GENELLEŞMİŞ TÜREV VE SOBOLEV UZAYLARI

2015
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

Nagihan GİRGİN

GENELLEŞMİŞ TÜREV VE SOBOLEV UZAYLARI

Nagihan GİRGİN

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

KARABÜK
Haziran 2015

Nagihan GİRGİN tarafından hazırlanan "GENELLEŞMİŞ TÜREV VE SOBOLEV UZAYLARI" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV ....
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir. 17/06/2015

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan: Prof. Dr. Ziyaddin RECEBLİ (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV (KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ (BEÜ)	....

....../...../ 2015

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nevin AYTEMİZ ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Nagihan GİRGİN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GENELLEŞMİŞ TÜREV VE SOBOLEV UZAYLARI

Nagihan GİRGİN

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV

Haziran 2015, 52 sayfa

İki bölümden oluşan bu çalışmanın, birinci bölümünde klasik anlamda türevden farklı olan genelleşmiş türevin tanımı, genelleşmiş fonksiyonlar uzayı ve genelleşmiş fonksiyonlarda direkt çarpım, konvolüsyon anlatılmıştır. İkinci bölümde S' genelleşmiş fonksiyonlar uzayını ve bu uzaydaki fonksiyonlara Fourier dönüşümü tanımlanmıştır. Diferansiyel denklemlerin genelleşmiş çözümü ve temel çözümü hakkında bilgi verilmiştir. Devamında ise Sobolev uzayları ve bu uzaydan olan fonksiyonlar ile başka uzayların normları arasındaki ilişkiyi kuran eşitsizliklerin gömme teoremleri kullanılarak elde edildiği gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler : Sobolev Uzayı, genelleşmiş türev, genelleşmiş fonksiyonların Fourier dönüşümü, gömme teoremleri.

Bilim Kodu : 204

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

GENERALIZED DERIVATIVE AND SOBOLEV SPACES

Nagihan GİRGİN

Karabük University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assist. Prof. Dr. Şerif AMİROV
June 2015, 52 pages

In the first part of this work, which consists of two parts, definition of generalized derivative, different from classic derivative; generalized functions spaces; direct multiplication on generalized functions and convolution are explained. In the second part of it, S' generalized functions and Fourier transform of generalized functions are defined. Also, providing information about generalized solution of differential equations and basic solutions. Following, it is showed that Sobolev spaces and inequalities which relates between Sobolev space functions and different spaces norms, obtained using embedding theorems.

Key Words : Sobolev Spaces, generalized derivative, Fourier transform of generalized functions, embedding theorem.

Science Code : 204

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım sırasında beni yönlendiren, gerekli kaynaklara ulaşmamda yardımcı olan ve temel bilgiler veren, danışmanım sayın Yrd. Doç. Dr. Şerif AMİROV’a (Karabük Üniversitesi) teşekkürlerimi sunarım.

Yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım Yrd. Doç. Dr. Mustafa YILDIZ' a (Bülent Ecevit Üniversitesi) teşekkür ederim.

Hayatımın her evresinde bana destek olan canım babam Adalet Hasan GİRGİN’e sonsuz teşekkür ederim.

Babamla birlikte desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sevgili annem Nuriye GİRGİN, kardeşlerim Berfin ve İsmail GİRGİN’e teşekkürü borç bilirim.

Tez çalışmamda bana yardımcı olan nişanlım Halil İbrahim ÖZDEMİR'e desteğinden dolayı çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa</u>

BÖLÜM 1

GİRİŞ

GENELLEŞMİŞ FONKSİYON VE GENELLEŞMİŞ TÜREV

1.1. SOBOLEV UZAYLARI VE GENELLEŞMİŞ TÜREV

Genelleşmiş türevin özellikleri:

1) Genelleşmiş türev bir noktada değil, bir bölgede tanımlıdır,

2) Eğer $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ fonksiyonların $D^\alpha\varphi_1(x), D^\alpha\varphi_2(x)$ $\left(D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\ldots\partial_{x_n}^{\alpha_n}}\right)$, genelleştirilmiş türevleri var ise o zaman λ, $\mu \in R$ olmak üzere $\lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x)$ fonksiyonunda $D^\alpha(\lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x))$ genelleşmiş türevi vardır ve

$$D^\alpha\big(\lambda\varphi_1(x) + \mu\varphi_2(x)\big) = \lambda D^\alpha\varphi_1(x) + \mu D^\alpha\varphi_2(x) \tag{1.1}$$

eşitliği sağlanır,

3) $\varphi(x)$ fonksiyonun genelleşmiş türevi $D^\alpha\varphi(x)$ olsun, $D^\alpha\varphi(x) = w(x)$ olarak alınıp eğer $w(x)$ fonksiyonun da genelleşmiş türevi $D^\beta w(x)$ var ve $v(x)$ e eşit ise o zaman $D^{\alpha+\beta}\varphi(x)$ fonksiyonun genelleşmiş türevi vardır ve $v(x)$ e eşittir,

4) Bir fonksiyonun genelleşmiş türevi tek değerli olarak tanımlanır. Öyle ki eğer $w_1(x)$ ve $w_2(x)$ fonksiyonları $\varphi(x)$ fonksiyonun α. mertebeden genelleşmiş türevleri ise bu fonksiyonlar Q bölgesinin sadece Lebesgue ölçüsü sıfır olan $Q_0 \subset Q$ bölgesi dışında her yerde çakışırlar,

5) Bir fonksiyonun α. mertebeden genelleşmiş türevin varlığı bu fonksiyonun daha

alt mertebeden genelleşmiş türevlerin varlığını gerektirmez, (Örnek olarak $f_1(x) + f_2(y)$ fonksiyonuna bakalım. $f_1(x)$ fonksiyonu (a, b) aralığında, $f_2(y)$ fonksiyonu (c, d) aralığında sürekli ama hiçbir yerde türevleri olmayan fonksiyonlar olsun. Buna rağmen $f_1(x) + f_2(y)$ fonksiyonun $(a, b)x(c, d)$ dikdörtgeninde 2.mertebeden genelleşmiş türevi vardır.)

6) Bir fonksiyonun bir bölgede klasik anlamda hemen hemen her yerde türevinin varlığı bu fonksiyonun aynı zamanda o bölgede genelleşmiş türevin varlığını gerektirmez. (Örnek olarak, $\varphi(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığının belli noktalarının dışında sonsuz mertebeden türevlenebilir fonksiyon olup bazı noktalarda bu fonksiyonun 1.tür süreksizlik noktaları var ise o zaman bu fonksiyonun $[0,1]$ aralığında genelleşmiş türevi yoktur.)

Aşağıdaki özellikler genelleşmiş türevler için aşikardır.

Tanım 1.1: Q_h bölgesini $h > 0$ olmak üzere $\{x \in Q: \rho(x, \partial Q) > h\}$ şeklinde tanımlayalım.($\rho(x, y)$, R^n uzayında iki nokta arasındaki uzaklığı göstermektedir.)

Teorem 1.1: Eğer $\varphi(x)$ fonksiyonunun Q bölgesinde genelleşmiş türevi var ise o zaman Q_h bölgesinde aşağıdaki eşitlik doğrudur;

$$D^\alpha \varphi_h(x) = (D^\alpha \varphi)_h(x) \text{ [5].} \tag{1.2}$$

Sonuç 1.1: Eğer $\varphi(x)$ fonksiyonu $p \geq 1$ olmak üzere $L_p(Q)$ uzayından olan $D^\alpha \varphi(x)$ genelleşmiş türeve sahip ise o zaman $Q' \subset Q$ alt bölgesinde $L_p(Q')$ uzayın normuna göre $D^\alpha \varphi_h(x) \to D^\alpha \varphi(x)$ 'e yakınsar.

Teorem 1.2: Q bölgesinde Lebesgue integrali olan $\varphi(x)$ fonksiyonu için $\overline{Q}$ bölgesinde tanımlı, $|\alpha|$. mertebeye kadar sürekli türevlenebilir fonksiyonlardan oluşan öyle $\{\varphi_m(x)\}$ dizisi vardır ki her bir $\psi(x)$ sürekli fonksiyon için

$$\lim_{m\to\infty} \int_Q \varphi_m(x)\psi(x)dx = \int_Q \varphi(x)\psi(x)dx \tag{1.3}$$

eşitliğini sağlar. $\psi(x)$ fonksiyonu $Q' \subset Q$ dışındaki bölgede sıfıra eşit olan fonksiyondur. Ayrıca $\{D^{\alpha}\varphi_m(x)\}$ dizisi $L_p(Q)$ uzayında m ye göre düzgün sınırlı ise o zaman $\varphi(x)$ fonksiyonun Q bölgesinde $|\alpha|$. mertebeden genelleşmiş türevi vardır [5].

Sonuç 1.2: Eğer $\varphi(x)$ fonksiyonun ortalama fonksiyonunun herhangi α. mertebeye kadar olan türevleri $L_2(Q)$ uzayında düzgün sınırlı ise o zaman Q bölgesinde $\varphi(x)$ fonksiyonun α. mertebeden genelleşmiş türevi vardır.

Teorem 1.3: Eğer $\varphi_1(x)$ ve $\varphi_2(x)$ fonksiyonların $\varphi_{1x_i}(x)$, $\varphi_{2x_i}(x)$ gibi genelleşmiş türevleri var ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olmak üzere $\varphi_1(x) \in L_p(Q)$, $\varphi_{1x_i}(x) \in L_p(Q)$, $\varphi_2(x) \in L_q(Q)$, $\varphi_{2x_i}(x) \in L_q(Q)$ ise o zaman $\varphi_1(x)\varphi_2(x)$ fonksiyonun da $(\varphi_1(x)\varphi_2(x))_{x_i}$ genelleşmiş türevi vardır. Bu çarpım fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır,

$$(\varphi_1(x)\varphi_2(x))_{x_i} = \varphi_{1x_i}(x)\varphi_2(x) + \varphi_1(x)\varphi_{2x_i}(x) \quad [5]. \tag{1.4}$$

Şimdi Sobolev uzayların tanımlarına geçelim ve bu uzaylardaki fonksiyonun özellikleriyle tanışalım.

Q, R^n uzayında sınırlı bir bölge, l negatif olmayan tamsayı ve $p \geq 1$ olsun.

$W_p^l(Q) = \{u(x) \,|\, u(x) \in L_p(Q), |\alpha| = l$ ye kadar tüm mertebeden genelleşmiş türevleri $D^{\alpha}u \in L_p(Q)\}$ olup ve bu uzayda norm

$$\|u\|_{W_p^l(Q)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{l} \int_Q |D^{\alpha}u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.5}$$

şeklinde tanımlanır.

$W_p^l(Q)$ uzayı tam ve ayrılabilir (separable) uzaydır.

$\overset{o}{W}{}^{l}_{p}(Q)$ uzayı $W_p^l(Q)$ uzayının alt uzayı olup kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinde çok önemli bir rolü vardır.

$\overset{o}{W}{}^{l}_{p}(Q)$ uzayı $C_0^\infty(\overline{Q})$ fonksiyonlar sınıfının $W_p^l(Q)$ uzayın normuna göre kapanışından oluşan bir uzaydır. $\overset{o}{W}{}^{l}_{p}(Q)$ uzayın fonksiyonları için karakteristik olan özelliği $(l-1)$. mertebeye kadar olan genelleşmiş türevlerin hepsi ∂Q sınırının hemen hemen her yerinde $(n-1)$ boyutlu Lebesgue ölçüsüne göre sıfırdır.

$\overset{o}{W}{}^{l}_{p}(Q)$ uzayında $\| \quad \|_{W_p^l(Q)}$ norma denk olarak aşağıdaki norm da tanımlanabilir,

$$\|u\|_{\overset{o}{W}{}^{l}_{p}(Q)} = \left(\sum_{|\alpha|=l} \int_Q |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.6}$$

$\overset{o}{W}{}^{l}_{p}(Q)$ ayrılabilir (separable) uzaydır.

$W_p^l(Q)$ ve $\overset{o}{W}{}^{l}_{p}(Q)$ uzaylarından alınan $W_2^l(Q)$ ve $\overset{o}{W}{}^{l}_{2}(Q)$ Hilbert uzayları ayrıca incelenirse, bu uzaylarda iç çarpım

$$(u,v)_{W_2^l(Q)(\overset{o}{W}{}^{l}_{2}(Q))} = \sum_{|\alpha|=0}^{l} \int_Q D^\alpha u D^\alpha v dx\,, \tag{1.7}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.2: $W_p^l(Q)$ uzaylarından olan fonksiyonlarda başka uzayların özelliklerini taşıyan fonksiyonların varlığını kanıtlayan teoremler vardır. Bu teoremlere **"Gömme Teoremi"** adı verilir.

Tanım 1.3: X uzayının her bir elemanını, Y uzayından olan ve bu uzayın özelliklerini taşıyan aynı elemanına karşılık gelen operatöre **Gömme operatörü** denir. Bilindiği gibi bu operatör süreklidir.

