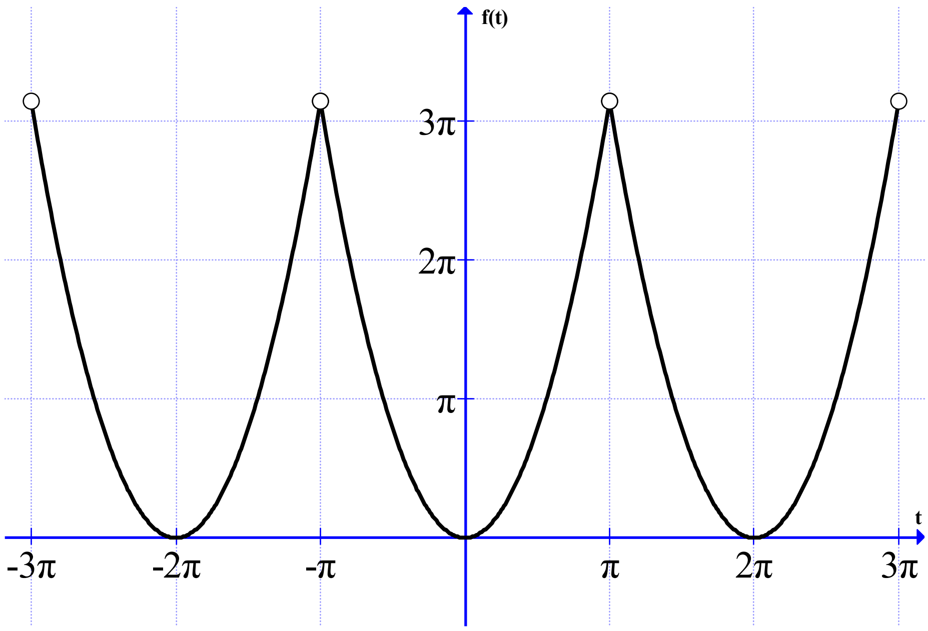


Şekil 3.6. Fourier serisinin $f(t) = t$ fonksiyonuna yakınsaması.

Şekil 3.6'da serinin *n=4*'e kadar açılımının yakınsaması görülmektedir. *n* için verilen değerlerin artırılması ile serinin fonksiyonunun grafiğine daha çok yakınsayacağı anlaşılmaktadır.

Örnek 3.4: $(-\pi, \pi)$ aralığında $f(t) = t^2$ biçiminde tanımlı, *2π* periyotlu fonksiyonun Fourier Serisini bulunuz.

Öncelikle $f(t)$ fonksiyonunun grafiğini (Şekil 3.7) çizelim.



Şekil 3.7. $f(t) = t^2$ fonksiyonunun grafiği.

Şekil 3.7'te görüldüğü üzere $f(t)$ fonksiyonu Dirichlet Koşullarını sağlamaktadır. Aynı zamanda fonksiyonun grafiği (Şekil 3.7), $(-\pi, \pi)$ aralığında *y*-eksenine göre simetrik olduğundan çift fonksiyondur. Dolayısıyla Fourier Katsayıları

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t).dt, \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t).\cos nt.dt \quad \text{ve} \quad b_n = 0$$

olacaktır.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t).dt$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2.dt$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}.\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}.\left[\frac{\pi^3}{3}\right]$$

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t).\cos nt\,.\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2.\cos nt\,dt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}.\left[t^2.\frac{\sin nt}{n} + 2t.\frac{\cos nt}{n^2} - 2.\frac{\sin nt}{n^3}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}.\left[\pi^2.\frac{\sin n\pi}{n} + 2\pi.\frac{\cos n\pi}{n^2} - 2.\frac{\sin n\pi}{n^3}\right]$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}.\left[2\pi.\frac{(-1)^n}{n^2}\right]$$

$$a_n = 4.\frac{(-1)^n}{n^2}$$

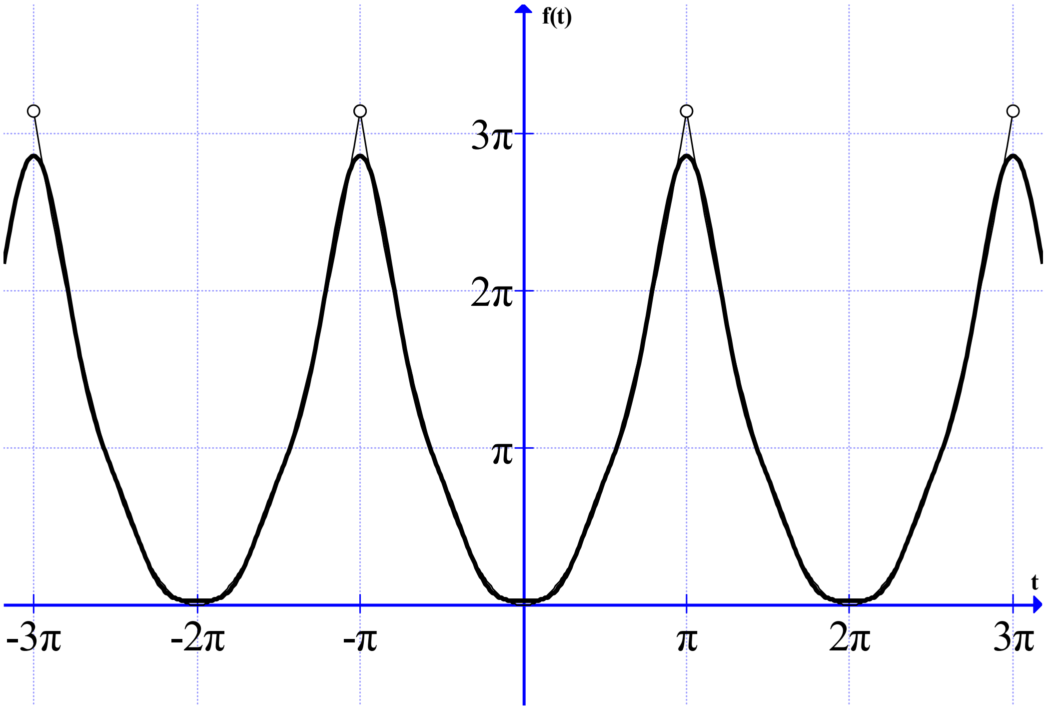
olarak bulunur. Bulduğumuz katsayıları yerine yazıp düzenlediğimizde $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Serisini elde etmiş oluruz.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos nt)$$

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(4.\frac{(-1)^n}{n^2}.\cos nt\right)$$

$$f(t) = \frac{\pi^2}{3} - 4\cos t + \cos 2t - \frac{4}{9}cos3t + \frac{1}{4}\cos 4t - \cdots$$

Bu serinin fonksiyona yakınsamasını aşağıdaki grafikte (Şekil 3.8) görmemiz mümkündür.



Şekil 3.8. Fourier serisinin $f(t) = t^2$ fonksiyonuna yakınsaması.

Şekil 3.8'de serinin $n=4$'e kadar açılımının yakınsaması görülmektedir. n için verilen değerlerin artırılması ile serinin fonksiyonunun grafiğine daha çok yakınsayacağı anlaşılmaktadır.

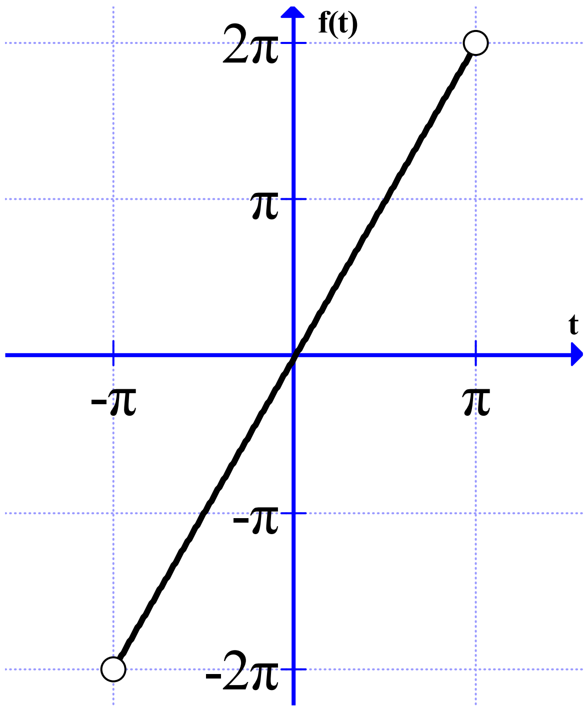
3.5. YARIM ARALIK UZANTILAR

$(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlı, 2π periyotlu fonksiyonların Fourier Serisine sahip olduklarını biliyoruz. Bu durumda aklımıza şu soru geliyor: "$(0, \pi)$ yarım aralığında tanımlı bir fonksiyon Fourier serisin açılabilir mi? Açılırsa hangi özelliklere sahip olur?". Şimdi bu sorularımızın cevaplarını arayalım.

$(0, \pi)$ yarım aralığında tanımlı $f(t)$ fonksiyonunu, $(-\pi, 0)$ yarım aralığına iki şekilde taşıyabiliriz. $f(t)$ fonksiyonunun grafiğini orijine göre simetriğini aldığımızda fonksiyon, tek fonksiyon özelliği gösterecek ve Fourier Sinüs Serisine açılabilecektir. Diğer taraftan $f(t)$ fonksiyonunun grafiğini y-eksenine göre simetriğini aldığımızda fonksiyon, çift fonksiyon özelliği gösterecek ve Fourier Kosinüs Serisine açılabilecektir.

Örnek 3.5: $(0, \pi)$ yarım aralığında tanımlı $f(t) = 2t$ fonksiyonunun Fourier Sinüs ve Kosinüs Serilerini bulunuz.

İlk olarak fonksiyon grafiğinin orijine göre simetriğini gösteren şeklimizi çizelim.



Şekil 3.9. $f(t) = 2t$ fonksiyonunun orijine göre simetriğinin grafiği.

Grafikte (Şekil 3.9) görüldüğü üzere fonksiyon, tek fonksiyon özelliği kazandığından Fourier Sinüs Serisine açılabilir. Bu durumda $a_0 = 0 \; ve \; a_n = 0$ olacaktır. Sadece b_n katsayısını bulmamız yeterli olacaktır.

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t).\sin nt \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2t.\sin nt \, dt$$

$$b_n = \frac{4}{\pi}.\left[-t.\frac{\cos nt}{n} + \frac{\sin nt}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{4}{\pi}.\left[-\pi.\frac{\cos n\pi}{n} + \frac{\sin n\pi}{n^2}\right]$$

$$b_n = \frac{4}{\pi}.\left[\pi.\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right]$$

$$b_n = 4.\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

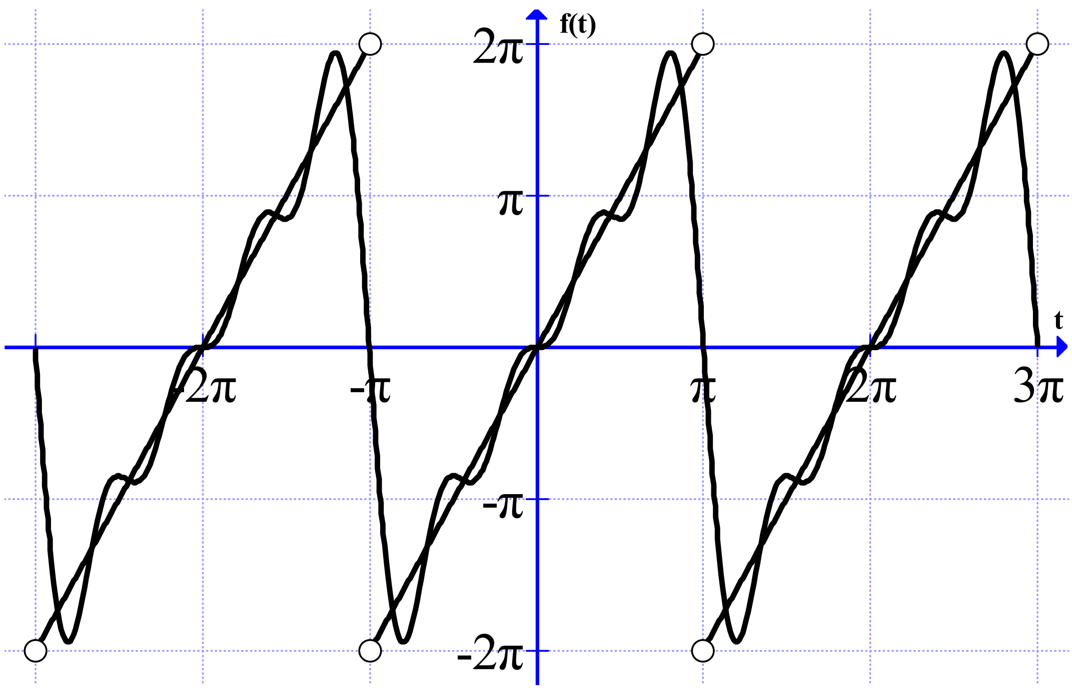
olarak bulunur. Bulduğumuz katsayıları yerine yazıp düzenlediğimizde $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Serisini elde etmiş oluruz.

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n . \sin nt$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(4.\frac{(-1)^{n+1}}{n} . \sin nt \right)$$

$$f(t) = 4 \sin t - 2 \sin 2t + \frac{4}{3} \sin 3t - \sin 4t + \cdots$$

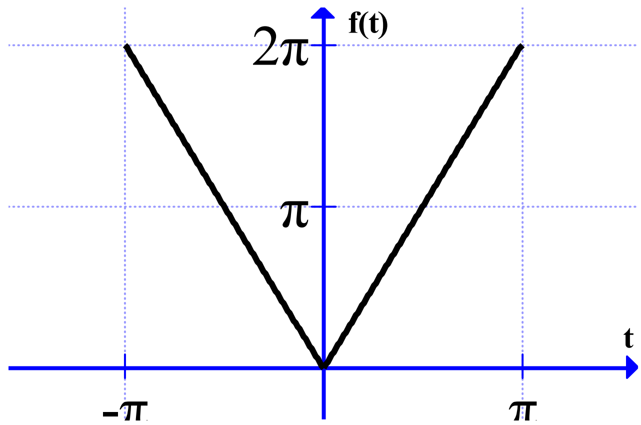
Bu serinin fonksiyona yakınsamasını aşağıdaki grafikte (Şekil 3.10) görmemiz mümkündür.



Şekil 3.10. Fourier sinüs serisinin $f(t) = 2t$ fonksiyonuna yakınsaması.

Şekil 3.10'da serinin *n=4*'e kadar açılımının yakınsaması görülmektedir. *n* için verilen değerlerin artırılması ile serinin fonksiyonunun grafiğine daha çok yakınsayacağı anlaşılmaktadır.

Şimdi de fonksiyon grafiğinin *y*-eksenine göre simetriğini gösteren şeklimizi çizelim.



Şekil 3.11. $f(t) = 2t$ fonksiyonunun y-eksenine göre simetriğinin grafiği.

Grafikte (Şekil 3.11) görüldüğü üzere fonksiyon, çift fonksiyon özelliği kazandığından Fourier Kosinüs Serisine açılabilir. Bu durumda $b_n = 0$ olacaktır. a_0 ve a_n katsayılarını bulmalıyız.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t).dt$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2t.dt$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}.[t^2]_0^{\pi}$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}.[\pi^2]$$

$$a_0 = 2\pi$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t).\cos nt.dt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 2t.\cos nt\, dt$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi} t.\cos nt\,dt$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}.\left[t.\frac{\sin nt}{n} + \frac{\cos nt}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}.\left[\pi.\frac{\sin n\pi}{n} + \frac{\cos n\pi}{n^2} - \frac{\cos 0}{n^2}\right]$$

$$a_n = \frac{4}{\pi}.\left[\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\right]$$

$$a_n = \begin{cases} 0 & ,n\ çift\ ise \\ \dfrac{-8}{\pi.n^2} & ,n\ tek\ ise \end{cases}$$

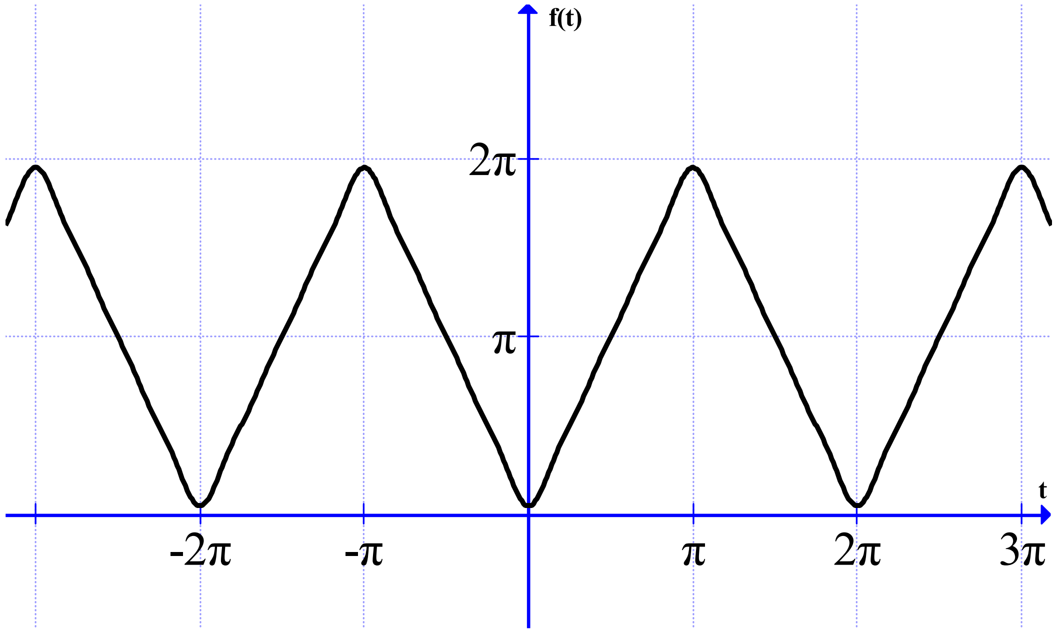
olarak bulunur. Bulduğumuz katsayıları yerine yazıp düzenlediğimizde $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Serisini elde etmiş oluruz.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n.\cos nt)$$

$$f(t) = \pi + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-8}{\pi}.\frac{1}{(2n-1)^2}.\cos(2n-1)t\right)$$

$$f(t) = \pi - \frac{8}{\pi}\cos t - \frac{8}{9\pi}\cos 3t - \frac{8}{25\pi}cos5t - \frac{8}{49\pi}\cos 7t - \cdots$$

Bu serinin fonksiyona yakınsamasını aşağıdaki grafikte (Şekil 3.12) görmemiz mümkündür.



