# ÇİZGELERİN ZEDELENEBİLİRLİK DEĞERLERİNİN BULUNMASI ÜZERİNE

**2015**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK**

**Mustafa Çağatay KÖRPE**

**ÇİZGELERİN ZEDELENEBİLİRLİK DEĞERLERİNİN BULUNMASI ÜZERİNE**

**Mustafa Çağatay KÖRPE**

**Karabük Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalında**
**Yüksek Lisans Tezi**
**Olarak Hazırlanmıştır**

**KARABÜK**
**Ocak 2015**

Mustafa Çağatay KÖRPE tarafından hazırlanan "ÇİZGELERİN ZEDELENEBİLİRLİK DEĞERLERİNİN BULUNMASI ÜZERİNE" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Tufan TURACI ..........................

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir. 20/ 01/ 2015

| Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu) | | İmzası |
|---|---|---|
| Başkan | : Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ (KBÜ) | .......................... |
| Üye | : Yrd. Doç. Dr. Tufan TURACI (KBÜ) | .......................... |
| Üye | : Yrd. Doç. Dr. Hakan KUTUCU (KBÜ) | .......................... |

16/02/2015

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Mustafa BOZ ..........................

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

*"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."*

Mustafa Çağatay KÖRPE

# ÖZET

**Yüksek Lisans Tezi**

**ÇİZGELERİN ZEDELENEBİLİRLİK DEĞERLERİNİN BULUNMASI ÜZERİNE**


**Mustafa Çağatay KÖRPE**

**Karabük Üniversitesi**
**Fen Bilimleri Enstitüsü**
**Matematik Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı:**
**Yrd. Doç. Dr. Tufan TURACI**


**Ocak 2015, 74 sayfa**



Çizge teorisi matematik ve bilgisayar bilimlerinin önemli dallarından biridir. Günümüzdeki bir çok karmaşık problem çizgeler ile modellenip, çözümleri daha kolay bir biçimde yapılabilir. İletişim ağlarının zedelenebilirliğinin hesaplanması bu problemlerden biridir. Zedelenebilirlik, ağın bazı merkezleri ya da bağlantı hatları hasar gördüğünde, ağın bozulmaya karşı direncini gösterir. Bir iletişim ağının zedelenebilirliğinin hesaplanması için çizge teoride tanımlanmış pek çok çizge parametresi vardır. Bu parametrelerden bazıları bağlantılılık sayısı, bütünlük sayısı, dayanıklılık sayısı, saçılım sayısı, baskınlık sayısı, 2-baskınlık sayısı, bağımlılık sayısı ve 2-bağımlılık sayısıdır.

Bu tezde ilk olarak genel çizge tanım ve teoremleri verilmiştir. Ardından bilinen bazı genel çizge yapılarının (yol, çevre, yıldız, tekerlek, tam çizge) orta çizgeleri için 2-baskınlık ve 2-bağımlılık değerleri hesaplanmıştır. Daha sonra, tekerlek çizge, tekerlek çizge ile ilgili çizge yapıları (arkadaşlık, dişli, dümen, ayçiçeği çizge) ve bunların ayrıt çizgeleri için 2-baskınlık ve 2-bağımlılık değerleri hesaplanmıştır. Son olarak, bir çizgenin 2-baskınlık sayısını bulan algoritma verilmiştir.

**Anahtar Sözcükler** : İletişim ağları, çizge teori, zedelenebilirlik, bağlantılılık sayısı, 2-baskınlık sayısı, 2-bağımlılık sayısı.

**Bilim Kodu** : 204.1.138

## ABSTRACT

**M. Sc. Thesis**

**ON FINDING VULNERABILITY VALUES OF GRAPHS**



**Mustafa Çağatay KÖRPE**

**Karabük University**
**Graduate School of Natural and Applied Sciences**
**Department of Mathematics**

**Thesis Advisor:**
**Assist. Prof. Dr. Tufan TURACI**


**January 2014, 74 pages**



Graph theory is an important branches of the mathematics and computer science. Nowadays, many problems which have a complex structure can be modeled by graphs, thus solution of these problems can be done easily. One of these problems is computing the vulnerability of communication networks. Vulnerability indicates the resistance of a network to disruptions in communication after a breakdown of some processors or communication links. There are a lot of graph parameters for computing vulnerability of a communication network. Some of them are connectivity, integrity, toughness, scattering number, domination number, 2-domination number, bondage number and 2-bondage number.

In this thesis, firstly general graph definitions and theorems are given. Then, 2-domination numbers and 2-bondage numbers are calculated for middle graphs of general graph structure (path, cycle, star, wheel, complete graphs). After, same calculations are made for wheel graphs, wheel related graphs (friendship, gear, helm, sunflower graph) and theirs line graphs. Finally, algorithm is obtained values of 2-domination number of any graph is given.

**Key Words** **:** Communication network, graph theory, vulnerability, connectivity, 2-domination number, 2-bondage number.

**Science Code** **:** 204.1.138

## TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Tufan TURACI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Hayatım boyunca hep yanımda olan ve manevi desteğini hiç bir zaman eksik etmeyen Rabia DOĞAN'a tüm kalbimle teşekkürederim.

Hayatım boyunca maddi manevi hiçbir yardımı esirgemeden yanımda olan annem Meral KÖRPE'ye ve babam Recep KÖRPE'ye sonsuz teşekkür ederim.

**İÇİNDEKİLER**

**Sayfa**

## ŞEKİLLER DİZİNİ

**Sayfa**

## ÇİZELGELER DİZİNİ

**Sayfa**

# SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

## SİMGELER

| | |
|---|---|
| $N_G(v)$ | : Tepenin açık komşuluğu |
| $N_G[v]$ | : Tepenin kapalı komşuluğu |
| $V(G)$ | : Tepeler kümesi |
| $E(G)$ | : Ayrıtlar kümesi |
| $d_G(v)$ | : Tepesinin derecesi |
| $\delta(G)$ | : Minimum tepe derecesi |
| $\Delta(G)$ | : Maksimum tepe derecesi |
| $\alpha(G)$ | : Tepe örtü sayısı |
| $\beta(G)$ | : Bağımsızlık sayısı |
| $k(G)$ | : Bağlantılılık değeri |
| $\gamma(G)$ | : Baskınlık sayısı |
| $b(G)$ | : Bağımlılık sayısı |
| $\gamma_2(G)$ | : 2-Baskınlık sayısı |
| $b_2(G)$ | : 2-Bağımlılık sayısı |
| $P_n$ | : Yol çizge |
| $C_n$ | : Çevre çizge |
| $W_n$ | : Tekerlek çizge |
| $K_n$ | : Tam çizge |
| $K_{1,n}$ | : Yıldız çizge |
| $M(G)$ | : Orta çizge |

$G_n$ : Dişli çizge

$H_n$ : Dümen çizge

$f_n$ : Arkadaşlık çizge

$Sf_n$ : Ayçiçeği çizge

$L(G)$ : Ayrıt çizge

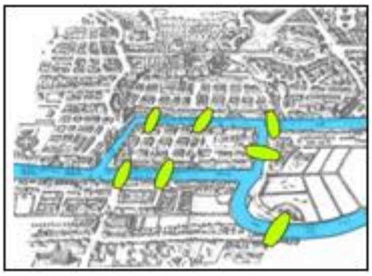
# BÖLÜM 1

# ÇİZGELERİN ZEDELENEBİLİRLİK DEĞERLERİNİN BULUNMASI ÜZERİNE

## 1.1. GİRİŞ

20. ve 21.yüzyılları arasında teknoloji hızlı bir şekilde ilerleme göstermiştir. Tüm alanlarda bunun izlerini görmek mümkündür. Bilgisayar başında tek bir tuşla istenilen bilgiye ulaşılmasına, banka işlemleri, iş başvuruları gibi bir çok işlemi yapılmasına imkan vermektedir. Bir başka ifadeyle insanlar daha kısa sürede birçok işi yapabilir, daha az enerji ile daha fazla işin üstesinden gelebilir hale gelmiştir. Bu durumun iyi yanları olduğu gibi kötü yanlarıda mevcuttur. Bilgisayar başında yaptığınız bütün işlemleriniz saldırılara maruz kalabilir ve insanların kişisel bilgileri, şirketlerin politikaları sızdırılabilir hale gelmiştir. Günümüzde ülkeler olsun, şirketler olsun güvenlik zaafiyetine karşı ciddi önlemler alırlar ve bunun için büyük bütçeler ayırırlar. Teknolojinin hızla ilerlemisiyle birlikte bir çok sorun da ortaya çıkmıştır. Bu sorunların bazıları matematiksel model yapılarak daha kolay çözülebilir hale gelmiştir.

Ünlü matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) 18. yüzyılda çizge teorisinin temellerini atmıştır. Königsberg şehri eski ve yeni Pregel nehirlerinin birleştiği bölge üzerindedir. Bu nehirler şehri 4 bölgeye ayırır. Nehir üzerinde bu bölgeleri birleştiren yedi tane köprü vardır. Bütün köprülerden yanlız bir kez geçmek koşulu ile başladığımız yere geri dönebilirmiyiz? Euler, böyle bir yürüyüşün yapılamayacağını problemi çizge teorisi ile modelleyerek ispatlamıştır (Harary, F., 1969).



Şekil 1.1. Pregel nehrinin 4 bölgeye ayırdığı Konigsberg şehri.

*Tanım 1.1.1*

$G=\left(V\left(G\right),E\left(G\right)\right)$ çizgesi, tepeler denilen boş olmayan bir $V\left(G\right)$sonlu objeler kümesi ile birlikte, $G$ nin farklı tepe çiftlerinin düzensiz sıralanışı olan bir $E\left(G\right)$ (boş olabilir) ayrıtlar kümesidir (Harary, F., 1969).

## 1.2. İLETİŞİM AĞLARI VE ZEDELENEBİLİRLİK

Bir bilginin korunması ya da hızlı bir şekilde aktarımı çok önemlidir ve gün geçtikçe önem kazanmaktadır. Bununla beraber iletişimin hızı, güvenilirliği ve kesintisizliği istenilen bir özellik olmaktadır. Bir iletişim ağı, merkezlerden ve bu merkezleri birbirine bağlayan bağlantı hatlarından oluşur. Herhangi bir soruna ve kötü koşullara karşı merkezlerin ve bağlantı hatlarının nasıl ve ne kadar dayanabileceği yahut başka bir iletişim ağı ile karşılaştırması sonucunda hangisinin daha dayanıklı olduğu bilinmesi gereken bir sorular olmuştur. Bu soruların muhattabı olarak "zedelenebilirlik" kavramı ortaya çıkmıştır. Bir iletişim ağının merkezlerine ya da iletişim hatlarına zarar gelmesine karşı ağın göstermiş olduğunu dayanma gücünün ölçümüne ağın zedelenebilirlik değeri denir (Turacı, T., 2012).

Bir iletişim ağı, merkezleri bir çizgenin tepeleriyle, bağlantı hatları ise çizgenin ayrıtlar olmak üzere çizgelerle modellenir. İletişim sistemleri, genellikle kopmalara ve saldırılara maruz kalırlar. İletişim ağının dayanıklılığını ölçmek için literatürde çeşitli ölçümler varken iletişim ağının güvenirliliğini hesaplayacak formülleri türetmek için bir çok zedelenebilirlik parametresi vardır. Çizgelerdeki ilk zedelenebilirlik parametresi bağlantılılık sayısı (connectivity)'dır.

Daha sonra birçok zedelenebirlirlik parametresi tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları; dayanıklılık (toughness), kararlılık (tenacity), bütünlük (integrity), baskınlık sayısı (domination number), bağımlılık sayısı (bondage number) ve 2-baskınlık sayısıdır. Son yıllarda 2-bağımlılık sayısı da zedelenebilirlik parametresi olarak tanımlanmıştır.

## 1.3. TEMEL ÇİZGE TANIMLARI

Bu bölümde temel çizge tanımları verilmiştir.

*Tanım 1.3.1.*

Bir $G$ çizgesindeki herhangi bir $v$ tepesinin *açık komşuluğu (open neigborhood)*, $v$ tepesine komşu olan tepelerin oluşturduğu kümedir ve $N_G(v)$ olarak gösterilir. Benzer şekilde $v$ tepesinin kapalı komşular kümesi ise $N_G(v) \cup \{v\}$ şeklinde tanımlanır ve $N_G[v]$ olarak gösterilir (Chartrand, G. and Lesniak, L., 2004).

*Tanım 1.3.2.*

Bir $G$ çizgesinde herhangi bir $v \in V(G)$ tepesinin derecesi, o tepenin bitişik olduğu ayrıtların sayısıdır ve $d_G(v)$ ile gösterilir (Buckley, F. and Harary, F., 1990).

*Tanım 1.3.3.*

Bir çizgenin tepe derecelerinin en küçüğüne çizgenin *minimum tepe derecesi (minimum vertex degree)* denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir (Chartrand, G. and Lesniak, L., 2004).

*Tanım 1.3.4.*

Bir çizgenin tepe derecelerinin en büyüğüne çizgenin *maksimum tepe derecesi (maximum vertex degree)* denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir (Chartrand, G. and Lesniak, L., 2004).

*Tanım 1.3.5.*

$G$ çizgesindeki bir dereceli tepeye *uç tepe (end vertex)* denir (Buckley, F. and Harary, F., 1990).

*Tanım 1.3.6.*

$r \in Z^{+}$ olmak üzere bir $G$ çizgesinde, herhangi bir $v \in V(G)$ için $d_G(v) = r$ ise $G$ çizgesine *r-düzenli çizge (r-regular graph)* denir (Buckley, F. and Harary, F., 1990).

*Tanım 1.3.7.*

Bir $G(V(G), E(G))$ çizgesinin bazı ayrıt ve tepelerinden $V_1(G) \subset V(G)$ ve $E_1(G) \subset E(G)$ olmak üzere $H(V_1(G), E_1(G))$ ile tanımlı çizgeye, $G$ çizgesinin bir *alt çizgesi (subgraph)* denir (Buckley, F. and Harary, F., 1990).

*Tanım 1.3.8.*

Bir $G$ çizgesinde $S \subseteq V(G)$ olmak üzere, çizgenin her ayrıtının en az bir uç tepesi $S$ kümesinin elemanı ise $S$ kümesine, $G$ çizgesinin *tepe örtü kümesi (vertex cover set)* denir. En az elemana sahip olan tepe örtü kümesinin eleman sayısına ise $G$ çizgesinin tepe *örtü sayısı (vertex cover number*) denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir (West, D. B., 1996).

*Tanım 1.3.9.*

Bir $G$ çizgesinde $S \subseteq V(G)$ olmak üzere, $S$ kümesi çizgenin komşu olmayan tepelerinden oluşuyorsa, $S$ ye çizgenin *bağımsız kümesi (independent set)* denir. En fazla elemana sahip olan bağımsız kümenin eleman sayısına ise $G$ çizgesinin *bağımsızlık sayısı (independence number)* denir ve $\beta(G)$ ile gösterilir (West, D. B., 1996).

## 1.4. ÇİZGELERDE ZEDELENEBİLİRLİK PARAMETRELERİ

*Tanım 1.4.1.*

Bağlantılı bir $G$ çizgesini bağlantısız yapmak veya tek izole tepe elde etmek için çizgeden çıkarılması gereken en az tepe sayısına *çizgenin bağlantılılığı (connectivity)* denir ve $k(G)$ ile gösterilir. Bir $G$ çizgesinin bileşenlerinin sayısı $w(G)$ olmak üzere bağlantılılık tanımı aşağıdaki biçimdedir (Frank, H., Frisch, I. T., 1970).

$$k(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \left\{ |S| : w(G-S) \geq 2 \right\} \text{' dir.}$$

*Tanım 1.4.2.*

$V(G)$, $G$ çizgesinin tepeler kümesi olmak üzere $D \subseteq V(G)$ olsun. $V(G)-D$ kümesindeki her tepe; $D$ kümesindeki herhangi bir tepeye komşu ise, $D$ kümesine *baskın küme (dominating set)* denir. $G$ çizgesinin baskın kümeleri arasındaki en az elemana ait kümenin eleman sayısına *baskınlık sayısı (domination number)* denir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir (Haynes, T. W., Hedeniemi, S. T. and Slater, P. J., 1998).

$$\gamma(G) = \min_{D \subseteq V(G)} \left\{ |D| : N_G[D] = V(G) \right\} \text{'dir.}$$

*Tanım 1.4.3.*

$E' \subseteq E(G)$ olmak üzere, $\gamma(G-E') > \gamma(G)$ şartını sağlayan minimum elemanlı $E'$ kümesinin eleman sayısına çizgenin *bağımlılık sayısı (bondage number)* denir (Barefoot, C. A., Entringer, R., Swart, H. C., 1987).

$$b(G) = \min_{E' \subseteq E(G)} \left\{ |E'| : \gamma\left(G - E'\right) > \gamma\left(G\right) \right\} \text{'dır.}$$

*Tanım 1.4.4.*

$G$ bir çizge ve $G$ çizgesinin tepelerinin herhangi bir kümesi $S$ olsun. $G-S$ çizgesinin en büyük boyutlu bileşeninin tepe sayısı $m\left(G-S\right)$ olmak üzere, $G$ çizgesinin *tepe bütünlük değeri (vertex integrity)* denir. (Barefoot, C. A., Entringer, R., Swart, H. C., 1987).

$$I(G) = \min_{S \subseteq V(G)} \{|S| + m(G-S)\} \text{ olarak tanımlanır.}$$

*Tanım 1.4.5.*

Bir $G$ çizgesi için *dayanıklılık (toughness)* değeri; $m\left(G-S\right)$, $G-S$ çizgesindeki en büyük bileşenin tepe sayısı olmak üzere aşağıdaki biçimde tanımlıdır (Chvatal, V., 1973).

$$t(G) = \min_{S \subseteq V} \left\{ \frac{|S|}{m(G-S)} \right\} \text{ olarak tanımlanır.}$$

*Tanım 1.4.6.*

Bir $G$ çizgesi için $S \subseteq V$ ve $w\left(G-S\right)$, $G-S$ çizgesinin bileşen sayısı olmak üzere, bir çizgenin *kararlılık (tenacity)* değeri aşağıdaki biçimde tanımlıdır

$$T(G)=\min_{S\subseteq V}\left\{\frac{|S|+m(G-S)}{w(G-S)}\right\}$$ ’ dir (Cozzens, M., Moazzami, D., Stueckle, S., 1995).