Şimdi sınırları, parçalı sürekli ve C^k sınıfından olan bölgeleri tanımlayalım. Eğer $\overline{Q}$ bölgesi, $\overline{Q}_m$ gibi sonlu sayıda alt bölgelerin birleşimi şeklinde yazılabilir ve bu alt bölgeler aşağıdaki şartları sağlar ise Q bölgesi parçalı sürekli ∂Q sınıra sahiptir denir;

1) $i \neq j$ için $Q_i \cap Q_j = \emptyset$,

2) Her bir $\overline{Q}_m$ bölgesi R^n uzayında kapalı küreye homomorftur. Öyle ki bu dönüşüm $y = F_m(x)$ veya $y_i = F_{m,i}(x)$, $i = 1, \dots, n$ fonksiyonlar ile yapılır. Bu dönüşümler $\overline{Q}_m$ bölgesinde Lipschitz şartını sağlar ve bu dönüşümlerin $\left(\frac{\partial F_{m,i}(x)}{\partial x_j}\right)$ Jacobianı m'den bağımsız pozitif sabit sayıyla alttan sınırlıdır.

Eğer her bir $R > 0$ sayısı için $B_R(x_0)$ yuvarın ∂Q sınırı ile kesişimi $x_m = F(x_1, \dots x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_n)$ denklemiyle verilen bağlantılı bölge ise Q bölgesi, C^k sınıfından olan sınıra sahiptir denir. Burada F fonksiyonu $C^k(\overline{D})$ uzayındandır, $\overline{D}$ bölgesi $\overline{B}_R(x_0) \cap \partial Q$ yuvarın $x_m = 0$ düzlemine izdüşümüdür. (m sayısı ve F fonksiyonu $x_0 \in \partial Q$ noktasına göre değişebilir.)

$S_{r,Q}$ kümesi *r*.boyutlu *Q* düzlemiyle R^n uzayının kesişiminden oluşan kümeyi göstermektedir.

Teorem 1.4 (Gömme Teoremi 1): Farz edelim ki Q bölgesinin sınırı, parçalı sürekli düzlem olsun.

1) Eğer $n > lp$, $r > n - lp$, $q \leq \frac{pr}{n-lp}$ ise gömme operatörü $W_p^l(Q)$ uzayından $L_q(S_{r,Q})$ uzayına sınırlıdır,

2) Eğer $q < \frac{pr}{n-lp}$ ise gömme operatörü $W_p^l(Q)$ uzayından $L_q(S_{r,Q})$ uzayına düzgün süreklidir,

3) Eğer $n = lp$ ise o zaman her bir sonlu q için $W_p^l(Q)$ uzayından $L_q(S_{r,Q})$ uzayına gömme operatörü düzgün sınırlıdır,

4) Eğer $n < lp$ ise o zaman $\alpha \leq \frac{lp-n}{p}, \alpha \in (0,1)$ olmak üzere gömme operatörü $W_p^l(Q)$ uzayından $C^{\alpha}(\overline{Q})$ uzayına sınırlıdır,

5) Eğer $\alpha < \frac{lp-n}{p}$ ise $W_p^l(Q)$ uzayından $C^{\alpha}(\overline{Q})$ uzayına gömme operatörü düzgün süreklidir.

Bu teorem $W_p^l(Q)$ uzayından olan fonksiyonlar sınıfı için

$$\|u\|_{L_q(S_{r,Q})} \leq C_1 \|u\|_{W_p^l(Q)},$$

$$\|u\|_{C^{\alpha}(\bar{Q})} \leq C_2 \|u\|_{W_p^l(Q)};$$

eşitsizliklerin doğruluğunu garantiler.

1) Birinci eşitsizlikte $n > lp$ iken q sayısı $\left[1, \frac{pr}{n-lp}\right]$ aralığında, eğer $n = lp$ iken q sayısı $[1, +\infty)$ aralığındadır;

2) İkinci eşitsizlik ise öyle α lar için geçerlidir ki $\alpha \in [0,1)$ ve $n < lp$ iken $\alpha < \frac{pl-n}{p}$ dir.

Bu eşitsizliklerdeki C_1 ve C_2 sabitleri n, p, l, r, q sayıları Q bölgesine bağlı olarak belirlenen sayılardır [6].

Sonuç 1.3: Eğer Q bölgesinin sınırı, parçalı sürekli düzlem ve $p \geq 1$, l_1 ve l_2 tamsayıları $0 \leq l_1 < l_2$ şartını sağlıyor ise o zaman $W_p^{l_2}(Q) \subset W_p^{l_1}(Q)$ gömme operatörü düzgün süreklidir.

Teorem 1.5 (Gömme Teoremi 2) : Farz edelim ki Q bölgesinin sınırı ∂Q, C^l sınıfından olsun.

1) Eğer $n > lp,\ q \le \frac{np}{n-lp}$ ise o zaman $W_p^l(Q)$ uzayından $L_q(\partial Q)$ uzayına gömme operatörü sınırlıdır,

2) Eğer $q < \frac{np}{n-lp}$ ise $W_p^l(Q)$ uzayından $L_q(\partial Q)$ uzayına gömme operatörü düzgün süreklidir,

3) Eğer $n = lp$ ise o zaman her bir sonlu q için $W_p^l(Q)$ uzayından $L_q(\partial Q)$ uzayına gömme operatörü düzgün sınırlıdır.

Bu teoremden $W_p^l(Q)$ uzayından olan fonksiyonlar sınıfı için

$$\|u\|_{L_q(\partial Q)} \le C_3 \|u\|_{W_p^l(Q)},$$

eşitsizliği de elde edilir.

1) $n > lp$ iken q sayısı $\left[1, \frac{np}{n-lp}\right]$ aralığındadır,

2) $n = lp$ iken q sayısı $[1, +\infty)$ aralığındadır [6].

Sobolev uzaylarından olan fonksiyonlar için 1.5 ve 1.4 teoremlerinden elde edilen eşitsizliklerin yanı sıra başka fonksiyonel uzayların normları arasındaki bağlantıyı kuran eşitsizlikler de vardır. Bunlardan bazıları Teorem 1.5 ve Teorem 1.4 ten elde edilmektedir, bazılarını ise Hölder, Young eşitsizliklerini kullanarak da elde etmek mümkündür.

Teorem 1.6: $p \ge 1$ olmak üzere $\overset{o}{W}{}_p^l(Q)$ uzayından olan her bir u(x) fonksiyonu ve $[1, +\infty)$ aralığından aldığımız herhangi bir *r* gerçel sayısı için

$$\|u\|_{L_q(Q)} \leq \beta \|u_x\|^{\alpha}_{L_p(Q)} \|u\|^{1-\alpha}_{L_2(Q)}$$

eşitsizliği sağlanır; burada

$$\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$$

dir.

1) Eğer $p \geq n = 1$ ise $q \in [r, +\infty)$ keyfi bir sayı, $\alpha \in \left[0, \frac{p}{p+r(p-1)}\right]$ dir,

2) Eğer $n > 1$ ve $p < n$ ise $q \in \left[2, \frac{np}{n-p}\right]$ keyfi sayı, eğer $r \leq \frac{np}{n-p}$ ise q sayısı r ile $\frac{np}{n-p}$ arasında değildir, α sayısı ise 0 ile 1 arasında değişen bir sayıdır,

3) Eğer $n > 1$ ve $p \geq n$ ise q sayısı $[r, +\infty)$ aralığında değiştiğinde α sayısı ise 0 ile $\frac{np}{np+r(p-n)}$ sayısı arasında değişmektedir. Eğer $p = n$ ise q sayısı sonludur, $p > n$ ise o takdirde $q = +\infty$ dur [6].

1.2. ORTALAMA FONKSİYON

$x \in R^n_x$ ve $h \in R^1_h$, $h > 0$ olmak üzere ,

1) $h > 0$ için $w_h(x) \in C^{\infty}(R^n_x)$,

2) $|x| > h$ için $w_h(x) = 0$,

3) R^n_x de $w_h(x) \geq 0$,

4) $h > 0$ için $\int\limits_{R^n_x} w_h(x)dx = 1$,

şartlarını sağlayan $w_h(x)$ fonksiyonuna ortalama fonksiyonun çekirdeği denir.

Klasik örnek olarak

$$w_h(x) = \begin{cases} Ce^{\frac{h^2}{|x|^2-h^2}}, & |x| < h \\ 0, & |x| \geq h \end{cases} \tag{1.8}$$

çekirdek fonksiyonunu alalım. Burada,

$$C = \frac{1}{h^n}\left[\int_{Q_1^0} e^{\frac{1}{|y|^2-1}} dy\right]^{-1}, Q_1^0 = \{y; |y| < 1\}$$

dir. Bu (1.8) fonksiyonun tüm şartları sağladığını kolaylıkla kontrol etmek mümkündür, öyle ki $h > 0$ için $w_h(x) \in C_0^\infty(R_x^n)$ olduğu aşikardır.

Farz edelim ki $u(x), R_x^n$ de lokal integrallenebilir fonksiyon olsun.

$$u^h(x) = \int_{R_y^n} w_h(x-y)u(y)dy \tag{1.9}$$

fonksiyonuna $u(x)$ fonksiyonunun h yarıçaplı ortalama fonksiyonu denir. Eğer $u(x)$ fonksiyonu Ω bölgesinde tanımlı ve $u \in L_1(\Omega)$ ise o takdirde, $u(x)$'in ortalama fonksiyonu $R_x^n \backslash \Omega$ bölgesinde $u(x) = 0$ dır. $u^h(x) \in C^\infty(R_x^n)$ olduğu kolaylıkla kontrol etmek mümkündür, öyle ki (1.9) integrali, x değişkenine göre integral altında sonsuz mertebeden diferansiyellenebilirdir [4].

Teorem 1.7: Farz edelim ki Ω, R_x^n de sınırlı bölge olsun. Bu takdirde,

1) Eğer $p \geq 1$ olmak üzere $u(x) \in L_p(\Omega)$ ve $u(x)$ fonksiyonu, Ω_1 bölgesinin dışında 0 olup $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ ise o zaman her $h < \delta$ için $u^h(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ dır. (Burada δ, Ω_1 ile $\partial\Omega$ sınırı arasındaki uzaklığı göstermektedir.)

2) Eğer $u(x)$, $\overline{\Omega}$ da sürekli ve $\partial\,\Omega$ sınırında sıfıra eşit ise, o zaman $h \to 0$ iken $u^h(x) \to u(x)$ 'e Ω da düzgün yakınsar,

3) Eğer $p \geq 1$ olmak üzere $u(x) \in L_p(\Omega)$ ise o zaman $\|u^h\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u\|_{L_p(\Omega)}$ ve $h \to 0$ iken $\|u^h - u\|_{L_p(\Omega)} \to 0$ 'a yakınsar [5].

İspat:

1) $$u^h(x) = \int\limits_{|x-y|<h} w_h(x-y)u(y)dy \ ,$$

eşitliği $\partial\Omega$ sınırından $\delta - h$ dan büyük olmayan uzaklıkta bulunan $x \in \Omega$ noktaları için geçerlidir. $|x-y| < h$ için $u(y) = 0$ dır. Buna göre böyle x noktaları ve $h < \delta$ için $u^h(x) = 0$ dır.

2) Farz edelim ki $u(x) \in C^0(\overline{\Omega})$, $R_x^n \backslash \Omega$ bölgesinde $u = 0$ olsun. O zaman

$$\left|u^h(x) - u(x)\right| = \left|\int\limits_{R_y^n} w_h(x-y)[u(y) - u(x)]dy\right| \leq \sup_{|x-y|\leq h} |u(y) - u(x)| \ ,$$

$u(x)$ fonksiyonunu $\overline{\Omega}$ bölgesinde düzgün sürekli olduğuna göre, son eşitsizliğin sağ tarafı $h \to 0$ iken x değişkenine göre düzgün olarak sıfıra yakınsar. O zaman $u^h(x)$ fonksiyonu $u(x)$ 'e yakınsar.

3) Farz edelim ki $u(x) \in L_p(\Omega)$ ve Ω dışında da $u(x) = 0$ olsun. O zaman $p > 1$ için,

$$\left|u^h(x)\right| \leq \left|\int\limits_{R_y^n} w_h(x-y)u(y)dy\right| \leq \int\limits_{R_y^n} |w_h(x-y)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}}|u(y)|dy \ , \tag{1.10}$$

olur. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ dir. Son integrale Hölder eşitsizliği kullanarak ,

$$\left|u^h(x)\right| \le \left(\int_{R_y^n} w_h(x-y)\,dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{R_y^n} w_h(x-y)|u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_{R_y^n} w_h(x-y)|u(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.11}$$

elde edilir. Öyle ki,

$$\left(\int_{R_y^n} w_h(x-y)dy \right) = \int_{R_\eta^n} w_h(\eta)d\eta \ = 1$$

dir. Buna göre, Fubini teoreminden integrallerin sırası yer değiştiririlirse

$$\left\|u^h\right\|_{L_p(R_x^n)} \le \left[\int_{R_x^n} \left(\int_{R_y^n} w_h(x-y)|u(y)|^p dy \right) dx \right]^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left[\int_{R_y^n} |u(y)|^p \int_{R_x^n} w_h(x-y)dx \ \ dy \right]^{\frac{1}{p}} = \|u\|_{L_p(\Omega)} \tag{1.12}$$

olur. p=1 için

$$\left|u^h(x)\right| \le \int_{R_y^n} w_h(x-y)|u(y)|dy$$

olmak üzere,

$$\left\|u^h\right\|_{L_1(R_x^n)} \le \int_{R_x^n} \left|u^h(x)\right| dx \le \int_{R_y^n} |u(y)| \int_{R_x^n} w_h(x-y)dx \ \ dy = \|u\|_{L_1(\Omega)}$$

eşitsizliği elde edilir. Aşikardır ki, her bir $u(x) \in L_p(\Omega)$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle $v(x)$

sürekli fonksiyon bulmak mümkün ki $\|u-v\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ ve $v(x)$ fonksiyonu $\partial\Omega$ sınırının belli bir etrafında sıfıra eşittir. Üçgen eşitsizliğine göre,

$$\left\|u^h-u\right\|_{L_p(\Omega)} \leq \left\|u^h-v^h\right\|_{L_p(\Omega)} + \left\|v^h-v\right\|_{L_p(\Omega)} + \|v-u\|_{L_p(\Omega)}$$

olur. Öyle ki, $\|u-v\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ ve yukarıdaki ispattan,

$$\left\|u^h-v^h\right\|_{L_p(\Omega)} = \left\|(u-v)^h\right\|_{L_p(\Omega)} \leq \|u-v\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$$

dur. Teoremin 2. hükmüne göre $h < h_0$ olmak üzere o kadar küçük h_0 bulmak mümkün ki $v(x)$ sürekli fonksiyonu için $\left\|v-v^h\right\|_{L_p(\Omega)} < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır. Bu takdirde $\left\|u^h-u\right\|_{L_p(\Omega)} < 3\varepsilon$ olur. Böylelikle ispat tamamlanmıştır.