Şekil 3.12. Fourier kosinüs serisinin $f(t) = 2t$ fonksiyonuna yakınsaması.

Şekil 3.12'de serinin *n=4*'e kadar açılımının yakınsaması görülmektedir. *n* için verilen değerlerin artırılması ile serinin fonksiyonunun grafiğine daha çok yakınsayacağı anlaşılmaktadır.

3.6. KOMPLEKS FOURIER SERİLERİ

Fonksiyonların Kompleks Fourier Serilerinin incelenmesi için başlıca iki sebep bulunmaktadır.

1. Mühendislik ve fizikteki uygulamalarda Kompleks Fourier Serileri önemli kısaltmalar ve netlik ortaya çıkarır.
2. Fourier Dönüşümlerinin ortaya çıkışına ve gelişimine temel oluştururlar.

Kompleks Fourier Serisini elde edebilmek için Euler Formülünü kullanacağız.

Euler Formülü: $e^{it} = \cos t + i.\sin t$ olduğunu biliyoruz. Buradan

$$
\begin{array}{r}
e^{int} = \cos nt + i.\sin nt \\
e^{-int} = \cos nt - i.\sin nt \\
+\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\dfrac{e^{int} + e^{-int}}{2} = \cos nt
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
e^{int} = \cos nt + i.\sin nt \\
e^{-int} = \cos nt - i.\sin nt \\
-\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
\dfrac{e^{int} - e^{-int}}{2i} = \sin nt
\end{array}
$$

elde edilir ve bu elde ettiklerimizi Fonksiyonun Fourier Serisinde (3.1) yerine yazarsak,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n.\cos nt + b_n\,.\sin nt)$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \left(\frac{e^{int} + e^{-int}}{2} \right) + b_n \left(\frac{e^{int} - e^{-int}}{2i} \right) \right]$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{a_n - i.b_n}{2} \right).e^{int} + \left(\frac{a_n + i.b_n}{2} \right).e^{-int} \right]$$

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[c_n.e^{int} + c_{-n}.e^{-int} \right]$$

bulunur. Burada

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt$$

$$c_n = \left(\frac{a_n - i.b_n}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt - i.\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \right]$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos nt - i.\sin nt)dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

$$c_{-n} = \left(\frac{a_n + i.b_n}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt\, dt + i.\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt\, dt \right]$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(\cos nt + i.\sin nt)dt$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}dt$$

olurlar. Böylece $f(t)$'nin Kompleks Fourier Serisi ve katsayıları

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \,.\, e^{int} \tag{3.7}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \ , \qquad n \in \mathbb{Z} \tag{3.8}$$

biçiminde olacaklardır.

<u>Örnek 3.6:</u> $(-\pi, \pi)$ aralığında $f(t) = e^t$ biçiminde tanımlı, *2π* periyotlu fonksiyonun Kompleks Fourier Serisini bulunuz.

Öncelikle c_n katsayılarını belirleyelim.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt \ , \qquad n \in \mathbb{Z}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^t . e^{-int}dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)t}dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}.\left[\frac{e^{(1-in)t}}{(1-in)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}.\frac{1}{(1-in)}.\left[e^{(1-in)\pi} - e^{-(1-in)\pi}\right]$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}.\frac{1+in}{1+n^2}.\left[e^{\pi}.e^{-in\pi} - e^{-\pi}.e^{in\pi}\right]$$

olup burada

$$e^{\pm in\pi} = \cos n\pi \pm \sin n\pi = (-1)^n$$

olduğu düşünülürse,

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi} \cdot \frac{1+in}{1+n^2} \cdot [e^{\pi} - e^{-\pi}]$$
$$c_n = \frac{(-1)^n}{\pi} \cdot \frac{1+in}{1+n^2} \cdot \sinh \pi$$

olarak elde edilir ve bu katsayıları da yerine yazarsak istenilen Kompleks Fourier Serisi

$$f(t) = e^t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{int} = \frac{\sinh \pi}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1+in}{1+n^2} \cdot e^{int}$$

olarak bulunur.

3.7. FOURIER SERİLERİ UYGULAMALARI

Fourier Serileri yardımıyla bazı sonsuz toplamların sonucunu bulabilmekteyiz. Bu başlık altında bazı örnekleri inceleyeceğiz.

Örnekler

1. $(-\pi, \pi)$ aralığında $f(t) = t$ biçiminde tanımlı, *2π* periyotlu fonksiyonun Fourier Serisini kullanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

toplamının sonucunu bulalım.

$f(t) = t$ fonksiyonunun Fourier Serisini, Örnek 3.3'te bulmuştuk.

$$f(t) = t = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2.\frac{(-1)^{n+1}}{n}.\sin nt \right)$$

$$f(t) = t = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t - \frac{1}{2}\sin 4t + \frac{2}{5}\sin 5t - \frac{1}{3}\sin 6t \ldots$$

Seride $t = \frac{\pi}{2}$ değeri yerine yazılırsa;

$$\frac{\pi}{2} = 2 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \cdots = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots\right)$$

$$\frac{\pi}{2} = 2.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$$

sonucuna ulaşılır.

Bu sonuçta dikkat çekici bir nokta, rasyonel sayıların toplamının bir irrasyonel sayıya eşit olmasıdır.

2. $(-\pi, \pi)$ aralığında $f(t) = t^2$ biçiminde tanımlı, *2π* periyotlu fonksiyonun Fourier Serisini kullanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \quad \text{ve} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

toplamlarının sonucunu bulalım.

$f(t) = t^2$ fonksiyonunun Fourier Serisini, Örnek 3.4'te bulmuştuk.

$$f(t) = t^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(4.\frac{(-1)^n}{n^2}.\cos nt \right)$$

Seride $t = 0$ değeri yerine yazılırsa;

$$0=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(4.\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$$

$$0=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-4.\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

olarak bulunur.

Seride $t=\pi$ değeri yerine yazalım;

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(4.\frac{(-1)^n}{n^2}.\cos n\pi\right)$$

$\cos n\pi=(-1)^n$ olduğundan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

sonucuna ulaşılır.

3. $(-\pi,\pi)$ aralığında $f(t)=2\cosh t$ biçiminde tanımlı, *2π* periyotlu fonksiyonun Fourier Serisini kullanarak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

toplamının sonucunu bulalım.

$f(t)=2\cosh t=e^t+e^{-t}$ fonksiyonunun Kompleks Fourier Serisini,

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (e^t + e^{-t})e^{-int}dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{(1-in)t} + e^{-(1+in)t}\right)dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{(1-in)} - \frac{e^{-(1+in)t}}{(1+in)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{(1-in)t}}{(1-in)} - \frac{e^{-(1+in)t}}{(1+in)}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{\pi}.e^{-in\pi} - e^{-\pi}.e^{in\pi}}{1-in} - \frac{e^{-\pi}.e^{-in\pi} - e^{\pi}.e^{in\pi}}{1+in}\right]$$

Burada $e^{\pm in\pi} = (\cos n\pi \pm \sin n\pi) = (-1)^n$ olduğundan

$$c_n = \frac{(-1)^n}{2\pi}\left[\frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{1-in} - \frac{e^{-\pi} - e^{\pi}}{1+in}\right]$$

$$c_n = \frac{(-1)^n}{\pi}.\sinh\pi.\left[\frac{1}{1-in} + \frac{1}{1+in}\right]$$

$$c_n = \frac{(-1)^n.2.\sinh\pi}{\pi.(1+n^2)}$$

şeklinde bulunur. Kompleks Fourier Serisi de aşağıdaki gibi elde edilir.

$$f(t) = 2.\cosh t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n.e^{int} = \frac{2.\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n.\frac{1}{1+n^2}.e^{int}$$

x=0 yazalım.

$$f(0) = 2.\cosh 0 = \frac{2.\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}.e^{in0}.$$

$$2 = \frac{2.\sinh\pi}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$\frac{\pi}{\sinh \pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$\frac{\pi}{\sinh \pi} = 1 + 2.\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} = \frac{1}{2}.\left[\frac{\pi}{\sinh \pi} - 1\right]$$

3.8. *(2L)* PERİYOTLU PERİYODİK FONKSİYONLARIN FOURIER SERİSİ

$\varphi(x)$, $(-\pi, \pi)$ aralığında tanımlı *2π* periyotlu bir fonksiyon olsun. Kompleks Fourier Serisi ve katsayıları aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\varphi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \,.\, e^{inx}$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) e^{-inx} dx \ , \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Bu ifadede $x = \frac{\pi.t}{L}$ dönüşümü yaparsak,

$$x = \frac{\pi.t}{L} \Longrightarrow dx = \frac{\pi.dt}{L}$$

$$x = \pi \text{ için } t_1 = \frac{L.\pi}{\pi} = L$$

$$x = -\pi \text{ için } t_2 = \frac{L.(-\pi)}{\pi} = -L$$

olacaktır. Bu bilgileri c_n'de yerine yazalım.

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(t) e^{-\frac{in\pi t}{L}}.\frac{\pi}{L}.dt$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-\frac{in\pi t}{L}}.dt$$

Son olarak $\frac{\pi}{L}$ yerine *w* açısal frekansını koyalım:

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-inwt}.dt$$

elde edilir ki bu da bize keyfi $[-L, L]$ aralığında tanımlı periyodik bir fonksiyon için Kompleks Fourier Serisinin yazılabileceğini gösterir. O halde $[-L, L]$ aralığında tanımlı *2L* periyotlu *f(t)* fonksiyonunun Kompleks Fourier Serisi ve Katsayıları

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,.\,e^{inwt}, \qquad w = \frac{\pi}{L} \tag{3.9}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-inwt}.dt \tag{3.10}$$

şeklinde olur.

BÖLÜM 4

FOURIER İNTEGRALİ VE FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

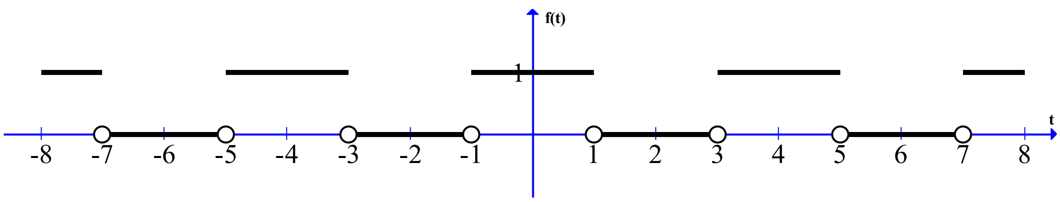
4.1. FOURIER İNTEGRALİ

Fourier Serileri; Dirichlet Koşullarını sağlayan periyodik fonksiyonlarla ilgili problemlerin incelenmesinde güçlü bir araçtır. Ancak pratikte nadiren periyodik olaylarla karşılaşmaktayız. Örneğin mekanikte etkiyen kuvvet ya da elektrik sistemlerinde voltaj periyodik olaylar değildir. Yine mekanikte impuls (çarpışma) sadece bir kez gerçekleşen ve tekrarlanmayan bir olaydır. Periyodik olmayan bu tür olayları açıklamak için Fourier Serilerini kullanamayız. Bununla birlikte keyfi $[-L, L]$ aralığında tanımlı periyodik $f(t)$ fonksiyonunun Fourier Serisini (3.9), periyodun sonsuza gitmesi durumunda incelediğimizde periyodik olmayan fonksiyonlar için de uygun sonuçlar elde edebiliriz.

Bu durumu daha iyi anlamak için şu örneği inceleyelim.

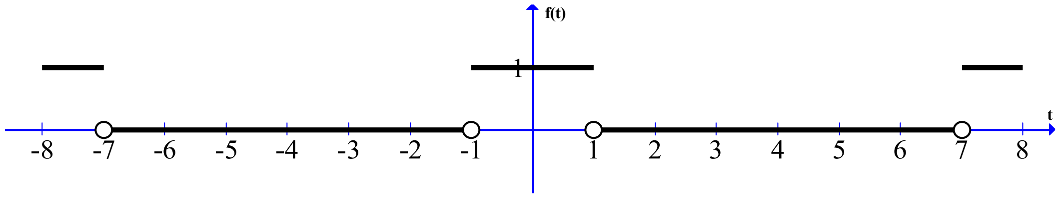
$T = 2L$ periyotlu $f_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & 1 < |t| \leq L \end{cases}$ fonksiyonunu düşünelim.

$T = 2L = 4$ için $f_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & 1 < |t| \leq 2 \end{cases}$ fonksiyonun grafiği



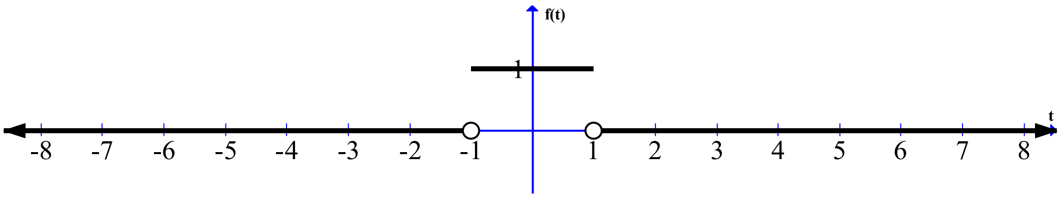
Şekil 4.1. $f_T(t)$ fonksiyonun grafiği ($T = 2L = 4$ $için$).

$T = 2L = 8$ için $f_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & 1 < |t| \leq 4 \end{cases}$ fonksiyonun grafiği



Şekil 4.2. $f_T(t)$ fonksiyonun grafiği ($T = 2L = 8\ için$).

$T \to \infty$ için $f_T(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq 1 \\ 0, & 1 < |t| \end{cases}$ fonksiyonun grafiği



Şekil 4.3. $f_T(t)$ fonksiyonun grafiği ($T \to \infty\ için$).

Grafik (Şekil 4.3) *y*-eksenine göre simetrik olduğundan çift fonksiyondur. Dolayısıyla fonksiyonun Fourier Serisi sadece Kosinüslü terimler içerir.

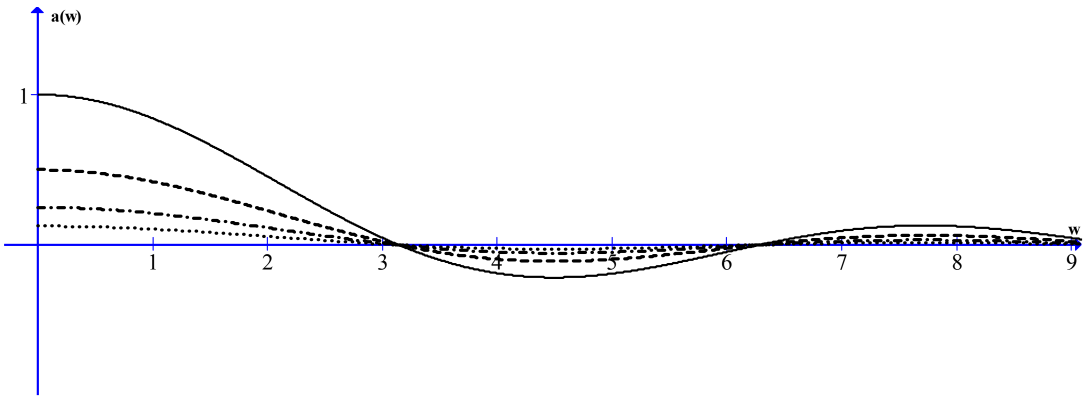
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 cos(\pi t/L) + a_2 cos(2\pi t/L) + \cdots + a_n cos(n\pi t/L) + \cdots$$

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L dt = \frac{2}{L}\int_0^1 dt = \frac{2}{L}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L cos(n\pi t/L).dt = \frac{2}{L}\int_0^1 cos(n\pi t/L).dt = \frac{2}{L}.\frac{sin(n\pi/L)}{(n\pi/L)}$$

$w_n = (n\pi/L)$ genel terimin frekansı olarak alırsak;

$a_n = \frac{2}{L}.\frac{sinw_n}{w_n}$ elde edilir. (*n*) indisi tamsayı olduğundan a_n katsayıları sürekli bir eğri göstermezler. Ancak a_n ler, $a_L(w) = \frac{2}{L}.\frac{sinw}{w}$ eğrisinde w nin sadece ardışık değerlerine karşılık gelir. *L=2; L=4; L=8* ve *L=16* değerleri için $a_L(w) = \frac{2}{L}.\frac{sinw}{w}$ ifadesinin grafiği (Şekil 4.4) çizilmiştir.