*Tanım 1.4.7.*

Bir $G$ çizgesi için *parçalanma derecesi (rupture degree)*: $S\subseteq V$ olsun. $w(G-S)$, $G-S$ çizgesinin bileşen sayısı ve $m(G-S)$, $G-S$ çizgesindeki en büyük bileşenin tepe sayısı olmak üzere, bir çizgesinin dayanıklılık sayısı aşağıdaki biçimde tanımlanır (Li, Y., Zhang, S. and Li, X., 2005).

$$r(G)=\max_{S\subset V(G)}\left\{w(G-S)-|S|-m(G-S)\mid w(G-S)>1\right\}$$ ’dir.

*Tanım 1.4.8.*

$G$ bir birleştirilmiş çizge ve $G$ çizgesinin tepe kümeleri $V(G)$, $S\subseteq V(G)$ olmak üzere; $V(G)-S$ kümesindeki her tepe; $S$ kümesindeki en az iki tepeye komşu ise $S$ kümesine 2-baskın küme denir. $G$ çizgesinin 2-baskın kümeleri arasındaki en az elemana ait kümenin eleman sayısına *2-baskınlık sayısı (2-domination number)* denir ve $\gamma_2(G)$ ile gösterilir (Haynes, T. W., Hedeniemi, S. T. and Slater, P. J., 1998).

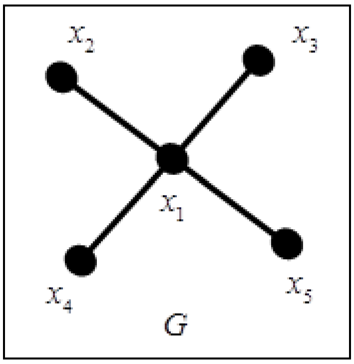
*Tanım 1.4.9.*

$G$ bir birleştirilmiş çizge ve $G$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(G)$ olmak üzere $F\subseteq E(G)$ olsun. $G$ çizgesinin 2-baskınlık sayısını artırmak için $G$ çizgesinden atılması gereken ayrıtların oluşturduğu minimum elemanlı $F$ kümesinin eleman sayısına *2-bağımlılık sayısı (2-bondage number)* denir ve $b_2(G)$ ile gösterilir (Krzywkowski, M., 2013).

$$b_2(G)=\min_{S\subseteq V(G)}\left\{|S|\ \middle|\ \gamma_2(G-S)>\gamma_2(G)\right\}$$ ’dir.

*Örnek 1.4.10.*

Şekil 1.2'de verilen çizgenin baskınlık sayısını, bağımlılık sayısını ve 2-baskınlık sayısı, 2-bağımlılık sayılarını ve kümelerini bulalım.




Şekil 1.2. 5 tepeli 4 ayrıtlı bir $G$ çizgesi.

Öncelikle baskınlık ve bağımlılık kümelerini ve sayılarını bulalım.

$S_1 = \{x_1\}$ baskın kümedir.

$S_2 = \{x_1, x_2\}$ baskın kümedir.

$S_3 = \{x_1, x_2, x_3\}$ baskın kümedir.

$S_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ baskın kümedir.

$S_5 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ baskın kümedir.

$S_1, S_2, S_3, S_4$ ve $S_5$ kümelerinin hepsi $G$ çizgesinin baskın kümeleridir. Bu çizgenin baskınlık sayısı ise bu kümelerinin minimum elemanlı kümenin eleman sayısıdır. $S_1$ kümesi minimum elemanlı baskın küme olup, baskınlık sayısı $\gamma(G) = 1$ 'dir.

$E_1 = \{e_{x_1x_2}\}$ ayrıtı atıldığında geriye kalan $G - \{e_{x_1x_2}\}$ çizgesinin minimum elemanlı baskın kümesi, baskınlık sayısı tanımından $S = \{x_1, x_2\}$ olur. Baskınlık sayısı ise $\gamma(G - \{e_{x_1x_2}\}) = 2$ bulunur.

$E_1=\{e_{x_1x_2},\mathrm{e}_{x_1x_3}\}$ ayrıtı atıldığında geriye kalan $G-\{e_{x_1x_2},e_{x_1x_3}\}$ çizgesinin minimum elemanlı baskın kümesi $S=\{x_1,x_2,\mathrm{x}_3\}$ olur. Baskınlık sayısı ise $\gamma(G-\{e_{x_1x_2},e_{x_1x_3}\})=3$ bulunur.

Diğer durumlarda da 1'e eşit yada 1'den büyük değerler bulunur. Minimum elemanlı kümenin eleman sayısı, bağımlılık sayısı olduğundan $G$ çizgesinin bağımlılık sayısı $b(G)=1$'dir.

Baskınlık ve bağımlılık değerlerini bulduktan sonra 2-baskınlık ve 2-bağımlılık değerlerini bulalım.

2-baskınlık tanımı gereği izole ve bir dereceli tepeleri 2-baskın küme içermek durumundadır. $G$ çizgesinin 2-baskın kümesine bakacak olursak;

$S_1=\{x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 2-baskın kümedir.

$S_2=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ 2-baskın kümedir.

$S_1$ ve $S_2$, $G$ çizgesinin 2-baskın kümeleridir. $S_1$ kümesi minimum elemanlı küme olduğu için $G$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(G)=4$'dür.

Şimdi 2-bağımlılık sayısını hesaplayalım.

$E_1=\{e_{x_1x_2}\}$ ayrıtı atıldığında geriye kalan $G-\{e_{x_1x_2}\}$ çizgesinin minimum elemanlı 2-baskın kümesi $S_1=\{x_2,x_3,x_4,x_5\}$ bulunup, 2-baskınlık sayısı değişmez.

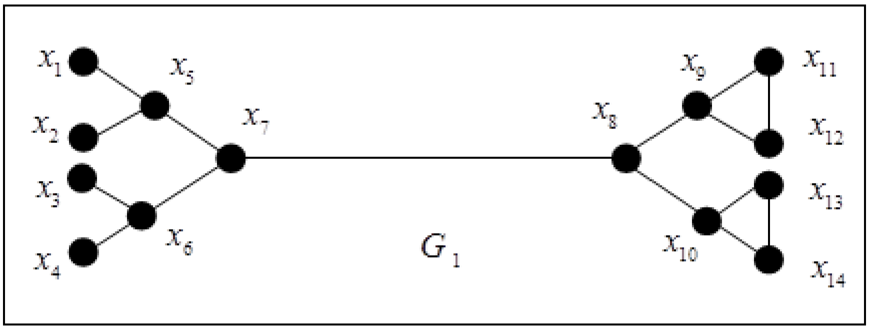
$E_1=\{e_{x_1x_2},e_{x_1x_3}\}$ ayrıtı atıldığında geriye kalan $G-\{e_{x_1x_2},e_{x_1x_3}\}$ çizgesinin minimum elemanlı 2-baskın kümesi $S_1=\{x_2,x_3,x_4,x_5\}$ bulunur.

$E_1 = \{e_{x_1x_2}, e_{x_1x_3}, e_{x_1x_4}\}$ ayrıtı atıldığında geriye kalan $G - \{e_{x_1x_2}, e_{x_1x_3}, e_{x_1x_4}\}$ çizgesinin minimum elemanlı 2-baskın kümesi $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ bulunur.

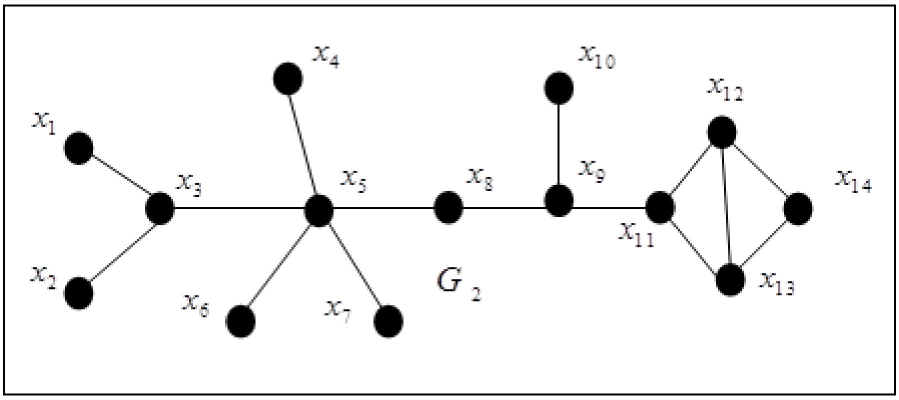
$\gamma_2(G - \{e_{x_1x_2}, e_{x_1x_3}, e_{x_1x_4}\}) = 5$ olur ve $\gamma_2(G - \{e_{x_1x_2}, e_{x_1x_3}, e_{x_1x_4}\}) > \gamma_2(G)$ şartını sağladığı için 2-bağımlılık sayısı ise $b_2(G) = 3$ olur.

_Örnek 1.4.11:_

Şekil 1.3 ve Şekil 1.4'deki çizgelerin bazı zedelenebilirlik parametrelerince inceleyelim.




Şekil 1.3. 14 tepeli, 15 ayrıtlı $G_1$ çizgesi.




Şekil 1.4. 14 tepeli, 15 ayrıtlı $G_2$ çizgesi.

İki çizgenin baskınlık ve bağımlılık sayılarını daha sonra da 2-baskınlık ve 2-bağımlılık sayılarını bulalım. Akabinde bağlantılılık sayılarını bulup bu iki çizgeyi karşılaştıralım.

$G_1$ çizgesi için baskınlık, bağımlılık, 2-baskınlık, 2-bağımlılık ve bağlantılılık değerlerini bulalım.

Baskınlık ve bağımlılık parametrelerince inceleyelim;

Öncelikle minimum elemanlı bir $S_1$ kümesi oluşturalım. Geriye kalan $V(G_1)-S_1$ kümesinde kalan her bir elemanın $S_1$ kümesinde en az bir komşu tepesi varmı kontrol edelim. Bu şekilde çizgenin baskın kümesi oluşturulur.

$S_1=\{x_5,x_6,x_9,x_{10}\}$ kümesinde, $V(G_1)-S_1$ kümesindeki herbir tepenin en az bir komşusu vardır. Dolayısıyla $S_1$ kümesi $G_1$ çizgesinin baskın kümelerinden birisi olmuş olur. Diğer bulunan baskın kümelerin eleman sayıları, $S_1$ kümesinin eleman sayısından daha fazla olur. Minimum elemanlı baskın küme $S_1$ olduğundan $G_1$ çizgesinin baskınlık sayısı $\gamma(G_1)=4$ bulunur.

Çizgenin baskınlık sayısını arttırmak için çizgeden çıkarılan minimum sayıdaki ayrıt sayısıda çizgenin bağımlılık sayını verir. Burdan yola çıkarak;
$E_1=\{e_{x_2x_5}\}$ ayrıtı çizgeden çıkarıldığında yeni oluşan $G_1-\{e_{x_2x_5}\}$ çizgesinin baskın kümesi $S=\{x_2,x_5,x_6,x_9,x_{10}\}$ bulunur. Baskınlık sayısı ise $\gamma\left(G_1-\{e_{x_2x_5}\}\right)=5$ olur. $\gamma\left(G_1-\{e_{x_2x_5}\}\right)>\gamma(G_1)$ olduğundan $G_1$ çizgesinin bağımlılık sayısı $b(G_1)=1$ elde edilir.

2-baskınlık ve 2-bağımlılık parametrelerince $G_1$ çizgesini inceleyelim;

$S_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{13}\}$ kümesinde, $V(G_1) - S_2$ kümesindeki herbir tepenin en az iki komşusu vardır. Dolayısıyla $S_2$ kümesi $G_1$ çizgesinin 2-baskın kümelerinden birisi olmuş olur. Diğer 2-baskın kümeler arasında ki minimum elemanlı baskın küme $S_2$ olduğundan, $G_1$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(G_1) = 9$ bulunur.

$S_3 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_9, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}$, $S_4 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{14}\}$ kümeleride $G_1$ çizgesinin mimimum elemanlı 2-baskın kümeleridir.

$G_1$ çizgenin bulunan 2-baskınlık sayısını arttırmak için minimum sayıda çıkarılan ayrıtlar kümesini bulalım.

$E_2 = \{e_{x_7x_8}, e_{x_8x_9}\}$ ayrıtı çizgeden çıkarıldığında yeni oluşan $G_1 - \{e_{x_7x_8}, e_{x_8x_9}\}$ çizgesinin 2-baskın kümesi $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}\}$ bulunur. 2-baskınlık sayısı ise $\gamma_2\left(G_1 - \{e_{x_7x_8}, e_{x_8x_9}\}\right) = 10$ elde edilir.

$\gamma_2\left(G_1 - \{e_{x_7x_8}, e_{x_8x_9}\}\right) > \gamma_2(G_1)$ olduğundan $G_1$ çizgesinin bağımlılık sayısı $b_2(G_1) = 2$ bulunur.

$G_1$ çizgesinin bağlantılılık değeri ise $k(G_1) = 1$'dir. $\{x_7\}$ tepesi çizgeden çıkarıldığında çizge bağlantısız çizge olmuş olur. $\{x_5\}, \{x_6\}, \{x_8\}, \{x_9\}$ ve $\{x_{10}\}$ tepelerinden herhangi biri çıkarıldığında da çizge bağlantısız olur.

$G_1$ çizgesi için bulunan bu zedelenebilirlik değeleri bir tablo ile gösterilecek olursa;

Çizelge 1.1. $G_1$ çizgesinin bazı zedelenebilirlik parametrelerine göre değerleri.

| | $G_1$ |
|---|---|
| Tepe Sayısı | 14 |
| Ayrıt Sayısı | 15 |
| Bağlantılılık Değeri | 1 |
| Baskınlık Sayısı | 4 |
| 2-Baskınlık Sayısı | 9 |
| Bağımlılık Sayısı | 1 |
| 2-Bağımlılık Sayısı | 2 |

Şimdi ise $G_2$ çizgesi için baskınlık, bağımlılık, 2-baskınlık, 2-bağımlılık ve bağlantılılık değerlerini bulalım.

Öncelikle $G_2$ çizgesini baskınlık ve bağımlılık parametrelerince inceleyelim;

$S_1 = \{x_3, x_5, x_9, x_{12}\}$ kümesinde, $V(G_2) - S_1$ kümesindeki herbir tepenin en az bir komşusu vardır. Dolayısıyla $S_1$ kümesi $G_2$ çizgesinin baskın kümelerinden birisi olur. Diğer bulunan baskın kümelerin eleman sayıları, $S_1$ kümesinin eleman sayısından daha fazla bulunur. Minimum elemanlı baskın küme $S_1$ olduğundan, çizgenin baskın kümesi $S_1$ kümesi olur. $G_2$ çizgesinin baskınlık sayısı ise $\gamma(G_2) = 4$ bulunur.

$S_2 = \{x_3, x_5, x_9, x_{13}\}$, $S_3 = \{x_3, x_5, x_9, x_{14}\}$ kümeleride $G_2$ çizgesinin 4 elemanlı baskın kümeleridir.

Çizgenin baskınlık sayısını arttırmak için çizgeden çıkarılan minimum sayıdaki ayrıt sayısıda çizgenin bağımlılık sayını verir. Burdan yola çıkarak;
$E_1 = \{e_{x_1 x_3}\}$ ayrıtı çizgeden çıkarıldığında yeni oluşan $G_2 - \{e_{x_1 x_3}\}$ çizgesinin baskın kümesi $S = \{x_1, x_3, x_5, x_9, x_{12}\}$ bulunur. Baskınlık sayısı ise $\gamma(G_2 - \{e_{x_1 x_3}\}) = 5$ olur.

$\gamma\left(G_2-\left\{e_{x_1x_3}\right\}\right)>\gamma\left(G_2\right)$ olduğundan $G_2$ çizgesinin bağımlılık sayısı $b\left(G_2\right)=1$ bulunur.

2-baskınlık ve 2-bağımlılık parametrelerince inceleyelim;

$S_2=\left\{x_1,x_2,x_4,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{12},x_{13}\right\}$ kümesinde, $V\left(G_2\right)-S_2$ kümesindeki herbir tepenin en az iki komşusu vardır. Dolayısıyla $S_2$ kümesi $G_2$ çizgesinin 2-baskın kümelerinden birisi olmuş olur. Diğer 2-baskın kümeler arasında ki minimum elemanlı baskın küme $S_2$ olduğundan, $G_2$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2\left(G_2\right)=9$ bulunur.

$S_3=\left\{x_1,x_2,x_4,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{12},x_{14}\right\}$, $S_4=\left\{x_1,x_2,x_4,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{13},x_{14}\right\}$ kümeleride $G_2$ çizgesinin mimimum elemanlı 2-baskın kümeleridir.

$G_2$ çizgenin bulunan 2-baskınlık sayısını arttırmak için minimum sayıda çıkarılan ayrıtlar kümesini bulalım.

$E_2=\left\{e_{x_1x_3}\right\}$ ayrıtı çizgeden çıkarıldığında yeni oluşan $G_2-\left\{e_{x_1x_3}\right\}$çizgesinin 2-baskın kümesi $S=\left\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_6,x_7,x_8,x_{10},x_{12},x_{13}\right\}$ bulunur. 2-Baskınlık sayısı ise $\gamma_2\left(G_2-\left\{e_{x_1x_3}\right\}\right)=10$ olur.

$\gamma_2\left(G_2-\left\{e_{x_1x_3}\right\}\right)>\gamma_2\left(G_2\right)$ olduğundan $G_2$ çizgesinin bağımlılık sayısı $b_2\left(G_2\right)=1$ bulunur.