Teorem 1.8: Farz edelim ki K, Ω kümesinde kompakt olsun. O zaman $C_0^\infty(\Omega)$ sınıfında öyle bir $\varphi(x)$ fonksiyonu vardır ki $0 \leq \varphi \leq 1$ ve K kompaktının herhangi bir komşuluğunda $\varphi(x) = 1$ dir [3].

İspat: Farz edelim ki K_η kümesi öyle noktalar kümesidir ki bunlar K kümesinden η kadar küçük uzaklıkta olsun. $0 < 3\varepsilon < \delta$, burada δ ise K ile $\partial\Omega$ sınırı arasındaki uzaklığı göstermektedir.

$K_{2\varepsilon}$ kümesinde $u(x) = 1$ ve $R_x^n \backslash K_{2\varepsilon}$ kümesinde $u(x) = 0$ kabul edelim. O zaman $\varphi(x)$ fonksiyonu olarak

$$u^\varepsilon(x) = \int_{R_y^n} w_\varepsilon(x-y)u(y)dy$$

fonksiyonunu ele alalım. Öyle ki K_ε kümesinde $u^\varepsilon(x) = 1$ dir ve Ω bölgesinin sınırının belirli bir kısmında $u^\varepsilon(x) = 0$ dır.

Teorem 1.9 (Birin Bölüntüsü): Farz edelim ki K, R_x^n de kompakt ve $K \subset (\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N)$ olacak şekilde $\Omega_1, \dots, \Omega_N$ bölgeleri olsun. O zaman $j = 1, \dots, N$ için öyle $\varphi_j(x)$ fonksiyonları vardır ki $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$, R_x^n bölgesinde $\varphi_j(x) \geq 0$, $\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) \leq 1$, K kompaktın belli bir kısmında $\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) = 1$ dir [3].

İspat: $K_j, j = 1, \dots, N$ kompaktları $K_j \subset \Omega_j$ ve $K_j \subset (\Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_N)$ olarak seçmek mümkündür.. Teorem 1.8 'e göre öyle bir $\psi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega_J)$ fonksiyonu vardır ki $0 \leq \psi_j(x) \leq 1$ ve K_j kompaktının belli bir kısmında $\psi_j = 1$ dir .

$\varphi_1 = \psi_1, \dots, \varphi_J = \psi_J(1-\psi_1) \dots (1-\psi_{J-1})$, $j = 2, \dots, N$ alalım. Bu takdirde

$$\sum_{j=1}^{N} \varphi_j(x) = 1 - (1-\psi_1) + \psi_2(1-\psi_1) + \dots + \psi_N(1-\psi_1) \dots (1-\psi_{N-1})$$

$$= 1 - (1-\psi_1)(1-\psi_2) \dots (1-\psi_N)$$

olur.

Şimdi Genelleşmiş Türev tanımını verelim. Bu kavramın kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin çözüm sınıflarının genişletilmesinde büyük bir rolü vardır. Bu çözümler yapılırken fonksiyonel analiz yöntemleri kullanılmaktadır. Genelleşmiş türev kavramı genelleşmiş fonksiyonlar teorisi oluş-madan önce de vardı. Genelleşmiş türev kavramı ilk kez kısmi diferansiyel denklemlerin araştırılmasında S. L. Sobolev ve K. O. Friedrich 'in çalışmalarında sistematik olarak görülmüştür.

Genelleşmiş türevin tanımını vermeden önce, doğal bir tanım olduğunu göstermek için birkaç bilinen formül gösterilmiştir. Bundan önce ise bazı yeni gösterimler dahil edilecektir

.

Örneğin,

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ multi indeks, burada $j = 1, \dots, n$ için α_j, pozitif tam sayılardır.

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$; $D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}, j = 1, \dots, n$; $D_x^\alpha u = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n} u$;

$|\alpha| = 0$ için $D_x^\alpha u = u$ olarak gösterilmektedir.

Farz edelim ki $u(x) \in C^1(\Omega)$ ve $v(x) \in C^1(\Omega)$, $\Omega \in B^k$ olsun.

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_1} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_1} dx + \int_{\partial\Omega} uv\gamma_1 ds \qquad (1.13)$$

eşitliğinden her bir $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyon için,

$$\int_\Omega \varphi(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} dx = -\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_j} dx \qquad (1.14)$$

eşitliği yazılabilir.

Eğer $u(x)$ fonksiyonu $C^k(\Omega)$ sınıfından ise o zaman kısmi integrasyon formülünü k kez kullanarak her bir $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, $|\alpha| \leq k$ için

$$\int_\Omega \varphi(x) D_x^\alpha u(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x)\, D_x^\alpha \varphi(x) dx$$

eşitliği elde edilir.

Son eşitliği $D_x^\alpha u$ genelleşmiş türevin tanımı olarak alınabilir. Bir fonksiyonun α. mertebeden genelleşmiş türevinin olması $(\alpha - 1)$. mertebeden genelleşmiş türevinin var olacağı anlamına gelmez [4].

Tanım 1.4 (Genelleşmiş Türev): Lokal olarak Ω bölgesinde integrallenebilen $v(x)$ fonksiyonu, her bir $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Omega} v(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} u(x)\, D_x^{\alpha}\varphi(x)dx \qquad (1.15)$$

eşitliğini sağlıyor ise $v(x)$ fonksiyonuna, aynı bölgede tanımlı $u(x)$ fonksiyonun α. mertebeden genelleşmiş türevi denir ve $v = D_x^{\alpha} u$ ile gösterilir [2].

(1.15) eşitliğini sağlayan $v(x)$ fonksiyonun tek olduğunu gösterelim. Farz edelim ki her bir $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$ fonksiyonu için (1.15) eşitliği sağlayan $v_1(x)$ ve $v_2(x)$ iki farklı fonksiyon olsun. O takdirde

$$\int_{\Omega} v_1(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} u(x)\, D_x^{\alpha}\varphi(x)dx$$

$$\int_{\Omega} v_2(x)\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} u(x)\, D_x^{\alpha}\varphi(x)dx$$

eşitlikleri taraf tarafa çıkartıp $V = v_1 - v_2$ alınırsa

$$\int_{\Omega} V(x)\varphi(x)dx = 0 \qquad (1.16)$$

yazılabilir.

Farz edelim ki $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ olsun. Ω_1 bölgesinin hemen hemen her yerinde $V(x) = 0$ olduğunu gösterelim. Burada δ, Ω_1 ve $\partial\Omega$ sınırı arasındaki uzaklığı göstermektedir..

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} V(x), & \Omega_1 \text{ in } \partial\Omega \text{ sınırından } \dfrac{\delta}{2}\text{i kadar içerde kalan noktalarda} \\ 0, & \text{Geri kalan noktalarda} \end{cases}$$

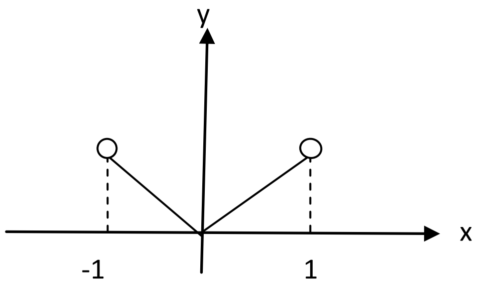
dır. (1.16) eşitliğinde $y \in \Omega_1,\ h < \frac{\delta}{2}$ için $\varphi(x) = w_h(y - x)$ alalım. O zaman (1.16) eşitliğinden $y \in \Omega_1$ ve $h < \frac{\delta}{2}$ için $\tilde{V}^h(y) = 0$ olur. Teorem 1.7 'ye göre $h \to 0$ iken $\|\tilde{V}^h - \tilde{V}\|_{L_1(\Omega)} \to 0$ 'a yakınsar ve sonuç olarak $h \to 0$ iken $\|\tilde{V}^h - V\|_{L_1(\Omega_1)} \to 0$ 'a yakınsar. Buradan da $\Omega_1$bölgesinin hemen hemen her yerinde $V = 0$ dır. $v(x)$ fonksiyonun tek olduğu ispatlanmıştır.

Not 1.1: Yukarıdaki tanımdan diyebiliriz ki $u(x) \in C^k(\Omega)$ ise $u(x)$ fonksiyonun Ω bölgesindeki k. mertebeden genelleşmiş türevi, klasik anlamdaki türevle aynı anlamdadır.

Uyarı 1.1: Klasik anlamdaki türev tanımından farklı olarak α. mertebeden genelleşmiş türevin var olması için daha düşük mertebeden türevlerin var olması gerekli değildir [6].

Örnek 1.1: $\Omega = (-1,1)$ açık aralığında $v(x) = |x|$ fonksiyonun genelleşmiş türevi var ve sgnx 'tir [7].

İspat:



Şekil 1.1. $v(x) = |x|$ fonksiyonun grafiği.

$$v'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

$\varphi(x) \in C_0^1(\overline{\Omega})$ ve $\varphi(-1) = \varphi(1) = 0$

dır.

$$\int_\Omega f_\alpha\, \varphi(x) d\Omega = (-1) \int_\Omega v\ D_\varphi^\alpha d\Omega$$

$$\int_\Omega v\ D_\varphi^\alpha d\Omega = -\int_\Omega f_\alpha\, \varphi(x) d\Omega$$

$$v = u, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = dv$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}\, dx = du, \quad \varphi(x) = v$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega = v(x)\varphi(x)|\partial\Omega \ - \int_{\Omega} \varphi(x) \frac{\partial v}{\partial x} dx$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = f_{\alpha} \quad \text{alınarak,}$$

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x} d\Omega = -\int_{\Omega} f_{\alpha}\, \varphi(x) dx$$

biçimine getirilir ve en son ifadeye örnek uygulanırsa,

$$\int_{-1}^{1} |x| \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, dx = \int_{-1}^{0} (-x)\varphi'\,(x)\, dx + \int_{0}^{1} (x)\varphi'(x)\, dx$$

$$= (-x)\varphi(x)\,\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (-1)\varphi(x)dx + (x)\varphi(x)\,\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} (1)\, \varphi(x)dx$$

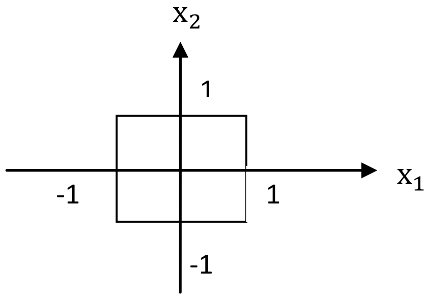
$$= -\left[\int_{-1}^{0} (-1)\varphi(x)dx + \int_{0}^{1} (1)\varphi(x)dx\right]$$

$$= -\int_{-1}^{1} \operatorname{sgnx}\, \varphi(x)\, dx = -\int_{-1}^{1} f_{\alpha}\, \varphi(x)dx$$

elde edilir. O halde $v(x) = |x|$ fonksiyonun (-1,1) aralığında genelleşmiş türevi sgnx tir.

Örnek 1.2: $v(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$ fonksiyonunun $-1 \le x_1 \le 1,\ -1 \le x_2 \le 1,$ karesinde genelleşmiş türevi yoktur. Ancak ikinci mertebeden genelleşmiş türevi var ve sıfırdır.

İspat:



Şekil 1.2. $v(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2)$ fonksiyonun grafiği.

$$\overline{\Omega} = \{(x_1, x_2) | -1 \le x_1, x_2 \le 1\}, \varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) \in C_0^2(\overline{\Omega})$$

$$\int_{\Omega} v\, D_{\varphi}^{\alpha}\, d\Omega = (-1)^2 \int_{\Omega} f_{\alpha}\, \varphi(x) d\Omega$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} v(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2} d\, x_1 dx_2 =$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} [f(x_1) + g(x_2)] \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2} d\, x_1 dx_2$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x_1) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2} d\, x_1 dx_2 + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} g(x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2} d\, x_1 dx_2$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x_1) \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2} dx_2 \right\} dx_1 + \int_{-1}^{1} g(x_2) \left\{ \int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1\, \partial x_2} dx_1 \right\} dx_2$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x_1) \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \Big|_{-1}^{1} dx_1 + \int_{-1}^{1} g(x_2) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big|_{-1}^{1} dx_2$$

yazılır. φ 'nin kendisi ve türevleri sınırda sıfır olduğundan,

$$\int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} v(x_1, x_2) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1 \, \partial x_2} d\, x_1 dx_2 =$$

$$\int_{-1}^{1} f(x_1).\, 0 \, dx_1 + \int_{-1}^{1} g(x_2).\, 0 \, dx_2 = 0$$

dır.