Şekil 4.4. $a_L(w) = \frac{2}{L}.\frac{sinw}{w}$ katsayılarının grafiği.

Şekil 4.4'de görüldüğü gibi *L* sonsuz büyüdüğünde $f_T(t)$ serisinin terimleri sıklaşmakta ve katsayıları da SIFIRa yaklaşmaktadır. Bundan dolayı $f_T(t)$ serisinin limiti bizi integrale ulaştırır.

Şimdi tekrar $[-L, L]$ aralığında tanımlı *2L* periyotlu $f(t)$ fonksiyonunun Kompleks Fourier Serisini ele alalım.

Ancak $f(t)$ reel değerli fonksiyonu ile yapacağımız işlemlerin geçerli olması için $f(t)$ reel değerli fonksiyonu, $-\infty < t < \infty$ aralığının her sonlu alt aralığında Dirichlet koşullarını sağlamalıdır. Yani,

1. $(-L, L)$ aralığında sürekli ya da parçalı süreklidir.
2. $(-L, L)$ aralığında sonlu sayıda ekstremuma sahiptir.
3. $(-L, L)$ aralığında mutlak integrallenebilir yani $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| dt < \infty$ olmalıdır.
4. t_0 süreksizlik noktasında fonksiyonun değeri, $f(t_0) = \frac{f(t_0^-)+f(t_0^+)}{2}$ değerine eşittir.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n . e^{inwt}, \qquad w = \frac{\pi}{L}$$

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-inwt}.\,dt$$

c_n leri yerine yazarsak;

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-inwt}.\,dt\right].\,e^{inwt}$$

$\frac{\pi}{L}$ parantezine alalım:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-inwt}.\,dt\right].\,e^{inwt}.\frac{\pi}{L}$$

$L \to \infty$ için $w = \frac{\pi}{L} \to 0$ olur. $w_n = n.w = n\pi/L$ genel terimleri arasındaki farkı $\Delta w = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$ ile gösterip yerine yazalım.

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} f(t)e^{-in\Delta wt}.\,dt\right].\,e^{in\Delta wt}.\Delta w$$

$L \to \infty$ için $\Delta w \to 0$ olur. $n \to \infty$ olduğundan limitte, $n.\Delta w \to w$ alınabilir. Bu durumda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\,e^{-iwt}.\,dt\right]e^{iwt}.\,dw \qquad (4.1)$$

integraline ulaşılır. Bu integrale *Fourier İntegrali* denir.

4.2. FOURIER İNTEGRALİNİN TRİGONOMETRİK ŞEKLİ

(4.1) eşitliğinde Euler formülleri kullanıldığında

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u).e^{-iwu}.du\right]e^{iwt}.dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u).e^{iw(t-u)}.du\,dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u).[\cos w(t-u) + i.\sin w(t-u)].du\,dw$$

şeklini alır. $f(t)$, reel değerli bir fonksiyon olduğundan integraldeki kompleks kısım sıfır alınır. Bu durumda

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u).\cos w(t-u).du\,dw \tag{4.2}$$

olur. (4.2)'da $\cos w(t-u)$, w'nin çift fonksiyonudur. Bu nedenle w'ya bağlı integralde sınırlar $(0,\infty)$ alınması ve $u = x$ alınması ile (4.2) ifadesi

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x).\cos w(t-x).dx\,dw \tag{4.3}$$

şeklinde yazılabilir. (4.3) ifadesi

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)\cos wt\cos wx + f(x)\sin wt\sin wx]dx\right]dw$$

şeklinde de yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} A(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos wx\,dx \\ B(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin wx\,dx \end{aligned} \tag{4.4}$$

ile gösterilirse (4.3) denklemi

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} [A(w)\cos wt + B(w)\sin wt]\, dw \tag{4.5}$$

şeklini alır.

<u>Örnek 4.1:</u> $f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-t}, & t \geq 0 \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier İntegrali yardımıyla $\int_0^\infty \frac{\cos wt + w.\sin wt}{1+w^2}.dw$ integralinin sonucunu bulalım.

Öncelikle $f(t)$ fonksiyonunun Fourier İntegralini elde edelim:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t).e^{-iwt}.dt\right] e^{iwt}.dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{0}^{\infty} e^{-t}.e^{-iwt}.dt\right] e^{iwt}.dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\lim_{a\to\infty}\int_{0}^{a} e^{-(1+iw)t}.dt\right] e^{iwt}.dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{a\to\infty}\left.\frac{e^{-(1+iw)t}}{-(1+iw)}\right|_0^a e^{iwt}.dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{a\to\infty}\frac{e^{-(1+iw)a}-1}{-(1+iw)} e^{iwt}.dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+iw} e^{iwt}.dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-iw}{1+w^2}.(\cos wt + i.\sin wt).dw$$

$f(t)$ reel değerli fonksiyon olduğundan sanal kısımlar sıfırlanacaktır. Böylece

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos wt + w.\sin wt}{1+w^2} dw$$

eşitliğine ulaşılır. İntegralin içerisinin çift fonksiyon ve aynı zamanda Dirichlet Koşulları gereğince $f(0) = \frac{f(0^-)+f(0^+)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ olacağı için integral aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos wt + w.\sin wt}{1+w^2} dw = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{1}{2}, & t=0 \\ e^{-t}, & t>0 \end{cases}$$

Sonuçta istenen integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos wt + w.\sin wt}{1+w^2} dw = \begin{cases} 0, & t<0 \\ \frac{\pi}{2}, & t=0 \\ \pi.e^{-t}, & t>0 \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 4.2: $f(t) = \begin{cases} 1, & 0<t<\pi \\ -1, & -\pi<t<0 \\ 0, & |t|>\pi \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier İntegrali yardımıyla $\int_0^{\infty} \frac{1-\cos w\pi}{w} \sin wt\,.dw$ integralinin sonucunu bulunuz.

Öncelikle $f(t)$ fonksiyonunun Fourier İntegralini elde edelim:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t).e^{-iwt}.dt\right]e^{iwt}.dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\pi}^{\pi} f(t).(\cos wt - i.\sin wt).dt\right]e^{iwt}.dw$$

$f(t)$ tek fonksiyon olduğundan kosinüslü kısmın simetrik aralıktaki integrali sıfır olacaktır.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[2\int_{0}^{\pi} -i.\sin wt\,.dt\right]e^{iwt}.dw$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{i.\cos wt}{w}\right]_0^{\pi} e^{iwt}.dw$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i.(\cos w\pi - 1)}{w}(\cos wt + i.\sin wt).dw$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{i.(\cos w\pi - 1)}{w}.i.\sin wt.dw$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos w\pi}{w}.\sin wt.dw = \begin{cases} 1, & 0 < t < \pi \\ -1, & -\pi < t < 0 \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

Sonuç olarak istenen integral

$$\int_{0}^{\infty}\frac{1-\cos w\pi}{w}.\sin wt.dw = \begin{cases} \pi/2, & 0 < t < \pi \\ -\pi/2, & -\pi < t < 0 \\ 0, & |t| > \pi \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

<u>Örnek 4.3:</u> $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier İntegrali yardımıyla $\int_0^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw$ integralinin sonucunu bulunuz.

(4.3) eşitliğinden faydalanalım.

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x).\cos w(t-x).dx\,dw$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-1}^{1}\cos w(t-x).dx\,dw$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w(t+1) - \sin w(t-1)}{w}dw$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{2.\sin w.\cos wt}{w}dw$$

$$f(0) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw = 1$$

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\sin w}{w}dw = \frac{\pi}{2}$$

4.3. FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Fourier İntegralinin (3.1) iç kısmına $F(w)$ dersek,

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt = \mathcal{F}\{f\}, \quad ANALİZ \tag{4.6}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt}dw = \mathcal{F}^{-1}\{f\}, \quad SENTEZ \tag{4.7}$$

ifadeleri elde edilir. Bu çifte Fourier Dönüşüm Çifti denir. Fourier Dönüşümü; bazı integrallerin hesaplanmasında, diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılabilmektedir.

4.3.1. Tek ve Çift Fonksiyonların Fourier Dönüşümü

(4.6) ifadesinde $e^{-iwt} = \cos wt - i.\sin wt$ yazalım.

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos wt\, dt - i\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin wt\, dt$$

Buradaki integralleri

$$R(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos wt\, dt$$

$$K(w) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin wt\, dt$$

ile gösterirsek

$$F(w) = R(w) + iK(w)$$

reel ve kompleks kısımları ayrılmış halde yazmış oluruz.

Şimdi $f(t)$'yi reel ve tek fonksiyon olarak düşünelim. $f(t)\cos wt$ çarpımı tek fonksiyon olacağından $R(w)$ integrali sıfır olacaktır. Bu durumda $F(w) = iK(w)$ olduğu görülür. Yani $F(w)$ komplekstir.

$$K(w) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin wt\, dt$$

integralinde $f(t)\sin wt$ çarpımı çift fonksiyondur. Bu integrali

$$K(w) = -\left[\int_{-\infty}^{0} f(t)\sin wt\, dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\sin wt\, dt\right]$$

şeklinde yazdıktan sonra, ilk integralde *t* yerine *–t* koyarsak integrantın çift olmasından yararlanarak

$$K(w) = -2\int_{0}^{\infty} f(t)\sin wt\, .\, dt$$

yazılır. Bu integralde w yerine $-w$ yazılırsa $K(w)$'nin w değişkenine göre tek fonksiyon olduğu görülür.

<u>Sonuç 4.1:</u> $f(t)$, reel ve tek fonksiyon ise $F(w)$ kompleks ve tektir.

Şimdi de $f(t)$'yi reel ve çift fonksiyon olarak düşünelim. $f(t)\sin wt$ çarpımı tek fonksiyon olacağından $K(w)$ integrali sıfır olacaktır. Bu durumda $F(w) = R(w)$ olduğu görülür. Yani $F(w)$ reeldir.

$$R(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos wt\, .\, dt$$

integralinde $f(t)\cos wt$ çarpımı çift fonksiyondur. Bu integrali

$$R(w) = \int_{-\infty}^{0} f(t)\cos wt\, .\, dt + \int_{0}^{\infty} f(t)\cos wt\, .\, dt$$

şeklinde yazdıktan sonra, ilk integralde *t* yerine *–t* koyarsak integrantın çift olmasından yararlanarak

$$R(w) = 2\int_{0}^{\infty} f(t)\cos wt\,.dt$$

yazılır. Bu integralde w yerine $-w$ yazılırsa $R(w)$ nin w değişkenine göre çift fonksiyon olduğu görülür.

Sonuç 4.2: $f(t)$, reel ve çift fonksiyon ise $F(w)$ reel ve çifttir.

Örnek 4.4: $f(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq \alpha \\ 0, & |t| > \alpha \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier Dönüşümünü yardımıyla $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(w\alpha)}{w} e^{iwt} dw$ integralinin sonucunu bulalım.

$f(t)$ fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$$

$$F(w) = \int_{-\alpha}^{\alpha} e^{-iwt}.dt$$

$$F(w) = \left[\frac{-e^{-iwt}}{iw}\right]_{-\alpha}^{\alpha}$$

$$F(w) = \frac{-e^{-iw\alpha} + e^{iw\alpha}}{iw}$$

$$F(w) = \frac{e^{iw\alpha} - e^{-iw\alpha}}{2i}.\left(\frac{2}{w}\right)$$

$$F(w) = \frac{2.\sin(w\alpha)}{w}$$

şeklindedir. Ters Dönüşüme bakalım:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(w)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2.\sin(w\alpha)}{w} e^{iwt}dw$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(w\alpha)}{w} e^{iwt} dw$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \alpha \\ \frac{1}{2}, & |t| = \alpha \\ 0, & |t| > \alpha \end{cases}$$

Sonuçtan faydalanarak;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(w\alpha)}{w} e^{iwt} dw = \begin{cases} \pi, & |t| < \alpha \\ \frac{\pi}{2}, & |t| = \alpha \\ 0, & |t| > \alpha \end{cases}$$

integralinin çözümünü elde etmiş oluruz.

Örnek 4.5: $f(t) = \begin{cases} 1 - t^2, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$ fonksiyonunun Fourier Dönüşümünü yardımıyla $\int_0^\infty \frac{\sin w - w.\cos w}{w^3} . \cos\frac{w}{2} . dw$ integralinin sonucunu bulalım.

$f(t)$ fonksiyonunun Fourier Dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(wt)\, dt - i.\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(wt)\, dt$$

$f(t)$ reel değerli fonksiyon olduğundan sanal kısım sıfırlanır. Aynı zamanda $f(t)$ çift fonksiyon olduğundan

$$F(w) = 2\int_0^1 (1 - t^2)\cos(wt)\, dt$$

$$F(w) = 2\left[(1 - t^2)\frac{\sin(wt)}{w} - 2t\frac{\cos(wt)}{w^2} + 2\frac{\sin(wt)}{w^3}\right]_0^1$$

$$F(w) = 2\left[-2\frac{\cos w}{w^2} + 2\frac{\sin w}{w^3}\right]$$

$$F(w) = 4\left[\frac{\sin w - w.\cos w}{w^3}\right]$$

şeklinde yazılır. Ters Dönüşüme bakalım:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(w)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}dw$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\cos(wt)\,dw + i.\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\sin(wt)\,dw$$

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} F(w)\cos(wt)\,dw$$

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\sin w - w.\cos w}{w^3}\right]\cos(wt)\,dw$$

elde edilir. Burada $t = \frac{1}{2}$ değerini yerine yazarsak istenen integralin sonucunu bulmuş oluruz.

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{\pi}\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\sin w - w.\cos w}{w^3}\right]\cos\left(\frac{w}{2}\right)dw = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\int_{0}^{\infty}\left[\frac{\sin w - w.\cos w}{w^3}\right]\cos\left(\frac{w}{2}\right)dw = \frac{3\pi}{16}$$

4.4. FOURIER KOSİNÜS VE SİNÜS DÖNÜŞÜMÜ

4.4.1. Fourier Kosinüs Dönüşümü

$f(t)$, $(0,\infty)$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(t)$'yi $(-\infty,\infty)$ aralığında $f(-t) = f(t)$ koşulunu sağlayan çift fonksiyon olarak düşünülebilir.

Fourier İntegralinin Trigonometrik şeklini (4.3) ele alalım.

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos w(t-x)\,dx\,dw$$

Bu eşitlik

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{0} f(x)\cos w(t-x)\,dx\,dw$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x)\cos w(t-x)\,dx\,dw \qquad (4.8)$$

şeklinde yazılabilir. $f(t)$ çift fonksiyon olduğundan ilk terimdeki integral

$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\cos w(t-x)\,dx = -\int_{\infty}^{0} f(-x)\cos w(t+x)\,dx$$
$$= \int_0^{\infty} f(x)\cos w(t+x)\,dx$$

biçimine dönüştürülebilir. Bu integrali de (4.8)'de yerine yazalım.

$$f(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(x)[\cos w(t-x) + \cos w(t+x)]dx\,dw$$
$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(x)\cos wx\,dx\right]\cos wt\,dw$$

Şimdi de $x = t$ yazalım.

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_0^{\infty} f(t)\cos wt\,dt\right]\cos wt\,dw \qquad (4.9)$$

(4.9) eşitliğinin içindeki kısmı $F_C(w)$ ile gösterirsek,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F_C(w) = \int_0^{\infty} f(t)\cos wt\,dt \qquad (4.10)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_C(w)\} = f(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_C(w)\cos wt\,dw \qquad (4.11)$$

olur. (4.10) eşitliğine $f(t)$'nin *Fourier Kosinüs Dönüşümü* denir.

4.4.2. Fourier Sinüs Dönüşümü

$f(t)$, $(0, \infty)$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f(t)$'yi $(-\infty, \infty)$ aralığında $f(-t) = -f(t)$ koşulunu sağlayan tek fonksiyon olarak düşünülebiliriz.

(4.8) eşitliğinin ilk terimindeki integral

$$\int_{-\infty}^{0} f(x) \cos w(t-x)\, dx = -\int_{0}^{\infty} f(-x) \cos w(t+x)\, dx$$

biçiminde yazılabilir. Bu integrali de (4.8)'de yerine yazalım.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{\infty} f(x) [\cos w(t-x) - \cos w(t+x)] dx\, dw$$

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{0}^{\infty} f(x) \sin wx\, dx \right] \sin wt\, dw$$

Şimdi de $x = t$ yazalım.

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \left[\int_{0}^{\infty} f(t) \sin wt\, dt \right] \sin wt\, dw \tag{4.12}$$

(4.12) eşitliğinin içindeki kısmı $F_S(w)$ ile gösterirsek,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F_S(w) = \int_{0}^{\infty} f(t) \sin wt\, dt \tag{4.13}$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F_S(w)\} = f(t) = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} F_S(w) \sin wt\, dw \tag{4.14}$$

olur. (4.13) eşitliğine $f(t)$'nin *Fourier Sinüs Dönüşümü* denir.