$G_2$ çizgesinin connectivity değeri ise $k\left(G_2\right)=1$'dir. $\left\{x_5\right\}$ tepesi çizgeden çıkarıldığında çizge bağlantısız çizge olmuş olur. $\left\{x_3\right\},\left\{x_8\right\},\left\{x_9\right\}$ ve $\left\{x_{11}\right\}$ tepelerinden herhangi biri çıkarıldığında da çizge bağlantısız olur.

Bulunan bu zedelenebilirlik değelerinin $G_2$ çizgesi için bir tablo oluşturulacak olursa;

Çizelge 1.2. $G_2$ çizgesinin bazı zedelenebilirlik parametrelerine göre değerleri.

| | $G_2$ |
|---|---|
| Tepe Sayısı | 14 |
| Ayrıt Sayısı | 15 |
| Bağlantılılık Değeri | 1 |
| Baskınlık Sayısı | 4 |
| 2-Baskınlık Sayısı | 9 |
| Bağımlılık Sayısı | 1 |
| 2-Bağımlılık Sayısı | 1 |

Tepe ve ayrıt sayısı eşit olan $G_1$ ve $G_2$ çizgelerinin zedelenebilirlik parametrelerince bulunan değerlerini karşılaştıracak olursak eğer

Çizelge 1.3. $G_1$ ve $G_2$ çizgelerinin bazı zedelenebilirlik parametreleri değerlerine göre karşılaştırılması.

| | $G_1$ | $G_2$ |
|---|---|---|
| Tepe Sayısı | 14 | 14 |
| Ayrıt Sayısı | 15 | 15 |
| Bağlantılılık Değeri | 1 | 1 |
| Baskınlık Sayısı | 4 | 4 |
| 2-Baskınlık Sayısı | 9 | 9 |
| Bağımlılık Sayısı | 1 | 1 |
| 2-Bağımlılık Sayısı | 2 | 1 |

Sonuç olarak bu iki çizge yukarıdaki zedelenebilirlik parametlerine göre karşılaştırıldığında 2-bağımlılık sayısı bizim için ayırt edici bir parametredir (Körpe, M. Ç., Turacı, T., 2014).

# BÖLÜM 2

## ÇİZGELERDE 2-BASKILIK VE 2-BAĞIMLILIK SAYILARI

Bu bölümde bilinen çizgelerin 2-baskınlık ve 2-bağımlılık sayılarıyla ilgili teoremler verilmiştir.

*Teorem 2.1:*

2-baskın küme bir dereceli tüm tepeleri içerir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 2.2:*

H-çizgesi, G-çizgesinin bir alt çizgesi olmak üzere iki baskınlık sayısı $\gamma_2(H) \geq \gamma_2(G)$' dir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 2.3:*

$P_n$, $n$ tepeli bir yol çizge olmak üzere iki baskınlık sayısı $\gamma_2(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1$' dir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 2.4:*

$C_n$, $n$ tepeli bir çevre çizge olmak üzere iki baskınlık sayısı $\gamma_2(C_n) = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$' dir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 2.5:*

$W_n$, $(n>3)$ $n$ tepeli tekerlek çizge olmak üzere iki baskınlık sayısı $\gamma_2(W_n)=\begin{cases} 2 & , \ n=5,6 \\ \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor+1 & , \ n\geq 6 \end{cases}$ ’dir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 2.6:*

$K_n$, $n$ pozitif tam sayı olmak üzere iki baskınlık sayısı $\gamma_2(K_n)=\min\{2,n\}$ ’dir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 2.7:*

$K_{1,n}$, bir tepesi merkez tepe olan $n+1$ tepeli yıldız çizge için iki baskınlık sayısı $\gamma_2(K_{1,n})=\max\{n,2\}$ ’dir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 2.8:*

$P_n$, $n$ tepeli bir yol çizgesi olsun. Bu durumda $b_2(P_n)=\begin{cases} 0 & , \ n=1,2 \\ 1 & , \ n\geq 3 \end{cases}$ ’dir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 2.9:*

$C_n$, $n$ tepeli bir çevre çizge olmak üzere $b_2(C_n)=\begin{cases} 1 & , \ n \ \textit{çift sayı ise} \\ 2 & , \ n \ \textit{tek sayı ise} \end{cases}$ ’dir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 2.10:*

$K_n$ ,( $n > 3$ için) $n$ tepeli bir tam çizge olmak üzere $b_2(K_n) = \left\lfloor \frac{2n}{3} \right\rfloor$ ' tür (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 2.11:*

$W_n$ , $n > 4$ bir tekerlek çizge olmak üzere $b_2\left(W_n\right) = \begin{cases} 1 & , \ n = 5 \ \ ise \\ 2 & , \ n \neq 3k+2 \ \ ise \\ 3 & , \ aksi \ takdirde \end{cases}$ 'dir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 2.12:*

$K_{1,n}$ , $n+1$ tepeli bir yıldız çizge olsun $b_2(K_{1,n}) = n-1$ 'dir (Krzywkowski, M., 2013).

# BÖLÜM 3

# ORTA ÇİZGELERDE 2-BASKINLIK VE 2-BAĞIMLILIK SAYILARI

Bu bölümde öncelikli olarak orta çizgenin tanımı verilmiştir. Daha sonra yol, çevre, tam, yıldız ve tekerlek çizgelerin orta çizgelerinin 2-baskınlık ve 2-bağımlılık sayıları hesaplanmıştır.

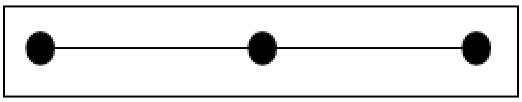
## 3.1. TANIM VE TEOREMLER

*Tanım 3.1.1.*

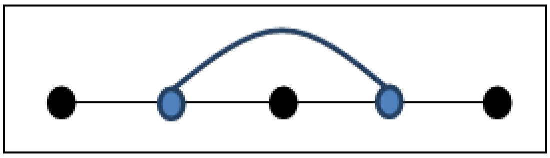
Bir $G$ çizgesi verilsin. $G$ nin her bir ayrıtının üzerine yeni bir tepe eklenip ve $G$ çizgesindeki bitişik ayrıtların üzerindeki yeni tepelerin birbirleri ile komşu olması için yeni ayrıtlarla birleştirilip oluşan yeni çizgeye, $G$ çizgesinin ***orta çizgesi*** denir ve $M(G)$ olarak gösterilir (Aytaç, A., Turacı, T. and Odabaş, Z. N., 2013).

*Örnek 3.1.2.*

Şekil 3.1'de $P_3$ yol çizgesi, Şekil 3.2'de ise $P_3$ yol çizgesinin orta olan $M\left(P_3\right)$ çizgesidir.



Şekil 3.1. 3 tepeli 2 ayrıtlı $P_3$ çizgesi.



Şekil 3.2. 5 tepeli 5 ayrıtlı $M\left(P_3\right)$ çizgesi.

*Teorem 3.1.1.*

$M(\mathrm{P}_n)$, $n$ $\left(n>2\right)$ tepeli bir yol çizgenin orta çizgesi olmak üzere, $M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n))=n$'dir.

*İspat 3.1.1.*

$M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(M(\mathrm{P}_n))$ ve tepe sayısı $\left|V(M(\mathrm{P}_n))\right|=2n-1$'dir. $V(M(\mathrm{P}_n))=V_1\cup V_2\cup V_3\cup V_4$ şeklinde 4 tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1=\{v_i\in V(M(\mathrm{P}_n))\,|\,d_{M(\mathrm{P}_n)}(v_i)=1\},\ \left|V_1\right|=2$$

$$V_2=\{v_i\in V(M(\mathrm{P}_n))\,|\,d_{M(\mathrm{P}_n)}(v_i)=2\},\ \left|\mathrm{V}_2\right|=n-2$$

$$V_3=\{v_i\in V(M(\mathrm{P}_n))\,|\,d_{M(\mathrm{P}_n)}(v_i)=3\},\ \left|V_3\right|=2$$

$$V_4=\{v_i\in V(M(\mathrm{P}_n))\,|\,d_{M(\mathrm{P}_n)}(v_i)=4\},\ \left|V_4\right|=n-3$$

$M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi $S_1$ ile gösterilsin. 2-baskın küme oluşturulurken izole ve tepe derecesi bir olan tepeleri 2-baskın küme, tanımdan gereği içerir. Bu takdirde $V_1\subseteq S_1$ olur. $V(M(\mathrm{P}_n))-V_1$ kümesindeki her tepenin en az iki komşusu $V_1$ kümesinde yoktur. $V_1$ kümesine $V(M(\mathrm{P}_n))-V_1$ kümesindeki her tepenin en az iki komşusu olacak şekilde minimun sayıda tepe eklenmelidir. 2-baskın küme için iki durum söz konusudur.

*1.Durum;*

$S_1$ kümesi, $S_1 = V_1 \cup V_4$ olarak seçildiğinde derecesi 3 olan tepelerin ve derecesi 2 olan 2 tane tepenin $S_1$ kümesinde tek komşusu olmuş olur. $V_3$ kümeside, $S_1$ kümesine eklendiğinde geriye kalan tüm tepelerin en az iki komşusunu içermiş olur. Başka bir ifadeyle $S_1 = V_1 \cup V_3 \cup V_4$ olarak seçilirse, $V(M(\mathrm{P}_n)) - S_1$ kümesindeki her tepenin en az iki komşusu $S_1$ kümesi içermiş olur. $|S_1| = |V_1 \cup V_3 \cup V_4| = n+1$ olup $\gamma_2(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)) = n+1$ bulunur. Baskınlık tanımından $\gamma_2(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)) \leq n+1$'dir.

*2.Durum;*

$S_1$ kümesi, $S_1 = V_1 \cup V_2$ olarak seçildiğinde $V(M(\mathrm{P}_n)) - S_1$ deki her tepenin en az iki komşusunu içermiş olur. Dolayısıyla $S_1$ kümesi 2-baskın küme olmuş olur. $|S_1| = |V_1 \cup V_2| = n$ olup $\gamma_2(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)) = n$'dir.

Diğer tüm durumlarda $\gamma_2(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)) \geq n+1$ bulunur. 2-baskınlık tanımı gereği minimum elemanlı kümenin eleman sayısı çizgenin 2-baskınlık sayısı olduğundan $M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)) = n$'dir.

*Teorem 3.1.2.*

$M(\mathrm{C}_n)$, $n$ tepeli bir çevre çizgenin orta çizgesi olmak üzere, $M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık değeri $\gamma_2(M(\mathrm{C}_n)) = n$'dir.

*İspat 3.1.2.*

$M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin tepe sayısı $|V(M(\mathrm{C}_n))| = 2n$'dir. $M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(M(\mathrm{C}_n))$ olmak üzere; $V(M(\mathrm{C}_n)) = V_1 \cup V_2$ şeklinde 2 tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(M(\mathrm{C}_n)) \mid d_{M(\mathrm{C}_n)}(v_i) = 2\},\ |V_1| = n$$

$$V_2 = \{v_i \in V(M(\mathrm{C}_n)) \mid d_{M(\mathrm{C}_n)}(v_i) = 4\},\ |V_2| = n$$

$M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı için;

$M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin tepeler kümesi $V(M(\mathrm{C}_n))$ ve $S_1 \subseteq V(M(\mathrm{C}_n))$ olmak üzere $S_1$, $M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi olsun. 2-baskın küme için iki durum söz konusudur.

*1.Durum;*

$S_1 = V_1$ ve $S_2 = V_2$ kümeleri 2-baskın kümelerdir. $|V_1| = n$ ve $|V_2| = n$ olduğundan iki tane minimum elemanlı 2-baskın küme vardır. Dolayısıyla; $\gamma_2(M(\mathrm{C}_n)) = n$'dir.

*2.Durum;*

$S_1 = V_1 \cup V_2$ ve $S_1 \neq V_1$, $S_1 \neq V_2$ olsun. Bu durumda $|S_1| > n$ olur. Böylece $\gamma_2(M(\mathrm{C}_n)) > n$ elde edilir. Sonuç olarak $M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı; $\gamma_2(M(\mathrm{C}_n)) = n$'dir.

*Teorem 3.1.3.*

$M(\mathrm{K}_{1,n})$, $n+1$ tepeli bir yıldız çizgenin orta çizgesi olmak üzere, $M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin 2-baskınlık değeri $\gamma_2(M(\mathrm{K}_{1,n})) = n+1$'dir.

*İspat 3.1.3.*

$M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin tepe sayısı $|V(M(\mathrm{K}_{1,n}))| = 2n+1$'dir. $M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin tepe kümesi $V(M(\mathrm{K}_{1,n}))$ olmak üzere, $V(M(\mathrm{K}_{1,n})) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ şeklinde üç tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(M(\mathrm{K}_{1,n})) \mid d_{M(\mathrm{K}_{1,n})}(v_i) = 1\},\ |V_1| = n$$

$$V_2 = \{v_i \in V(M(\mathrm{K}_{1,n})) \mid d_{M(\mathrm{K}_{1,n})}(v_i) = n+1\},\ |V_2| = n$$

$$V_3 = \{v_i \in V(M(\mathrm{K}_{1,n})) \mid d_{M(\mathrm{K}_{1,n})}(v_i) = n\},\ |V_3| = 1$$

$M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı;

$M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin tepeler kümesi $V(M(\mathrm{K}_{1,n}))$ ve $S_1 \subseteq V(M(\mathrm{K}_{1,n}))$ olmak üzere, $S_1$ $M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin 2-baskın kümesi olsun. $V_1$ kümesindeki tepeler uç tepe olduğundan *Teorem 2.1* 'den $V_1 \subset S_1$ olması gerekir.

$V_2$ kümesindeki her bir tepenin, $V_1$ kümesinde sadece bir komşusu vardır. Fakat $V_3$ kümesindeki merkez tepeye $V_1$ kümesindeki herhangi bir tepenin komşuluğu yoktur. Buradan $\gamma_2(\mathrm{M}(\mathrm{K}_{1,n})) > n$ olur. Böylece $M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin 2-baskın kümesi için iki durum söz konusudur.

*1.Durum;*

$V_1$ kümesindeki tepelerin yanına öyle bir $v_i, v_j \in V_2$ iki tepesiyle 2-baskın küme oluşturulabilir. Yani $M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin 2-baskın kümesi $\left(V_1 \cup \{v_i, v_j\}\right) = S_1$ olarak seçilebilir. Böylece $\left|\left(V_1 \cup \{v_i, v_j\}\right)\right| = n+2$ elde edilir. Buradan 2-baskınlık sayısı $\gamma_2\left(M(\mathrm{K}_{1,n})\right) = n+2$ bulunur.

*2.Durum;*

$V_1$ tepeler kümesi ile $V_3$ tepeler kümesi birleşimiyle 2-baskın küme oluşturulur. $\left(V_1 \cup V_3\right) = S_1$ olarak gösterilecek olursa bu kümenin eleman sayısı $|V_1 \cup V_3| = n+1$ olup $\gamma_2\left(M(\mathrm{K}_{1,n})\right) = n+1$ bulunur.

Geriye kalan tüm durumlarda $\gamma_2\left(M(\mathrm{K}_{1,n})\right) \geq n+1$ bulunur. Dolayısıyla $M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2\left(M(\mathrm{K}_{1,n})\right) = n+1$'dir.

*Teorem 3.1.4.*

$M(\mathrm{K}_n)$, $n$ tepeli bir tam çizgenin orta çizgesi olmak üzere, $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık değeri $\gamma_2(M(\mathrm{K}_n)) = n$'dir.

*İspat 3.1.4.*

$M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin tepe sayısı $\left|V(M(\mathrm{K}_n))\right| = \dfrac{n(n+1)}{2}$'dır. $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(M(\mathrm{K}_n))$ olmak üzere; $V(M(\mathrm{K}_n)) = V_1 \cup V_2$ şeklinde iki tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(M(\mathrm{K}_n)) \mid d_{M(\mathrm{K}_n)}(v_i) = n-1\},\ \left|V_1\right| = n$$

$$V_2 = \{v_i \in V(M(\mathrm{K}_n)) \mid d_{M(\mathrm{K}_n)}(v_i) = 2(n-1)\},\ \left|V_2\right| = \frac{n(n-1)}{2}$$

*Teorem 2.6* 'dan $\gamma_2\left(K_n\right) = 2$'dir. $\mathrm{K}_n$ çizgesinin 2-baskın kümesi $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi değildir. $V\left(M(\mathrm{K}_n)\right)$ kümesinden herhangi 2 tepenin seçimi ile $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi oluşturulamaz.

$M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı için 2 durum söz konusudur;

*1.Durum;*

$V_1$ kümesinden alınan herhangi 2 tepe ile $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesini oluşturmaz. Adım adım yapacak olursak eğer; $V_1$ kümesinden alınan herhangi 3 tepe ile de $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin 2-baskın küme oluşturulamaz. Bu işlem $V_1$'den alınan herhangi $n-1$ tepe ile de mümkün değildir. $V_1 = S_1$ olarak seçilirse eğer $V(M(\mathrm{K}_n))$ kümesindeki her bir tepenin en az iki komşusu $V_1$ kümesindeki tepelerinin arasında olur. Bu takdirde $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin 2-baskın kümelerinden biri $V_1 = S_1$ olarak seçilebilir. Dolayısıyla $|V_1| = n$ olup 2-baskınlık sayısı $\gamma_2\left(M(\mathrm{K}_n)\right) \leq n$ bulunur.

*2.Durum;*

Benzer olarak aynı işlemler $V_2$ içinde gerçekleştirilirse; $V_2$ kümesinden alınan herhangi 2 tepe ile $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesini oluşturmaz. Adım adım yapacak olursak eğer ; $V_2$ kümesinden alınan herhangi 3 tepe ile de $M(\mathrm{K}_n)$ ilede 2-baskın küme oluşturulamaz. Bu işlem $V_2$'den alınan herhangi $n-1$ tepe ile de mümkün değildir. $V_2$ tepe kümesinde özel olarak seçilen $n$ tane tepenin oluşturduğu küme $V_{2_k}$ olsun. Yani $V_{2_k} \subset \mathrm{V}_2$ ve $n$ tane $v_i \in V_{2_k}$ olsun. Bu $V_{2_k}$ kümesini, $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesindeki her bir tepenin 2 komşusu var olacak şekilde alalım. Böylece $V_{2_k} = S_1$ kümesi $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi olur ve $|V_{2_k}| = n$ olduğundan 2-baskınlık sayısı $\gamma_2\left(M(\mathrm{K}_n)\right) \leq n$ bulunur.