Teorem 1.10: Farz edelim ki $u(x) \in L_1(\Omega)$ ve $D_x^\alpha u \in L_1(\Omega)$ olsun. O zaman her bir $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ ve $h < \delta$ için aşağıdaki eşitlik doğrudur. Burada δ, $\Omega_1$ve $\partial\Omega$ sınırı arasındaki uzaklığı göstermektedir.

$x \in \Omega_1$ için $\quad D_x^\alpha u^h(x) = (D_x^\alpha u)^h(x)$ [5].

İspat: u^h fonksiyonun tanımına göre,

$$D_x^\alpha u^h(x) = \int_{R_y^n} D_x^\alpha w_h(x - y)\, u(y) dy$$

dir. Öyle ki $x \in \overline{\Omega}$ ve $h < \delta$ için $w_h(x - y) \in C_0^\infty(\Omega)$,

$D_x^\alpha w_h(x - y) = (-1)^{|\alpha|} D_y^\alpha w_h(x - y)$ ve $D_x^\alpha u$ genelleşmiş türevin tanımına göre,

$$D_x^\alpha u^h(x) = \int_{R_y^n} (-1)^\alpha D_y^\alpha w_h(x - y)\, u(y) dy =$$

$$\int_{R_y^n} w_h(x-y)D_y^\alpha u(y)dy = (D_x^\alpha u)^h(x)$$

yazılabilir.

Teorem 1.11: Farz edelim ki $u(x) \in L_1(\Omega)$ ve Ω bölgesinde genelleşmiş türev $j = 1, \dots, n$ için $D_{x_j}u = 0$ olsun. O zaman Ω bölgesinde, $u \equiv \text{sabittir}$.

İspat: Teorem 1.10 'da her bir Ω_1 bölgesi için $\overline{\Omega_1} \subset \Omega$ olmak üzere $h < \delta$ ve $j = 1, \dots, n$ için $D_{x_j}u^h = (D_{x_j}u)^h$ eşitliği gösterilmişti. Buna göre Ω_1 bölgesinde $h < \delta$ için $u^h = C_h =$ sabittir. Teorem 1.7 den $L_1(\Omega_1)$ normuna göre $h \to 0$ iken $u^h \to u$ ya yakınsar. Öyle ki C_h, $h \to 0$ iken C ye yakınsar, o zaman Ω_1 bölgesinde $u = C$ dir. $\Omega_1$bölgesi, Ω da keyfi bir alt bölge olduğundan u, Ω da sabittir.

1.3 $D'(\Omega)$ GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLAR UZAYI

Tanım 1.5: $D(\Omega)$, Ω bölgesinin bir kompaktının içinde sonsuz mertebeden türevlenebilen, kompaktın dışında da sıfıra eşit olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu sınıf $C_0^\infty(\Omega)$ olarak da bilinmektedir.

$D(\Omega)$ uzayında fonksiyonlar dizisinin yakınsaklığını aşağıdaki gibi tanımlayalım.

1) Ω bölgesinde $j \to \infty$ iken her bir α multi indeksi için $D^\alpha\varphi_j \to D^\alpha\varphi$ 'ya düzgün yakınsıyor,

2) Ω bölgesinde öyle bir K kompakt vardır ki her bir φ_j için $\text{supp}\varphi_j \subset K$ $(K \subset \Omega)$,

ise $\varphi_j \in D(\Omega)$ fonksiyon dizisi $j \to \infty$ iken $\varphi \in D(\Omega)$ fonksiyonuna yakınsıyor denir.

Uyarı 1.2: $D(\Omega)$ sınıfına Finite fonksiyonlar sınıfı da denir.

Tanım 1.6 (Genelleşmiş Fonksiyon): $D(\Omega)$ Finite fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlı, sürekli lineer fonksiyonele genelleşmiş fonksiyon denir ve bu genelleşmiş fonksiyonlar uzayı da $D'(\Omega)$ ile gösterilir.

Başka bir ifadeyle u öyle lineer fonksiyoneldir ki her bir $\varphi(x) \in D(\Omega)$ fonksiyonuna $\langle u, \varphi\rangle$ kompleks sayısı karşılık gelir ve aşağıdaki şartları sağlar.

1) Eğer $\varphi_1 \in D(\Omega)$ ve $\varphi_2 \in D(\Omega)$, λ_1, λ_2 keyfi kompleks sayılar ise o zaman $\langle u, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2\rangle = \lambda_1\langle u, \varphi_1\rangle + \lambda_2\langle u, \varphi_2\rangle$, (Fonksiyonelin lineerlik özelliği)

2) Eğer φ_j Finite fonksiyon dizisi $j \to \infty$ için sıfıra yakınsıyor ise o zaman $j \to \infty$ için $\langle u, \varphi_j\rangle \to 0$ sıfıra yakınsar. (Fonksiyonelin süreklilik özelliği)

Bütün $D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonlar uzayı lineer uzay oluşturur, öyle ki μ_1 , μ_2 sabit sayılar, u_1 ve u_2 genelleşmiş fonksiyonlar olmak üzere $\mu_1u_1 + \mu_2u_2$ lineer bileşimi de bir genelleşmiş fonksiyondur. Her $\varphi \in D(\Omega)$ için

$$\langle \mu_1u_1 + \mu_2u_2, \varphi\rangle = \mu_1\langle u_1, \varphi\rangle + \mu_2\langle u_2, \varphi\rangle \tag{1.17}$$

eşitliğiyle tanımlı fonksiyonelin birinci ve ikinci şartlarını sağladığını göstermek mümkündür.

$D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonlar uzayındaki yakınsaklığı şu şekilde tanımlayalım. Eğer her bir $\varphi \in D(\Omega)$ için $\langle u_j, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle$ 'ye yakınsar ise $u_j \in D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonlar dizisi $j \to \infty$ iken $u \in D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonuna yakınsar.
Ω da tanımlı her bir lokal integrallenebilir $u(x)$ fonksiyonuna karşı bir genelleşmiş fonksiyon aşağıdaki şekilde eşleştirilebilir.

$$\langle u, \varphi\rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx\,, \tag{1.18}$$

burada $u(x)$ fonksiyonu (1.18) fonksiyonele eş değer olarak tanımlanır. Öyle ki eğer her bir $\varphi \in D(\Omega)$ için,

$$\int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx = 0$$

ise o zaman Ω bölgesinin hemen hemen her yerinde $u = 0$ dır.

$D'(R_x^n)$ de en önemli genelleşmiş fonksiyonuna örnek olarak δ Dirac delta fonksiyonu göstermek mümkündür.

$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0) \tag{1.19}$$

Dirac fonksiyonunu $\delta(x)$ ile ifade edeceğiz. Ortalama fonksiyonun çekirdeği olan $w_{h_j}(x)$ fonksiyonu, $D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonlarda tanımlanmış yakınsaklık tanıma göre $h_j \to 0$ iken δ Dirac delta fonksiyonuna yakınsadığını kolaylıkla göstermek mümkündür. Gerçekten Teorem 1.7 deki paragraf 1.2 ye göre,
$h_j \to 0$ iken

$$\langle w_{h_j}(x), \varphi \rangle = \int_{R_x^n} w_{h_j}(x)\varphi(x)dx = \varphi_{h_j}(0) \to \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle \tag{1.20}$$

yakınsar. $D'(R_x^n)$ uzayındaki yakınsaklık kavramına göre δ fonksiyonuna yakınsayan fonksiyonlar dizisine δ nın **görüntü dizisi** denir.

Eğer her $\varphi \in D(\Omega_1)$ için,

$$\langle u_1, \varphi \rangle = \langle u_2, \varphi \rangle$$

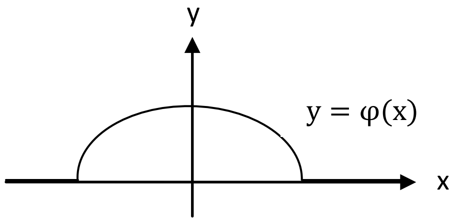
eşitliği sağlanıyorsa $\Omega_1 \subset \Omega$ bölgesinde $D'(\Omega)$ sınıfından alınan u_1 genelleşmiş fonksiyonu, $D'(\Omega)$ sınıfından alınan u_2 genelleşmiş fonksiyonuna eşittir denir.

Tanım 1.7: $\Omega_1 \subset \Omega$ kümesine $u \in D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonun desteği denir.
$\Omega \subset R^n$ olsun. $K = \{\varphi(x): \varphi(x) \in C^\infty(\Omega), x \in R^n \text{ ve } \varphi(x) \text{ sonludur}\}$. $\varphi(x)$ 'in supportu kompakttır. Yani $\text{supp}\varphi(x) \subset \overline{\Omega}$ dır. Çünkü kapalı ve sınırlıdır, öyle ki n

sonlu olduğundan sonlu boyutlu uzaylarda kapalı ve sınırlı cümle kompakttır.

$$\operatorname{supp}\varphi(x) = \{x : x \in \Omega,\ \varphi(x) \neq 0\}$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 1.3. $y = \varphi(x)$ fonksiyonun grafiği.

Eğer Ω_1 bölgesinin belli bir kısmında $u = 0$ ise $\Omega_1 = \operatorname{supp} u$ ile gösterilir. Örnek olarak, $\delta(x)$ fonksiyonun destek kümesi $x = 0$ noktasıdır.

Eğer $\varphi(x) \in D(\Omega)$ fonksiyonu, $u \in D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonun desteği Ω kümesinin belli bir kısmında 0 ise $\langle u, \varphi\rangle = 0$ olduğunu kolaylıkla göstermek mümkündür. $\operatorname{supp}\varphi$ öyle kompakttır ki bu kümenin her bir noktasının belli bir kısmında $u = 0$ dır. supp kümesinde birin bölüntüsünü uygulamak için belli bir sonlu örtü seçelim. Her bir $x \in \operatorname{supp}\varphi$ için,

$$1 \equiv \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x) \tag{1.21}$$

alalım. Burada $\psi_j(x) \in D(\Omega)$ ve her bir $j = 1, \dots, N$ için $\operatorname{supp}\varphi_j$, Ω bölgesinin belli noktalarının etrafında yerleşir ve bu noktaların etrafında $u = 0$ dır. Buna göre

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} \psi_j\, \varphi \tag{1.22}$$

ve

$$\langle u, \varphi \rangle = \langle u, \sum_{j=1}^{N} \psi_j \varphi \ \rangle = \sum_{j=1}^{N} \langle u, \psi_j \varphi \rangle = 0 \qquad (1.23)$$

dır.

$D'(\Omega)$ sınıfından olan her bir u genelleşmiş fonksiyonun türevini tanımlamak mümkündür. Her bir $C^1(\Omega)$ sınıfından olan u fonksiyonları için, bu tanım (1.14) eşitliğine dayanır.

Eğer $u \in D'(\Omega)$ ise o zaman $D_{x_j} u \in D'(\Omega)$ dır ve

$$\langle D_{x_j} u, \varphi \rangle = -\langle u, D_{x_j} \varphi \rangle \qquad (1.24)$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem k kez uygulanırsa

$$\langle D_{x_j}^{\alpha} u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, D_{x_j}^{\alpha} \varphi \rangle \qquad (1.25)$$

eşitliği elde edilir.

$u \in D'(\Omega)$ ve $a(x) \in C^{\infty}(\Omega)$ fonksiyon olmak üzere au genelleşmiş fonksiyonu olarak aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

$$\langle au, \varphi \rangle = \langle u, a\varphi \rangle \qquad (1.26)$$

eşitliğinin sağ tarafı $D(\Omega)$ uzayı üzerinde tanımlanmış lineer sürekli bir fonksiyoneli tanımladığını kolaylıkla göstermek mümkündür.

1.4. GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLARIN DİREKT ÇARPIMLARI

$u(x) \in D'(R_x^n), v(y) \in D'(R_y^m)$ olmak üzere, $D'(R_{x,y}^{n+m})$ uzayında genelleşmiş fonksiyonunu tanımlayalım. $u(x)$ ve $v(y)$ genelleşmiş fonksiyonlar çarpımı $u(x).v(y)$ fonksiyonuna bu fonksiyonların direkt çarpımı denir.

Her bir $\varphi(x,y) \in D\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ fonksiyonu için,

$$\langle u(x)v(y), \varphi\rangle = \langle u(x), \langle v(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle \tag{1.27}$$

şeklinde tanımlanır. Bunun için (1.27) eşitliğin sağ tarafını $D\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ uzayı üzerinde lineer sürekli fonksiyonel olduğu aşağıdaki Lemma 'da gösterilmiştir.

Lemma 1.1: Eğer $v(y) \in D'\left(R_y^m\right)$, $\varphi(x,y) \in D\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ ise o zaman $\psi(x) = \langle v(y), \varphi(x,y)\rangle$ fonksiyonu $D(R_x^n)$ uzayındandır ve her bir α multi indeksi için,

$$D_x^\alpha \psi(x) = \langle v(y), D_x^\alpha \varphi\rangle \tag{1.28}$$

dir. Aynı zamanda eğer $D\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ uzayında $k \to \infty$ iken $\varphi_k(x,y) \to 0$ 'a yakınsıyorsa, $D(R_x^n)$ uzayında $k \to \infty$ iken $\psi_k(x) = \langle v, \varphi_k\rangle \to 0$ 'a yakınsar.