4.5. FOURIER DÖNÜŞÜMLERİNİN ÖZELLİKLERİ

4.5.1. Lineerlik Özelliği

a ve b sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{af(t)+bg(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}[af(t)+bg(t)]e^{-iwt}dt \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iwt}dt + b\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-iwt}dt \\ &= a\mathcal{F}\{f(t)\}+b\mathcal{F}\{g(t)\}\end{aligned}$$

elde edilir. Buna göre Fourier Dönüşümü *lineer*dir.

4.5.2. Zaman Öteleme Özelliği

$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w)$ ve a reel sabit olsun.

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-t_0)e^{-iwt}dt$$

$t - t_0 = x$ dersek,

$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iw(x+t_0)}dx \\ &= e^{-iwt_0}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iwx}dx\end{aligned}$$

yazılır ki, bu da

$$\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-iwt_0}.F(w) \qquad (4.15)$$

olacaktır. Bu özelliğe *zaman öteleme özelliği* denir.

4.5.3. Frekans Öteleme Özelliği

$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w)$ ve w_0 reel sabit olsun.

$$\mathcal{F}\{e^{iw_0t}f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iw_0t}.f(t)e^{-iwt}dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i(w-w_0)t}dt$$

Böylece

$$\mathcal{F}\{e^{iw_0t}f(t)\} = F(w - w_0)$$

özelliği elde edilir. Bu özelliğe *frekans öteleme özelliği* denir.

4.5.4. Fourier Dönüşümünün Simetri Özelliği

$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(w)$ olarak kabul edelim. (4.6) dan

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)\, e^{iwt}dw$$

yazılır. Burada *t*'yi *w* ile değiştirelim.

$$f(w) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{iwt}dt$$

Şimdi de $w = -w$ koyar ve 2π ile çarparsak

$$2\pi.f(-w) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{-iwt}dt$$

$$2\pi.f(-w) = \mathcal{F}\{F(t)\} \qquad (4.16)$$

bağıntısı bulunur. Bu bağıntıya *Fourier Dönüşümünün Simetri Özelliği* denir.

4.5.5. Türevlerin Fourier Dönüşümleri

Teorem 3.1: $f(t)$, $(-\infty,\infty)$ aralığında sürekli ya da parçalı düzgün sürekli olsun. $|t| \to \infty$ için $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t) \to 0$ koşulu sağlansın. Bu durumda $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ fonksiyonları, $(-\infty,\infty)$ aralığında mutlak integrallenebilir iseler

$$\mathcal{F}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = (iw)^n F(w) \tag{4.17}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f'(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-iwt}dt \\
&= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b f'(t)e^{-iwt}dt \\
&= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\left[f(t)e^{-iwt}\Big|_a^b + (iw)\int_a^b f(t)e^{-iwt}dt\right] \\
&= (iw)\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt \\
&= (iw)\mathcal{F}\{f(t)\} \\
&= (iw)F(w)
\end{aligned}$$

II. mertebe türev için Fourier dönüşümü uygulayalım.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f''(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f''(t)e^{-iwt}dt \\
&= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b f''(t)e^{-iwt}dt \\
&= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\left[f'(t)e^{-iwt}\Big|_a^b + (iw)\int_a^b f'(t)e^{-iwt}dt\right] \\
&= (iw)\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-iwt}dt
\end{aligned}$$

$$= (iw)\mathcal{F}\{f'(t)\}$$
$$= (iw)^2 F(w)$$

n. mertebe türev için indirgeme uygulanırsa

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (iw)\mathcal{F}\{f^{(n-1)}(t)\} = (iw)^2\mathcal{F}\{f^{(n-2)}(t)\}$$
$$= \cdots = (iw)^n\mathcal{F}\{F(w)(t)\} = (iw)^n F(w)$$

bulunur. Buradan n. mertebe türevin Fourier dönüşümü için

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (iw)^n F(w)$$

formülü elde edilir.

4.5.6. Fourier Dönüşümünün Türevi (Spektrumun Türevi)

Teorem 3.2: $t^n f(t)$, mutlak integrallenebilir iseler

$$\frac{d^n F(w)}{dw^n} = \mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}dt$$

eşitliğinde Leibnitz kuralını uygulayarak w değişkenine göre türev alalım.

$$\frac{dF(w)}{dw} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)e^{-iwt}dt$$
$$\frac{dF(w)}{dw} = \mathcal{F}\{(-it)\, f(t)\}$$

II. mertebe türevini alalım.

$$\frac{d^2F(w)}{dw^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)(-it)^2 e^{-iwt} dt$$

$$\frac{d^2F(w)}{dw^2} = \mathcal{F}\{(-it)^2\, f(t)\}$$

Buradan ardışık *n* defa türev alırsak

$$\frac{d^nF(w)}{dw^n} = \mathcal{F}\{(-it)^n f(t)\}$$

ifadesine ulaşılır.

4.5.7. İntegralin Fourier Dönüşümü

$f(t)$ ve $g(t) = \int_{-\infty}^{t} f(\tau).\,d\tau$ fonksiyonları mutlak integrallenebilir ve

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = F(0) = 0$$

ise

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau).\,d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw} \qquad (4.18)$$

eşitliği vardır.

İspat

$$\mathcal{F}\{g(t)\} = G(w)$$

dersek, (4.17)'den

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = iwG(w)$$

yazılabilir. (4.17)'deki özellik

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = \lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)d\tau = 0$$

olması ile sağlanmaktadır.

$$g'(t) = f(t)$$

olduğundan

$$\mathcal{F}\{g'(t)\} = \mathcal{F}\{f(t)\} = F(w) = iwG(w)$$

yazılabilir. Buradan da

$$G(w) = \frac{F(w)}{iw}$$

elde edilir. Sonuçta aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t} f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(w)}{iw}$$

4.6. İMPULS ($\boldsymbol{\delta}$ − DIRAC DELTA) FONKSİYONU

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)dt = 1$$

biçiminde tanımlı fonksiyona İmpuls ya da Dirac Delta Fonksiyonu denir. Bu fonksiyon, $t = 0$ civarında çok büyük değer alan ve orijini çevreleyen çok küçük bir alanın dışında sıfır olan bir fonksiyon olarak anlaşılmalıdır. Bir başka bakış açısıyla $\delta(t)$ fonksiyonu

$$\delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/\varepsilon, & 0 < t < \varepsilon \\ 0, & \varepsilon < t \end{cases}$$

fonksiyonunun $\varepsilon \to 0$ için limiti olarak düşünülebilir. Bu düşünce ile

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = \int_{0}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} dt = 1$$

sonucuna ulaşılır.

4.6.1. İmpuls($\boldsymbol{\delta}$ − Dirac Delta) Fonksiyonunun Eleme Özelliği

$\delta(t)$ fonksiyonun önemli bir özelliği olan *eleme özelliğini* göstermeye çalışalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) f(t)dt = \int_{0}^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} f(t)dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_{0}^{\varepsilon} f(t)dt$$

olur. Bu son integrale, $0 \le \lambda \le 1$ olmak üzere integralin ortalama değer teoremini uygularsak

$$\int_{0}^{\varepsilon} f(t)dt = f(\lambda\varepsilon)\int_{0}^{\varepsilon} dt = \varepsilon f(\lambda\varepsilon)$$

olur. Buradan

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\varepsilon(t) f(t)dt = f(\lambda\varepsilon) \qquad 0 \le \lambda \le 1$$

yazılır. $\varepsilon \to 0$ için

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0) \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.19) ile elde ettiğimiz özelliği ötelenmiş δ-fonksiyonuna uygulamak isteyelim. Ötelenmiş δ-fonksiyonu

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t \neq t_0 \\ \infty, & t = t_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$

şeklinde tanımlanmıştır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt$$

integralinde $(t - t_0) = u$ dönüşümü yapıp, (4.19) eşitliğini de kullanarak,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f(u + t_0) du = [f(u + t_0)]_{u=0} = f(t_0)$$

yazılır. Buradan da

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) \tag{4.20}$$

elde edilir. (4.20)'den hareketle

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0) = f(t_0).1$$

$$= f(t_0). \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0). \delta(t - t_0) dt$$

yazılabilir. Buradan

$$f(t).\delta(t-t_0) = f(t_0).\delta(t-t_0)$$

eşitliğine ulaşılır. Özel olarak $f(t) = t$ ve $t_0 = 0$ alınırsa

$$t.\delta(t) = 0 \tag{4.21}$$

bulunur.

4.6.2. İmpuls ($\boldsymbol{\delta}$ − Dirac Delta) Fonksiyonunun Türevi

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)dt$$

integraline kısmî integral kuralını uygulayalım.

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\left[\int_a^b \delta'(t)f(t)dt\right] &= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\left[\delta(t)f(t)|_a^b - \int_a^b \delta(t)f'(t)dt\right] \\
&= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\left[-\int_a^b \delta(t)f'(t)dt\right] \\
&= -\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)f'(t)dt
\end{aligned}$$

olur. (4.20)'ye göre

$$= -f'(0)$$

elde edilir. Yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)dt = -f'(0) \tag{4.22}$$

bulunur.

δ-fonksiyonunun n. mertebeden türevi, (4.22)'e benzer şekilde bulunabilir.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) f(t) dt = -\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-1)}(t) f'(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-2)}(t) f^{(2)}(t) dt$$
$$= \cdots = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f^{(n)}(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(t)$$

olur. Yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t) f(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(0) \tag{4.23}$$

elde edilir.

4.6.3. İmpuls ($\boldsymbol{\delta}$ − Dirac Delta) Fonksiyonunun Çift Olması

İlk olarak

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$$

olduğunu gösterirsek çift fonksiyon olduğunu daha rahat bir şekilde gösterebiliriz. Bunun için aşağıdaki integralde $at = u$ dönüşümü yapalım. $a < 0$ ve $a > 0$ durumlarını dikkate almak adına $dt = du/|a|$ olarak alalım.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) f(t) dt = \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u) f\left(\frac{u}{a}\right) du$$

(4.19)'a göre

$$= \frac{1}{|a|} f\left(\frac{u}{a}\right)\bigg|_{u=0} = \frac{1}{|a|} f(0)$$

olur. Tekrar (4.19)'a göre $f(0)$'ın eşitini yazarsak,

$$= \frac{1}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \delta(t) f(t) dt$$

bulunur. Yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(at) f(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|a|} \delta(t) f(t) dt$$

eşitliğine ulaşmış oluruz. Bu eşitlikten de

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$$

olduğu görülmektedir. $a = -1$ alındığında

$$\delta(-t) = \delta(t) \tag{4.24}$$

δ-fonksiyonunun çift olduğunu göstermiş oluruz.

4.6.4. Birim Basamak (Heaviside) Fonksiyonunun Türevi

$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlı fonksiyona Birim Basamak Fonksiyonu denir. Birim Basamak Fonksiyonunun türevi, δ-fonksiyonudur (Bracewell, 2000).

$$\frac{d}{dt} H(t) = \delta(t) \tag{4.25}$$

$SGN(t) = 2.H(t) - 1$ yazılabileceğinden işaret fonksiyonunun türevi

$$\frac{d}{dt} SGN(t) = \frac{d}{dt}[2.H(t) - 1] = 2\delta(t) \tag{4.26}$$

şeklinde olur.

4.7. BAZI FONKSİYONLARIN FOURIER DÖNÜŞÜMLERİ

4.7.1. İmpuls $(\boldsymbol{\delta})$ Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$\delta(t)$ fonksiyonunun eleme özelliğini (4.19) kullanarak Fourier Dönüşümü

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-iwt}.dt = e^{-iwt}\Big|_{t=0} = 1$$

olarak bulunur. Bu dönüşümden ters dönüşüme geçersek

$$\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt}.dw$$

olur. Böylece $\delta(t)$ fonksiyonunun integral temsilini elde etmiş oluruz.
Şimdi de zaman öteleme özelliğinden faydalanarak

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-iwt_0}.\mathcal{F}\{\delta(t)\} = e^{-iwt_0}$$

ötelenmiş impuls fonksiyonunun Fourier Dönüşümünü elde etmiş oluruz.

4.7.2. $\boldsymbol{f(t) = 1}$ Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

4.7.1. de δ-fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulmuştuk. Dönüşümün simetri özelliğinden (4.16) faydalanalım. Aynı zamanda (4.24)'ten δ-fonksiyonunun çift olduğunu bildiğimizden

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1 \Leftrightarrow \mathcal{F}\{1\} = 2\pi.\delta(w)$$

olacaktır. Buradan

$$\delta(w) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}\{1\}$$

yazılır. Ters dönüşüme geçersek

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(w)\} = \frac{1}{2\pi}$$

elde edilir.

4.7.3. $f(t) = a$ Sabit Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$$\mathcal{F}\{a\} = \int_{-\infty}^{\infty} a.e^{-iwt}.dt = a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}.dt = a.\mathcal{F}\{1\} = 2a\pi.\delta(w)$$

bulunur.

4.7.4. δ' ve $\delta^{(n)}$ Fonksiyonlarının Fourier Dönüşümü

(4.21)’den

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t)f(t)dt = -f'(0)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\mathcal{F}\{\delta'(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t).e^{-iwt}.dt = -\frac{d}{dt}\left[e^{-iwt}\right]_{t=0} = iw$$

bulunur. Benzer düşünceyle aşağıdaki bağıntı elde edilir.

$$\mathcal{F}\left\{\delta^{(n)}(t)\right\} = (iw)^n$$

4.7.5. t ve t^n Fonksiyonlarının Fourier Dönüşümü

t'nin Fourier dönüşümünü bulmak için $\delta'(t)$-fonksiyonunun Fourier dönüşümünü (4.7.4) kullanabiliriz. Dönüşümün simetri özelliğinden (4.16) faydalanalım.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\delta'(t)\} = iw &\Leftrightarrow \mathcal{F}\{it\} = 2\pi.\delta'(-w)\\ &\Leftrightarrow i\mathcal{F}\{t\} = -2\pi.\delta'(w)\\ &\Leftrightarrow \mathcal{F}\{t\} = i.2\pi.\delta'(w)\end{aligned}$$

olacaktır.

t^n nin Fourier dönüşümünü bulmak için $\delta^{(n)}(t)$-fonksiyonunun Fourier dönüşümünü (4.7.4) kullanabiliriz. Dönüşümün simetri özelliğinden (4.16) faydalanalım.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left\{\delta^{(n)}(t)\right\} = (iw)^n &\Leftrightarrow \mathcal{F}\{(it)^n\} = 2\pi.\delta^{(n)}(-w)\\ &\Leftrightarrow (i)^n\mathcal{F}\{t^n\} = 2\pi.(-1)^{(n)}\delta^{(n)}(w)\\ &\Leftrightarrow \mathcal{F}\{t^k\} = i^n.2\pi.\delta^{(n)}(w)\end{aligned}$$

olacaktır.

4.7.6. $f(t) = e^{iw_0t}$ Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

4.7.1'de ötelenmiş δ-fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulmuştuk. Dönüşümün simetri özelliğinden (4.16) faydalanalım.

$$\mathcal{F}\{\delta(t-t_0)\} = e^{-iwt_0} \Leftrightarrow \mathcal{F}\left\{e^{iw_0t}\right\} = 2\pi.\delta(w-w_0)$$

olacaktır. Buradan da ters dönüşüme geçersek

$$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(w-w_0)\} = \frac{e^{iw_0t}}{2\pi}$$

elde edilir.

4.7.7. $\boldsymbol{cosw_0t}$ ve $\boldsymbol{sinw_0t}$ Fonksiyonlarının Fourier Dönüşümü

$cosw_0t = \frac{e^{iw_0t}+e^{-iw_0t}}{2}$ olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda 4.7.6'da e^{iw_0t} fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulmuştuk. Bu bilgiler ışığında

$$\mathcal{F}\{cosw_0t\} = \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{iw_0t}\} + \frac{1}{2}\mathcal{F}\{e^{-iw_0t}\} = \pi.\delta(w - w_0) + \pi.\delta(w + w_0)$$

elde edilir.

$sinw_0t = \frac{e^{iw_0t}-e^{-iw_0t}}{2i}$ olduğundan benzer düşünceyi kullanalım.

$$\mathcal{F}\{sinw_0t\} = \frac{1}{2i}\mathcal{F}\{e^{iw_0t}\} - \frac{1}{2i}\mathcal{F}\{e^{-iw_0t}\} = i\pi.\delta(w + w_0) - i\pi.\delta(w - w_0)$$

4.7.8. İşaret (SGN-Signum) Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$f(t) = SGN(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlı fonksiyona işaret fonksiyonu denir. (4.26) ifadesinden

$$f'(t) = 2\delta(t)$$

olduğunu biliyoruz. Bu ifadenin Fourier dönüşümünü alalım

$$\mathcal{F}\{f'(t)\} = 2\mathcal{F}\{\delta(t)\}$$

(4.17) türevin Fourier dönüşümü yardımıyla

$$iw.F(w) = 2 \Leftrightarrow F(w) = \frac{2}{iw} = \mathcal{F}\{SGN(t)\}$$

bulunur.

4.7.9. Birim Basamak (Heaviside) Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ biçiminde tanımlı fonksiyona Birim Basamak Fonksiyonu denildiğini daha önce belirtmiştik. Bu fonksiyonun Fourier dönüşümünü bulmak için

$$H(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} SGN(t)$$

eşitliğini kullanabiliriz. Böylece

$$\mathcal{F}\{H(t)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}\right\} + \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} SGN(t)\right\} = \pi\delta(w) + \frac{1}{iw}$$

sonucuna ulaşırız.