Geri kalan bütün durumlarda $\gamma_2\left(M(\mathrm{K}_n)\right) \geq n$ bulunur. Dolayısıyla $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2\left(M(\mathrm{K}_n)\right) = n$'dir.

*Teorem 3.1.5.*

$M(\mathrm{W_n})$, $n$ tepeli bir tekerlek çizgenin orta çizgesi olmak üzere, $M(\mathrm{W_n})$ çizgesinin 2-baskınlık değeri $\gamma_2(M(\mathrm{W_n})) = n+1$'dir.

*İspat 3.1.5.*

$M(\mathrm{W_n})$ çizgesinin tepe sayısı $|V(M(\mathrm{W_n}))| = 3n-2$'dir. $M(\mathrm{W_n})$ çizgesinin tepe kümesi $V(M(\mathrm{W_n}))$ olmak üzere; $V(M(\mathrm{W}_n)) = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup V_4$ şeklinde dört tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(M(\mathrm{W_n})) \mid d_{M(\mathrm{W_n})}(v_i) = 3\},\ |V_1| = n-1$$

$$V_2 = \{v_i \in V(M(\mathrm{W_n})) \mid d_{M(\mathrm{W_n})}(v_i) = 6\},\ |V_2| = n-1$$

$$V_3 = \{v_i \in V(M(\mathrm{W_n})) \mid d_{M(\mathrm{W_n})}(v_i) = n+2\},\ |V_3| = n-1$$

$$V_4 = \{v_i \in V(M(\mathrm{W_n})) \mid d_{M(\mathrm{W_n})}(v_i) = n-1\},\ |V_4| = 1$$

$M(\mathrm{W_n})$ çizgesinin, $2n-2$ tepeli bir alt $C_{2(n-1)}$ çevre çizgesi vardır. $C_{2(n-1)}$ çizgesinin 2 tane bağımsız kümesi vardır ve bu kümenin eleman sayısı $n-1$'dir. Bunlar, $B_1$ ve $B_2$ şeklinde gösterilsin. $B_1$ kümesindeki tepeler $M(\mathrm{W_n})$ çizgesi üzerinde 3 dereceli tepeler, $B_2$ kümesindeki tepeler ise $M(\mathrm{W_n})$ çizgesi üzerinde ki 6 dereceli tepeler olsun. $M(\mathrm{W_n})$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı için 2 durum söz konusu olur. 2-baskın kümede $S_1$ ile gösterilsin.

*1.Durum;*

$B_1$ kümesinde , $V(M(\mathrm{W_n})) - B_1$ kümesindeki herbir tepenin en az iki komşusu yoktur. O zaman $B_1$ kümesine tek başına 2-baskın küme olmaz. $B_1 \subset S_1$ olsun.

*Alt Durum 1;*

$B_1$ kümesiyle merkez tepeyi birleştirildiğinde yeni oluşan küme $B_1 \cup V_4$'dür. $B_1 \cup V_4$ kümesinde, $V(M(\mathrm{W_n})) - B_1 \cup V_4$ kümesindeki herbir tepenin en az iki komşusu olmuş olur. Bu ise $S_1 = B_1 \cup V_4$ olması demektir. Eleman sayısı ise $|S_1| = |B_1 \cup V_4| = n$ olup $\gamma_2\left(M(\mathrm{W}_n)\right) \leq n$ bulunur.

*Alt Durum 2;*

$S_1$ kümesi merkez tepeyi içermesin. Bu takdirde merkez tepenin en az 2 komşusu $S_1$ kümesinde olacak şekilde tepe seçimi yapılmalıdır. $B_1$ veya $B_2$ kümelerinin ikiside merkez tepeye komşu olan hiç bir tepeyi içermez. Bu takdirde $B_1$ kümesine merkez tepenin komşusu olan en az 2 tepe eklemek gerekir. $v_i, v_j \in V_3$ olacak şekilde $B_1 \cup \{v_i, v_j\}$ ekleyelim.

$B_1 \cup \{v_i, v_j\}$ kümesinde, $V(M(\mathrm{W_n})) - \left(B_1 \cup \{v_i, v_j\}\right)$ kümesindeki herbir tepenin en az iki komşusu olmuş olur. Bu ise $S_1 = B_1 \cup \{v_i, v_j\}$ olması demektir. Eleman saıyısı ise $|S_1| = \left|B_1 \cup \{v_i, v_j\}\right| = (n-1) + 2 = n+1$ olup $\gamma_2\left(M(\mathrm{W}_n)\right) \leq n+1$ bulunur.

*2.Durum;*

Benzer işlemler $B_2$ kümesi üzerinden de yapıldığında 2-baskınlık sayısı aynı bulunur.

*3.Durum;*

Geri kalan bütün durumlarda $\gamma_2\left(M(\mathrm{W}_n)\right) \geq n$ elde ederiz. Dolayısıyla $M(\mathrm{W}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı ise $\gamma_2\left(M(W_n)\right) = n$ 'dir.

*Teorem 3.1.6.*

$M(\mathrm{P}_n)$, $n$ tepeli bir yol çizgenin orta çizgesi olmak üzere, $M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinin 2-bağımlılık sayısı $b_2(\mathrm{M}(\mathrm{P}_n)) = 1$ 'dir.

*İspat 3.1.6.*

$M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinin tepe sayısı $|V(M(\mathrm{P}_n))| = 2n-1$, ayrıt sayısı ise $|E(M(\mathrm{P}_n))| = 3n-4$'dir. $M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(M(\mathrm{P}_n))$ *Teorem 3.1.1* 'de ki gibi benzer şekilde yazılsın.

$M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(M(\mathrm{P}_n))$ olmak üzere; $E(M(\mathrm{P}_n)) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$ şeklinde dört tane alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{P}_n)) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_3\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{P}_n)) \mid v_i \in V_3, \mathrm{v}_j \in \mathrm{V}_4\}$$

$$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{P}_n)) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_3\}$$

$$E_4 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{P}_n)) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_4\}$$

$$E_5 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{P}_n)) \mid v_i, v_j \in V_4\}$$

$M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinin 2-bağımlılık sayısı;
$M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinden $E_1, E_3$ yada $E_4$ kümelerinin herhangi birinden öyle bir $e_{v_i v_j}$ ayrıtı atıldığında yeni oluşan $(M(\mathrm{P}_n) - \{e_{v_i v_j}\})$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(M(\mathrm{P}_n)) < \gamma_2((M(\mathrm{P}_n) - \{e_{v_i v_j}\}))$ olur. Böylece $M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinin 2-bağımlılık sayısı; $b_2(M(\mathrm{P}_n)) = 1$ bulunur.

*Teorem 3.1.7.*

$M(\mathrm{C}_n)$, $2n$ tepeli bir çevre çizgenin orta çizgesi olmak üzere, $M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri $b_2(M(\mathrm{C}_n)) = 1$'dir.

*<u>İspat 3.1.7.</u>*

$M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin tepe sayısı $|V(M(\mathrm{C}_n))| = 2n$, ayrıt sayısı ise $|E(M(\mathrm{C}_n))| = 3n$'dir. $M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(M(\mathrm{C}_n))$ *Teorem 3.1.2* 'de ki gibi benzer şekilde parçalansın.

$M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(M(\mathrm{C}_n))$ olmak üzere; $E(M(\mathrm{C}_n)) = E_1 \cup E_2$ olacak şekilde 2 tane ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılısın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{C}_n)) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{C}_n)) \mid v_i, v_j \in V_2\}$$

$M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinin 2-bağımlılık sayısı;

Öyle bir $e_{v_i v_j} \in E_1$ ayrıtı $M(\mathrm{C}_n)$ çizgesinden atıldığında yeni oluşan $M(\mathrm{C}_n) - \{e_{v_i v_j}\}$ çizgesi mutlaka $M(\mathrm{P}_n)$ çizgesini içerir yani $M(\mathrm{P}_n) \subset M(\mathrm{C}_n) - \{e_{v_i v_j}\}$'dir. Geriye $M(\mathrm{P}_n)$ çizgesinin tepelerine sadece bir komşusu olan $v_j$ tepesi kalır.

$$\gamma_2\left(M(\mathrm{C}_n) - \{e_{v_i v_j}\}\right) \geq \gamma_2\left(M(P_n)\right) + \left\{v_j\right\}$$

$$\gamma_2\left(M(\mathrm{C}_n) - \{e_{v_i v_j}\}\right) \geq n + 1 \text{ olur.}$$

Dolayısıyla $\gamma_2(M(\mathrm{C}_n)) < \gamma_2((M(\mathrm{C}_n) - \{e_{v_i v_j}\}))$ bulunur. Sonuç olarak $b_2(M(\mathrm{C}_n)) = 1$ elde edilir.

*<u>Teorem 3.1.8.</u>*

$M(\mathrm{K}_{1,n})$, $n+1$ tepeli bir yıldız çizgenin orta çizgesi olmak üzere, $M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri $b_2(M(\mathrm{K}_{1,n})) = 1$'dir.

*İspat 3.1.8.*

$M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin tepe sayısı $|V(M(\mathrm{K}_{1,n}))| = 2n+1$, ayrıt sayısı ise $|E(M(\mathrm{K}_{1,n}))| = \dfrac{n(n+3)}{2}$'dir. $M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin tepe kümesi $V(M(\mathrm{K}_{1,n}))$ *Teorem 3.1.3* 'de ki gibi benzer şekilde parçalansın.

$M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(M(\mathrm{K}_{1,n}))$ olmak üzere; $E(M(\mathrm{K}_{1,n})) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ olacak şekilde 3 tane alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{K}_{1,n})) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{K}_{1,n})) \mid v_i \in V_3, \mathrm{v}_j \in \mathrm{V}_2\}$$

$$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{K}_{1,n})) \mid v_i, v_j \in V_3\}$$

Öyle bir $e_{v_i v_j} \in E_2$ ayrıtı $M(\mathrm{K}_{1,n})$ çizgesinden çıkarıldığında yeni oluşan $M(\mathrm{K}_{1,n}) - \{e_{v_i v_j}\}$ çizgesi $M(\mathrm{K}_{1,n-1})$ çizgesini içerir. Geriye kalan 2 tepeden 1 tanesi bir dereceli tepe diğeri ise $n+1$ dereceli tepedir. Bu iki tepenin $M(\mathrm{K}_{1,n-1})$ çizgesinin 2-baskın kümesinde hiç komşusu yoktur.

$$\gamma_2\left(M(\mathrm{K}_{1,n}) - \left\{e_{v_i v_j}\right\}\right) \geq \gamma_2\left(M(\mathrm{K}_{1,n-1})\right) + \left\{v_i, v_j\right\}$$

$$\gamma_2\left(M(\mathrm{K}_{1,n}) - \left\{e_{v_i v_j}\right\}\right) \geq n+2 \quad \text{olur.}$$

Buradan $\gamma_2((M(\mathrm{K}_{1,n}) - \{e_{v_i v_j}\})) > \gamma_2(M(\mathrm{K}_{1,n}))$ olup $b_2\left(M(\mathrm{K}_{1,n})\right) = 1$'dir.

*Teorem 3.1.9.*

$M(\mathrm{K}_n)$, $n$ tepeli bir tam çizgenin orta çizgesi olmak üzere, $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri $b_2(M(\mathrm{K}_n)) \leq 2(n-2)$'dir.

*İspat 3.1.9.*

$M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinin tepe sayısı $|V(M(\mathrm{K}_n))| = \dfrac{n(n+1)}{2}$'dır.

$v_i, \mathrm{v}_j, v_k \in V(\mathrm{K}_n)$ ve $v_i, \mathrm{v}_j, v_k$ 2 uzunluklu bir yol olsun. $M(\mathrm{K}_n)$çizgesinde $v_i$ *ve* $v_k$ tepelerini 1 dereceli olacak ve $M(\mathrm{K}_n)$ ‘ da $v_i,....,v_k$ 4 uzunluklu bir alt yol çizge kalacak şekilde $2(n-2)$ ayrıtları (bu ayrıtların kümesi $E_1$olsun) $M(\mathrm{K}_n)$ çizgesinden atıldığında yeni oluşan $\left(M(\mathrm{K}_n)-E\right)$ çizgesi mutlaka $M(\mathrm{K}_{n-2})$ çizgesini içerir. Bununla birlikte geriye kalan $M(\mathrm{K}_{n-2})$ çizgesinin tepelerine komşu olmayan bir tepe kalır. Buradan;

$$\gamma_2(M(\mathrm{K}_n)-E) > \gamma_2\left(M(\mathrm{K}_{n-2})\right) + \{v_i, v_k\}$$
$$\gamma_2(M(\mathrm{K}_n)-E) > (n-2)+2$$
$$\gamma_2(M(\mathrm{K}_n)-E) > n$$

($v_i$ ve $v_k$ tepeleri 1 dereceli tepe olduklarından 2-baskın kümesinde olması gerekir.) Dolayısıyla $\gamma_2(M(\mathrm{K}_n)-E) > \gamma_2\left(M(\mathrm{K}_n)\right)$ olduğundan; $b_2\left(M(\mathrm{K}_n)\right) \leq 2(n-2)$ elde edilir.

*Teorem 3.1.10.*

$M(\mathrm{W}_\mathrm{n})$, $n$ tepeli bir tekerlek çizgenin orta çizgesi olmak üzere, $M(\mathrm{W}_\mathrm{n})$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri $b_2(M(\mathrm{W}_\mathrm{n})) = 1$'dir.

*İspat 3.1.10.*

$M(\mathrm{W_n})$ çizgesinin tepe sayısı $|V(M(\mathrm{W_n}))| = 3n-2$ 'dır. $M(\mathrm{W_n})$ çizgesinin tepe kümesi $V(M(\mathrm{W_n}))$, *Teorem 3.1.5*'de ki gibi benzer şekilde yazılsın.

$M(\mathrm{W}_n)$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(M(W_n))$ olmak üzere; $E(M(W_n)) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$ şekilde 6 tane alt ayrıt kümesini birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{W}_n)) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{W}_n)) \mid v_i \in V_1, \mathrm{v}_j \in \mathrm{V}_3\}$$

$$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{W}_n)) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_3\}$$

$$E_4 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{W}_n)) \mid v_i \in V_3, v_j \in V_4\}$$

$$E_5 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{W}_n)) \mid v_i, v_j \in V_2\}$$

$$E_6 = \{e_{v_i v_j} \in E(M(\mathrm{W}_n)) \mid v_i, v_j \in V_3\}$$

Öyle bir $e_{v_i v_j} \in E_1$ ayrıtı $M(\mathrm{W}_n)$ çizgesinden çıkarıldığında yeni oluşan $M(\mathrm{W}_n) - \{e_{v_i v_j}\}$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $M(\mathrm{W}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısından büyük olduğu için $\gamma_2(M(\mathrm{W}_n) - \{e_{v_i v_j}\}) > \gamma_2(M(\mathrm{W}_n))$ olur. Böylece $b_2(M(\mathrm{W}_n)) = 1$ elde edilir.

# BÖLÜM 4

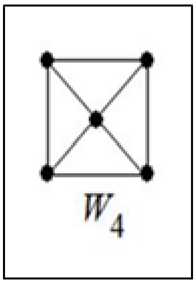
## TEKERLEK İÇEREN ÇİZGELERİN 2-BASKINLIK VE 2-BAĞIMLILIK SAYILARI

Bu bölümde öncelikle tekerlek içeren çizgelerin tanımları verilmiştir. Daha sonra bu çizgelerin 2-baskınlık ve 2-bağımlılık sayıları hesaplanmıştır.

### 4.1. TANIMLAR VE TEOREMLER

*Tanım 4.1.1.*

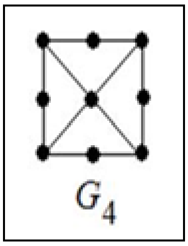
*Tekerlek çizge (Wheel Graph)*; $C_n$ çevre çizgesinin tepelerini bir merkez tepe ile birleştirilmesiyle elde edilir ve $W_n$ ile gösterilir (Aytaç, A. and Odabaş, Z. N., 2011).




Şekil 4.1. 5 tepeli, 8 ayrıtlı $W_4$ çizgesi.

*Tanım 4.1.2.*

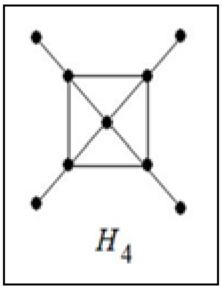
*Dişli çizge (Gear Graph)*; $W_n$ tekerlek çizgenin, $C_n$ üzerindeki her ayrıtına birer tepe eklenemesiyle elde edilir ve $G_n$ ile gösterilir (Aytaç, A. and Turacı, T., 2011).




Şekil 4.2. 9 tepeli, 12 ayrıtlı $G_4$ çizgesi.

*Tanım 4.1.3.*

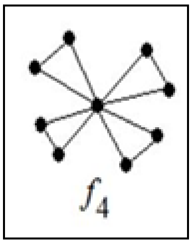
*Dümen çizge (Helm Graph)*; Bir $W_n$ tekerlek çizgenin $C_n$ çevresi üzerindeki her tepeye yeni bir tepe eklenmesiyle elde edilir ve $H_n$ ile gösterilir (Javaid, I. and Shokat, S., 2008).




Şekil 4.3. 9 tepeli, 12 ayrıtlı $H_4$ çizgesi.

*Tanım 4.1.4.*

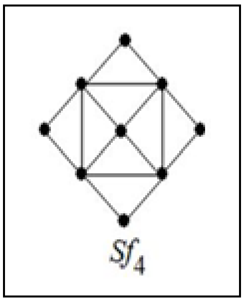
*Arkadaşlık çizge (Friendship Graph)*; Sabit bir noktadan $n$ tane $C_3$ çizgesinin birleşmesiyle elde edilir ve $f_n$ ile gösterilir (Aytaç, A. and Odabaş, Z. N., 2011).