İspat: Eğer $\varphi \in D\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ ise o zaman $|x| > M$ için $\varphi(x,y) = 0$ dır. M herhangi bir sabit sayıdır. Buna göre $|x| > M$ için,

$$\psi(x) = \langle v(y), \varphi(x,y)\rangle = 0$$

olur. Doğal olarak $\psi(x)$ fonksiyonun da supp 'u kompakttır. Farz edelim ki $k \to \infty$ iken $x^k \to x^0$ yakınsasın. $k \to \infty$ iken $\psi(x^k) \to \psi(x^0)$ 'a yakınsadığını gösterelim. Aşikardır ki, $D\left(R_y^m\right)$ uzayındaki yakınsaklık tanımına göre $k \to \infty$ iken $\varphi(x^k, y) \to \varphi(x^0, y)$ 'ye yakınsar. Buna göre, $k \to \infty$ iken

$$\psi\left(x^k\right) = \langle v(y), \varphi(x^k, y)\rangle \to \langle v(y), \varphi(x^0, y)\rangle = \psi(x^0)$$

yakınsar. Buradan $\psi(x)$ fonksiyonun sürekliliği elde edilir. $\Delta x = (h, 0, \ldots, 0)$ alalım. O zaman

$$\frac{\psi(x+\Delta x) - \psi(x)}{h} = \langle v(y), \frac{\varphi(x+\Delta x, y) - \varphi(x,y)}{h}\rangle$$

olur. Öyle ki $\frac{1}{h}[\varphi(x+\Delta x, y)-\varphi(x, y)]$ fonksiyonu sabitlenmiş her bir x ve h için $D(R_y^m)$ uzayındandır. Bu fonksiyon $D(R_y^m)$ uzayındaki yakınsaklık tanımına göre $h \to 0$ iken $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ 'e yakınsar. O zaman

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}[\psi(x+\Delta x)-\psi(x)] = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} = \langle v(y), \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_1}\rangle$$

dir. Yukarıda gösterilene göre $\langle v(y), \frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x_1}\rangle$ x 'e bağlı sürekli fonksiyondur. Aynı zamanda $j = 2,\dots,n$ için $\frac{\partial\psi}{\partial x_j}$ daha yüksek mertebeden türevlerin varlığını ve sürekliliğini göstermek mümkündür. Böylelikle $\psi(x) \in D(R_x^n)$ dir.

Farz edelim ki $D(R_{x,y}^{n+m})$ uzayında $k \to \infty$ iken $\varphi_k(x, y) \to 0$ 'a yakınsasın. Burada her bir k ve $|x| > M$ için $\psi_k(x) = \langle v(y), \varphi_k(x, y)\rangle = 0$ dır. Şimdi her bir α multi indeksi için R_x^n uzayında $D_x^\alpha\psi_k(x) \to 0$ 'a düzgün yakınsadığını gösterelim.

Aksini kabul edelim. Öyle x^{k_j} dizisinin elemanları vardır ki her bir j=1,2,... için $\left|D_x^\alpha\psi_{k_j}(x^{k_j})\right| > \varepsilon = \text{sabit} > 0$ olsun. Öyle ki $\left|x^{k_j}\right| < M$ dir, o zaman x^{k_j} noktalar kümesinin limiti vardır ve bu limiti x^0 ile gösterelim. Bu x^{k_j} dizisinden $x^{k'}$ alt dizisi seçelim ki $k' \to \infty$ iken x^0 'a yakınsasın. O zaman $D(R_y^m)$ uzayındaki yakınsaklık tanımına göre $k' \to \infty$ iken $D_x^\alpha\varphi(x^{k'}, y) \to 0$ 'a yakınsar. Buna göre $k' \to \infty$ iken $D_x^\alpha\psi_{k'}(x^{k'}) = \langle v(y), D_x^\alpha\varphi(x^{k'}, y)\rangle \to 0$ 'a yakınsar. Bu ise $\left|D_x^\alpha\psi_{k'}(x^{k'})\right| > \varepsilon$ eşitsizliğiyle çelişir. Böylelikle eğer $D(R_{x,y}^{n+m})$ uzayında $\varphi_k(x, y) \to 0$ 'a yakınsıyor ise $D(R_x^n)$ uzayında $\psi_k(x) \to 0$ 'a yakınsadığı gösterilmiştir.

Lemma 1.1 'e göre $\langle v(y), \varphi(x, y)\rangle \in D(R_x^n)$ tir ve buna göre $\langle u, \langle v, \varphi\rangle\rangle$ anlamlıdır. (1.27) ifadesinin φ 'ye göre lineer fonksiyonel olduğu aşikardır. Böylelikle eğer $D(R_{x,y}^{n+m})$ uzayında $k \to \infty$ iken $\varphi_k(x, y) \to 0$ 'a yakınsıyor ise o zaman Lemma 1.1'e göre $D(R_x^n)$ uzayında $k \to \infty$ iken $\langle v(y), \varphi_k(x, y)\rangle \to 0$ 'a yakınsar ve $k \to \infty$ iken $\langle u(x), \langle v(y), \varphi_k(x, y)\rangle\rangle \to 0$ 'a yakınsar. Bu da (1.27) ifadesindeki fonksiyonelin sürekliliğini ifade eder. $\langle u(x).v(y), \varphi(x, y)\rangle$ fonksiyonun $D'(R_{x,y}^{n+m})$ uzayında genelleşmiş fonksiyon olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi direkt $u(x).v(y)$ direkt çarpımının bazı özelliklerini gösterelim .

I. Direkt Çarpımının Değişme Özelliği

$$u(x).v(y) = v(y).u(x) \quad [1]. \tag{1.29}$$

İspat: Farz edelim ki $\varphi(x,y) \in D\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ ve $|x|^2 + |y|^2 > R$, $R > 0$ için $\varphi(x,y) = 0$ olsun. Bunun için $\Omega_1 = \left\{x, y;\ \left|x_j\right| < 2R, j = 1, \dots, n\,, |y_s| < 2R\,, s = 1, \dots, m\right\}$ bölgesini alalım. $\varphi(x,y)$ fonksiyonunu Ω_1 bölgesinde düzgün yakınsak trigonometrik Fourier serisine ayırmak mümkündür. Bu seri sonsuz mertebeden diferansiyellenebilirdir, öyle ki $\varphi \in D\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ ve $\mathrm{supp}\varphi \subset \Omega_1$ dir. Farz edelim ki $\psi_N(x,y)$ fonksiyonu bu serinin N tane teriminin toplamı olsun.

$$\xi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \le R \\ 0, & |x| > 2R \end{cases}, \qquad \xi(x) \in C_0^\infty(R_x^n)$$

$$\eta(y) = \begin{cases} 1, & |y| \le R \\ 0, & |y| > 2R \end{cases}, \qquad \eta(y) \in C_0^\infty(R_y^m)$$

olsun. O zaman $\varphi_N(x,y) = \psi_N(x,y)\xi(x)\,\eta(y) \in D\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$dir. $D\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ uzayındaki yakınsaklık tanımına göre N>0 ve $N \to \infty$ iken $\varphi_N \to \varphi$ 'ye yakınsar.

$a_j(x) \in D(R_x^n)\,, b_j(y) \in D\left(R_y^m\right), j = 1, \dots, N$ için $\varphi_N(x,y) = \sum_{j=1}^{N} a_j(x) b_j(y)$,

olduğu aşikar olup

$$\langle u(x).v(y), \varphi(x,y)\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle u(x).v(y), \varphi_N(x,y)\rangle =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \langle u(x), \langle v(y), \sum_{J=1}^{N} a_j b_j\rangle\rangle =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{J=1}^{N} \langle u(x), a_j(x)\rangle \langle v(y), b_j(y)\rangle$$

yazılabilir. Benzer olarak,

$$\langle v(y). u(x), \varphi(x,y)\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{J=1}^{N} \langle v(y), b_j(y)\rangle \langle u(x), a_j(x)\rangle$$

yazılır. Böylece her bir $\varphi \in D\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ için

$$\langle u(x). v(y), \varphi(x,y)\rangle = \langle v(y). u(x), \varphi(x,y)\rangle$$

eşitliği elde edilmiş olup ispat tamamlanmıştır.

II. Direkt Çarpımın Çarpanlara Göre Süreklilik Özelliği

$D'(R_x^n)$ uzayında $k \to \infty$ iken $u_k(x) \to u(x)$ 'e yakınsıyor ise o zaman $D'\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ uzayında $k \to \infty$ iken $u_k(x). v(y) \to u(x). v(y)$ 'ye yakınsar.

Gerçekten, her bir $\psi(x) \in D(R_x^n)$ için $\psi(x) = \langle v(y), \varphi(x,y)\rangle$ alınırsa

$$\lim_{k\to\infty} \langle u_k(x), \langle v(y), \varphi(x,y)\rangle\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle u_k(x), \psi(x)\rangle =$$

$$= \langle u(x), \psi(x)\rangle = \langle u, \langle v, \varphi\rangle\rangle$$

yakınsadığı görülür [1].

III. Direkt Çarpımın Türevi

$D'\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ uzayında $u(x). v(y)$ direkt çarpımın türevi

$$D_x^\alpha[u(x). v(y)] = D_x^\alpha u(x). v(y) \tag{1.30}$$

ile ifade edilir.

Gerçekten,

$$\langle D_x^\alpha[u(x).v(y)],\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u(x).v(y), D_x^\alpha\varphi(x,y)\rangle =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\langle v,\langle u, D_x^\alpha\varphi\rangle\rangle =$$

$$= \langle v(y),\langle D_x^\alpha u,,\varphi\rangle\rangle = \langle D_x^\alpha u(x).v(y),\varphi(x,y)\rangle$$

olur.

Lemma 1.2: Farz edelim ki $u \in D'(R_x^n)$, $\varphi(x,y) \in D\left(R_{x,y}^{n+m}\right)$ olsun.
O zaman,

$$\langle u(x), \int_{R_y^m}\varphi(x,y)dy\rangle = \int_{R_y^m}\langle u(x),\varphi(x,y)\rangle dy \qquad (1.31)$$

eşitliği doğrudur.

İspat: Bunun için $u(x).1$ direkt çarpımına bakalım;

$$\langle u(x).1,\varphi(x,y)\rangle = \langle u(x),\langle 1,\varphi(x,y)\rangle\rangle = \langle u(x), \int_{R_y^m}\varphi(x,y)dy\rangle .$$

Direkt çarpımın değişme özelliği kullanılırsa

$$\langle u(x).1,\varphi(x,y)\rangle = \langle 1.u(x),\varphi(x,y)\rangle =$$

$$= \langle 1,\langle u(x),\varphi(x,y)\rangle\rangle = \int_{R_y^m}\langle u(x),\varphi(x,y)\rangle dy$$

elde edilir. (1.31) eşitliğinin doğruluğu gösterilmiştir.

1.5. GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLARIN KONVOLÜSYONU

Şimdi hem genelleştirilmiş fonksiyonlar teorisi hem de bu teorinin diferansiyel denklemlere uygulaması için önemli olan genelleşmiş fonksiyonlarda konvolüsyon kavramına geçelim.

Farz edelim ki $u(x)$ ve $v(x)$ fonksiyonları R_x^n uzayında lokal integrallenebilir fonksiyon ve $u(x)$ fonksiyonun supp 'u kompakt olsun. O zaman u ve v fonksiyonların konvolüsyonu olan $u * v$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$(u * v)(x) = \int_{R_y^n} u(y)v(x-y)dy$$

$$= \int_{R_y^n} u(x-y)v(y)dy \,. \qquad (1.32)$$

$(u * v)(x)$ fonksiyonu lokal integrallenebilir bir fonksiyondur. Aynı zamanda $D'(R_x^n)$ uzayında bir genelleşmiş fonksiyon olup aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \int_{R_x^n} (u * v)(x)\varphi(x)dx =$$

$$= \int_{R_x^n} \int_{R_y^n} u(x-y)v(y)\varphi(x)dydx$$

$$= \int_{R_x^n} \int_{R_y^n} u(x)v(y)\varphi(x+y)dydx \qquad (1.33)$$

tir. Farz edelim ki $\eta(x) \in D(R_x^n)$ ve $\mathrm{supp}\,u(x)$ 'in etrafında $\eta = 1$ olsun. O zaman aşağıdaki eşitliği yazabiliriz;

$$\langle u * v, \varphi \rangle = \int_{R_{x,y}^{2n}} u(x)v(y)\eta(x)\varphi(x$$

$$+ y)dxdy \,. \qquad (1.34)$$

Farz edelim ki $u(x) \in D'(R_x^n)$, $\mathrm{supp}\,u(x)$ kompakt, $v(x)$ ise $D'(R_x^n)$ uzayında keyfi bir genelleşmiş fonksiyon; $\eta(x) \in D(R_x^n)$, $\mathrm{supp}\,u(x)$ 'in etrafında $\eta = 1$ olsun. $u * v$ konvolüsyonu $D'(R_x^n)$ uzayında genelleşmiş bir fonksiyondur ve aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\langle u * v, \varphi\rangle = \langle u(x).v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle =$$

$$= \langle u(x), \langle v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle. \tag{1.35}$$

$u * v$ konvolüsyonun tanımı $\eta(x)$ fonksiyonun seçiminden bağımsız olduğu kolaylıkla görülür. Gerçekten, eğer $\eta_1(x) \in D(R_x^n)$ ve $\mathrm{supp}\,u(x)$ 'in etrafında $\eta_1 = 1$ ise o zaman

$$\langle u(x), \langle v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle - \langle u(x), \langle v(y), \eta_1(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle =$$

$$\langle u(x), \big(\eta(x) - \eta_1(x)\big)\langle v(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle = 0$$

olur, öyle ki $\mathrm{supp}\,u(x)$ 'in etrafında $\eta(x) - \eta_1(x) = 0$ dır.