4.7.10. $\boldsymbol{f(t) = e^{-at}.H(t)}$, $\boldsymbol{a} > 0$ Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$$\mathcal{F}\{e^{-at}.H(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}.H(t)e^{-iwt}.dt = \int_{0}^{\infty} e^{-(a+iw)t}.dt = \frac{1}{a+iw}$$

elde edilir. Ötelenmiş birim basamak fonksiyonu için benzer düşünceyle hareket edersek,

$$\mathcal{F}\{e^{-at}.H(t-b)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}.H(t-b)e^{-iwt}.dt = \int_{b}^{\infty} e^{-(a+iw)t}.dt = \frac{e^{-ab}.e^{-ibw}}{a+iw}$$

sonucuna ulaşırız.

4.7.11. $f(t) = e^{-a|t|}$ Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}.e^{-iwt}.dt$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-iw)t}.dt + \int_{0}^{\infty} e^{-(a+iw)t}.dt$$
$$= \frac{1}{a-iw} + \frac{1}{a+iw} = \frac{2a}{a^2+w^2}$$
$$= \frac{2a}{a^2+w^2}$$

4.7.12. $f(t) = \frac{1}{a^2+t^2}$ Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

4.7.11'de $e^{-a|t|}$ fonksiyonunun Fourier dönüşümünü bulmuştuk. Dönüşümün simetri özelliğinden (4.16) faydalanalım.

$$\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+w^2}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{2a}{a^2+t^2}\right\} = 2\pi.e^{-a|w|}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{F}\left\{\frac{1}{a^2+t^2}\right\} = \frac{\pi}{a}.e^{-a|w|}$$

4.7.13. $f(t) = e^{-at^2}$, $a > 0$ Gauss Fonksiyonunun Fourier Dönüşümü

$$\mathcal{F}\{e^{-at^2}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2}.e^{-iwt}.dt = \int_{0}^{\infty} e^{-a\left(t^2+iwt/a\right)}dt$$

elde edilir. Üssü tam kare yapmak için integrantı $\left(e^{-w^2/4a}e^{w^2/4a}\right)$ ile çarpalım.

$$\mathcal{F}\{e^{-at^2}\} = \int_{0}^{\infty} e^{-w^2/4a}.e^{-a\left(t^2+i\frac{wt}{a}-\frac{w^2}{4a^2}\right)}dt$$
$$\mathcal{F}\{e^{-at^2}\} = e^{-w^2/4a}\int_{0}^{\infty} e^{-a\left(t+\frac{iw}{a}\right)^2}dt$$

$\sqrt{a}\left(t+\frac{iw}{a}\right)=u$ dersek

$$\mathcal{F}\left\{e^{-at^2}\right\}=e^{-w^2/4a}\int_0^{\infty}\frac{e^{-u^2}}{\sqrt{a}}dt$$

Şeklinde Euler integraline ulaşılır. Bu integralin sonucu $\sqrt{\pi}$ dir.

$$\mathcal{F}\left\{e^{-at^2}\right\}=\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-w^2/4a}$$

sonucuna ulaşırız.

BÖLÜM 5

FOURIER DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde sabit katsayılı diferansiyel denklemlerin Fourier dönüşümü yardımıyla çözümlerine ulaşmaya çalışacağız. Bunun için a ve b sabitler ve $r(t)$ Fourier dönüşümü koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere

$$y''(t) + ay'(t) + by(t) = r(t)$$

denklemini ele alacağız. Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü biliyoruz.
$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^2 Y(w) + a(iw)Y(w) + aY(w) = R(w)$$
$$Y(w) = \frac{R(w)}{-w^2 + a(iw) + b}$$

elde edilir ve ters dönüşüme geçilirse,

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{R(w)}{-w^2 + a(iw) + b}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(w).e^{iwt}}{-w^2 + a(iw) + b} dw$$

bulunur.

5.1. SAĞ TARAFI δ-FONKSİYONU YA DA BİRİM BASAMAK (HEAVİSİDE) FONKSİYONU OLAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde sağ tarafı δ-fonksiyonu ya da birim basamak (Heaviside) fonksiyonu olan diferansiyel denklemlerin çözümlerine ait örnekler yapacağız.

Örnekler

1. $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 3\delta(t)$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü ve $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ (4.7.1) olduğunu biliyoruz.
$\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^2 Y(w) + 5(iw)Y(w) + 6Y(w) = 3$$
$$[(iw)^2 + 5(iw) + 6]Y(w) = 3$$
$$Y(w) = \left[\frac{3}{(iw)^2 + 5(iw) + 6}\right]$$
$$Y(w) = 3\left[\frac{1}{iw+2} - \frac{1}{iw+3}\right]$$

elde edilir ve $\mathcal{F}\{e^{-at}.H(t)\} = \frac{1}{a+iw}$ (4.7.10) olduğunu bilerek ters dönüşüme geçilirse,

$$y(t) = 3\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{iw+2}\right\} - 3\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{iw+3}\right\}$$
$$y(t) = 3e^{-2t}H(t) - 3e^{-3t}H(t)$$
$$y(t) = 3[e^{-2t} - e^{-3t}]\,H(t)$$

sonucuna ulaşılır.

2. $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 30H(t)$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü ve $\{H(t)\} = \pi\delta(w) + \frac{1}{iw}$ (4.7.9) olduğunu biliyoruz. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^2 Y(w) + 5(iw)Y(w) + 6Y(w) = 30\left[\pi\delta(w) + \frac{1}{iw}\right]$$
$$[(iw)^2 + 5(iw) + 6]Y(w) = \frac{30.\, i\pi w.\, \delta(w) + 30}{iw}$$

(4.21)'den $w.\, \delta(w) = 0$ olduğunu biliyoruz. Böylece

$$Y(w) = \frac{30}{iw[(iw)^2 + 5(iw) + 6]}$$

ifadesi elde edilir ve ters dönüşüme geçilirse,

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{30}{iw[(iw)^2 + 5(iw) + 6]}\right\}$$

yazılır.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{10}{iw + 3} + \frac{-15}{iw + 2} + \frac{5}{iw}\right\}$$
$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{10}{iw + 3}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{15}{iw + 2}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{5}{iw}\right\}$$

$\mathcal{F}\{e^{-at}.\, H(t)\} = \frac{1}{a+iw}$ (4.7.10) olduğunu bilerek ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = 10e^{-3t}.\, H(t) - 15e^{-2t}.\, H(t) + 5.\, H(t)$$
$$y(t) = [10e^{-3t} - 15e^{-2t} + 5].\, H(t)$$

3. $y^{(4)}(t) - y(t) = \delta(t-2)$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü ve $\mathcal{F}\{\delta(t-2)\} = e^{-2iw}$ (4.7.1) olduğunu biliyoruz. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^4 Y(w) - Y(w) = e^{-2iw}$$
$$[w^4 - 1]Y(w) = e^{-2iw}$$
$$Y(w) = \frac{e^{-2iw}}{w^4 - 1}$$
$$Y(w) = \frac{e^{-2iw}}{-4i(iw-i)} - \frac{e^{-2iw}}{-4i(iw+i)} - \frac{e^{-2iw}}{4(iw+1)} + \frac{e^{-2iw}}{4(iw-1)}$$
$$Y(w) = \frac{ie^{-2iw}}{4(iw-i)} - \frac{ie^{-2iw}}{4(iw+i)} - \frac{e^{-2iw}}{4(iw+1)} + \frac{e^{-2iw}}{4(iw-1)}$$

elde edilir ve $\mathcal{F}\{e^{-at}.H(t-b)\} = \frac{e^{-ab}.e^{-ibw}}{a+iw}$ (4.7.10) olduğunu bilerek ters dönüşüme geçeceğiz, ancak dördüncü ifadede $a = -1$ olduğundan ters Fourier Dönüşümünü alırken $H(-t+2)$ olması gerektiğini unutmamalıyız.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{ie^{-2iw}}{4(iw-i)}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{ie^{-2iw}}{4(iw+i)}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{ie^{-2iw}}{4(iw+1)}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{ie^{-2iw}}{4(iw-1)}\right\}$$
$$y(t) = \frac{ie^{it}}{4e^{2i}} - \frac{ie^{-it}}{4e^{-2i}} - \frac{e^{-t}H(t-2)}{4e^{-2}} + \frac{e^{t}H(-t+2)}{4e^{-2}}$$
$$y(t) = \frac{-1}{2} sin(t-2) - \frac{1}{4}e^{-t+2}H(t-2) + \frac{1}{4}e^{t-2}.H(-t+2)$$

5.2. SAĞ TARAFI $cosw_0t$ VE $sinw_0t$ FONKSİYONLARI OLAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde sağ tarafı $cosw_0t$ ve $sinw_0t$ fonksiyonları olan diferansiyel denklemlerin çözümlerine ait örnekler yapacağız. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü ve (4.7.7)'den $\mathcal{F}\{sinw_0t\} = i\pi.\delta(w+w_0) - i\pi.\delta(w-w_0)$ ve $\mathcal{F}\{cosw_0t\} = \pi.\delta(w-w_0) + \pi.\delta(w+w_0)$ olduğunu biliyoruz.

Örnekler

1. $y''(t) + 4y(t) = \sin t$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^2 Y(w) + Y(w) = i\pi.\delta(w+1) - i\pi.\delta(w-1)$$
$$[(iw)^2 + 4]Y(w) = i\pi.\delta(w+1) - i\pi.\delta(w-1)$$
$$Y(w) = \frac{i\pi.\delta(w+1) - i\pi.\delta(w-1)}{4 - w^2}$$

elde edilir ve ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{i\pi.\delta(w+1) - i\pi.\delta(w-1)}{4 - w^2} e^{iwt} dw$$
$$y(t) = \frac{i}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(w+1)e^{iwt}}{4 - w^2} dw - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(w-1)e^{iwt}}{4 - w^2} dw\right]$$

δ-fonksiyonunun eleme özelliğini (4.19) kullanarak

$$y(t) = \frac{i}{2}\left[\frac{e^{-it}}{3} - \frac{e^{it}}{3}\right]$$
$$y(t) = \frac{1}{3}\left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)$$
$$y(t) = \frac{1}{3}\sin t$$

bulunur.

2. $y^{(4)}(t) + y(t) = 2\cos t$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^4 Y(w) + Y(w) = 2\pi.\delta(w-1) + 2\pi.\delta(w+1)$$

$$[(iw)^4 + 1]Y(w) = 2\pi.\delta(w-1) + 2\pi.\delta(w+1)$$
$$Y(w) = \frac{2\pi.\delta(w-1) + 2\pi.\delta(w+1)}{w^4 + 1}$$

elde edilir ve ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi.\delta(w-1) + 2\pi.\delta(w+1)}{w^4 + 1} e^{iwt} dw$$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(w-1)e^{iwt}}{w^4 + 1} dw + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(w+1)e^{iwt}}{w^4 + 1} dw$$

δ-fonksiyonunun eleme özelliğini (4.19) kullanarak

$$y(t) = \frac{e^{it}}{2} + \frac{e^{-it}}{2} = \cos t$$

bulunur.

3. $y'(t) + 3y(t) = \cos 2t$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$iwY(w) + 3Y(w) = \pi.\delta(w-2) + \pi.\delta(w+2)$$
$$[iw + 3]Y(w) = \pi.\delta(w-2) + \pi.\delta(w+2)$$
$$Y(w) = \frac{\pi.\delta(w-2) + \pi.\delta(w+2)}{iw + 3}$$

elde edilir ve ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\pi.\delta(w-2) + \pi.\delta(w+2)}{iw + 3} e^{iwt} dw$$
$$y(t) = \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(w-2)e^{iwt}}{iw + 3} dw + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(w+2)e^{iwt}}{iw + 3} dw\right]$$

δ-fonksiyonunun eleme özelliğini (4.19) kullanarak

$$y(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2it}}{3+2i} + \frac{e^{-2it}}{3-2i}\right]$$
$$y(t) = \frac{e^{2it}(3-2i) + e^{-2it}(3+2i)}{26}$$
$$y(t) = \frac{3}{13}\cos 2t + \frac{2}{13}\sin 2t$$

bulunur.

4. $y''(t) + 4y(t) = 2\sin 3t$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^2 Y(w) + Y(w) = 2i\pi.\delta(w+3) - 2i\pi.\delta(w-3)$$
$$[(iw)^2 + 4]Y(w) = i\pi.\delta(w+3) - i\pi.\delta(w-3)$$
$$Y(w) = \frac{2i\pi.\delta(w+3) - 2i\pi.\delta(w-3)}{4-w^2}$$

elde edilir ve ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2i\pi.\delta(w+3) - 2i\pi.\delta(w-3)}{4-w^2} e^{iwt} dw$$
$$y(t) = i\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(w+3)e^{iwt}}{4-w^2} dw - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(w-3)e^{iwt}}{4-w^2} dw\right]$$

δ-fonksiyonunun eleme özelliğini (4.19) kullanarak

$$y(t) = \frac{i}{2}\left[\frac{e^{-3it}}{-5} - \frac{e^{3it}}{-5}\right]$$
$$y(t) = \frac{-2}{5}\sin 3t$$

bulunur.

5.3. SAĞ TARAFI $f(t) = e^{-a|t|}$ FONKSİYONU OLAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde sağ tarafı $f(t) = e^{-a|t|}$ fonksiyonu olan diferansiyel denklemlerin çözümlerine ait örnekler yapacağız. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü ve (4.7.11)'den $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+w^2}$, $(a > 0)$ olduğunu biliyoruz.

<u>Örnekler</u>

1. $y''(t) + y(t) = e^{-|t|}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^2 Y(w) + Y(w) = \frac{2}{1+w^2}$$

$$[(iw)^2 + 1]Y(w) = \frac{2}{1+w^2}$$

$$Y(w) = \frac{2}{(1+w^2)(1-w^2)}$$

$$Y(w) = \frac{1}{2i(iw-i)} - \frac{1}{2i(iw+i)} + \frac{1}{1+w^2}$$

elde edilir ve (4.7.10)'dan $\mathcal{F}\{e^{-at}.H(t)\} = \frac{1}{a+iw}$ ve (4.7.11)'den $\mathcal{F}\{e^{-a|t|}\} = \frac{2a}{a^2+w^2}$ olduğunu bilerek ters dönüşüme geçeceğiz.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2i(iw-i)}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2i(iw+i)}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{1+w^2}\right\}$$

$$y(t) = \frac{e^{it}}{2i} - \frac{e^{-it}}{2i} + \frac{e^{-|t|}}{2}$$

$$y(t) = \sin t + \frac{e^{-|t|}}{2}$$

2. $y'(t) + y(t) = e^{-|t|}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$iwY(w) + Y(w) = \frac{2}{1+w^2}$$
$$[iw+1]Y(w) = \frac{2}{1+w^2}$$
$$Y(w) = \frac{2}{(1+w^2)(iw+1)}$$
$$Y(w) = \frac{2}{i(w-i)^2(w+i)}$$

elde edilir ve (4.7)'yi kullanarak ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(w)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{i(w-i)^2(w+i)} e^{iwt} dw$$

Rezidü teoremini kullanalım. $w = i$ iki katlı kutup noktası olduğundan

$$y(t) = \frac{1}{i\pi}.2\pi i.\frac{d}{dw}\left[\frac{e^{iwt}}{(w+i)}\right]_{w=i} = \left(t+\frac{1}{2}\right)e^{-t}, \ \ t > 0 \text{ için}$$

bulunur. $w = -i$ tek katlı kutup noktası olduğundan

$$y(t) = \frac{1}{i\pi}.(-2\pi i)\left[\frac{e^{iwt}}{(w-i)^2}\right]_{w=-i} = \frac{e^t}{2}, \ \ t < 0 \text{ için}$$

elde edilir. Bu iki ifadeyi birleştirdiğimizde

$$y(t) = \left(t+\frac{1}{2}\right)e^{-t}H(t) + \frac{e^t}{2}H(-t)$$

sonucuna ulaşırız.

3. $y'(t) + y(t) = e^{-2|t|}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$iwY(w) + Y(w) = \frac{4}{4+w^2}$$
$$[iw+1]Y(w) = \frac{4}{4+w^2}$$
$$Y(w) = \frac{4}{i(w-i)(w-2i)(w+2i)}$$

elde edilir ve (4.7)'yi kullanarak ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(w)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{i(w-i)(w-2i)(w+2i)} e^{iwt} dw$$

Rezidü teoremini kullanalım. $w = i$ ve $w = 2i$ tek katlı kutup noktası olduğundan

$$y(t) = \frac{2}{i\pi}.2\pi i\left[\frac{e^{iwt}}{(w-2i)(w+2i)}\right]_{w=i} + \frac{2}{i\pi}.2\pi i\left[\frac{e^{iwt}}{(w-i)(w+2i)}\right]_{w=2i}$$
$$y(t) = \frac{4}{3}e^{-t} - e^{-2t}, \quad t > 0 \text{ için}$$

bulunur. $w = -2i$ tek katlı kutup noktası olduğundan

$$y(t) = \frac{2}{i\pi}.(-2\pi i)\left[\frac{e^{iwt}}{(w-i)(w-2i)}\right]_{w=-2i} = \frac{e^{2t}}{3}, \quad t < 0 \text{ için}$$

elde edilir. Bu iki ifadeyi birleştirdiğimizde

$$y(t) = \left(\frac{4}{3}e^{-t} - e^{-2t}\right)H(t) + \frac{e^{2t}}{3}H(-t)$$

sonucuna ulaşırız.