Şekil 4.4. 9 tepeli, 12 ayrıtlı $f_4$ çizgesi.

*Tanım 4.1.5.*

*Ayçiçeği çizge (Sun Flower Graph)*; Bir $W_n$ tekerlek çizgenin çevre üzerindeki ardışık tepeleri bir tepe ile birleştirmesiyle elde edilir. $Sf_n$ ile gösterilir (Javaid, I. and Shokat, S., 2008).




Şekil 4.5. 9 tepeli, 12 ayrıtlı $Sf_4$ çizgesi.

*Teorem 4.1.1.*

$W_n$, $n > 3$ tepeli bir tekerlek çizge olmak üzere, $W_n$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı

$$\gamma_2(W_n) = \begin{cases} 2, & n = 4,5 \\ \left\lfloor \frac{n+1}{3} \right\rfloor + 1, & n \geq 6 \end{cases}$$ ’dir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 4.1.2.*

$G_n$, $2n+1$ tepeli bir dişli çizge olmak üzere, $G_n$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(G_n) = n$ ’dir.

*İspat 4.1.2.*

$G_n$ çizgesinin tepe sayısı $|V(G_n)| = 2n+1$, ayrıt sayısı ise $|E(G_n)| = 3n$ ’dir. $G_n$ çizgesinin tepe kümesi $V(G_n)$ olmak üzere; $V(G_n) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ şekilde 3 tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(G_n) \mid d_{G_n}(v_i) = 3\},\ |V_1| = n$$

$$V_2 = \{v_i \in V(G_n) \mid d_{G_n}(v_i) = 2\},\ |V_2| = n$$

$$V_3 = \{v_i \in V(G_n) \mid d_{G_n}(v_i) = 1\},\ |V_3| = 1$$

Benzer şekilde $G_n$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(G_n)$ olmak üzere; $E(G_n) = E_1 \cup E_2$ şekilde 2 tane alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(G_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(G_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_3\}$$

$S_1 \subseteq V(G_n)$ kümesi $G_n$ çizgesinin 2-baskın kümesi olsun.

*1.Durum;*

$G_n$ çizgesi, $K_{1,n}$ yıldız çizgesini içerir. $K_{1,n}$ alt çizgesinin 2-baskın kümesi ise $V_1 \subset V\left(G_n\right)$ kümesidir. $V_1$ kümesi aynı zamanda $V(G_n) - V_1$ kümesindeki her bir tepenin en az iki komşu tepesi bulunuğundan, $V_1$ kümesi $G_n$ çizgesinin 2-baskın kümedir. Böylece $|V_1| = n$ olup $\gamma_2(G_n) \leq n$ elde edilir.

*2.Durum;*

$G_n$ çizgesi, $C_n$ çevre çizgesini içerir. $C_n$ alt çizgesinin ayrıtları üzerindeki tepelerin kümesi $V_2 \subset V\left(G_n\right)$ kümesidir. $V_2$ kümesinde $V\left(G_n\right) - V_2$ de ki merkez tepe haricindeki herbir tepenin en az 2 komşusu vardır. $V_3$ de ki merkez tepenin $V_2$ kümesinde hiç bir komşusu yoktur. $V_2$ ile $V_3$ kümelerinin birleşimi ile $G_n$ çizgesinin 2-baskın kümesi oluşturulur. Böylece $|V_2 \cup V_3| = n+1$ olur ve $\gamma_2(G_n) \leq n+1$ elde edilir.

Diğer durumlarda da $\gamma_2(G_n) \geq n$ bulunur. Sonuç olarak 2-baskınlık tanımından minimum elemanlı 2-baskın kümenin eleman sayısı $G_n$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı olacağından $V_1 = S_1$ ve $\gamma_2(G_n) = n$ elde edilir.

*Teorem 4.1.3.*

$H_n$, $2n+1$ tepeli bir dümen çizge olmak üzere, $H_n$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(H_n) = n+1$'dir.

*İspat 4.1.3.*

$H_n$ çizgesinin tepe sayısı $|V(H_n)| = 2n+1$ ,ayrıt sayısı $|E(H_n)| = 3n$ dir. $H_n$ çizgesinin tepe kümesi $V(H_n)$ olmak üzere; $V(H_n) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ şeklinde 3 tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(H_n) \mid d_{H_n}(v_i) = 1\}, \ |V_1| = n$$
$$V_2 = \{v_i \in V(H_n) \mid d_{H_n}(v_i) = 4\}, \ |V_2| = n$$
$$V_3 = \{v_i \in V(H_n) \mid d_{H_n}(v_i) = n\}, \ |V_3| = 1$$

Benzer şekilde $H_n$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(H_n)$ olmak üzere; $E(H_n) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ şeklinde 3 tane alt ayrıt kümenin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(H_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$
$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(H_n) \mid v_i, v_j \in V_2\}$$
$$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(H_n) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_3\}$$

$S_1 \subset V(H_n)$ kümesi, $H_n$ çizgesinin 2-baskın kümesi olsun. *Teorem 2.1*'den derecesi bir olan tepeler 2-baskın kümenin elemanı olmak zorunda olduğundan $V_1 \subseteq S_1$ dir. 2-baskın küme oluşturulurken 2 farklı durum vardır.

*1.Durum;*

Tek başına $V_1$ kümesi, $H_n$ çizgesinin 2-baskın kümesi olması için yeterli değildir. Başka bir ifadeyle $V_2$ kümesindeki herbir tepenin $V_1$ kümesinde sadece tek komşusu vardır. Aynı zamanda $V_3$ de ki merkez tepe, $V_1$ kümesindeki tepelerin hiçbirine komşu değildir.

$V_1$ ile $V_3$ kümelerinin birleşimi ile $H_n$ çizgesi 2-bastırılmış olur. Böylece $\gamma_2(H_n) \leq n+1$ elde edilir.

*2.Durum;*

Tek başına $V_1$ kümesi 2-baskın küme olmadığından, $H_n$ çizgesinin 2-baskın kümesini oluşturmak için $V_2$ kümesinden tepe eklenmesi gerekir. Bu ise $n$ nin çift yada tek olmasına göre değişir. Bu 2- baskın küme $S_1$ olsun.

- $n$ tek ise; $|S_1| = \frac{3n-1}{2}$ olup, $\gamma_2(H_n) \leq \frac{3n-1}{2}$ bulunur.
- $n$ çift ise ; $|S_1| = \frac{3n}{2}$ olup, $\gamma_2(H_n) \leq \frac{3n}{2}$ bulunur.

Diğer durumlarda da $\gamma_2(H_n) > n+1$ elde edilir. Sonuç olarak 2-baskınlık tanımından minimum elemanlı 2-baskın kümenin eleman sayısı $H_n$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı olacağından $\gamma_2(H_n) = n+1$ elde edilir.

*Teorem 4.1.4.*

$Sf_n$, $2n+1$ tepeli bir ayçiçeği çizge olmak üzere, $Sf_n$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(Sf_n) = n$'dir.

*İspat 4.1.4.*

$Sf_n$ çizgesinin tepe sayısı $|V(Sf_n)| = 2n+1$, ayrıt sayısı ise $|E(Sf_n)| = 4n$'dir. $Sf_n$ çizgesinin tepe kümesi $V(Sf_n)$ olmak üzere; $V(Sf_n) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ şeklinde 3 alt tepe kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(Sf_n) \mid d_{Sf_n}(v_i) = 2\},\ |V_1| = n$$

$$V_2 = \{v_i \in V(Sf_n) \mid d_{Sf_n}(v_i) = 5\},\ |V_2| = n$$

$$V_3 = \{v_i \in V(Sf_n) \mid d_{Sf_n}(v_i) = n\},\ |V_3| = 1$$

Benzer şekilde $Sf_n$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(Sf_n)$ olmak üzere; $E(Sf_n) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ şeklinde 3 alt ayrıt kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(Sf_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(Sf_n) \mid v_i, v_j \in V_2\}$$

$$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(Sf_n) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_3\}.$$

$S_1 \subseteq V(Sf_n)$ kümesi, $Sf_n$ çizgesinin 2-baskın kümesi olsun.

*1.Durum;*

$V(Sf_n) - V_2$ kümesindeki her bir tepenin, $V_2$ kümesinde en az 2 komşu tepesi olduğundan $V_2$ kümesi $Sf_n$ çizgesinin 2-baskın kümelerinden birisidir. Böylece $|V_2| = n$ olduğundan $\gamma_2(Sf_n) \le n$ elde edilir.

*2.Durum;*

$V(Sf_n) - V_1$ kümesindeki her bir tepenin, $V_1$ kümesinde en az 2 komşu tepesi yoktur. Fakat $V_1 \cup V_3$ kümesinde en az 2 komşusu mevcuttur.

Dolayısıyla $V_1 \cup V_3$ kümesi 2-baskın kümedir. Böylece $|V_1 \cup V_3| = n+1$ olup, $\gamma_2(Sf_n) \leq n+1$ elde edilir.

Diğer durumlarda da $\gamma_2(Sf_n) \geq n$ bulunur. Sonuç olarak 2-baskınlık tanımından minimum elemanlı 2-baskın kümenin eleman sayısı $Sf_n$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı olacağından $\gamma_2(Sf_n) = n$'dir.

*<u>Teorem 4.1.5.</u>*

$f_n$, $2n+1$ tepeli bir arkadaşlık çizge olmak üzere, $f_n$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(f_n) = n+1$'dir.

*<u>İspat 4.1.5.</u>*

$f_n$ çizgesinin tepe sayısı $|V(f_n)| = 2n+1$, ayrıt sayısı ise $|E(f_n)| = 3n$'dir. $G_n$ çizgesinin tepe kümesi $V(f_n)$ olmak üzere; $V(f_n) = V_1 \cup V_2$ şeklinde 2 alt tepeler kümesinin birleşimi olacak şekilde yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(f_n) \mid d_{f_n}(v_i) = 2\},\ |V_1| = 2n$$

$$V_2 = \{v_i \in V(f_n) \mid d_{f_n}(v_i) = 2n\},\ |V_2| = 1$$

Benzer şekilde $f_n$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(f_n)$ olmak üzere; $E(f_n) = E_1 \cup E_2$ şeklinde 2 alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olacak şekilde yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(f_n) \mid v_i, v_j \in V_1\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(f_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$S_1 \subset V(f_n)$ kümesi, $f_n$ çizgesinin 2-baskın kümesi olsun. $f_n$ çizgesi $n$ tane $C_3$ alt çizgesi vardır. $n$ tane $C_3$ çizgenin herbirinden merkez tepeye komşu olan birer tane tepe ile merkez tepenin oluşturduğu bir küme oluşturulursa, bu küme $f_n$ çizgesinin 2-baskın kümesi olur. Bu küme $S_1$ kümesi olur. $|S_1| = n+1$ olduğundan $\gamma_2(f_n) = n+1$'dir.

*Teorem 4.1.6.*

$W_n$, $n+1$ tepeli bir tekerlek çizge olmak üzere, 2-bağımlılık değeri;

$$b_2(W_n) = \begin{cases} 1 & , n = 5 \ ise \\ 2 & , n \neq 3k+2 \ ise \\ 3 & , aksi \ halde \end{cases}$$ 'dir (Krzywkowski, M., 2013).

*Teorem 4.1.7.*

$G_n$, $2n+1$ tepeli bir dişli çizge olmak üzere, $G_n$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri $b_2(G_n) = 1$'dir.

*İspat 4.1.7.*

$G_n$ çizgesinin tepe sayısı $|V(G_n)| = 2n+1$, ayrıt sayısı ise $|E(G_n)| = 3n$'dir. $G_n$ çizgesinin tepe kümesi $V(G_n)$, *Teorem 4.1.2*'de ki gibi yazılsın.

Benzer şekilde $G_n$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(G_n)$ olmak üzere; $E(G_n) = E_1 \cup E_2$ şeklinde 2 alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olacak şekilde yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(G_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$
$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(G_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_3\}$$

$V_1$ kümesinin elemanları, $G_n$ çizgesinin minimum elemanlı 2-baskın kümesidir. Öyle bir $e_{v_i v_j} \in E_1$ ayrıtı, $G_n$ çizgesinden atıldığında yeni oluşan $(G_n - \{e_{v_i v_j}\})$ çizgesi $P_{2n}$

çizgeni içerir. Yani $P_{2n} \subset (G_n - \{e_{v_i v_j}\})$ alt çizgesi vardır. $P_{2n}$ çizgesinin 2-baskın kümesi $S_1$ ile gösterelim. Bu $S_1$ kümesinde $V(G_n - \{e_{v_i v_j}\}) - S_1$ kümesindeki her bir tepenin en az 2 komşusu olur.

Böylece $S_1$ kümesi $(G_n - \{e_{v_i v_j}\})$ çizgesinin 2-baskın kümesi olur. $|S_1| = n+1$ ve $\gamma_2(P_{2n}) = n+1$ olduğundan $\gamma_2(G_n - \{e_{v_i v_j}\}) = n+1$ elde edilir.

Sonuç olarak $\gamma_2(G_n) < \gamma_2(G_n - \{e_{v_i v_j}\}) = n+1$ olur ve $b_2(G_n) = 1$ elde edilir.

*Teorem 4.1.8.*

$H_n$, $2n+1$ tepeli bir dümen çizge olmak üzere, $H_n$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri, $b_2(H_n) = 1$'dir.

*İspat 4.1.8.*

$H_n$ çizgesinin tepe sayısı $|V(H_n)| = 2n+1$, ayrıt sayısı $|E(H_n)| = 3n$'dir. $H_n$ çizgesinin tepe kümesi $V(H_n)$, *Teorem 4.1.3*'de ki gibi benzer şekilde yazılsın.

$H_n$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(H_n)$ olmak üzere; $E(H_n) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ şeklinde 3 alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(H_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$
$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(H_n) \mid v_i, v_j \in V_2\}$$
$$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(H_n) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_3\}$$

$H_n$ çizgesinden öyle bir $e_{v_i v_j} \in E_1$ ayrıtı atıldığında yeni oluşan $\left(H_n - \{e_{v_i v_j}\}\right)$ çizgesi $H_{n-1}$ alt çizgesini içerir. $H_{n-1}$ çizgesiyle beraber bir tane izole tepe ve $H_{n-1}$

çizgesinin derecesi 4 olan ve merkez tepesine komşu bir tane 3 dereceli tepesini de içerir. $H_{n-1}$ çizgesinin 2-baskın kümesini $S_1$ ile gösterelim. $\gamma_2(H_{n-1}) = n$ olduğu için $|S_1| = n$'dir. $\left(H_n - \{e_{v_i v_j}\}\right)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı ise

$$\gamma_2(H_n - \{e_{v_i v_j}\}) \geq \gamma_2(H_{n-1}) + \left\{v_i, v_j\right\}$$

$$\gamma_2(H_n - \{e_{v_i v_j}\}) \geq n+2 \text{ olur}$$

Böylece $\gamma_2(H_n) < \gamma_2(H_n - \{e_{v_i v_j}\})$ olur ve $b_2(H_n) = 1$ elde edilir.

<u>*Teorem 4.1.9.*</u>

$Sf_n$, $2n+1$ tepeli bir ayçiçeği çizge olmak üzere, $Sf_n$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri $b_2(Sf_n) = 1$'dir.

<u>*İspat 4.1.9.*</u>

$Sf_n$ çizgesinin tepe sayısı $|V(Sf_n)| = 2n+1$, ayrıt sayısı ise $|E(Sf_n)| = 4n$ dir. $Sf_n$ çizgesinin tepe kümesi $V(Sf_n)$, *Teorem 4.1.4*'deki gibi benzer şekilde yazılsın.

$Sf_n$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(Sf_n)$ olmak üzere; $E(Sf_n) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ şeklinde 3 alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(Sf_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(Sf_n) \mid v_i, v_j \in V_2\}$$

$$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(Sf_n) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_3\}$$

$Sf_n$ çizgesinden öyle bir $e_{v_i v_j} \in E_1$ ayrıtı atıldığında yeni oluşan $\left(Sf_n - \{e_{v_i v_j}\}\right)$çizgesi $W_n$ alt çizgesinin içerir. $\left(Sf_n - \{e_{v_i v_j}\}\right)$ çizgesinde 1 tane uç tepe vardır. 2-baskınlık sayısının tanımı gereği bu izole tepeyi 2-baskın kümesi içermek zorundadır. Geriye kalan çizgenin her bir tepesinin en az iki komşusu $W_n$ çizgesinin 2-baskın kümesinde mevcuttur. $W_n$ çizgesinin 2-baskı kümesini $S_1$ ile gösterelim. $W_n$ ‘nin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(W_n) = n$'dir. $\left(Sf_n - \{e_{v_i v_j}\}\right)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı ise ;

$$\gamma_2(Sf_n - \{e_{v_i v_j}\}) \geq \gamma_2(W_n) + \{v_i\}$$

$$\gamma_2(Sf_n - \{e_{v_i v_j}\}) \geq n+1 \text{ bulunur.}$$

Böylece $\gamma_2(Sf_n) < \gamma_2(Sf_n - \{e_{v_i v_j}\})$ olur ve $b_2(Sf_n) = 1$ elde edilir.

*Teorem 4.1.10.*

$f_n$, $2n+1$ tepeli bir arkadaşlık çizge olmak üzere, $f_n$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri $b_2(f_n) = 1$'dir.

*İspat 4.1.10.*

$f_n$ çizgesinin tepe sayısı $|V(f_n)| = 2n+1$, ayrıt sayısı ise $|E(f_n)| = 3n$'dir. $f_n$ çizgesinin tepe kümesi $V(f_n)$, *Teorem 4.1.5*'de ki gibi benzer şekilde yazılsın.