$v * u = u * v$ alınabilir. Direkt çarpımın değişme özelliği kullanılırsa

$$\langle v * u, \varphi\rangle = \langle v(y).u(x), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle = \langle u(x).v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle \tag{1.36}$$

elde edilir.

Eğer $v(y) \in D'\big(R_y^n\big)$, v 'nin supp 'u kompakt; $\gamma(y) \in D\big(R_y^n\big)$, $\mathrm{supp}\,v(x)$ 'in kompaktı etrafında $\gamma(y) \equiv 1$ ise aşağıdaki eşitlik de geçerlidir.

$$\langle v * u, \varphi\rangle = \langle u(x).v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle =$$

$$= \langle u(x).v(y), \gamma(y)\eta(x)\varphi(x+y)\rangle = \langle v(y).u(x), \gamma(y)\varphi(x+y)\rangle \tag{1.37}$$

Konvolüsyonun birkaç özelliğini tanımlayalım. Genelleşmiş iki fonksiyonun konvolüsyonu vardır ancak ve ancak direkt çarpımda çarpanlardan birinin supp 'u kompakttır.

I. İki genelleşmiş fonksiyonun konvolüsyonu her çarpana göre süreklidir.

1) Eğer $D'(R_y^n)$ de $k \to \infty$ iken $v_k(y) \to v(y)$ 'ye yakınsıyor ve $u(x)$ in supp 'u kompakt ise o zaman $D'(R_y^n)$ de $k \to \infty$ iken $u * v_k \to u * v$ 'ye yakınsar.

2) Eğer $D'(R_x^n)$ de $k \to \infty$ iken $u_k(x) \to u(x)$ 'e yakınsıyor ve $\operatorname{supp} u_k \subset Q_R^0$, $\operatorname{supp} u \subset Q_R^0$ olacak şekilde öyle bir R sayısı var ise $D'(R_x^n)$ de $k \to \infty$ iken $u_k * v \to u * v$ 'ye yakınsar. $Q_R^0 = \{x;\ |x| < R\}$ dir.

Bu önerme genelleşmiş fonksiyonların direkt çarpımının süreklilik özelliğinden elde edilir. Öyle ki her bir k için $\operatorname{supp} u_k \subset Q_R^0$ ve $\operatorname{supp} u \subset Q_R^0$ ise o zaman (1.35) eşitliğindeki $\eta(x)$ fonksiyonunu k 'dan bağımsız ve Q_R^0 bölgesinde 1 'e eşit olmak şartıyla keyfi bir fonksiyon olarak alınabilir. O takdirde

$$\lim_{k\to\infty}\langle u_k * v, \varphi\rangle = \lim_{k\to\infty}\langle u_k(x).\, v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle =$$

$$= \langle u(x).\, v(y), \eta(x)\varphi(x+y)\rangle = \langle u * v, \varphi\rangle$$

olur.

II. $u * v$ konvolüsyonun türevi için aşağıdaki formül doğrudur.

$$D_x^\alpha(u * v) = D_x^\alpha u * v = u * D_y^\alpha v\,. \tag{1.38}$$

Bu önermeyi ispatlayalım. Genelleşmiş fonksiyonun türevinin tanımına göre aşağıdaki yazılabilir.

$$\langle D_x^\alpha(u * v), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u * v, D_x^\alpha \varphi\rangle =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\langle u(x).v(y), \eta(x) D_y^\alpha \varphi(x+y)\rangle =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\langle u(x), \eta(x)\langle v(y), D_y^\alpha \varphi(x+y)\rangle\rangle =$$
$$= \langle u(x), \eta(x)\langle D_y^\alpha v(y), \varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle u * D_y^\alpha v, \varphi\rangle .$$

Bu ise $D_x^\alpha(u * v) = u * D_y^\alpha v$ demektir. Aynı şekilde

$$\langle D_x^\alpha(u * v), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle u * v, D_x^\alpha \varphi\rangle =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\langle u(x).v(y), \eta(x) D_x^\alpha \varphi(x+y)\rangle =$$

$$= \langle (-1)^{|\alpha|} v(y), \langle u(x), \eta(x) D_x^\alpha \varphi(x+y)\rangle\rangle =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\langle v(y), [\langle u(x), D_x^\alpha(\eta(x)\varphi(x+y))\rangle - \langle u(x), D_x^\alpha\big(\eta(x)\varphi(x+y)\big) -$$

$$-\eta(x) D_x^\alpha \varphi(x+y)\rangle]\rangle =$$

$$= \langle v(y), \langle D_x^\alpha u, \eta(x)\varphi(x+y)\rangle\rangle = \langle v * D_x^\alpha u, \varphi\rangle .$$

Burada

$$\langle u(x), D_x^\alpha\big(\eta(x)\varphi(x+y)\big) - \eta(x) D_x^\alpha \varphi(x+y)\rangle = 0 ,$$

eşitliği kullanılmıştır. Öyle ki $\eta(x)$ fonksiyonun bütün türevleri u(x) fonksiyonun supp 'u etrafında sıfıra eşittir.

Lemma 1.3: Farz edelim ki $\psi \in D(R_x^n), v \in D'\big(R_y^n\big)$ olsun. O zaman $\psi * v$ fonksiyonu $C^\infty(R_x^n)$ uzayındandır ve

$$\psi * v = \langle v(y), \psi(x-y)\rangle \tag{1.39}$$

formülü doğrudur.

İspat: (1.35) konvolüsyon tanımına göre;

$$\langle \psi * v, \varphi \rangle = \langle \psi(x).v(y), \eta(x)\varphi(x+y) \rangle = \langle v(y).\psi(x), \eta(x)\varphi(x+y) \rangle =$$
$$= \langle v(y), \int_{R_x^n} \psi(x)\eta(x)\varphi(x+y)dx \rangle = \langle v(y), \int_{R_x^n} \psi(x)\varphi(x+y)dx \rangle =$$

$$= \langle v(y), \int_{R_x^n} \varphi(x)\psi(x-y)dx \rangle$$

yazılabilir burada $\eta(x) \in D(R_x^n)$ ve supp $\psi(x)$ 'in etrafında $\eta(x) = 1$ dir. Lemma 1.2 'yi kullanarak

$$\langle \psi * v, \varphi \rangle = \langle v(y), \int_{R_x^n} \varphi(x)\psi(x-y)dx \rangle =$$

$$= \int_{R_x^n} \langle v(y), \psi(x-y) \rangle \varphi(x)dx$$

eşitliği elde edilir. Böylece $\psi * v = \langle v(y), \psi(x-y) \rangle$ ve Lemma 1.1 'e göre $\psi * v$ fonksiyonu $C^\infty(R_x^n)$ uzayından olduğu söylenebilir.

$$u^h(x) = u * w_h \tag{1.40}$$

eşitliğiyle tanımlanan $C^\infty(R_x^n)$ uzayından olan $u^h(x)$ fonksiyonuna, $u(x)$ genelleşmiş fonksiyonunun ortalama fonksiyonu denir. Burada $w_h(x)$ fonksiyonunu paragraf 1.2 de tanımladığımız ortalama fonksiyonun çekirdeğidir. Doğal olarak her bir $h > 0$ için $w_h(x) \in D(R_x^n)$ dir. Buna göre (1.39) eşitliği ve Lemma 1.3 'e göre

$$u^h(x) = \langle u(y), w_h(x-y) \rangle, \tag{1.41}$$

yazılabilir. Eğer $u(x)$ genelleşmiş fonksiyonu (1.18) eşitliğiyle tanımlı lokal integrallenebilir fonksiyonuna eşdeğer ise o zaman (1.41) eşitliği, paragraf 1.2 de tanımlanan ortalama fonksiyonuyla aynıdır.

Teorem 1.12: $u^h(x) \in D'(R_x^n)$ ortalama fonksiyonu $h \to 0$ iken $u(x)$ genelleşmiş fonksiyonuna yakınsar [5].

İspat: $u^h(x)$ fonksiyonun tanımına göre,

$$u^h(x) = u * w_h$$

dır. Önceki ispatlardan $D'(R_x^n)$ uzayındaki yakınsaklık tanımına göre $h \to 0$ iken $w_h(x) \to \delta(x)$ Dirac delta fonksiyonuna yakınsar. Konvolüsyonun sürekliliğinden

$$\lim_{h\to 0} u^h(x) = u * \delta$$

eşitliği kolaylıkla görülür. δ Dirac delta fonksiyonun tanımına göre,

$$\langle u * \delta , \varphi \rangle = \langle u(y).\delta(x), \eta(x)\varphi(x+y) \rangle = \langle u(y), \varphi(y) \rangle$$

dir. Böylelikle, her bir $u \in D'(R_x^n)$ için

$$u * \delta = u\,. \tag{1.42}$$

Doğal olarak,

$$\lim_{h\to 0} u^h = u$$

fonksiyonuna yakınsadığı gösterilir.

BÖLÜM 2

SOBOLEV UZAYLARI

2.1. $S'(R_x^n)$ GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLAR UZAYI

Fourier dönüşümleri, kısmi diferansiyel denklemler teorisinde çok önemlidir ve araştırmalarda çok yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. Burada $S'(R_x^n) \subset D'(R_x^n)$ genelleşmiş fonksiyonlar uzayı ve bu uzaydaki fonksiyonlara Fourier dönüşümü tanımlanacaktır.

Şimdi $S(R_x^n)$ uzayını tanımlayalım, kısaca bu uzay ileride S olarak gösterilir. S uzayı aşağıdaki şartları sağlayan $\varphi(x)$ fonksiyonlar kümesinden oluşur;

1) $\varphi(x) \in C^\infty(R_x^n)$,

2) Her bir α multi indeks ve $p \geq 0$ tamsayısı için öyle $C_{\alpha,p}$ sabiti vardır ki,

$$(1 + |x|^p)|D_x^\alpha \varphi(x)| \leq C_{\alpha,p} \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlar.

$S(R_x^n)$ uzayında yakınsaklık kavramını aşağıdaki gibi tanımlayalım. Her bir α multi indeks ve her bir $p \geq 0$ tamsayısı için $k \to \infty$ iken R_x^n uzayında

$$(1 + |x|^p)D_x^\alpha \varphi_k(x) \to (1 + |x|^p)D_x^\alpha \varphi(x)$$

düzgün yakınsıyor ise $\{\varphi_k\} \subset S$ fonksiyon dizisi, φ fonksiyonuna yakınsıyordur.

$u \in S'(R_x^n)$ genelleşmiş fonksiyonuna $S(R_x^n)$ uzayı üzerinde tanımlanmış bir lineer sürekli fonksiyonel denir. Başka ifadeyle bu öyle bir fonksiyoneldir ki $S(R_x^n)$ uzayının her bir fonksiyonuna $\langle u, \varphi \rangle$ kompleks sayısı karşılık gelir ve aşağıdaki şartları sağlar;

1) Eğer $\varphi_1 \in S(R_x^n)$ ve $\varphi_2 \in S(R_x^n)$, λ_1, λ_2 kompleks sayılar ise o zaman

$$\langle u, \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \rangle = \lambda_1 \langle u, \varphi_1 \rangle + \lambda_2 \langle u, \varphi_2 \rangle \ ,$$

2) Eğer S uzayındaki tanımladığımız yakınsaklık tanımına göre $j \to \infty$ giderken $\varphi_j \to 0$ sıfıra yakınsıyor ise o zaman $j \to \infty$ giderken $\langle u, \varphi_j \rangle \to 0$ sıfıra yakınsar.

$S'(R_x^n)$ genelleşmiş fonksiyonlar uzayı lineer uzayı teşkil eder, eğer u_1 ve u_2 genelleşmiş fonksiyonlar, μ_1, μ_2 keyfi sayılar ise o zaman $\mu_1 u_1 + \mu_2 u_2$ lineer bileşimi de bir genelleşmiş fonksiyondur ve her bir $\varphi \in S(R_x^n)$ için

$$\langle \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2, \varphi \rangle = \mu_1 \langle u_1, \varphi \rangle + \mu_2 \langle u_2, \varphi \rangle$$

dir.

Şimdi $S'(R_x^n)$ uzayında yakınsaklık kavramını tanımlayalım.

Eğer her bir $\varphi \in S(R_x^n)$ fonksiyonu için $j \to \infty$ iken $\langle u_j, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle$ 'ye yakınsıyor ise $u_j \in S'(R_x^n)$ genelleşmiş fonksiyonlar dizisi $j \to \infty$ iken $u \in S'(R_x^n)$ fonksiyonuna yakınsıyordur denir.

$S'(R_x^n)$ genelleşmiş fonksiyoneller uzayına sonsuzda küçük hızla azalan genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı da denir. $D'(R_x^n)$ uzayındaki kompakt supp 'u olan her eleman $S'(R_x^n)$ uzayının bir elemanıdır. Doğal olarak $D(R_x^n) \subset S(R_x^n)$ dir ama tersi doğru değildir. Örneğin, $e^{-|x|^2}$ fonksiyonu $S(R_x^n)$ uzayının bir elemanı olmasına rağmen $D(R_x^n)$ uzayına dahil değildir [1,3].