4. $y''(t) - 2y'(t) - 8y(t) = e^{-|t|}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^2 Y(w) - 2iwY(w) - 8Y(w) = \frac{2}{1+w^2}$$

$$[(iw)^2 - 2iw - 8]Y(w) = \frac{2}{1+w^2}$$

$$Y(w) = \frac{-2}{(w-i)(w-2i)(w+4i)(w+i)}$$

elde edilir ve (4.7)'yi kullanarak ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(w)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2}{(w-i)(w-2i)(w+4i)(w+i)} e^{iwt} dw$$

Rezidü teoremini kullanalım. $w = i$ ve $w = 2i$ tek katlı kutup noktaları olduğundan

$$y(t) = \frac{-1}{\pi} 2\pi i \left[\left. \frac{e^{iwt}}{(w-2i)(w+4i)(w+i)} \right|_{w=i} + \left. \frac{e^{iwt}}{(w-i)(w+4i)(w+i)} \right|_{w=2i} \right]$$

$$y(t) = \frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{-t}, \quad t > 0 \text{ için}$$

bulunur. $w = -i$ ve $w = -4i$ tek katlı kutup noktaları olduğundan

$$y(t) = \frac{-1}{\pi}(-2\pi i) \left[\left. \frac{e^{iwt}}{(w-i)(w-2i)(w+4i)} \right|_{w=-i} + \left. \frac{e^{iwt}}{(w-i)(w-2i)(w+i)} \right|_{w=-4i} \right]$$

$$y(t) = \frac{-1}{9}e^{t} + \frac{1}{45}e^{4t}, \quad t < 0 \text{ için}$$

elde edilir. Bu iki ifadeyi birleştirdiğimizde

$$y(t) = \left(\frac{1}{9}e^{-2t} - \frac{1}{5}e^{-t}\right)H(t) + \left(\frac{1}{45}e^{4t} - \frac{1}{9}e^{t}\right)H(-t)$$

sonucuna ulaşırız.

5.4. SAĞ TARAFI POLİNOM FONKSİYONU OLAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde sağ tarafı polinom fonksiyonu olan diferansiyel denklemlerin çözümlerine ait örnekler yapacağız. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü ve (4.7.3)'den $\mathcal{F}\{a\} = 2a\pi.\delta(w)$ ve (4.7.5)'den $\mathcal{F}\{t^n\} = i^n.2\pi.\delta^{(n)}(w)$ olduğunu biliyoruz.

<u>Örnekler</u>

1. $y''(t) + 2y'(t) - 3y(t) = 3t + 5$ diferansiyel denklemini çözünüz.
Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^2Y(w) + 2iwY(w) - 3Y(w) = 3i.2\pi.\delta'(w) + 10\pi.\delta(w)$$

$$[(iw)^2 + 2iw - 3]Y(w) = i.6\pi.\delta'(w) + 10\pi.\delta(w)$$

$$Y(w) = \frac{i.6\pi.\delta'(w)}{-w^2 + 2iw - 3} + \frac{10\pi.\delta(w)}{-w^2 + 2iw - 3}$$

elde edilir ve (4.7)'yi kullanarak ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i.6\pi.\delta'(w)}{-w^2 + 2iw - 3}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{10\pi.\delta(w)}{-w^2 + 2iw - 3}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i.6\pi.\delta'(w)}{-w^2 + 2iw - 3}e^{iwt}dw + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{10\pi.\delta(w)}{-w^2 + 2iw - 3}e^{iwt}dw$$

δ-fonksiyonunun türevi (4.22) ve δ-fonksiyonunun eleme özelliğini (4.19) kullanarak

$$y(t) = (-1)^1.\frac{d}{dw}\left[\frac{3i.e^{iwt}}{-w^2 + 2iw - 3}\right]_{w=0} + \left[\frac{5.e^{iwt}}{-w^2 + 2iw - 3}\right]_{w=0}$$

$$y(t) = -t - \frac{7}{3}$$

sonucuna ulaşılır.

2. $y''(t) + 2y(t) = t^2$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^2 Y(w) + 2Y(w) = i^2.2\pi.\delta''(w)$$
$$[(iw)^2 + 2]Y(w) = -2\pi.\delta''(w)$$
$$Y(w) = \frac{2\pi.\delta''(w)}{w^2 - 2}$$

elde edilir ve (4.7)'yi kullanarak ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi.\delta''(w)}{w^2 - 2}\right\}$$
$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi.\delta''(w)}{w^2 - 2} e^{iwt} dw$$

δ-fonksiyonunun türevi (4.23) özelliğini kullanarak

$$y(t) = (-1)^2.\frac{d^2}{dw^2}\left[\frac{e^{iwt}}{w^2 - 2}\right]_{w=0}$$
$$y(t) = \frac{t^2 - 1}{2}$$

sonucuna ulaşılır.

3. $y''(t) - y'(t) + 2y(t) = 2t^2 + 13$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^2 Y(w) - iwY(w) + 2Y(w) = 2i^2.2\pi.\delta''(w) + 26\pi.\delta(w)$$
$$[(iw)^2 - iw + 2]Y(w) = 2i^2.2\pi.\delta''(w) + 26\pi.\delta(w)$$
$$Y(w) = \frac{-4\pi.\delta''(w)}{-w^2 - iw + 2} + \frac{26\pi.\delta(w)}{-w^2 - iw + 2}$$

elde edilir ve (4.7)'yi kullanarak ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{4\pi.\delta''(w)}{w^2 + iw - 2}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{-26\pi.\delta(w)}{w^2 + iw - 2}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{4\pi.\delta''(w)}{w^2 + iw - 2}e^{iwt}dw - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{26\pi.\delta(w)}{w^2 + iw - 2}e^{iwt}dw$$

δ-fonksiyonunun türevi (4.23) ve δ-fonksiyonunun eleme özelliğini (4.19) kullanarak

$$y(t) = (-1)^2.\frac{d^2}{dw^2}\left[\frac{2.e^{iwt}}{w^2 + iw - 2}\right]_{w=0} - \left[\frac{13.e^{iwt}}{w^2 + iw - 2}\right]_{w=0}$$

$$y(t) = t^2 + t + 6$$

sonucuna ulaşılır.

4. $y''(t) - 2y'(t) + y(t) = t^2 - t$ diferansiyel denklemini çözünüz.
Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$(iw)^2Y(w) - 2iwY(w) + Y(w) = i^2.2\pi.\delta''(w) - i.2\pi.\delta'(w)$$
$$[(iw)^2 - 2iw + 1]Y(w) = -2\pi.\delta''(w) - i.2\pi.\delta'(w)$$
$$Y(w) = \frac{2\pi.\delta''(w)}{w^2 + 2iw - 1} + \frac{i.2\pi.\delta'(w)}{w^2 + 2iw - 1}$$

elde edilir ve (4.7)'yi kullanarak ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2\pi.\delta''(w)}{w^2 + 2iw - 1}\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{i.2\pi.\delta'(w)}{w^2 + 2iw - 1}\right\}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi.\delta''(w)}{w^2 + 2iw - 1}e^{iwt}dw + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i.2\pi.\delta'(w)}{w^2 + 2iw - 1}e^{iwt}dw$$

δ-fonksiyonunun türevi (4.23) özelliğini kullanarak

$$y(t) = (-1)^2.\frac{d^2}{dw^2}\left[\frac{e^{iwt}}{w^2+2iw-1}\right]_{w=0} + (-1)^1.\frac{d}{dw}\left[\frac{i.e^{iwt}}{w^2+2iw-1}\right]_{w=0}$$

$$y(t) = t^2 + 3t + 4$$

sonucuna ulaşılır.

5. $y'(t) + y(t) = t + 1$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım. (4.5.2)'den Zaman Öteleme Özelliğinin $\mathcal{F}\{f(t-t_0)\} = e^{-iwt_0}.F(w)$ olduğunu biliyoruz. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$iwY(w) + Y(w) = e^{iw}.i.2\pi.\delta'(w)$$
$$[iw+1]Y(w) = e^{iw}.i.2\pi.\delta'(w)$$
$$Y(w) = \frac{e^{iw}.i.2\pi.\delta'(w)}{iw+1}$$

elde edilir ve (4.7)'yi kullanarak ters dönüşüme geçelim.

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{e^{iw}.i.2\pi.\delta'(w)}{iw+1}\right\}$$
$$y(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iw}.i.2\pi.\delta'(w)}{iw+1}e^{iwt}dw$$

δ-fonksiyonunun türevi (4.22) özelliğini kullanarak

$$y(t) = (-1)^1.\frac{d}{dw}\left[\frac{i.e^{iw(t+1)}}{iw+1}\right]_{w=0}$$

$$y(t) = t$$

sonucuna ulaşılır.

5.5. SABİT KATSAYILI HOMOJEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde sabit katsayılı homojen diferansiyel denklemlerin çözümlerine farklı bir yaklaşım sergileyeceğiz. Bu denklemlerde ikinci taraftaki sıfır yerine impuls (dirac delta) fonksiyonu alarak denklemin bir özel çözümünün elde edilebileceğini göstereceğiz.

Teorem 5.5.1: $a, b > 0$ olmak üzere ikinci basamaktan sabit katsayılı homojen

$$y'' - (a+b)y' + a.b.y = 0$$

denkleminin

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = -1$$

başlangıç şartını sağlayan özel çözümü Fourier dönüşümü yardımıyla

$$y(t) = \frac{e^{at} - e^{bt}}{b - a}$$

olarak bulunur.

İspat

Denkleme Fourier Dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{F}[y'' - (a+b)y' + a.b.y] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$
$$((iw)^2 - (a+b)iw + a.b)Y(w) = 1$$
$$Y(w) = \frac{1}{(iw)^2 - (a+b)iw + a.b}$$
$$Y(w) = \frac{1}{(iw-a)(iw-b)}$$

$$Y(w) = \frac{-1}{(w + ai)(w + bi)}$$

Bu son elde edilen eşitliğin her iki yanının ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(Y(w)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{(w + ai)(w + bi)} e^{iwt} dw$$

bulunur. Bu son elde edilen integralde rezidü teoremini uygularsak

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}.(-2\pi i)\left[\frac{-e^{i(-ia)t}}{(-ia + bi)} + \frac{-e^{i(-ib)t}}{(-ib + ai)}\right] = \frac{e^{at} - e^{bt}}{b - a}$$

elde edilir. Bu çözüm de

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = -1$$

başlangıç şartını sağlayan çözümdür.

Teorem 5.5.2: $a, b < 0$ olmak üzere ikinci basamaktan sabit katsayılı homojen

$$y'' - (a + b)y' + a.b.y = 0$$

denkleminin

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

başlangıç şartını sağlayan özel çözümü Fourier dönüşümü yardımıyla

$$y(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{b - a}$$

olarak bulunur.

İspat

Denkleme Fourier Dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{F}[y'' - (a+b)y' + a.b.y] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$
$$((iw)^2 - (a+b)iw + a.b)Y(w) = 1$$
$$Y(w) = \frac{1}{(iw)^2 - (a+b)iw + a.b}$$
$$Y(w) = \frac{1}{(iw-a)(iw-b)}$$
$$Y(w) = \frac{-1}{(w+ai)(w+bi)}$$

Bu son elde edilen eşitliğin her iki yanının ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(Y(w)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{(w+ai)(w+bi)} e^{iwt} dw$$

bulunur. Bu son elde edilen integralde rezidü teoremini uygularsak

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}.(2\pi i)\left[\frac{-e^{i(-ia)t}}{(-ia+bi)} + \frac{-e^{i(-ib)t}}{(-ib+ai)}\right] = \frac{e^{bt} - e^{at}}{b-a}$$

elde edilir. Bu çözüm de

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

başlangıç şartını sağlayan çözümdür.

Teorem 5.5.3: $a > 0$ olmak üzere ikinci basamaktan sabit katsayılı homojen

$$y'' - 2ay' + a^2.y = 0$$

denkleminin

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = -1$$

başlangıç şartını sağlayan özel çözümü Fourier dönüşümü yardımıyla

$$y(t) = -t.e^{at}$$

olarak bulunur.

İspat

Denkleme Fourier Dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{F}[y'' - 2ay' + a^2.y] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$
$$((iw)^2 - 2aiw + a^2)Y(w) = 1$$
$$Y(w) = \frac{1}{(iw-a)^2}$$
$$Y(w) = \frac{-1}{(w+ia)^2}$$

Bu son elde edilen eşitliğin her iki yanının ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(Y(w)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-1}{(w+ia)^2}e^{iwt}dw$$

bulunur. Bu son elde edilen integralde rezidü teoremini uygularsak, $F(w) = e^{iwt}$ olmak üzere

$$y(t) = \frac{1}{-2\pi}(-2\pi i)F'(-ia)$$

olur. $F'(w) = it.e^{iwt}$ olduğundan

$$y(t) = i.i.t.e^{i.(-ia).t} = -t.e^{at}$$

elde edilir. Bu çözüm de

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = -1$$

başlangıç şartını sağlayan çözümdür.

Teorem 5.5.4: $a < 0$ olmak üzere ikinci basamaktan sabit katsayılı homojen

$$y'' - 2ay' + a^2.y = 0$$

denkleminin

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

başlangıç şartını sağlayan özel çözümü Fourier dönüşümü yardımıyla

$$y(t) = t.e^{at}$$

olarak bulunur.

İspat

Denkleme Fourier Dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{F}[y'' - 2ay' + a^2.y] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$
$$((iw)^2 - 2aiw + a^2)Y(w) = 1$$
$$Y(w) = \frac{1}{(iw - a)^2}$$
$$Y(w) = \frac{-1}{(w + ia)^2}$$

Bu son elde edilen eşitliğin her iki yanının ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(Y(w)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{(w+ia)^2} e^{iwt} dw$$

bulunur. Bu son elde edilen integralde rezidü teoremini uygularsak $F(w) = e^{iwt}$ olmak üzere

$$y(t) = \frac{1}{-2\pi}(2\pi i)F'(-ia)$$

olur. $F'(w) = it.e^{iwt}$ olduğundan

$$y(t) = -i.i.t.e^{i.(-ia).t} = t.e^{at}$$

elde edilir. Bu çözüm de

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

başlangıç şartını sağlayan çözümdür.

Teorem 5.5.5: $a < 0$ olmak üzere ikinci basamaktan sabit katsayılı homojen

$$y'' - 2ay' + (a^2 + b^2).y = 0$$

denkleminin

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

başlangıç şartını sağlayan özel çözümü Fourier dönüşümü yardımıyla

$$y(t) = \frac{e^{at}.\sin bt}{b}$$

olarak bulunur.

İspat

Denkleme Fourier Dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{F}[y'' - 2ay' + (a^2 + b^2).y] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$
$$\big((iw)^2 - 2aiw + (a^2 + b^2)\big)Y(w) = 1$$
$$Y(w) = \frac{1}{(iw - a - ib)(iw - a + ib)}$$
$$Y(w) = \frac{-1}{(w - b + ia)(w + b + ia)}$$

Bu son elde edilen eşitliğin her iki yanının ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(Y(w)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{(w - b + ia)(w + b + ia)} e^{iwt} dw$$

bulunur. Bu son elde edilen integralde rezidü teoremini uygularsak

$$y(t) = \frac{-1}{2\pi}.(2\pi i)\left[\frac{e^{i(b-ia)t}}{(b - ia + b + ia)} + \frac{e^{i(-b-ia)t}}{(-b - ia - b + ia)}\right]$$
$$y(t) = -i.e^{at}\left[\frac{e^{ibt}}{2b} - \frac{e^{-ibt}}{2b}\right]$$
$$y(t) = \frac{e^{at}.\sin bt}{b}$$

elde edilir. Bu çözüm de aşağıdaki başlangıç şartlarını sağlayan çözümdür.

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = 1$$

<u>Teorem 5.5.6:</u> $a > 0$ olmak üzere ikinci basamaktan sabit katsayılı homojen

$$y'' - 2ay' + (a^2 + b^2).y = 0$$

denkleminin

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = -1$$

başlangıç şartını sağlayan özel çözümü Fourier dönüşümü yardımıyla

$$y(t) = \frac{-e^{at}. \sin bt}{b}$$

olarak bulunur.

İspat

Denkleme Fourier Dönüşümü uygulayalım.

$$\mathcal{F}[y'' - 2ay' + (a^2 + b^2). y] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$
$$\big((iw)^2 - 2aiw + (a^2 + b^2)\big)Y(w) = 1$$
$$Y(w) = \frac{1}{(iw - a - ib)(iw - a + ib)}$$
$$Y(w) = \frac{-1}{(w - b + ia)(w + b + ia)}$$

Bu son elde edilen eşitliğin her iki yanının ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(Y(w)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{(w - b + ia)(w + b + ia)} e^{iwt} dw$$

bulunur. Bu son elde edilen integralde rezidü teoremini uygularsak

$$y(t) = \frac{-1}{2\pi}. (-2\pi i)\left[\frac{e^{i(b-ia)t}}{(b - ia + b + ia)} + \frac{e^{i(-b-ia)t}}{(-b - ia - b + ia)}\right]$$
$$y(t) = i. e^{at}\left[\frac{e^{ibt}}{2b} - \frac{e^{-ibt}}{2b}\right]$$
$$y(t) = \frac{-e^{at}. \sin bt}{b}$$

elde edilir. Bu çözüm de

$$y(0) = 0, \qquad y'(0) = -1$$

başlangıç şartını sağlayan çözümdür.