$f_n$ çizgesinin ayrıtlar kümesi $E(f_n)$ olmak üzere; $E(f_n) = E_1 \cup E_2$ şeklinde 2 alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(f_n) \mid v_i, v_j \in V_1\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(f_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$f_n$ çizgesinde çevre içeren herhangi bir $C_3$ alt çizgesinden $e_{v_i v_j}, \in E_1$ ayrıtları atıldığında yeni oluşan $\left(f_n - \{e_{v_i v_j}\}\right)$ ile gösterelim. $f_{n-1}$ çizgesi, $\left(f_n - \{e_{v_i v_j}\}\right)$ çizgesinin alt çizgesidir. $\left(f_n - \{e_{v_i v_j}\}\right)$ çizgesi, $f_{n-1}$ çizgesi ve merkez tepeye komşu iki tane bir dereceli tepeden oluşur.

$\left(f_n - \{e_{v_i v_j}\}\right)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı;

$$\gamma_2(f_n - \{e_{v_i v_j}\}) \geq \gamma_2(f_{n-1}) + \left\{v_i, v_j\right\}$$

$$\gamma_2(f_n - \{e_{v_i v_j}\}) \geq n + 2 \text{ olur.}$$

Buradan $\left(f_n - \{e_{v_i v_j}\}\right)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(f_n) < \gamma_2(f_n - \{e_{v_i v_j}\})$ olur ve $b_2(f_n) = 1$ elde edilir.

# BÖLÜM 5

## TEKERLEK İÇEREN ÇİZGELERİN AYRIT ÇİZGELERİNİN 2-BASKINLIK VE 2-BAĞIMLILIK SAYILARI

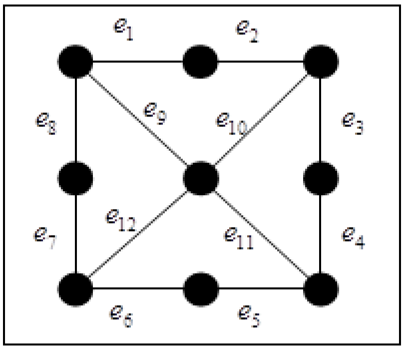
### 5.1. TANIM VE TEOREMLER

*Tanım 5.1.1.*

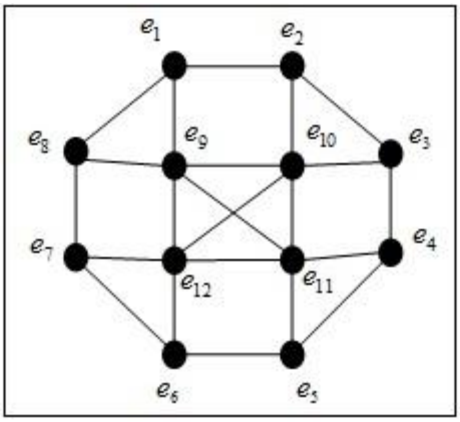
Bir $G$ çizgesi verilsin. Tepeler kümesi, $G$ çizgesinin $E(G)$ ayrıtlar kümesinden ve ayrıtlar kümesi de, $G$ çizgesinde komşu olan ayrıtlara karşılık gelen tepeleri birleştiren ayrıtlardan oluşan çizgeye, $G$ çizgesinin *ayrıt çizgesi (line graph)* denir. Bir $G$ çizgesinin ayrıt çizgesi $L(G)$ olarak gösterilir (Chvatal, V., 1973).

*Örnek 5.1.2.*

$G_4$ dişli çizgesi ve $L(G_4)$ ayrıt çizgesi sırasıyla Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 de verilmiştir. (Körpe M. Ç., Turacı T., 2014).




Şekil 5.1. 9 tepeli, 12 ayrıtlı $G_4$ çizgesi.




Şekil 5.2. 12 tepeli, 22 ayrıtlı $L(G_4)$ çizgesi.

*Teorem 5.1.1.*

$L(W_n)$, $2(n-1)$ tepeli bir tekerlek çizgenin ayrıt çizgesi olmak üzere, $L(W_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı;

$$\gamma_2\left(L(\mathrm{W}_n)\right)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & n\ tek\ ise\\ \dfrac{n}{2} & n\ çift\ ise\end{cases}\text{'dir.}$$

*İspat 5.1.1.*

$L(\mathrm{W}_n)$ çizgesinin tepe sayısı $\left|V(L(\mathrm{W}_n))\right|=2(n-1)$ ayrıt sayısı ise $\left|E(L(\mathrm{W}_n))\right|=\dfrac{(n+4)(n-1)}{2}$'dir. $L(\mathrm{W}_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(L(\mathrm{W}_n))$ olmak üzere; $V(L(W_n))=V_1\cup V_2$ şeklinde 2 tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1=\{v_i\in V(L(\mathrm{W}_n))\mid d_{L(\mathrm{W}_n)}(v_i)=4\},\ \left|V_1\right|=n-1$$

$$V_2=\{v_i\in V(L(\mathrm{W}_n))\mid d_{L(\mathrm{W}_n)}(v_i)=n\},\ \left|V_2\right|=n-1$$

$E(L(W_n)) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ şeklinde 2 tane alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(L(\mathrm{W}_n)) \mid v_i, v_j \in V_1\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(L(\mathrm{W}_n)) \mid v_i, v_j \in V_2\}$$

$$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(L(\mathrm{W}_n)) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$L(\mathrm{W}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı, $n$'nin tek veya çift sayı olmasına göre değişkenlik gösterir. Bundan dolayı 2 farklı durum söz konusudur. $S_1$, 2-baskın küme olsun.

*1.Durum;*

Eğer $n$ tek sayı ise: Bu takdirde $n-1$ çift sayı olur. $L(\mathrm{W}_n)$ çizgesinin, tepe dereceleri 4 olan $n-1$ tepeli alt $C_{n-1}$ çevre çizgesi ve $K_{n-1}$ tam çizgesi vardır.

$C_{n-1}$ çizgesin 2 tane bağımsız kümesi vardır. Bu kümelerin eleman sayısı $\frac{(n-1)}{2}$'dir. Bu kümeler $B_1$ ve $B_2$ olarak gösterilsin.

*Alt Durum 1;*

$B_1$ kümesinde, $V\left(L(\mathrm{W}_n)\right) - B_1$ kümesindeki herbir tepenin en az iki komşusunu içermez. Bundan dolayı $B_1$ kümesi tek başına 2-baskın küme olamaz.

- $B_1$ kümesi, $C_{n-1}$ alt çizgesinin tüm tepelerinin herbirinin en az 2 komşusunu içerir. $K_{n-1}$ çizgesinin tepelerinin herbirinin sadece bir komşusunu içerir. Herhangi bir $v_i \in V\left(K_{n-1}\right)$ tepesi ile $B_1$ kümesinin birleşimi, çizgenin geriye kalan herbir tepesinin en az iki komşusunu içermesini sağlar. Böylece

$\left(B_1 \cup \{v_i\}\right) = S_1$ olur. 2-baskınlık sayısı ise $|S_1| = |B_1 \cup \{v_i\}| = \frac{n-1}{2} + 1 = \frac{n+1}{2}$ olur ve $\gamma_2\left(L(\mathrm{W}_n)\right) \leq \frac{n+1}{2}$ elde edilir.

- $K_{n-1}$ alt çizgesinde bir $n-1$ tepeli bir alt çevre çizgesi vardır. $v_k, v_l, v_m, v_n \in V(K_{n-1})$ tepeleri, alt çevre çizge üzerinde 3 uzunluklu bir yol olsun. Bu yolun ilk ve son tepeleri ile oluşturulan $\{v_k, v_n\}$ kümesi, $K_{n-1}$ çizgesinin her bir tepesinin en az iki komşusunu içerir. Geriye kalan $L(\mathrm{W}_n)$ çizgesinin tepelerini herbirinin en az iki komşusunu içermesi için $B_1$ kümesinden $\frac{(n-1)}{2} - 1$ tane daha tepe alınması gerekir. Bu şekilde oluşturulan $S_1$ 2-baskın kümesinin eleman sayısı $|S_1| = \left(\frac{(n-1)}{2} - 1\right) + 2 = \frac{n+1}{2}$ bulunur ve $\gamma_2\left(L(\mathrm{W}_n)\right) \leq \frac{n+1}{2}$ elde edilir.

*Alt Durum 2;*

Benzer işlemler $B_2$ kümesi için yapıldığındada $L(\mathrm{W}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2\left(L(\mathrm{W}_n)\right) \leq \frac{n+1}{2}$ elde edilir.

*Alt Durum 3;*

Diğer tüm durumlarda da $L(\mathrm{W}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2\left(L(\mathrm{W}_n)\right) \geq \frac{n+1}{2}$ bulunur.

Dolayısıyla $n$ tek sayı olduğunda $L(\mathrm{W}_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2\left(L(\mathrm{W}_n)\right) = \frac{n+1}{2}$'dir.

*2.Durum;*

Kabul edelim ki $n$ çift sayı olsun. Bu takdirde $n-1$ tek sayı olur. $L(W_n)$ çizgesinin, tepe dereceleri 4 olan $n-1$ tepeli alt $C_{n-1}$ çevre çizgesi ve $K_{n-1}$ tam çizgesi vardır.

*Alt Durum 1;*

$C_{n-1}$ çizgesin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(C_{n-1})=\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$'dir. $C_{n-1}$ çizgesin 2-baskın kümesi $S_2$ olsun. $S_2$ kümeside $K_{n-1}$ tam çizgesinin herbir tepesinin sadece bir komşusu vardır. $S_2$ kümesindeki $\left(\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil -1\right)$ elemanın oluşan küme $S_3$ olsun. Herhangi bir $v_i \in V(K_{n-1})$ tepesi ile $S_3$ kümesinin birleşimiyle oluşan kümede, $L(W_n)$ çizgesinin geriye kalan tepelerinin herbirinin en az iki komşusu vardır. Bu takdirde $L(W_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi olarak seçilebilir. 2-baskınlık sayısı ise $|S_1|=|S_3 \cup \{v_i\}|=\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil -1+1=\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ olur ve $n$ çift sayı olduğundan

$$\gamma_2(L(W_n)) \le \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \frac{n}{2} \text{ elde edilir.}$$

*Alt Durum 2;*

Diğer tüm durumlarda $L(W_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(W_n)) \ge \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ elde edilir.

Dolayısıyla $n$ çift sayı olduğunda $L(W_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(W_n)) = \left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil = \frac{n}{2}$ bulunur.

Her iki durum göz önüne alındığında $L(W_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı

$$\gamma_2\left(L(\mathrm{W}_n)\right)=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2} & n\ tek\ ise\\[2mm] \dfrac{n}{2} & n\ çift\ ise\end{cases}\text{' dir.}$$

*Teorem 5.1.2.*

$L(G_n)$, $3n$ tepeli bir dişli çizgenin ayrıt çizgesi olmak üzere, $L(G_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(G_n))=n+1$'dir.

*İspat 5.1.2.*

$L(G_n)$ çizgesinin tepe sayısı $\left|V(L(G_n))\right|=3n$ ayrıt sayısı ise $\left|E(L(G_n))\right|=4n+\dfrac{n(n-1)}{2}$'dir. $L(G_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(L(G_n))$ olmak üzere; $V(L(G_n))=V_1\cup V_2$ şeklinde 2 tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1=\{v_i\in V(L(G_n))\mid d_{L(G_n)}(v_i)=3\},\ \left|V_1\right|=2n$$

$$V_2=\{v_i\in V(L(G_n))\mid d_{L(G_n)}(v_i)=n+1\},\ \left|V_2\right|=n$$

$L(G_n)$ çizgesinin ayrıt kümesi $E(L(G_n))$ olmak üzere; $E(L(G_n))=E_1\cup E_2\cup E_3$ şeklinde 3 tane alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1=\{e_{v_iv_j}\in E(L(G_n))\mid v_i,v_j\in V_1\}$$

$$E_2=\{e_{v_iv_j}\in E(L(G_n))\mid v_i,v_j\in V_2\}$$

$$E_3=\{e_{v_iv_j}\in E(L(G_n))\mid v_i\in V_1,v_j\in V_2\}$$

$L(G_n)$ çizgenin 2-Baskınlık sayısı bulunurken iki durum söz konusudur.

*1.Durum;*

$L(G_n)$ çizgesinin tepeler kümesi $V(L(G_n))$ ve $S_1 \subset V(L(G_n))$, aynı zamanda $S_1$ kümeside $L(G_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi olsun.

Her $v_i, v_j \in V_2$ tepeleri aynı zamanda $v_i, v_j \in S_1$ olsun. Bu durumda $v_i, v_j$ tepeleri ile $V_2$ kümesindeki tüm tepeler 2-bastırılıp ve $v_i, v_j$ tepelerine komşu olan $V_1$'deki 4 tepe 1-bastırılmış olur. Geriye hiç bastırılmamış $2n-4$ tane tepe kalır. Bu tepeler $v_i, v_j$'nin seçimine göre $P_{2n-4}$ çizgesini yada $P_{2k} \cup P_{2n-(2k+4)}$ $(1 \le k \le n-1)$ çizgesini oluşturur. İki durumda incelenicek olursa;

$i)$ $P_{2n-4}$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(P_{2n-4}) = \dfrac{2n-4}{2} + 1 = n-1$

$P_{2n-4}$ çizgesinin 2-baskın kümesindeki uç tepeler, 1-bastırılmış 4 tepeden sadece 2 tanesini 1-bastırır. Geriye 2 tane 1-bastırılan tepe kalır. Bu 2 tepeninde 2-bastırılması için herhangi birini seçimi ile $L(G_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi oluşturulmuş olur. $|S_1| = 2 + (n-1) + 1 = n+2$ bulunur.

Böylece $L(G_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(G_n)) \le n+2$ elde edilir.

$ii)$ $P_{2k} \cup P_{2n-(2k+4)}$ $(1 \le k \le n-1)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı;

$$\gamma_2(P_{2k}) + \gamma_2(P_{2n-(2k+4)}) = \left(\frac{2k}{2} + 1\right) + \left(\frac{2n-(2k+4)}{2} + 1\right) = n$$

$P_{2k}$ ve $P_{2n-(2k+4)}$ çizgelerinin 4 tane uç tepesi vardır. 1-bastırılmış 4 tepe, bu uç tepeler tarafından 1 kez daha bastırılarak bu tepeler 2-bastırılmış olur. $L(G_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi oluşturulmuş olur. $|S_1| = n+2$ bulunur. $L(G_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(G_n)) \le n+2$ bulunur.

*2.Durum;*

$L(G_n)$ çizgesinin tepeler kümesi $V\left(L(G_n)\right)$ ve $S_1 \subseteq V$ aynı zamanda $S_1$ kümeside $L(G_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi olsun. $L(G_n)$ çizgesinin bir $C_{2n}$ alt çizgesi vardır. Bu $C_{2n}$ çizgesinin 2-baskın kümesi $S_2$ ve $S_2 \subseteq S_1$, $|S_2| = n$ dir. $S_2$ kümesi, $L(G_n)$ çizgesinde $V_1$ kümesindeki tepeleri 2-bastırıp, $V_2$ kümesindeki tepeleri de 1-bastırır. $V_2$ kümesindeki tepeleri 2-bastırılmış hale getirmek için öyle bir $v_i \in V_2$ tepesini 2-baskın kümeye seçilmelidir.

Bu seçimle $L(G_n)$ çizgesinin tüm tepeleri 2-bastırılmış olur ve $S_1 = S_2 \cup \{v_i\}, v_i \in V_2$ ve $|S_1| = n+1$ elde edilir. $L(G_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(G_n)) = n+1$ bulunur.

2-baskın kümenin diğer seçimlerinde de $\gamma_2(L(G_n)) \geq n+1$ bulunur. 1.Durum ve 2.Durum'dan $L(G_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(G_n)) = n+1$ elde edilir.

*Teorem 5.1.3.*

$L(H_n), (n > 4)$ $3n$ tepeli bir dümen çizgenin ayrıt çizgesi olmak üzere, $L(H_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(H_n)) = n$ 'dir.

*İspat 5.1.3.*

$L(H_n)$ çizgesinin tepe sayısı $|V(L(H_n))| = 3n$, ayrıt sayısı $|E(L(H_n))| = 6n + \dfrac{n(n-1)}{2}$ 'dir. $L(H_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(L(H_n))$ olmak üzere; $V(L(H_n)) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ şeklinde 3 tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(L(H_n)) \mid d_{L(H_n)}(v_i) = 6,\ i = \overline{1,n}\}$$

$$V_2 = \{v_i \in V(L(H_n)) \mid d_{L(H_n)}(v_i) = n+2,\ i = \overline{1,n}\}$$

$$V_3 = \{v_i \in V(L(H_n)) \mid d_{L(H_n)}(v_i) = 3,\ i = \overline{1,n}\}$$

$L(H_n)$ çizgesinin ayrıt kümesi $E(L(H_n))$ olmak üzere; $E(L(H_n)) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5$ şeklinde 5 tane alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(L(H_n)) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(L(H_n)) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_3\}$$

$$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(L(H_n)) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_3\}$$

$$E_4 = \{e_{v_i v_j} \in E(L(H_n)) \mid v_i, v_j \in V_1\}$$

$$E_5 = \{e_{v_i v_j} \in E(L(H_n)) \mid v_i, v_j \in V_2\}$$

$L(H_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı için üç durum söz konusudur.

*1.Durum;*

$V_1$ kümesinde, $L(H_n)$ çizgesindeki her bir tepesinin en az iki komşusu vardır. Dolayısıyla $V_1$ kümesi 2-baskın kümedir ve $S_1 = V_1$'dir. $|V_1| = n$'dir. Böylece $\gamma_2(L(H_n)) \le n$ elde edilir.

*2.Durum;*

2-baskın küme $V_2$ kümesi üzerinden oluşturulsun. Yani $V_2 \subseteq S_1$ olsun. Bu durumda $V_2$ kümesinde, $V_1$ kümesindeki her bir tepenin en az iki komşusu, $V_3$ kümesindeki her bir tepenin ise en az bir komşusu vardır. 2-baskın küme, $V_3$ kümesinde ki tepeleri en az iki komşusunu içermesi için, 2-bastırmak için $S_1$ kümesine tepe ilave edilmesi gerekir. Bu ise $|S_1| > n$ olur. $\gamma_2(L(H_n)) \ge n$ elde edilir.