NOT 2.1: $D(R_x^n)$ uzayı $S(R_x^n)$ uzayında yoğundur.

İspat: Gerçekten, eğer $\varphi \in S(R_x^n)$, $\psi \in D(R_x^n)$ ve $|x| \leq 1$ için $\psi = 1$ ise o zaman $\varphi_k(x) = \varphi(x)\psi(\frac{x}{k})$ fonksiyonu her bir $k = 1,2 \ldots$ için $D(R_x^n)$ uzayındandır ve $k \to \infty$ iken $\varphi_k(x)$ fonksiyonlar dizisi S uzayında φ ye yakınsar. Böyle ki $|x| \leq k$ ise

$$\varphi_k(x) - \varphi(x) = \varphi(x)\left(1 - \psi\left(\frac{x}{k}\right)\right) = 0$$

dır. Böylece eğer $u \in S'(R_x^n)$ ve her bir $\varphi \in D(R_x^n)$ için $\langle u, \varphi \rangle = 0$ ise o zaman her bir $\varphi \in S$ için $\langle u, \varphi \rangle = 0$ dır. $D'(R_x^n)$ uzayından aldığımız herhangi iki farklı genelleşmiş fonksiyonuna $S'(R_x^n)$ uzayında iki farklı genelleşmiş fonksiyon karşılık gelir. Eğer her bir $u \in S'(R_x^n)$ fonksiyonu ve her bir $\varphi \in D(R_x^n)$ fonksiyonu için $D'(R_x^n)$ uzayında $\langle u, \varphi \rangle$ bir genelleşmiş fonksiyon ise $S'(R_x^n)$ uzayını $D'(R_x^n)$ uzayının bir alt uzayına karşı koyulabilir.

Şimdi S sınıfından olan fonksiyonlar uzayı üzerinde Fourier dönüşümünün birkaç tane özelliğini tanıtalım.

Tanım 2.1: $$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{R_x^n} \varphi(x)e^{i(\xi,x)}dx \qquad (2.2)$$

eşitliğiyle tanımlı $\hat{\varphi}(\xi)$ fonksiyonuna, $\varphi(x) \in L_1(R_x^n)$ fonksiyonun Fourier dönüşümü denir.

Teorem 2.1: Eğer $\varphi(x) \in S(R_x^n)$ ise o zaman $\hat{\varphi}(\xi) \in S(R_\xi^n)$ olur ve $\varphi \to \hat{\varphi}$ karşılık gelen işlemi S uzayında süreklidir. Her bir $\varphi(x) \in S(R_x^n)$ için aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$\widehat{D_x^\alpha \varphi} = (-i\xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)\,, \qquad \widehat{x^\alpha \varphi} = (-i)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \hat{\varphi}(\xi)\,, \qquad (2.3)$$

$x^\alpha \equiv {x_1}^{\alpha_1} \ldots {x_n}^{\alpha_n}$.

İspat: (2.1) eşitliğinde her tarafın türevi alınırsa

$$D_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{R_x^n} (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi,x)} dx \tag{2.4}$$

olur. Her bir $\varphi(x) \in S(R_x^n)$ olduğundan işlemin geçerliliği vardır ve (2.4) integrali düzgün yakınsaktır. Böylece $\widehat{\varphi}(\xi) \in C^\infty(R_\xi^n)$ dir ve $x^\alpha \widehat{\varphi(x)} = (-i)^{|\alpha|} D_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)$ eşitliğini elde edilir. Kısmi integrasyon formülü kullanılarak

$$\xi^\beta D_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = \int\limits_{R_x^n} (ix)^\alpha \xi^\beta \varphi(x) e^{i(\xi,x)} dx = \int\limits_{R_x^n} D_x^\beta((ix)^\alpha \varphi) e^{i(\xi,x)} i^{|\beta|} dx \tag{2.5}$$

elde edilir. Eğer $D_x^\beta((ix)^\alpha \varphi) \in L_1(R_x^n)$ ise her bir α ve β multi indeksi için $|\xi^\beta||D_\xi^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)|$, R_ξ^n uzayında sınırlıdır. O halde $\widehat{\varphi} \in S$ dir. (2.5) formülünde $\alpha = 0$ alınırsa

$$\widehat{D_x^\beta \varphi} = (-i)^{|\beta|} \xi^\beta \widehat{\varphi}(\xi)$$

olur. Şimdi S uzayında $\varphi \to \widehat{\varphi}$ karşılık gelen işlemin sürekliliğini gösterelim. Farz edelim ki $S(R_x^n)$ uzayında $k \to \infty$ iken $\varphi_k(x) \to 0$ 'a yakınsıyor ise $S(R_\xi^n)$ uzayında $k \to \infty$ iken $\widehat{\varphi}_k(\xi) \to 0$ 'a yakınsadığını gösterelim. (2.5) formülüne göre,

$$|\xi^\beta||D_\xi^\alpha \widehat{\varphi}_k(\xi)| = \left| \int\limits_{R_x^n} D_x^\beta(x^\alpha \varphi_k(x)) e^{i(\xi,x)} dx \right| \leq$$

$$\leq \sup_{R_x^n} \left\{ \left| D_x^\beta\left(x^\alpha \varphi_k(x)\right) \right| (1 + |x|^{n+1}) \right\} \int\limits_{R_x^n} \frac{dx}{1 + |x|^{n+1}}$$

yazılır. Eğer $S(R_x^n)$ uzayında $k \to \infty$ iken $\varphi_k(x) \to 0$ 'a yakınsıyor ise R_ξ^n uzayında $|\xi^\beta||D_\xi^\alpha \widehat{\varphi}_k(\xi)| \to 0$ 'a düzgün yakınsar. Teoremin ispatı tamamlanmıştır.

Bazen $\varphi(x)$ fonksiyonun Fourier dönüşümü $F[\varphi](\xi)$ şeklinde gösterilir. $\varphi(\xi)$ fonksiyonun Ters Fourier dönüşümü ise $F^{-1}[\varphi](x)$ şeklinde gösterilir ve

$$F^{-1}[\varphi](x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R_\xi^n} \varphi(\xi) e^{-i(\xi,x)} d\xi \ . \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2: Eğer $\varphi \in S(R_x^n)$ ise o zaman φ fonksiyonun ters fourier dönüşümü

$$\varphi(x) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R_\xi^n} \hat{\varphi}(\xi) e^{-i(\xi,x)} d\xi \tag{2.7}$$

veya

$$\varphi(x) = F^{-1}\big[F[\varphi]\big] \tag{2.8}$$

olarak tanımlanır [1,3].

İspat: Aşağıdaki iki kat integrali hesaplanırsa

$$\int\limits_{R_\xi^n} e^{-i(\xi,x)} \left\{ \int\limits_{R_y^n} e^{i(\xi,y)} \varphi(y) dy \right\} d\xi = (2\pi)^n F^{-1}\big[F[\varphi]\big]$$

elde edilir. Bunun için aşağıdaki integrali göz önüne alalım.

$$I = \int\limits_{R_\xi^n} \left\{ \psi_\varepsilon(\xi) e^{-i(\xi,x)} \left\{ \int\limits_{R_y^n} e^{i(\xi,y)} \varphi(y) dy \right\} d\xi \right\} = \int\limits_{R_\xi^n} \psi_\varepsilon(\xi) \hat{\varphi}(\xi) e^{i(\xi,y)} d\xi \ . \tag{2.9}$$

Burada $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\psi_\varepsilon(\xi) = \psi(\varepsilon\xi)$, $\psi(\xi) \in S(R_\xi^n)$ dir. (2.9) ardışık integrale karşılık gelen iki katlı integral mutlak yakınsamaktadır, o zaman Fubini teoremine göre integraller sırasını yer değiştirmek mümkündür.

$$I = \int_{R_y^n} \left(\varphi(y) \int_{R_\xi^n} \psi_\varepsilon(\xi) e^{i(\xi, y-x)} d\xi \right) dy =$$

$$\int_{R_y^n} \varphi(y) \widehat{\psi_\varepsilon}(y - x) dy = \int_{R_\eta^n} \varphi(x + \eta) \, \widehat{\psi_\varepsilon}(\eta) d\eta \; .$$

$$\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) = \varepsilon^{-n} \widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right) \tag{2.10}$$

eşitliği kolaylıkla görülür, öyle ki

$$\widehat{\psi_\varepsilon}(\xi) = \int_{R_x^n} \psi_\varepsilon(x) e^{i(x,\xi)} dx = \int_{R_x^n} \psi(\varepsilon x) e^{i(x,\xi)} dx =$$

$$\int_{R_y^n} \psi(y) e^{i\left(y, \frac{\xi}{\varepsilon}\right)} \varepsilon^{-n} dy = \varepsilon^{-n} \widehat{\psi}\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)$$

dır.

$$I = \int_{R_\eta^n} \varphi(x + \eta) \varepsilon^{-n} \, \widehat{\psi}\left(\frac{\eta}{\varepsilon}\right) d\eta = \int_{R_s^n} \widehat{\psi}(s) \varphi(\varepsilon s + x) ds$$

yazılabilir. Böylece aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$I = \int_{R_\xi^n} \psi_\varepsilon(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi = \int_{R_s^n} \widehat{\psi}(s) \varphi(\varepsilon s + x) ds \tag{2.11}$$

integralde $\varepsilon \to 0$ iken limite geçilirse

$$\varphi(x) \int_{R_s^n} \widehat{\psi}(s) ds = \psi(0) \int_{R_\xi^n} e^{-i(x,\xi)} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi \tag{2.12}$$

olur.

Örnek olarak $\psi(x) = e^{-|x|^2}$ ise

$$\widehat{\psi}(\xi) = \int_{R_x^n} e^{-|x|^2} e^{i(x,\xi)} dx = (\sqrt{\pi})^n e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} \tag{2.13}$$

olduğunu gösterelim.

$$\widehat{\psi}(\xi) = \int_{R_x^n} e^{-|x|^2} e^{i(x,\xi)} dx = \prod_{j=1}^{n} \int_{R_{x_j}^1} e^{-x_j^2} e^{ix_j\xi_j} dx_j \,,$$

integrali hesaplanırsa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2+is\xi_j} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(s-\frac{i\xi_j}{2}\right)^2-\left(\frac{\xi_j}{2}\right)^2} ds = e^{-\frac{|\xi_j|^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(s-\frac{i\xi_j}{2}\right)^2} ds$$

olur. e^{-z^2} fonksiyonu z' ye göre analitik fonksiyonu olduğundan Cauchy teoremine göre,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(s-\frac{i\xi_j}{2}\right)^2} ds = \lim_{N\to\infty}\left[\int_{-N}^{N} e^{-s^2} ds + \int_{0}^{\frac{\xi_j}{2}} e^{-(N-i\gamma)^2} d\gamma - \int_{0}^{\frac{\xi_j}{2}} e^{-(-N-i\gamma)^2} d\gamma\right]$$

yazılabilir. $N \to \infty$ iken son iki integral sıfıra yakınsar. Çünkü,

$$\left|\int_{0}^{\frac{\xi_j}{2}} e^{-N^2+2Ni\gamma+\gamma^2} d\gamma\right| \leq e^{-N^2}\left|\int_{0}^{\frac{\xi_j}{2}} e^{\gamma^2} d\gamma\right| = C_1 . e^{-N^2}$$

dir. Burada C_1, N 'den bağımsız bir pozitif sabittir.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ts^2} ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{t}}$$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(s-\frac{i\xi_j}{2}\right)^2} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$$

dir. Yukarıdaki denklemler dikkate alınırsa

$$\prod_{j=1}^{n} \int_{R^1_{\xi_j}} e^{-x_j^2} e^{ix_j\xi_j} dx_j = \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{|\xi_j|^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds = \prod_{j=1}^{n} e^{-\frac{|\xi_j|^2}{4}} \sqrt{\pi} = \left(\sqrt{\pi}\right)^n e^{-\frac{|\xi|^2}{4}}$$

olur. Böylece

$$\int_{R^n_\xi} \widehat{\psi}(\xi) d\xi = \left(\sqrt{\pi}\right)^n \int_{R^n_\xi} e^{-\frac{|\xi|^2}{4}} d\xi = \left(\sqrt{\pi}\right)^n \prod_{j=1}^{n} \int_{R^1_{\xi_j}} e^{-\frac{|\xi_j|^2}{4}} d\xi_j = (2\pi)^n \tag{2.14}$$

elde edilir. Sonuç olarak (2.12) eşitliğinden teorem ispatlanmıştır.

$\varphi(x) \in S$ ve $\psi(x) \in S$ fonksiyonların $\varphi * \psi$ konvolüsyonu S uzayındandır.

$$\varphi * \psi = \int_{R^n_y} \varphi(y)\psi(x-y) dy\,, \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanır. Gerçekten, (2.15) eşitliğinde $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları S uzayından olduğu için $\varphi * \psi \in C^\infty(R^n_x)$ dir ve konvolüsyonun türevi alınırsa

$$D^\alpha_x(\varphi * \psi) = \int_{R^n_y} \varphi(y) D^\alpha_x \psi(x-y) dy$$

olur. Her bir $\varphi \in S(R^n_x)$ ve $\psi \in S(R^n_x)$ için devam edilirse

$$\left|x^{\beta}D_x^{\alpha}(\varphi * \psi)\right| = \left|\int_{R_y^n} \varphi(y)[(x-y)+y]^{\beta}D_x^{\alpha}\psi(x-y)dy\right| \leq C_{\alpha,\beta} = \text{sabit}.$$

Böylece $\varphi * \psi \in S$ olduğu görülmektedir.