Örnekler

1. $y' - 5y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denklemin her iki yanının Fourier dönüşümünü alalım. Burada ikinci taraftaki sıfır yerine δ alıyoruz. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü ve $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ (4.7.1) olduğunu biliyoruz. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$\mathcal{F}[y' - 5y] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$
$$(iw - 5)Y(w) = 1$$
$$Y(w) = \frac{1}{iw - 5}$$

Bu son elde edilen eşitliğin her iki yanının ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(Y(w)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwt}}{i(w + 5i)}\,dw$$

Bu son elde edilen integralde Rezidü teoremini uygularsak

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}.(-2\pi i).\left[\frac{e^{iwt}}{i}\right]_{w=-5i}$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}.(-2\pi i)\frac{1}{i}e^{i(-5i).t} = -e^{5t}$$

elde edilir. Bu elde edilen çözüm verilen denklemin $y(0) = -1$ şartını sağlayan özel çözümüdür.

2. $y'' + 3y' + 2y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denklemin her iki yanının Fourier dönüşümünü alalım. Burada ikinci taraftaki sıfır yerine δ alıyoruz. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü ve $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ (4.7.1) olduğunu biliyoruz. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$\mathcal{F}[y'' + 3y' + 2y] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$
$$((iw)^2 + 3iw + 2)Y(w) = 1$$
$$Y(w) = \frac{1}{(iw+1)(iw+2)}$$

Bu son elde edilen eşitliğin her iki yanının ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(Y(w)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwt}}{-(w-i)(w-2i)}dw$$

Bu son elde edilen integralde rezidü teoremini uygularsak

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}.(2\pi i).\left[\frac{e^{iwt}}{-(w-2i)}\right]_{w=i} + \frac{1}{2\pi}.(2\pi i).\left[\frac{e^{iwt}}{-(w-i)}\right]_{w=2i}$$
$$y(t) = \frac{1}{2\pi}2\pi i\left[\frac{e^{i.i.t}}{-(-i)} + \frac{e^{i.2i.t}}{-i}\right]$$
$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

elde edilir. Bu elde edilen çözüm verilen denklemin $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ şartını sağlayan çözümdür.

3. $y'' - 8y' + 16y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denklemin her iki yanının Fourier dönüşümünü alalım. Burada ikinci taraftaki sıfır yerine δ alıyoruz. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü ve $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ (4.7.1) olduğunu biliyoruz. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$\mathcal{F}[y'' - 8y' + 16y] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$
$$((iw)^2 - 8iw + 16)Y(w) = 1$$
$$Y(w) = \frac{1}{(iw-4)^2}$$

Bu son elde edilen eşitliğin her iki yanının ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(Y(w)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwt}}{-(w+4i)^2} dw$$

Bu son elde edilen integralde Rezidü teoremini uygularsak

$$y(t) = \frac{1}{-2\pi}.2\pi i.\frac{d}{dw}[e^{iwt}]_{w=-4i}$$
$$y(t) = -i.i.t.e^{i.(-4i).t} = t.e^{4t}$$

bulunur. Bu elde edilen çözüm verilen denklemin $y(0) = 0, y'(0) = 1$ şartını sağlayan çözümdür.

4. $y'' + 2y' + 2y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denklemin her iki yanının Fourier dönüşümünü alalım. Burada ikinci taraftaki sıfır yerine δ alıyoruz. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü ve $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ (4.7.1) olduğunu biliyoruz. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$\mathcal{F}[y'' + 2y' + 2y] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$
$$((iw)^2 + 2iw + 2)Y(w) = 1$$
$$Y(w) = \frac{1}{(iw+1)^2 + 1}$$

Bu son elde edilen eşitliğin her iki yanının ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(Y(w)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwt}}{(iw+1-i)(iw+1+i)} dw$$

Bu son elde edilen integralde Rezidü teoremini uygularsak

$$y(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwt}}{(w-1-i)(w-i+1)} dw$$

$$y(t) = -\frac{1}{2\pi}.(2\pi i).\left[\frac{e^{iwt}}{(w-i+1)}\right]_{w=i+1} - \frac{1}{2\pi}.(2\pi i).\left[\frac{e^{iwt}}{(w-i-1)}\right]_{w=i-1}$$

$$y(t) = -i.\left[\frac{e^{i(1+i)t}}{1+i-i+1} + \frac{e^{i(i-1)t}}{i-1-i-1}\right]$$

$$y(t) = -i\left(\frac{e^{it}.e^{-t}}{2} + \frac{e^{-t}.e^{-it}}{-2}\right)$$

$$y(t) = e^{-t}\left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right) = e^{-t}.sint$$

elde edilir. Bu çözüm verilen denklemin $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ şartını sağlayan özel çözümdür.

5. $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Denklemin her iki yanının Fourier dönüşümünü alalım. Burada ikinci taraftaki sıfır yerine δ alıyoruz. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü ve $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ (4.7.1) olduğunu biliyoruz. $\mathcal{F}\{y(t)\} = Y(w)$ ile gösterirsek,

$$\mathcal{F}[y''' - 6y'' + 11y' - 6y] = \mathcal{F}[\delta(t)]$$

$$[(iw)^3 - 6(iw)^2 + 11iw - 6]Y(w) = 1$$

$$Y(w) = \frac{1}{(iw-1)(iw-2)(iw-3)}$$

Bu son elde edilen eşitliğin her iki yanının ters Fourier dönüşümünü alırsak

$$y(t) = \mathcal{F}^{-1}\big(Y(w)\big) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iwt}}{-i(w+i)(w+2i)(w+3i)} dw$$

Bu son elde edilen integralde Rezidü teoremini uygularsak

$$y(t) = \frac{1}{2\pi}(-2\pi i)\frac{1}{-i}\left[\frac{e^{i(-i).t}}{i.2i} + \frac{e^{i(-2i).t}}{(-i).i} + \frac{e^{i(-3i).t}}{(-2i)(-i)}\right]$$

$$y(t) = \frac{-e^{t} + 2e^{2t} - e^{3t}}{2}$$

elde edilir. Bu çözüm verilen denklemin $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = -1$ şartını sağlayan özel çözümdür.

BÖLÜM 6

FOURIER DÖNÜŞÜMÜ YARDIMIYLA KISMÎ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde basit kısmî türevli diferansiyel denklemlerin çözümleri için bir yol gösterilecektir. Bunun için bazı bilgilere ihtiyacımız olacaktır. Öncelikle bu bilgiler ortaya konulmaya çalışılacaktır.

6.1. TÜREVLERİN FOURIER SİNÜS VE KOSİNÜS DÖNÜŞÜMLERİNİN BULUNMASI

$f(t), f'(t), f''(t)$ düzgün parçalı sürekli, integrallenebilir ve $t \to \infty$ için $f(t) \to 0$, $f'(t) \to 0$ koşulunu sağlayan fonksiyonlar olsunlar.

Bu koşullar altında $f''(t)$ fonksiyonunun Fourier Sinüs Dönüşümünü bulalım.

$$\mathcal{F}_S\{f''(t)\} = \lim_{a\to\infty} \int_0^a f''(t). \sin wt\,.\,dt$$

$$\mathcal{F}_S\{f''(t)\} = \lim_{a\to\infty} [f'(t) \sin wt]_0^a - \lim_{a\to\infty} \int_0^a f'(t). w \cos wt\,.\,dt$$

$$= \lim_{a\to\infty} [f'(t) \sin wt]_0^a - \lim_{a\to\infty} [wf(t) coswt]_0^a - \lim_{a\to\infty} \int_0^a f(t). w^2 \sin wt\,.\,dt$$

Hem $f(t)$ hem de $f'(t)$ fonksiyonları, $t \to \infty$ için sıfıra yaklaşacağından

$$\mathcal{F}_S\{f''(t)\} = w[f(t)]_{t=0} - w^2 F_S(w) \qquad (6.1)$$

elde edilir.

Aynı koşullar altında $f''(t)$ fonksiyonunun Fourier Kosinüs Dönüşümünü benzer işlemler ile bulunur.

$$\mathcal{F}_C\{f''(t)\} = -[f'(t)]_{t=0} - w^2 F_C(w) \tag{6.2}$$

6.2.KISMÎ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEM ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde mühendislik ve fizikte kullanılan lineer ısı akımı denklemi, dalga denklemi, telgraf denklemi gibi kısmî türevli diferansiyel denklemlerin çözümünü Fourier dönüşümü yardımıyla yapmaya çalışacağız. Ancak öncelikle genel bir ifade ile başlayacağız. Bunun için ikinci mertebeden iki değişkenli kısmî türevli diferansiyel denklemin özel şeklini alalım. *a* ve *b* sabitler olmak üzere

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\,u + f_1(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_2(y)\frac{\partial u}{\partial y} + f_3(y)\,u = f(x,y) \tag{6.3}$$

Sınır koşullarımız şu şekilde olacaktır:

$$x \to \infty \quad \text{için} \quad u \to 0$$
$$x = 0 \quad \text{için} \quad u \text{ veya } \frac{\partial u}{\partial x} \text{ biliniyor.}$$

u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ fonksiyonlarının sürekli ve Fourier dönüşümün koşullarını sağladığı varsayılacaktır. Bu şartlar altında (6.3) denklemine Fourier Kosinüs ya da Sinüs Dönüşümü uygulayabiliriz.

$$\mathcal{F}_S\{u\} = U_S, \qquad \mathcal{F}_C\{u\} = U_C, \qquad \mathcal{F}_S\{f\} = F_S, \qquad \mathcal{F}_C\{f\} = F_C$$

ile göstereceğiz ve (6.1) ile (6.2) eşitliklerinden faydalanacağız. Şimdi (6.3) denklemine Fourier Sinüs Dönüşümü uygulayalım.

$$a\,\mathcal{F}_S\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} + b\,\mathcal{F}_S\{u\} + \mathcal{F}_S\left\{f_1(y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_2(y)\frac{\partial u}{\partial y} + f_3(y)\,u\right\} = \mathcal{F}_S\{f(x,y)\}$$

$$a\,\mathcal{F}_S\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} + b\,\mathcal{F}_S\{u\} + \mathcal{F}_S\left\{\left[f_1(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + f_2(y)\frac{\partial}{\partial y} + f_3(y)\right]\,u\right\} = \mathcal{F}_S\{f(x,y)\}$$

Burada $\left[f_1(y)\frac{\partial^2}{\partial y^2} + f_2(y)\frac{\partial}{\partial y} + f_3(y)\right] = L$ türev operatörü ile gösterirsek

$$a\,\mathcal{F}_S\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} + b\,\mathcal{F}_S\{u\} + \mathcal{F}_S\{L\,u\} = \mathcal{F}_S\{f(x,y)\}$$

yazılır ve (6.1) yardımıyla

$$a\,[w\,(u)_{x=0} - w^2 U_S] + b\,U_S + \int_0^\infty L\,u \sin wx\ dx = F_S$$

elde edilir ve L, y değişkenine göre türev operatörü olduğundan

$$a\,[w\,(u)_{x=0} - w^2 U_S] + b\,U_S + L\,U_S\ = F_S \tag{6.4}$$

yazılabilir. Böylece $x = 0$ için u'nun biliniyor olması ile (6.4) denklemi U_S'ye göre adi bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemde U_S elde edilerek ters dönüşüme geçilirse $u(x,y)$ çözümü bulunur.

Benzer şekilde (6.3) denklemine Fourier Kosinüs Dönüşümü ve (6.2) eşitliği uygulanırsa

$$a\,\left[w\,\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} - w^2 U_C\right] + b\,U_C + L\,U_C\ = F_C \tag{6.5}$$

yazılabilir. Böylece $x = 0\ için\ \frac{du}{dx}$'in biliniyor olması ile (6.5) denklemi U_C'ye göre adi bir diferansiyel denklemdir. Bu denklemde U_C elde edilerek ters dönüşüme geçilirse $u(x,y)$ çözümü bulunur.

Eğer x, $(-\infty,\ \infty)$ aralığında değiştiğinde, $x \to \pm\infty$ için $u \to 0$ koşulu ile üstel Fourier dönüşümü kullanılır. Böylece denklem

$$a\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\,u + c\,u + L\,u = f(x,y) \tag{6.6}$$

genel halini alır. (6.6) denklemine Fourier dönüşümü ve (4.17) eşitliğinin uygulanması ile $\mathcal{F}\{u\} = U$ olmak üzere

$$-a\,w^2\,U + i\,bw\,U + c\,U + L\,U = F$$

şeklinde U'ya göre y değişkenli diferansiyel denklemi elde edildikten sonra U çözülerek ters dönüşüme geçilir. Böylece $u(x,y)$ çözümü bulunur.

Örnekler:

1. Yarım-sonsuz bir ortamda lineer ısı akımı denklemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} = c^2\,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \tag{6.7}$$

dır. Başlangıç ve sınır koşulları

$$\begin{aligned} t > 0 \ \ .\ \ x = 0 \ \ için \ \ v = v_0 \\ t = 0 \ \ .\ \ x = 0 \ \ için \ \ v = 0 \end{aligned}$$

olup, $x \to \infty$ iken $v\,,\ \frac{\partial v}{\partial x} \to 0$ olduğu varsayılıyor. Bu koşullar altında diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$v(x,t)$ fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümü

$$\mathcal{F}_S\{v(x,t)\} = \int_0^\infty v(x,t).\sin wt\,.\,dt = V_S(w,t)$$

ile gösterelim. (6.7) denklemine Fourier sinüs dönüşümü uygulayalım.

$$\int_0^\infty \frac{\partial v}{\partial t}.\sin wt\,.dt = c^2\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\sin wt\,.dt \tag{6.8}$$

Bu ifadenin sol tarafı

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\infty v.\sin wt\,.dt = \frac{\partial V_S}{\partial t} = \frac{dV_S}{dt}$$

sağ tarafı ise (6.1) ve sınır koşulları altında

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.\sin wt\,.dt = wv_0 - w^2V_S$$

olduğundan (6.8) denklemini

$$\frac{dV_S}{dt} + c^2w^2V_S = c^2wv_0$$

şeklinde yazarız. Bu denklem, *t* değişkenine göre birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemdir. Bu denklemin çözümü

$$V_S = \frac{v_0}{w}\left(1 - e^{-c^2w^2t}\right)$$

şeklindedir. (4.14) teki ters dönüşüme geçersek,

$$v(x,t) = \mathcal{F}_S\{V_S(w,t)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{v_0}{w}\left(1 - e^{-c^2w^2t}\right).\sin wt\,.dw$$
$$v(x,t) = \frac{2v_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin wt}{w}dw - \frac{2v_0}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin wt}{w}e^{-c^2w^2t}dw$$

elde edilir. İlk integralin $\pi/2$ olduğunu biliyoruz (Örnek 4.3). İkinci integral ise

$$\int_0^\infty \frac{\sin wt}{w} e^{-c^2w^2t} dw = \frac{\pi}{2} erf\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)$$

dir. Sonuçta ısı denkleminin çözümü

$$v(x,t) = v_0\left[1 - erf\left(\frac{x}{2c\sqrt{t}}\right)\right]$$

bulunur.

2. $\frac{\partial v}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ lineer ısı diferansiyel denkleminin $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ aralığında

$$|x| \to \infty \text{ için } v \to 0$$
$$v(x,0) = e^{-x^2}$$

koşulları altında çözümünü bulunuz.

Denkleme *x* değişkenine göre Fourier dönüşümünü uygulayalım. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü kullanacağız. $\mathcal{F}\{v(x,t)\} = V(w,t)$ ile gösterirsek,

$$c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} e^{-iwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} e^{-iwx} dx$$
$$-c^2w^2V(w,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} v(x,t).e^{-iwx} dx$$
$$-c^2w^2V(w,t) = \frac{dV(w,t)}{dt}$$

t değişkenli denklemin çözümü,

$$V(w,t) = A(w)e^{-c^2w^2t} \tag{6.9}$$

olacaktır. $A(w)$ integrasyon sabitini başlangıç koşullarına göre bulmak için $V(w,t)$'nin değerini, $v(x,t)$'nin dönüşümü yardımıyla bulalım. $v(x,0) = e^{-x^2}$ koşuluna göre

$$V(w,0) = \mathcal{F}\{v(x,0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}.e^{-iwx}dx$$

yazılır. Bu integral ise Gauss Fonksiyonun Fourier Dönüşümü olup sunucu (4.7.13)'te bulmuştuk

$$V(w,0) = \mathcal{F}\{v(x,0)\} = \sqrt{\pi}e^{-w^2/4}$$

şeklindedir. Bu ifade (6.9)'in $t = 0$ için değerine eşittir. Bu iki ifadenin eşitliğinden

$$A(w) = \sqrt{\pi}e^{-w^2/4}$$

yazılır. Böylece (6.9) denklemi

$$V(w,t) = \sqrt{\pi}e^{-w^2/4}.e^{-c^2w^2t}$$
$$V(w,t) = \sqrt{\pi}e^{-(1+c^2t)w^2/4}$$

şeklinde yazılır. Ters dönüşüme geçtiğimizde (4.7.13) Gauss Fonksiyonun Fourier Dönüşümü yardımıyla aşağıdaki sonuca ulaşılır.

$$v(x,t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{\sqrt{\pi}e^{-(1+c^2t)w^2/4}\right\} = \frac{1}{\sqrt{1+4c^2t}}e^{-x^2/(1+4c^2t)}$$

3. *x* uzunluk ve *t* zamanı göstermek üzere $u(x,t)$ fonksiyonu, sonsuz uzunluktaki $(-\infty < x < \infty)$ telin denge durumundan küçük bir genlik ile titreşiminin diferansiyel denklemi (Dalga Denklemi)

$$c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \qquad (6.10)$$

dir. Başlangıç koşulları

$$t = 0 \ \text{ için } \ u(x, 0) = f(x)$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(x)$$

olmak üzere diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz. Burada $f(x)$ ve $u_0(t = 0)$ telin başlangıç konumunu ve hızını göstermektedir.