*3.Durum;*

2-baskın küme $V_2$ kümesi üzerinden oluşturulsun. Yani $V_2 \subseteq S_1$ olsun. Bu durumda $V_3$ kümesinde $V_1$ kümesindeki her bir tepenin en az iki komşusu, $V_2$ kümesindeki her bir tepenin ise en az bir komşusu vardır. $V_2$ kümesinde ki tepeleri 2-bastırmak için $S_1$ kümesine herhangi bir $v_i \in V_2$ tepesi eklendiğinde, $S_1$ kümesi $L(H_n)$ çizgesinin tüm tepelerinin en az iki komşusunu içermiş olur. Bu şekil oluşturulan 2-baskın küme $S_1 = V_2 \cup \{v_i\}$'dir. $|S_1| = n+1$ olur. $\gamma_2(L(H_n)) \leq n+1$ bulunur.

2-baskın kümenin diğer seçimlerinde de $\gamma_2(L(H_n)) \geq n$ bulunur. 2-baskınlığın tanımı gereği minimum elemanlı 2-baskın küme $L(H_n)$ çizgesinin 2-baskınlık kümesidir. Dolayısıyla 1.Durum, 2.Durum ve 3.Durum'dan $S_1 = V_1$ kümesi minimum elemanlı 2-baskın kümedir. Böylece $\gamma_2(L(H_n)) = n$ elde edilir.

*Teorem 5.1.4.*

$L(Sf_n), (n>5)$ $3n$ tepeli bir ayçiçeği çizgenin ayrıt çizgesi olmak üzere, $L(Sf_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(Sf_n)) = n$'dir.

*İspat 5.1.4.*

$L(Sf_n)$ çizgesinin tepe sayısı $|V(L(Sf_n))| = 4n$, ayrıt sayısı $|E(L(Sf_n))| = 11n + \frac{n(n-1)}{2}$'dir. $L(Sf_n)$ çizgesinin tepe kümesi olmak üzere; $V(L(Sf_n)) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ şeklinde 3 tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(L(Sf_n)) \mid d_{L(Sf_n)}(v_i) = 8\}, \; |V_1| = n$$

$$V_2 = \{v_i \in V(L(Sf_n)) \mid d_{L(Sf_n)}(v_i) = 5\}, \; |V_2| = 2n$$

$$V_3 = \{v_i \in V(L(Sf_n)) \mid d_{L(Sf_n)}(v_i) = n+3\},\ |V_3| = n$$

$L(Sf_n)$ çizgesinin ayrıt kümesi $E(L(Sf_n))$ olmak üzere; $E(L(Sf_n)) = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4 \cup E_5 \cup E_6$ şeklinde 6 tane alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_iv_j} \in E(L(Sf_n)) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$$E_2 = \{e_{v_iv_j} \in E(L(H_n)) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_3\}$$

$$E_3 = \{e_{v_iv_j} \in E(L(H_n)) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_3\}$$

$$E_4 = \{e_{v_iv_j} \in E(L(H_n)) \mid v_i, v_j \in V_1\}$$

$$E_5 = \{e_{v_iv_j} \in E(L(H_n)) \mid v_i, v_j \in V_2\}$$

$$E_6 = \{e_{v_iv_j} \in E(L(H_n)) \mid v_i, v_j \in V_3\}$$

$L(Sf_n)$ çizgesinin tepeler kümesi $V(L(Sf_n))$ ve $S_1 \subseteq V(L(Sf_n))$ kümeside $L(Sf_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi olsun. $L(Sf_n)$ çizgenin 2-baskınlık sayısı için iki durum söz konusudur.

*<u>1.Durum;</u>*

$V_1$ tepeler kümesindeki tepeler, $L(Sf_n)$ çizgesinin tüm tepelerini 2-bastırır. Dolayısıyla $V_1$ kümesi 2-baskın kümedir ve $S_1 = V_1$'dir. $|V_1| = n$ olduğundan $\gamma_2(L(Sf_n)) \le n$ elde edilir.

*<u>2.Durum;</u>*

$V_3 \subseteq S_1$ olsun. Bu durumda $V_3$ kümesindeki tepeler $V_1$ kümesindeki her bir tepenin en az iki komşusunu içerir. $V_2$ kümesindeki her bir tepenin ise bir komşusunu içerir.

$V_2$ kümesinde ki tepelerin herbirinin en az iki komşusunu içermesi için $S_1$ kümesine tepe ilave edilmesi gerekir. Bu durumda $|S_1| \geq n$ olup; $\gamma_2(L(Sf_n)) \geq n$ elde edilir.

*3.Durum;*

$V_2$ tepelerinin oluşturduğu $C_{2n}$ çizgesi $L(Sf_n)$ çizgesinin alt çizgesidir. $C_{2n}$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(C_{2n}) = n$'dir. $C_{2n}$ çizgesinin 2-baskın kümesi $S_2$ olsun. $S_2$ kümesi $V\left(L(Sf_n)\right) - V_2$ tepeler kümesinde, $V_1$ ve $V_2$ kümesindeki her bir tepenin en az iki komşusunu içerip, $V_3$ kümesindeki her bir tepenin ise bir komşusunu içerir. $S_2$ kümesine öyle bir $v_i \in V_3$ alındığında $L(Sf_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi oluşturulur. Yani $S_1 = S_2 \cup \{v_i\}$, $\left(v_i \in V_3\right), S_1$ 2-baskın kümesi oluşturulur. Böylece $|S_1| = n+1$ ve $\gamma_2(L(Sf_n)) \leq n+1$ elde edilir.

2-Baskın kümenin diğer seçimlerinde de $\gamma_2(L(Sf_n)) \geq n$ bulunur. 1.Durum, 2.Durum ve 3.Durum'dan $\gamma_2(L(Sf_n)) = n$ elde edilir.

*Teorem 5.1.5.*

$L(f_n)$, $3n$ tepeli bir arkadaşlık çizgenin ayrıtlar çizgesi olmak üzere, $L(f_n)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(f_n)) = n+1$'dir.

*İspat 5.1.5.*

$L(f_n)$ çizgesinin tepe sayısı $|V(L(f_n))| = 3n$ ayrıt sayısı $|E(L(f_n))| = 2n + \dfrac{2n(2n-1)}{2}$'dir. $L(f_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(L(f_n))$ olmak üzere; $V(L(f_n)) = V_1 \cup V_2$ şeklinde 2 tane alt tepeler kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(L(f_n)) \mid d_{L(f_n)}(v_i) = 2\},\ |V_1| = n$$

$$V_2 = \{v_i \in V(L(f_n)) \mid d_{L(f_n)}(v_i) = 2n\}, \ |V_2| = 2n$$

$L(f_n)$ çizgesinin ayrıt kümesi $E(L(f_n))$ olmak üzere; $E(L(f_n)) = E_1 \cup E_2$ şeklinde 2 tane alt ayrıtlar kümesinin birleşimi olarak yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(L(Sf_n)) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(L(H_n)) \mid v_i, v_j \in V_2\}$$

$L(f_n)$ çizgesinin tepeler kümesi $V(L(f_n))$, $S_1 \subseteq V(L(f_n))$ ve $S_1$ kümeside $L(f_n)$ çizgesinin 2-baskın kümesi olsun. İki durum söz konusudur.

*1.Durum;*

$V_1 \subseteq S_1$ olsun. Bu durumda $V_1$ tepeleri 2-bastırılıp, $V_2$ tepeleri 1-bastırılır. $V_2$ deki tepeleri 2-bastırmak için $S_1$ kümesine öyle bir $v_i \in V_2$ tepesini ilave edilmesi gerekir. Buradan $S_1 = V_1 \cup \{v_i\}$ $(v_i \in V_2)$. $|S_1| = n+1$ elde edilir. Sonuç olarak $\gamma_2(L(f_n)) \leq n+1$ bulunur.

*2.Durum;*

$V_2$ kümesinin elemanlarıyla 2-baskın küme oluşturmak istenirse, $L(f_n)$ çizgesini 2-bastırmak için $V_2$ kümesinin bütün tepeleri 2-baskın kümeye alınmalıdır. Bir başka deyişle $L(f_n)$ çizgesini 2-baskın kümesi $S_1$ ve $V_2 = S_1$'dir. Aynı zamanda $|V_2| = |S_1| = 2n$ olduğundan $\gamma_2(L(f_n)) \leq 2n$ bulunur.

2-baskın kümenin diğer seçimlerinde de $\gamma_2(L(f_n)) \geq n+1$ bulunur. 1.Durum ve 2.Durum'dan $\gamma_2(L(f_n)) = n+1$ elde edilir.

*Teorem 5.1.6.*

$L(W_n)$, $2n$ tepeli bir tekerlek çizgenin ayrıt çizgesi olmak üzere, $L(W_n)$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri $b_2(L(W_n))=2$'dir.

*İspat 5.1.6.*

$L(W_n)$ çizgesinin tepe sayısı $|V(L(W_n))|=2(n-1)$ ayrıt sayısı ise $|E(L(W_n))|=\frac{1}{2}(n-1)(n+4)$'dir. $L(W_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(L(W_n))$ ve ayrıt kümesi $E(L(W_n))$, *Teorem 5.1.1*'de ki gibi benzer şekilde yazılsın.

$L(W_n)$ çizgesinin 2-Bağımlılık sayısı $n$ saysının tek ve çift sayı olmasına göre değişkenlik gösterir. Bunu 2 farklı durumda açıklayalım.

*1.Durum;*

Kabul edelim $n$ çift sayı olsun. Herhangi bir $v_i \in V_1$ tepesine bitişik olan $e_{v_iv_j}, \mathrm{e}_{v_iv_k} \in E_1$ ayrıtları atıldığında geriye kalan çizgenin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2\left(L(W_n)-\left\{e_{v_iv_j}, \mathrm{e}_{v_iv_k}\right\}\right) > \frac{n+1}{2}$ olur ve $\gamma_2\left(L(W_n)-\left\{e_{v_iv_j}, \mathrm{e}_{v_iv_k}\right\}\right) > \gamma_2\left(L(W_n)\right)$ olduğundan $b_2\left(L(W_n)\right)=2$ elde edilir.

*2.Durum;*

Kabul edelim $n$ tek sayı olsun. Herhangi bir $v_i \in V_1$ tepesini bir dereceli tepe olması için $v_i$ tepesine bitişik olan $e_{v_iv_j}, \mathrm{e}_{v_iv_k} \in E_1$ ayrıtları ve herhangi bir $e_{v_iv_m} \in E_3$ ayrıtı atıldığında geriye kalan çizgenin 2-baskınlık sayısı

$\gamma_2\left(L(W_n)-\left\{e_{v_iv_j}, e_{v_iv_k}, e_{v_iv_m}\right\}\right)>\dfrac{n+1}{2}$ olur ve geriye kalan çizgenin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2\left(L(W_n)-\left\{e_{v_iv_j}, e_{v_iv_k}, e_{v_iv_m}\right\}\right)>\gamma_2\left(L(W_n)\right)$ olduğundan $b_2\left(L\left(W_n\right)\right)=3$ elde edilir.

Bu iki durum birleştirilecek olursa $b_2\left(L\left(W_n\right)\right)=\begin{cases}2\,, & n \text{ tek ise}\\ 3\,, & n \text{ çift ise}\end{cases}$ ’dir.

*Teorem 5.1.7.*

$L(G_n)$, $3n$ tepeli bir dişli çizgenin ayrıt çizgesi olmak üzere, $L(G_n)$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri $b_2(L(G_n))=2$ ’dir.

*İspat 5.1.7.*

$L(G_n)$ çizgesinin tepe sayısı $\left|V(L(G_n))\right|=3n$ ayrıt sayısı ise $\left|E(L(G_n))\right|=4n+\dfrac{n(n-1)}{2}$ ’dir. $L(G_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(L(G_n))$ ve $L(G_n)$ çizgesinin ayrıt kümesi $E(L(G_n))$, *Teorem 5.1.2*’de ki gibi benzer şekilde parçalansın. $L(G_n)$ çizgesinin 2-Bağımlılık sayısı için iki durum söz konusudur.

*1.Durum;*

$L(G_n)$ çizgesinin $E(L(G_n))$ ayrıtlar kümesinden atılan herhangi bir ayrıtla, $L(G_n)$ çizgesinin 2-baskın sayısı değişmez ve böylece $b_2(L(G_n))>1$ olur.

*2.Durum;*

$V_1$ kümesinde ki tepeler $L(G_n)$ çizgesinin alt çizgesi olan $C_{2n}$ çizgesini oluşturur. Herhangi bir $v_i \in V_1$ tepesine bitişik ve ardışık olan $e_i, e_{i+1} \in E_1$ ayrıtları atıldığında; Geriye kalan çizgede $V_1$ kümesinin tepeleri $P_{2n-1}$ yol çizgesini oluşturur. $P_{2n-1}$ yol çizgesinin 2-baskın kümesi $S_2$ olsun ve 2-baskınlık sayısıda; $\gamma_2(P_{2n-1}) = \left\lfloor \frac{2n-1}{2} \right\rfloor + 1 = (n-1)+1 = n$ bulunur.

Yeni oluşan $L(G_n)-\{e_{v_iv_j}, e_{v_iv_{j+1}}\}$ çizgesinde 1 tane uç tepe vardır. 2-baskınlık tanımı gereği bu uç tepe 2-baskın kümede olmak zorundadır.

$S_2$ kümesi, aynı zamanda $V_2$ kümesindeki her bir tepenin bir komşusunu içerir. $V_2$ kümesinde ki her bir tepenin iki komşusunu içermesi için için öyle bir $v_i \in V_2$ tepesini $L(G_n)-\{e_{v_iv_j}, e_{v_iv_{j+1}}\}$ çizgesinin 2-baskın kümesine ilave edilmesi gerekir.

Sonuç olarak $L(G_n)-\{e_{v_iv_j}, e_{v_iv_{j+1}}\}$ çizgesinin 2-baskın kümesi $S_1$ ve $S_1 \subseteq V(L(G_n))$'dir. $S_1 = S_2 \cup \{v_i\}, v_i \in V_2$, $\gamma_2(L(G_n)-\{e_{v_iv_j}, e_{v_iv_{j+1}}\}) = n+2$ olur. $\gamma_2(L(G_n)) < \gamma_2(L(G_n)-\{e_{v_iv_j}, e_{v_iv_{j+1}}\})$ olduğundan $b_2(L(G_n)) = 2$ elde edilir.

*Teorem 5.1.8.*

$L(H_n)$, $3n$ tepeli bir dümen çizgenin ayrıt çizgesi olmak üzere, 2-bağımlılık değeri $b_2(L(H_n)) = 1$'dir.

*İspat 5.1.8.*

$L(H_n)$ çizgesinin tepe sayısı $|V(L(H_n))| = 3n$, ayrıt sayısı $|E(L(H_n))| = 6n + \frac{n(n-1)}{2}$'dir. $L(H_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(L(H_n))$ ve $L(H_n)$ çizgesinin ayrıt kümesi $E(L(H_n))$, *Teorem 5.1.3*'de ki gibi benzer şekilde yazılsın.

$E_1$ yada $E_2$ kümelerinden öyle bir $e_{v_iv_j} \in E_1$ (yada öyle bir $e_{v_iv_j} \in E_2$) atılmasıyla oluşan $(L(H_n)-\{e_{v_iv_j}\})$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(H_n)-\{e_{v_iv_j}\}) = n+1$ olur.

Dolayısıyla $\gamma_2(L(H_n)) < \gamma_2(L(H_n) - \{e_{v_i v_j}\})$ olup 2-bağımlılık tanımından $b_2(L(H_n)) = 1$ elde edilir.

*Teorem 5.1.9.*

$L(Sf_n)$, $3n$ tepeli bir ayçiçeği çizgenin ayrıt çizgesi olmak üzere, $L(Sf_n)$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri $b_2(L(Sf_n)) = 1$'dir.

*İspat 5.1.9.*

$L(Sf_n)$ çizgesinin tepe sayısı $|V(L(Sf_n))| = 4n$, ayrıt sayısı $|E(L(Sf_n))| = 11n + \frac{n(n-1)}{2}$'dir. $L(Sf_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(L(Sf_n))$ ve $L(Sf_n)$ çizgesinin ayrıt kümesi $E(L(Sf_n))$, *Teorem 5.1.4*'de ki gibi benzer şekilde yazılsın.

$E_1$ yada $E_2$ kümelerinden öyle bir $e_{v_i v_j} \in E_1$ (yada öyle bir $e_{v_i v_j} \in E_2$) atılmasıyla oluşan $(L(Sf_n) - \{e_{v_i v_j}\})$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı $\gamma_2(L(Sf_n) - \{e_{v_i v_j}\}) = n + 1$ olur.

Böylece $\gamma_2(L(Sf_n)) < \gamma_2(L(Sf_n) - \{e_{v_i v_j}\})$ olur ve 2-bağımlılık tanımından; $b_2(L(Sf_n)) = 1$ elde edilir.

*Teorem 5.1.10.*

$L(f_n)$, $3n$ tepeli bir arkadaşlık çizgenin ayrıtlar çizgesi olmak üzere, $L(f_n)$ çizgesinin 2-bağımlılık değeri $b_2(L(f_n)) = 2$'dir.

*İspat 5.1.10.*

$L(f_n)$ çizgesinin tepe sayısı $|V(L(f_n))| = 3n$, ayrıt sayısı $|E(L(f_n))| = 2n + \frac{2n(2n-1)}{2}$'dir.

$L(f_n)$ çizgesinin tepe kümesi $V(L(f_n))$ ve $L(f_n)$ çizgesinin ayrıt kümesi $E(L(f_n))$, *Teorem 5.1.5*’de ki gibi benzer şekilde yazılsın.