NOT 2.2: $\overline{\alpha}$, α sayısının kompleks eşleniği olarak gösterilir.

Teorem 2.3: Eğer $\varphi(x) \in S(R_x^n)$ ve $\psi(x) \in S(R_x^n)$ ise aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

1) $$\int_{R_x^n} \hat{\varphi}\psi dx = \int_{R_y^n} \varphi\hat{\psi}dy \,, \qquad (2.16)$$

2) $$\int_{R_y^n} \varphi\overline{\psi}dy$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{R_x^n} \hat{\varphi}\overline{\hat{\psi}}dx, \text{ (parseval eşitliği)} \qquad (2.17)$$

3) $$\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\hat{\psi} \,, \qquad (2.18)$$

4) $$\widehat{\varphi\psi} = (2\pi)^{-n}\ \hat{\varphi} * \hat{\psi} \,. \qquad (2.19)$$

İspat: Önce birinci eşitliği ispatlayalım. Fubini teoremine göre integrallerin sırası yer değiştirilebilir. Dolayısıyla,

$$\int_{R_x^n} \hat{\varphi}(x)\psi(x)dx = \int_{R_x^n}\left(\int_{R_y^n} \varphi(y)e^{i(x,y)}dy\right)\psi(x)dx =$$

$$\int_{R_y^n}\left(\varphi(y)\int_{R_x^n} \psi(x)\, e^{i(x,y)}dx\right)dy = \int_{R_y^n} \varphi(y)\hat{\psi}(y)dy$$

elde edilir.

İkinci eşitliği ispatlarken, (2.16) eşitliğinde ψ fonksiyonu yerine $h = (2\pi)^{-n}\overline{\widehat{\psi}}$ yazılırsa,

$$(2\pi)^{-n} \int\limits_{R_x^n} \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}}dx = \int\limits_{R_y^n} \varphi\widehat{h}dy$$

bulunur. Fourier dönüşümü kullanılarak

$$\widehat{h}(y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{R_\xi^n} \overline{\widehat{\psi}}(\xi)e^{i(y,\xi)}\,d\xi = (2\pi)^{-n} \overline{\int\limits_{R_\xi^n} \widehat{\psi}(\xi)\,e^{-i(y,\xi)}d\xi} = \overline{\psi}(y)$$

dir. Böylece (2.17) eşitliği ispatlanmış olur.

Şimdi de üçüncü eşitliği ispatlayalım. Benzer şekilde Fubini teoremine göre,

$$\widehat{\varphi * \psi} = \int\limits_{R_x^n} \left(\int\limits_{R_y^n} \varphi(y)\psi(x-y)dy \right) e^{i(x,\xi)}dx =$$

$$= \int\limits_{R_y^n} \varphi(y)\,e^{i(y,\xi)} \left(\int\limits_{R_x^n} \psi(x-y)e^{i(x-y,\xi)}dx \right) dy = \widehat{\varphi}.\widehat{\psi}$$

olur.

(2.19) eşitliğin ispatı için,

$$F\big[F[\varphi]\big] = (2\pi)^n\varphi(-x) \tag{2.20}$$

dikkate alınarak

$$F\big[F[\varphi\psi]\big] = (2\pi)^n\varphi(-x)\psi(-x) \tag{2.21}$$

yazılabilir. (2.18) formülüne göre

$$F\left[(2\pi)^{-n}(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})\right] = (2\pi)^{-n}F\left[F[\varphi]\right].F\left[F[\psi]\right] = (2\pi)^{n}\varphi(-x)\psi(-x) \qquad (2.22)$$

elde edilir. (2.21) ve (2.22) eşitlikleri

$$F\left[\widehat{\varphi\psi}\right] = F\left[(2\pi)^{-n}\widehat{\varphi} * \widehat{\psi}\right]$$

olduğunu gösterir. Böylece (2.19) eşitliği ispatlanmış olur.

Şimdi $u \in S'$ genelleşmiş fonksiyonları için Fourier dönüşümleri tanımlayalım, bu tanım (2.16) eşitliğine dayanır. Eşitlikler her bir $\varphi(x) \in L_1(R_x^n)$ ve $\psi(x) \in L_1(R_x^n)$ fonksiyonlar için geçerlidir [5].

2.2. GENELLEŞMİŞ FONKSİYONLARIN FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

$u \in S'(R_x^n)$ fonksiyonun Fourier dönüşüm fonksiyonu $\hat{u}$, $S'(R_x^n)$ uzayından olup her bir $\varphi \in S(R_x^n)$ için

$$\langle \hat{u}, \varphi \rangle = \langle u, \widehat{\varphi} \rangle \qquad (2.23)$$

eşitliğini sağlar. Öyle ki $\varphi \to \widehat{\varphi}$ fourier dönüşümüne karşılık gelen işlem S uzayında sürekli olduğundan (2.23) eşitliğin sağ tarafı S' uzayında bir genelleşmiş fonksiyonu tanımlar. Eğer $u \in S(R_x^n)$ ise (2.23) şeklinde tanımlanan Fourier dönüşümü (2.16) eşitliğine göre (2.2) tanımıyla örtüşür [2].

Teorem 2.4: S' uzayından olan genelleşmiş fonksiyonlarda Ters Fourier dönüşümü için

$$u(-x) = (2\pi)^{-n}\widehat{\hat{u}} \qquad (2.24)$$

veya

$$\langle u, \varphi(-x) \rangle = (2\pi)^{-n}\langle \hat{u}, \widehat{\varphi} \rangle = (2\pi)^{-n}\langle u, \widehat{\widehat{\varphi}} \rangle \qquad (2.25)$$

şeklinde verilen formüller doğru olup $u \to \hat{u}$ Fourier dönüşümüne karşılık gelen işlem S' uzayında süreklidir.

İspat: Gerçekten, (2.20) formülü kullanılarak aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$\langle (2\pi)^{-n}\hat{\hat{u}}\ , \varphi\rangle = (2\pi)^{-n}\langle \hat{u}, \hat{\varphi}\rangle = (2\pi)^{-n}\langle u, \hat{\hat{\varphi}}\ \rangle = \langle u, \varphi(-x)\rangle\,.$$

Eğer S' uzayında $u_k \to u$ 'ya yakınsıyor ise o zaman S' uzayında $\widehat{u_k} \to \hat{u}$ 'ya yakınsıyor, bu doğal olarak (2.23) tanımdan elde edilir.

2.3. DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN GENELLEŞMİŞ ÇÖZÜMÜ

Genelleşmiş fonksiyonlar teorisi katsayıları sonsuz mertebeden diferansiyellenebilir lineer kısmi diferansiyel denklemlerin genelleşmiş çözümlerin bulunmasına imkan sağlar. Çözümü $a_\alpha(x) \in C^\infty(\Omega)$, $f \in D'(\Omega)$için

$$L(u) \equiv \sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x) \tag{2.26}$$

şeklinde arayalım.

Tanım 2.2 (Genelleşmiş Çözüm):

$$\sum_{|\alpha|\le m} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

denklemi her bir $\varphi \in D(\Omega)$ için

$$\langle L(u), \varphi\rangle = \langle u, \sum_{|\alpha|\le m} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (a_\alpha \varphi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle \tag{2.27}$$

eşitliğini sağlarsa $u \in D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonuna Ω bölgesinde $L(u) = f$ denkleminin genelleşmiş çözümü denir.

Kısmi diferansiyel denklemler teorisinde temel (fundamental) çözümün önemli bir rolü vardır.

Tanım 2.3 (Temel çözüm): Her bir $x^0 \in \Omega$ için

$$L(u) = \delta(x - x^0) \tag{2.28}$$

eşitliğini sağlayan $u(x, x^0) \in D'(\Omega)$ genelleşmiş fonksiyonuna $L(u) = 0$ denkleminin temel çözümü denir.

Homojen olmayan denklemin temel çözümü, $L(u) = 0$ homojen denklemin temel çözümünden farkı bir sabittir. Burada $\delta(x - x^0)$ genelleşmiş fonksiyonu δ Dirac delta fonksiyonun x^0 noktasına ötelemesidir ve bu fonksiyon her bir $\varphi \in D(\Omega)$ için

$$\langle \delta(x - x^0), \varphi(x) \rangle = \varphi(x^0) \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanır.

2.4. $\mathbf{H^k(\Omega)}$ UZAYI

$H^k(\Omega)$ fonksiyonlar uzayı $C^\infty(\overline{\Omega})$ lineer fonksiyonlar sınıfının aşağıdaki norma göre kapanışından oluşan uzaydır;

$$\|u\|_{H^k(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega \sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} . \tag{2.30}$$

$C^\infty(\overline{\Omega})$ uzayından olan fonksiyonlar sınıfı bir lineer uzay teşkil eder. Bu uzayda skaler çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(u, v) = \int\limits_\Omega uv dx , \qquad \|u\|^2 = \int\limits_\Omega u^2 \, dx. \tag{2.31}$$

$C^{\infty}(\bar{\Omega})$ fonksiyonlar sınıfının yukarıdaki norma göre kapanışından oluşan uzay $L_2(\Omega)$ uzayıdır.

$H^1(\Omega)$ uzayında $u \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ için aşağıdaki gibi iç çarpımı tanımlayalım;

$$[u, v]_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} uv dx + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx \, . \tag{2.32}$$

Bu iç çarpıma uygun olarak normu da, her bir $u \in C_0^{\infty}(\Omega) \subset C^{\infty}(\bar{\Omega})$ için

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} u^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx \tag{2.33}$$

olur.

Uygun olarak $\overset{o}{H}{}^1(\Omega)$ lineer uzayı da $C_0^{\infty}(\Omega)$ fonksiyonlar sınıfının $H^1(\Omega)$ uzayının normuna göre kapanışından oluşan uzaydır. Doğal olarak $\overset{o}{H}{}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

$C^1(\bar{\Omega})$ fonksiyonlar sınıfından ve $\partial\Omega$ sınırında $u = 0$ olan fonksiyonlar için geçerli olan

$$\|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx$$

Friedrich eşitsizliği, aynı zamanda $\overset{o}{H}{}^1(\Omega)$ uzayından olan fonksiyonlar için de geçerlidir.

$u_n \in C_0^{\infty}(\Omega)$ vardır ki $H^1(\Omega)$ uzayın normuna göre $\{u_n\}$ dizisi $n \to \infty$ iken $u_n \to u$ ya yakınsar. Bu eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limite geçilirse

$$\|u_n\|^2_{L_2(\Omega)} \leq C \int_\Omega \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx$$

Friedrich eşitsizliğinin, $\overset{o}{H}{}^1(\Omega)$ sınıfından olan fonksiyonlar için de geçerli olduğu elde edilir [4].

KAYNAKLAR

[1] Gelfand, I.M., ve Şilov, D.E., "Genelleşmiş Fonksiyonlar ve Üzerine İşlemler", ***Fizmatgiz Yayınevi***, Moskova, 1-439 (1958).

[2] Kolmogorov, A.H., ve Fomin, S.V., "Fonksiyonlar Teorisinin Kavramları ve Fonksiyonlar Analizi", ***Nauka Yayınevi***, Moskova, 1-624 (1989).

[3] Vladimirov, B.S., "Matematiksel Fizikte Genelleşmiş Fonksiyonlar", ***Nauka Yayınevi,*** Moskova, 1-320 (1979).

[4] Mikhailov, P.V., "Kısmi Diferansiyel Denklemler", ***Mir Yayınevi***, Moskova, 0-396 (1978).

[5] Oleynik, O.A., "Moskova Üniversitesinde Okutulan Kısmi Diferansiyel Denklemler Teorisi Dersinin Notları", ***Moskova Devlet Üniversitesi Binom Yayınevi***, Moskova, 21-42 (2007).

[6] Sobolev, S.L., "Fonksiyonel Analizin Kısmi Diferansiyel Denklemler Teorisine Bazı Uygulamaları", ***Nauka Yayınevi***, Moskova, 1-336 (1998).

[7] Yıldız, M., "$Lu = x\Delta u + ku_x = xf(x, y)$ Eliptik denklemi için genelleştirilmiş fonksiyon sınıflarında bazı problemler", Doktora Tezi, ***Ankara Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı***, Ankara, 24-27 (1995).

ÖZGEÇMİŞ

Nagihan GİRGİN 1989 yılında Zonguldak'ta doğdu; ilk ve orta öğrenimini Zonguldak'ın Çaycuma ilçesinde tamamladı. Çaycuma Lisesi Fen Bilimleri Bölümü'nden mezun oldu. 2005 yılında Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenime başlayıp 2009 yılında iyi derece ile mezun oldu. 2011 yılında pedagojik formasyon belgesini aldıktan sonra 2012 yılında Van Erçek Çok Programlı Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. Bir süre çalıştıktan sonra Çaycuma Çok Programlı Anadolu Lisesine tayin oldu. 2012 yılında Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda başlamış olduğu yüksek lisans programını, Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı'nda sürdürmektedir. Halen tayin olduğu Çaycuma Çok Programlı Anadolu Lisesinde öğretmenlik görevine devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Pehlivanlar Mah. Çaycuma Çok Programlı Anadolu Lisesi
Çaycuma / ZONGULDAK

Tel : 0(542) 436 69 46

E-posta : nagihangrgn@gmail.com