Denkleme *x* değişkenine göre Fourier dönüşümünü uygulayalım. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü kullanacağız. $\mathcal{F}\{u(x, t)\} = U(w, t)$ ile gösterirsek,

$$c^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-iwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} e^{-iwx} dx$$
$$-c^2 w^2 U(w, t) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t). e^{-iwx} dx$$
$$-c^2 w^2 U(w, t) = \frac{d^2 U(w, t)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2 U(w, t)}{dt^2} + c^2 w^2 U(w, t) = 0 \qquad (6.11)$$

t değişkenine göre lineer diferansiyel denklem olup çözümü,

$$U(w, t) = \mathcal{F}\{u(x, t)\} = A(w) \cos wct + B(w) \sin wct \qquad (6.12)$$

olur. Başlangıç koşullarına göre $A(w)$ ve $B(w)$ katsayılarını bulalım. (6.12) eşitliği $t = 0$ için

$$U(w, 0) = A(w)$$

olur. Aynı zamanda

$$t = 0 \ \ için \ \ u(x, 0) = f(x)$$

olduğundan

$$\mathcal{F}\{u(x,0)\} = \mathcal{F}\{f(x)\} = F(w)$$

yazılır ki

$$F(w) = A(w)$$

sonucuna ulaşılır.

$B(w)$ katsayısını bulmak için ikinci koşulu kullanacağız. Bunun için

$$U(w,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t) e^{-iwx} dx$$

ifadesinde türev alıp $t = 0$ alarak

$$\left.\frac{dU(w,t)}{dt}\right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} e^{-iwx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} v_0(x) e^{-iwx} dx = V_0(w) \qquad (6.13)$$

olur. Aynı zamanda (6.12) eşitliğinin türevinin $t = 0$ için değeri

$$\left.\frac{dU(w,t)}{dt}\right|_{t=0} = B(w).wc.\cos wct|_{t=0} = B(w).wc \qquad (6.14)$$

olacaktır. (6.13) ve (6.14) ifadelerinin eşitliğinden

$$B(w) = \frac{V_0(w)}{wc}$$

bulunur.(6.11) denkleminin çözümü olan (6.12)

$$U(w,t) = \mathcal{F}\{u(x,t)\} = F(w)\cos wct + \frac{V_0(w)}{wc}\sin wct$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlikten ters dönüşüme geçilip,

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)\cos wct\, e^{iwx}dw+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V_0(w)}{wc}\sin wct\, e^{iwx}dw$$

$\cos wct$ ve $\sin wct$ yerine Euler formüllerini yazalım.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)\left(e^{iwct}+e^{-iwct}\right)e^{iwx}dw\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V_0(w)}{wi}\left(e^{iwct}-e^{-iwct}\right)e^{iwx}dw\right]$$
$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)\left(e^{iw(x+ct)}+e^{iw(x-ct)}\right)dw\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V_0(w)}{wi}\left(e^{iw(x+ct)}-e^{iw(x-ct)}\right)dw\right]$$

$y=(x+ct)$ ve $z=(x-ct)$ olmak üzere

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)\left(e^{iwy}+e^{iwz}\right)dw+\frac{1}{2\pi c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V_0(w)}{wi}\left(e^{iwy}-e^{iwz}\right)dw\right]$$

yazılır. Birinci integralin

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(w)\left(e^{iwy}+e^{iwz}\right)dw=f(y)+f(z)$$

olduğu görülür. İkinci integral için ise (4.18) den

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{t}f(\tau).d\tau\right\}=\frac{F(w)}{iw}\Longrightarrow\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{F(w)}{iw}\right\}=\int_{-\infty}^{t}f(\tau).d\tau$$

olduğunu hatırlayarak

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V_0(w)}{wi}e^{iwy}dw = \int_{-\infty}^{y} f(\tau).d\tau \quad , \quad (y = x + ct)$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V_0(w)}{wi}e^{iwz}dw = \int_{-\infty}^{z} f(\tau).d\tau \quad , \quad (z = x - ct)$$

yazılabilir. Buradan da

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V_0(w)}{wi}e^{iwy}dw - \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{V_0(w)}{wi}e^{iwz}dw = \int_{z}^{y} v_0(\tau).d\tau = \int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\tau).d\tau$$

olur ki, bu da diferansiyel denklemin çözümünün

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct) + \frac{1}{c}\int_{x-ct}^{x+ct} v_0(\tau).d\tau\right]$$

şeklinde olduğunu gösterir.

İlk hızın $t = 0$'da $v_0 = 0$ olması halinde çözüm fonksiyonu

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]$$

olacaktır.

4. x uzunluk ve t zamanı göstermek üzere $u(x,t)$ fonksiyonu, yarım-sonsuz uzunluktaki telin bir ucunu orijine bağlayarak *Ox*-ekseninin pozitif yönü doğrultusunda gerelim. Bu durumda transvers (yanlama) serbest titreşimler

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6.15}$$

Dalga Denklemini sağlar.

$$t=0 \quad \text{için} \quad u(x,0)=f(x) \quad , \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \qquad\qquad (x>0)$$

$$u(0,t)=0 \qquad\qquad (\text{bütün } t'\text{ler için})$$

koşulları altında diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

$u(x,t)$ fonksiyonunun Fourier sinüs dönüşümü

$$\mathcal{F}_S\{U(x,t)\}=U_S(w,t)$$

ile gösterelim. (6.15) denklemine x değişkenine göre Fourier sinüs dönüşümü uygulayalım.

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.\sin wt\,.\,dt = c^2\int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.\sin wt\,.\,dt$$

$$\frac{d^2U_S(w,t)}{dt^2}=c^2[w.u(0,t)-w^2U_S(w,t)]=-c^2w^2U_S(w,t)$$

$$\frac{d^2U_S(w,t)}{dt^2}+c^2w^2U_S(w,t)=0$$

diferansiyel denklemine ulaşılır. Bu denklemin çözümü

$$U_S(w,t)=A(w)\cos wct+B(w)\sin wct$$

şeklindedir. Başlangıç koşulları altında

$$t=0 \quad için \quad u(x,0)=f(x)\Longrightarrow U_S(w,0)=F_S(w)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0\Longrightarrow \left.\frac{\partial U_S(w,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

olur ki buradan

$$A(w)=F_S(w) \quad , \quad B(w)=0$$

bulunur. Böylece

$$U_S(w,t) = F_S(w)\cos wct$$

eşitliği elde edilir. (4.14) teki ters dönüşüme geçersek,

$$\mathcal{F}^{-1}\{U_S(w,t)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_S(w)\cos wct\,.\sin wt\,.dw$$

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_S(w)\,[\sin w(x+ct) + \sin w(x-ct)]dw$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+ct) + f(x-ct)]$$

sonucu bulunur.

5. Telgraf denklemi olarak adlandırılan

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + (\alpha+\beta)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + \alpha\beta u(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (6.16)$$

denkleminin başlangıç ve sınır değerleri olmadan çözümünü araştıralım.

(6.16) denkleminde $\alpha = \beta = 0$ alınırsa dalga denklemine dönüşeceği açıktır. Şimdi ise $\alpha, \beta > 0$ için işlem yapacağız ki telin direnci ve zemine iletkenliğin sıfır olmadığını kabul etmiş olacağız.

Denkleme x değişkenine göre Fourier dönüşümünü uygulayalım. (4.17)'den türevin Fourier dönüşümünü kullanacağız. $\mathcal{F}\{u(x,t)\} = U(w,t)$ ile gösterirsek,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}e^{-iwx}dx + (\alpha+\beta)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{-iwx}dx + \alpha\beta\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-iwx}dx = c^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}e^{-iwx}dx$$

$$\frac{d^2U(w,t)}{dt^2} + (\alpha+\beta)\frac{dU(w,t)}{dt} + \alpha\beta U(w,t) = -c^2w^2U(w,t)$$

$$\frac{d^2U(w,t)}{dt^2} + (\alpha+\beta)\frac{dU(w,t)}{dt} + (\alpha\beta + c^2w^2)U(w,t) = 0 \qquad (6.17)$$

yazılır. $U(w,t)$ 'nin ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklemini elde etmiş olduk. Bu denklemin çözümü $U(w,t) = e^{rt}$ şeklinde olmalıdır. Bu da ancak

$$r = \frac{-(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4(\alpha\beta + c^2w^2)}}{2}$$
$$r = \frac{-(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha-\beta)^2 - 4c^2w^2}}{2}$$

olması ile mümkündür.

Eğer $(\alpha-\beta)^2 \geq 4c^2w^2$ ise r'nin negatif iki reel değeri bulunur. Bunu göstermek istersek,

$$0 \leq (\alpha-\beta)^2 - 4c^2w^2 \leq (\alpha-\beta)^2$$
$$0 \leq \sqrt{(\alpha-\beta)^2 - 4c^2w^2} \leq |\alpha-\beta|$$
$$\frac{-(\alpha+\beta) - |\alpha-\beta|}{2} \leq \frac{-(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha-\beta)^2 - 4c^2w^2}}{2} \leq \frac{-(\alpha+\beta) + |\alpha-\beta|}{2}$$

yazılır. $|\alpha-\beta|$, ya $\alpha-\beta$ (eğer $\alpha \geq \beta$ ise) ya da $\beta-\alpha$ (eğer $\alpha \leq \beta$ ise) olduğundan

$$-\alpha \leq \frac{-(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha-\beta)^2 - 4c^2w^2}}{2} \leq -\beta$$

elde edilir ki bu da r'nin $-\alpha$ ile $-\beta$ arasında negatif iki reel değeri olduğu anlamına gelir. $t \to \infty$ için $U(w,t)$'nin her iki çözümü de sıfırdır ve bu da telin geçiciliğini gösterir. Dolayısıyla $(\alpha-\beta)^2 < 4c^2w^2$ olmadıkça $U(w,t)$'yi sıfır olarak düşüneceğiz.

$$r = \frac{-(\alpha+\beta) \pm \sqrt{(\alpha-\beta)^2 - 4c^2w^2}}{2}$$
$$r = -\frac{(\alpha+\beta)}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4c^2w^2 - (\alpha-\beta)^2}$$

burada $\gamma = \frac{(\alpha+\beta)}{2}$ ve $\varphi(w) = \sqrt{c^2 w^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2}$ olarak alırsak

$$r = -\gamma \pm i\varphi(w)$$

elde edilir. Buna göre (6.13) denklemi için genel çözüm

$$U(w,t) = F(w)e^{[-\gamma - i\varphi(w)]t} + G(w)e^{[-\gamma + i\varphi(w)]t}$$
$$U(w,t) = e^{-\gamma t}\left[F(w)e^{-i\varphi(w)t} + G(w)e^{i\varphi(w)t}\right]$$

olacaktır. Buradan ters dönüşüme geçelim.

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}e^{-\gamma t}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(w)e^{-i\varphi(w)t} + G(w)e^{i\varphi(w)t}\right]e^{iwx}dw$$

Eğer telgraf telimiz için $\alpha = \beta$ seçersek $\varphi(w) = cw$ olacaktır ve

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}e^{-\gamma t}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(w)e^{-icwt} + G(w)e^{icwt}\right]e^{iwx}dw$$
$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi}e^{-\gamma t}\int_{-\infty}^{\infty}\left[F(w)e^{iw(x-ct)} + G(w)e^{iw(x+ct)}\right]dw$$
$$u(x,t) = e^{-\gamma t}[f(x-ct) + g(x+ct)]$$

ifadesine ulaşılır. Bu ifade aynı zamanda dalga denklemi için de anlamlıdır. Şöyle ki *c* hızında sağa doğru ve *c* hızında sola doğru hareket eden dalga paketlerini ifade eder. Bu dalga paketleri zamanla şekil değiştirmezler. Ancak $e^{-\gamma t}$ faktörü paketlerin boyutunu azaltır. Eğer tel boyunca periyodik olarak amplifikatörler (yükselticiler) yerleştirirsek, sinyalleri kayıpsız iletebiliriz.

Eğer $\alpha \neq \beta$ ise $\varphi(w)$, *w*'nin kompleks bir fonksiyonu olur. $F(w)$, sadece w_0 etrafındaki dar aralıkta sıfır değil ise, bu aralıkta $\varphi(w)$, w_0 civarında Taylor açılımının başlangını ifade eder ki

$$\varphi(w) + \frac{d\varphi(w_0)}{dw}.(w - w_0)$$

dır. $\frac{d\varphi(w_0)}{dw} = v_0$ ile gösterirsek

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi} e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{-i\varphi(w)t} e^{iwx} dw \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-\gamma t} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{-i[\varphi(w_0)+v_0(w-w_0)]t} e^{iwx} dw \\
&= e^{-\gamma t} e^{-i[\varphi(w_0)+v_0.w_0]t}.\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{iw(x-v_0.t)} dw \\
&= e^{-\gamma t} e^{-i[\varphi(w_0)+v_0.w_0]t}.f(x - v_0 t)
\end{aligned}$$

çözümüne ulaşılır. Bu çözüm bize dalga paketlerinin v_0 hızıyla w_0'a çok yakın hareket ettiğini ifade eder.

$\alpha = \beta$ olması dışında, v_0 hızı w_0'a önemli bir bağımlılığı olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla w'nın farklı değerleri için dalga paketlerinin hızları değişir. Bu dağılıma, dalga paketlerinin sapması sebep olur.

BÖLÜM 7

SONUÇLAR

Bu çalışmada, Dirichlet koşulları altında periyodik fonksiyonların Fourier Serileri belirlenmiştir. Fourier Serilerinden, Fourier İntegraline ve Fourier Dönüşümüne geçişler yapılmıştır. Dirichlet Koşullarını sağlayan fonksiyonların yanı sıra sağlamayan fonksiyonların da Fourier Dönüşümlerinin olduğu gösterilmiştir.
Diferansiyel denklemlerin Fourier Dönüşümleri yardımı ile çözümlerinin araştırıldığı bu çalışma sonucunda;

1. Sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin ikinci kısmının Dirichlet Koşullarını sağlayan fonksiyonlar olduğunda Fourier Dönüşümü yardımıyla özel çözümlerinin bulunabileceği gösterilmiştir.

2. Sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemlerin ikinci kısmının Dirichlet Koşullarını sağlamayan polinom fonksiyonlar olduğunda Fourier Dönüşümü yardımıyla özel çözümlerinin bulunabileceği gösterilmiştir.

3. Sabit katsayılı homojen lineer diferansiyel denklemlerin ikinci kısmındaki “0” yerine Dirac Delta Fonksiyonu alınması sonucu Fourier Dönüşümü yardımıyla özel çözümlerinin bulunabileceği gösterilmiştir. Bu özel çözümlerin, diferansiyel denklem *n.* mertebeden olduğunda

   $$y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 0, \dots , y^{(n-1)}(0) = \pm 1$$

   başlangıç koşullarını sağladığı görülmüştür.

4. Kısmî türevli diferansiyel denklemlerin Fourier Dönüşümleri yardımıyla çözümlerinin yapılabileceği gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Altın, A., “Fourier Analizi”, ***Gazi Kitapevi***, Ankara, 73-80 (2011).

2. Bracewell, R. N., “The Fourier Transform”, Çevirmen: Bultan, A., ***Scientific American***, US, 62-69 (1989).

3. Bracewell, R. N., “The Fourier Transform and Its Applications (3rd Ed.)”, ***McGraw-Hill Book Campany***, Boston, (2000).

4. İnternet: Feldman, J., “Using the Fourier Transform to Solve PDEs”, **http://www.math.ubc.ca/~feldman/m267/pdeft.pdf** (2007).

5. Spiegel, M. R., “Fourier Analysis with Applications to Boundary Value Problems”, ***McGraw-Hill Book Campany***, New York, 20-32 (1974).

6. Yarasa, R., “Fourier Analizi”, ***Çaglayan Basımevi***, Ankara, 1-221 (1976).

ÖZGEÇMİŞ

Evli ve 2 çocuk babası olan Ercan KÖMEÇ 1979'da Karabük'te doğdu; ilköğrenimini aynı şehirde tamamladı. Kastamonu Göl Anadolu Öğretmen Lisesi'ndeki eğitiminin ardından 1997 yılında İzmir Dokuz Eylül Üniversitesi Buca Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Eğitimi Bölümü'ne girdi; 2001'de "iyi" derece ile mezun olduktan sonra aynı yılın eylül ayında Karabük Anadolu Öğretmen Lisesi'nde öğretmen olarak göreve başladı. 2005 yılından günümüze Vakıfbank Zübeyde Hanım Anadolu Lisesi'nde görev yapmaktadır.

<u>ADRES BİLGİLERİ</u>

Adres:	Şirinevler Mah. Şahinvey Cad. Kamber Apt, No. 18, D: 12 KARABÜK
Tel:	(505) 2352848
E-posta:	ercankomec@gmail.com