$L(f_n)$ çizgesinin ayrıt kümesi $E(L(f_n))$ olmak üzere; $E(L(f_n)) = E_1 \cup E_2$ olacak şekilde $E_1, E_2 \subseteq E(L(f_n))$ olsun. $e_{v_i v_j}, e_{v_i v_{j+1}} \in E_1$ ayrıtlarının $L(f_n)$ çizgesinden atılmasıyla oluşan yeni $\left(L(f_n) - \{e_{v_i v_j}, e_{v_i v_{j+1}}\}\right)$ çizgesinin 2-baskınlık sayısı yani $S_1 = n+2$ olur. 2-bağımlılık tanımından;

$\gamma_2(L(f_n)) < \gamma_2\left(L(f_n) - \{e_{v_i v_j}, e_{v_i v_{j+1}}\}\right)$ olur. Buradan $b_2(L(f_n)) = 2$ bulunur.

# BÖLÜM 6

# 2-BASKINLIK SAYISINI BULAN ALGORİTMA

## 6.1. GENEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde, $n$ tepeli bir $G$ çizgesinin 2-baskınlık sayısını bulmak için bir algoritma verilmiştir. Bu algoritmada, baskınlık sayısı için daha önce oluşturulan algoritma temel alınmıştır.

*Tanım 6.1.1.*

$X=(X,\leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $x,y\in X$ olsun. Bir $u$ elemanın $x$ ve $y$ ' nin en küçük üst sınırıdır *(eküs),* eğer,

(a) $u\geq x$ ve $u\geq y$

(b) $w\geq x$ ve $w\geq y \Rightarrow w\geq u$ ' dur.

Koşul (b), $x$ ve $y$ 'nin tüm alt sınırları arasında $u$ 'nun en küçük olmasını gerektirir (Prather, R. E., 1976).

*Tanım 6.1.2.*

$X=(X,\leq)$ kısmi sıralı bir küme ve $x,y\in X$ olsun. Bir $v$ elemanın $x$ ve $y$ ' nin en büyük alt sınırı olması için aşağıdaki şartlar sağlanmalıdır.

(a) $v\leq x$ ve $v\leq y$

(b) $w\leq x$ ve $w\leq y \Rightarrow w\leq v$ ' dir.

Koşul (b), $x$ ve $y$ ' nin tüm alt sınırları arasında $v$ ' nin en büyük olmasını gerektirir (Prather, R. E., 1976).

*Tanım 6.1.3.*

Her bir $x, y$ eleman çifti için *eküs* ve *ebas'* a sahip olan $L = (L, \leq)$ kısmi sıralı kümesi olsun. Her $x, y \in L$ için,

$$u = eküs(x, y) = x + y$$
$$v = ebas(x, y) = x.y$$

Daha cebirsel olarak $L = (L, \leq) = (L, +, .)$ şeklinde yazılabilir (Prather, R. E., 1976).

*Teorem 6.1.1.*

Her $x, y, z \in L = (L, +, .)$ için aşağıdakiler vardır.

| | | |
|---|---|---|
| (ö1a) | $x + x = x$ | (Kapalılık özelliği) |
| (ö2a) | $(x + y) + z = x + (y + z)$ | (Birleşme özelliği) |
| (ö3a) | $x + y = y + x$ | (Değişme özelliği) |
| (ö4a) | $x + (x.y) = x$ | (Yutma özelliği) |
| (ö5a) | $x.(y + z) = x.y + x.\mathrm{z}$ | (Dağılma özelliği) |
| (ö1b) | $x.x = x$ | |
| (ö2b) | $x.(y + z) = x.y + x.\mathrm{z}$ | |
| (ö3b) | $(x.y).\mathrm{z} = \mathrm{x}.(\mathrm{y}.\mathrm{z})$ | |
| (ö4b) | $x.(x + y) = x$ | |
| (ö5b) | $x + (y.z) = (x + y).(x + z)$ | |

Bir $G$ çizgesinin güçlü ve zayıf baskınlık sayılarını bulmak için verilen algoritmada *Teorem 6.1.1*'e ait, (ö1b) $x.x = x$

(ö4a) $x + (x.y) = x$

özellikleri kullanılmaktadır (Prather, R. E., 1976).

$\sum\{\sigma_1\sigma_2......\sigma_n\}$ sembollerin bir alfabesi olsun. Bu alfabe ile $x = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}.....\sigma_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < ... < i_k)$ gibi tekrar eden sembol içermeyen kelimeler oluşturulabilir. $y = \sigma_{j_1}\sigma_{j_2}.....\sigma_{j_l}$ olsun. Eğer $x$ kelimesindeki her bir sembol aynı zamanda $y$ kelimesinde de yer alıyorsa $x$ yutar $y$ deriz ve $x > y$ ile gösterilir. Bu işlem (ö4a) tarafından sağlanır (Prather, R.E., 1976).

*Örnek 6.1.4.*

$x = \sigma_1\sigma_2$ ve $y = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_5$ olsun. $x > y$

$\sigma_1\sigma_2 > \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_5$ Teorem 6.1' deki özellikler kullanılırsa,

$\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_5 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_2(\sigma_3\sigma_5)$ "(ö3b) ve (ö2b)'den"

$= \sigma_1\sigma_2$ "(ö4a)' dan" elde edilir.

*Tanım 6.1.5.*

$x = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}.....\sigma_{i_k}$ $(i_1 < i_2 < ... < i_k)$ olsun. $f = \sum_i x_i$ kelimelerin formal toplamı olarak tanımlanır (Turacı. T., 2012).

$|f|$: $f$ toplamının, (ö1b) ve (ö4a) özelliklerinin defalarca kullanılmasıyla elde edilen en sade, tekrarsız, indirgenemez halidir.

$L(n) = \left\{ f : f = \sum_i x_i \;\; ve \;\; |f| = f \right\}$'dir. $L(n)$ $n$ tane sembolden oluşan herhangi kelimelerin toplamının en sade haline karşılık gelen toplam $f$ ' dir.

*Örnek 6.1.6.*

$f = \sigma_1\sigma_3\sigma_5 + \sigma_2\sigma_4\sigma_5 + \sigma_3 + \sigma_2\sigma_4 + \sigma_3$ ise,

$$f \overset{(ö1a)}{=} \sigma_1\sigma_3\sigma_5 + \sigma_2\sigma_4\sigma_5 + \sigma_3 + \sigma_2\sigma_4 \qquad \text{(ö1a)}$$

$$f \overset{(ö3b)}{=} \sigma_3\sigma_1\sigma_5 + \sigma_2\sigma_4\sigma_5 + \sigma_3 + \sigma_2\sigma_4 \qquad \text{(ö3b)}$$

$$f \overset{(ö3a,ö2b)}{=} \sigma_3 + \sigma_3(\sigma_1\sigma_5) + \sigma_2\sigma_4 + \sigma_2\sigma_4\sigma_5$$

$$f \overset{(ö4a)}{=} \sigma_3 + \sigma_2\sigma_4 + \sigma_2\sigma_4\sigma_5$$

$$f \overset{(ö2b)}{=} \sigma_3 + \sigma_2\sigma_4 + \sigma_2\sigma_4(\sigma_5)$$

$$f \overset{(ö4a)}{=} \sigma_3 + \sigma_2\sigma_4$$

$|f| = \sigma_3 + \sigma_2\sigma_4$ elde edilir.

*Örnek 6.1.7.*

$f = (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_4\sigma_5) + (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_5 + \sigma_1\sigma_4\sigma_5) + (\sigma_4)$, 5 tane farklı sembolden oluşan herhangi kelimelerin toplamı olsun.

$$|f| = |\sigma_1\sigma_2 + \sigma_4\sigma_5 + \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_5 + \sigma_1\sigma_4\sigma_5 + \sigma_4|$$

$$|f| = |\sigma_4 + \sigma_1\sigma_2|$$

$L(5) = \sigma_4 + \sigma_1\sigma_2$ elde edilir.

### 6.2. 2-BASKINLIK SAYISINI BULAN ALGORİTMA

Güçlü ve zayıf baskın küme bulma algortiması geliştirilerek $n$ tepeli birleştirilmiş bir $G$ çizgesinin 2-baskın kümelerini ve 2-baskınlık sayısı bulan algoritma verilmiştir.

$i, j, n, \gamma_2$ : positive integer

$f$ : element of $L(n)$

$D,W$ : array $n^+$ of $L(n)$

Begin

for $j \leftarrow 1$ to $n$ do

begin

$D[j] \leftarrow 0$

if $d_G[\mathrm{v}_j] = 0$ then $D[j] \leftarrow D[j] + v_j$ end if;

if $d_G[\mathrm{v}_j] = 1$ then $D[j] \leftarrow D[j] + v_j$

ELSE

$D[j] \leftarrow D[j] + v_j$

for $i \leftarrow 1$ to $n-1$ do

begin

for $k \leftarrow i+1$ to $n$ do

begin

if $\left[ (j =\hat{} i) \text{ and } (j =\hat{} k) \text{ and } (v_j E v_i) \text{ and } (v_k E v_j) \right]$

then $D[j] \leftarrow D[j] + v_i v_k$

end if;

end; {*for k*}

end; {*for i*}

end if;

end; {*for j*}

$f \leftarrow 1$

for $j \leftarrow 1$ to $n$ do

begin

$f \leftarrow f * D[j]$

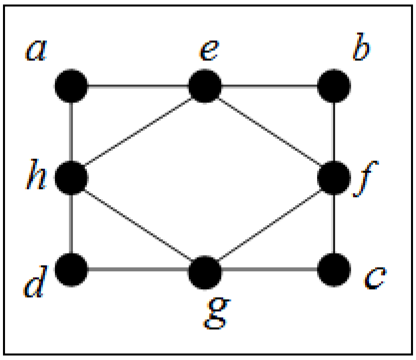
end;

$\gamma_2 \leftarrow \min_{x \inf} \{|x|\}$

END.

<u>*Örnek 6.2.1.*</u>

Şekil 6.1'de verilen $G$ çizgesinin 2-baskınlık değerini yukarıda verilen algoritmayı kullanarak hesaplayalım.




Şekil 6.1. 8 tepeli 12 ayrıtlı $G$ çizgesi.

Algoritmada öncelikle $G$ çizgesinin her bir tepesinin, 2-baskınlık için $f$ fonksiyonunun başlangıç değeri bulunur.

$$f = (a+eh)(e+ab+af+ah+bf+bh+hf)(b+ef)(f+bc+bg+be+cg+ce+eg)$$
$$(c+fg)(g+cd+ch+cf+dh+df+hf)(d+gh)(h+ae+ag+ad+eg+ed+gd)$$

$$=(ae+ab+af+ah+eh)(bf+bc+bg+be+ef)(cd+ch+cf+fg)(dh+ad+de+dg+gh)$$

$$=(abc+abe+abf+abg+aef+beh+efh)(acd+cde+cdg+cdh+cgh+dfg+fgh)$$

$$=\begin{pmatrix} abcd+abcgh+abcfgh+abcegh+abdefg+abefgh+abdfg+abfgh+ \\ acdef+acefgh+adefg+aefgh+abfgh+bcdeh+bcegh+bdefgh+ \\ +befgh+acdefh+cdefh+cdefgh+cefgh+defgh+efgh \end{pmatrix}$$

$$f=\left(abcd+efgh+abcgh+abdfg+acdef+adefg+abfgh+cdefh+bcdeh+bcegh\right)$$

Böylece $f$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde bulunur.

$$|f|=\left|abcd+efgh+abcgh+abdfg+acdef+adefg+abfgh+cdefh+bcdeh+bcegh\right|$$

$|f|$' den, $G$ çizgesinin 2-baskın kümeleri $\{a,b,c,d\}$ ve $\{e,f,g,h\}$ olur. Dolayısıyla, $\gamma_2(G)=4$ elde edilir.

# BÖLÜM 7

# SONUÇ

Çizge teorisi matematik ve bilgisayar bilimlerinin önemli dallarından biridir. Günümüzdeki birçok karmaşık problemler çizgeler ile modellenip, çözümleri daha kolay bir biçimde yapılabilir. Çizgelerle modellenen bir iletişim ağında, merkezler veya merkezler arasındaki bağlantılar zarar gördüğünde iletişimin tamamen kesilmesine kadar ağın dayanma gücünün ölçümüne bu ağın zedelenebilirlik değeri denir.

Çizgeler ile modellenen 2 tane iletişim ağında bağlantılık sayısı, baskınlık sayısı, bağımlılık sayısı ve 2-baskınlık sayısı aynı olduğunda hangi iletişim ağının daha dayanıklı olduğu hakkında fikir sahibi olamayız. 2013 yılında Marcin Krzywkowski çalışmasında 2-bağımlılık sayısını tanımlamıştır. 2-bağımlılık sayısının, bağlantılık sayısı, baskınlık sayısı, bağımlılık sayısı ve 2-baskınlık sayısının aynı olduğu durumlarda ayırt edici bir zedelenebilirlik parametresi olduğu gösterilmiştir.

Çalışmamızda temel çizge ailelerinin orta çizgeleri, tekerlek çizgeler ve tekerlek içeren çizgelerin ayrıt çizgeleri olarak tanımlanan iletişim ağlarının 2-baskınlık ve 2-bağımlılık sayıarıl incelenmiştir. İncelenen çizgelerin 2-baskınlık ve 2-bağımlılık sayıları hesaplanmıştır. 2-baskınlık sayısını bulan algoritma da yazılmıştır. Bu algoritmayı kullanarak bir örnek çözülmüştür ve kullanılan çizge için tüm maksimal 2-baskın kümeler bulunmuştur ve son olarak çizgenin 2-baskınlık sayısı elde dilmiştir.

## KAYNAKLAR


1. Aytaç, A. and Turacı, T., “Vertex vulnerability parameter of gear graphs”, ***International Journal of Foundations of Computer Science,*** 22 (5): 1187–1195 (2011).

2. Aytaç, A., Turacı, T. and Odabaş, Z. N., “On the bondage number of middle graphs”, ***Mathematical Notes,*** 93 (6): 803-811 (2013).

3. Aytaç, A. and Odabaş, Z. N., “Residual closeness of wheels and related networks”, ***International Journal of Foundations of Computer Science,*** 22 (5): 1229–1240 (2011).

4. Barefoot, C. A., Entringer, R., and Swart, H. C., “Vulnerability in graphs – A comparative survey”, ***J. Combin. Math. Combin. Comp.,*** 1: 13-22 (1987).

5. Buckley, F. and Harary, F., “Distance in Graphs”, ***Perseus Press,*** US (1990).

6. Chartrand, G. and Lesniak, L., “Graphs and Digraphs” , ***California Wadsworth and Brooks,*** US (2004).

7. Chvatal, V., “Tough graphs and Hamiltonian circuits”, ***Discrete Math.,*** 5: 215-218 (1973).

8. Cozzens, M., Moazzami, D., and Stueckle, S., “The tenacity of a graph”, ***Seventh International Conf. on the Theory and Application of Graphs, Wiley,*** New York, 1111-1122 (1995).

9. Frank, H., and Frisch, I. T., “Analysis and Design of Survivable Networks”, ***IEEE Transactions on Communications Technology,*** 18 (5): 501–519 (1970).

10. Harary, F., “Graph Theory”, ***Addison Wesley Pub.,*** Massachusetts, California (1969).

11. Haynes, T. W., Hedeniemi, S. T. and Slater, P. J., “Fundamentals of Domination in Graphs” , ***Marcel Dekker, Inc,*** New York (1998).

12. Haynes, T. W., Hedeniemi, S. T. and Slater, P. J., “Domination in graphs”, Advanced Topic, ***Marcel Dekker, Inc,*** New York, (1998).

13. Javaid, I. and Shokat, S., “On the partition dimension of some wheel related graphs”, ***Journal of Prime Research in Mathematics,*** 4: 154-164 (2008).

14. Körpe, M. Ç., ve Turacı, T., “Tekerlek çizge içeren iletişim ağlarının 2-Baskınlık ve 2-Bağımlılık sayıları”, ***13. Matematik Sempozyumu,*** Karabük Üniversitesi, Karabük, Türkiye, 248, 249 (2014).

15. Körpe, M. Ç. ve Turacı, T., “Middle çizgelerde 2-Baskınlık ve 2-Bağımlılık sayıları”, ***27. Ulusal Matematik Sempozyumu,*** Yeditepe Üniversitesi, İstanbul, Türkiye (2014).

16. Krzywkowski, M., “2-bondage in graphs”, ***International Journal of Computer Mathematics,*** 9 (7): 1358–1365 (2013).

17. Li, Y., Zhang, S. and Li, X., “Rupture degree of graphs”, ***Int. J. Comput. Math.,*** 82 (7): 793 (2005).

18. Prather, R. E., “Discrete Mathematical Structures for Computer Science”, ***Houghton Mifflin Company,*** US (1976).

19. Turacı, T., “Baskınlık sayısı parametreleri ve sezgisel algoritmalar”, Doktora Tezi, ***Ege Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** İzmir (2012).

20. West, D. B., “Introduction to Graph Theory”, ***Prentice Hall, Upper Saddle River,*** US (1996).

## ÖZGEÇMİŞ

Mustafa Çağatay Körpe 1989 yılında Karabük'te doğdu; ilk ve orta öğretim hayatını aynı şehirde tamamladı. 2006-2007 öğretim yılında Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenime başladı. 2011-2012 eğitim öğretim yılında Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2013 yılında Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. 2013-2014 yılında Bartın Üniversitesi Eğitim Fakultesi'nde Pedagojik Formasyon Eğitimini tamamladı. Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilm Dalında yüksek lisans eğitimine halen daha devam etmektedir.

Tez sırasında yapılan çalışmalar

1. Körpe M.Ç., Turacı T., ‘‘Tekerlek Çizge İçeren İletişim Ağlarının 2-Baskınlık ve 2-Bağımlılık Sayıları'', *13. Matematik Sempozyumu, 248-249 pp., Karabük Üniversitesi, Karabük, Türkiye, Mayıs-2014.*

2. Körpe M.Ç., Turacı T., "Middle Çizgelerde 2-Baskınlık ve 2-Bağımlılık Sayıları'', *27. Ulusal Matematik Sempozyumu, Yeditepe Üniversitesi, İstanbul, Türkiye, Ağustos-2014.*


**ADRES BİLGİSİ:**

Adres : Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Balıklarkayası Mevkii / KARABÜK

Tel : (543) 241 20 70
E-posta : cagataykorpe@gmail.com