CEBİRSEL YAPILARIN KESİŞİM ÇİZGELERİYLE GÖSTERİLİŞİ ÜZERİNE

2016
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

Sema KOŞAR SÜRÜL

CEBİRSEL YAPILARIN KESİŞİM ÇİZGELERİYLE GÖSTERİLİŞİ ÜZERİNE

Sema KOŞAR SÜRÜL

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

KARABÜK
Ocak 2016

Sema KOŞAR SÜRÜL tarafından hazırlanan "CEBİRSEL YAPILARIN KESİŞİM ÇİZGELERİYLE GÖSTERİLİŞİ ÜZERİNE" başlıklı bu tezinYüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliğiile MatematikAnabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir. ../.. / 2016

<u>Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)</u>	<u>İmzası</u>
Başkan : Doç. Dr. Tahire ÖZEN ÖZTÜRK(İBÜ)	....
Üye : Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ(KBÜ)	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Tufan TURACI (KBÜ)	....

..../..../2016

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nevin AYTEMİZ ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Sema KOŞAR SÜRÜL

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CEBİRSEL YAPILARIN KESİŞİM ÇİZGELERİYLE GÖSTERİLİŞİ ÜZERİNE

Sema KOŞAR SÜRÜL

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı
Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ
Nisan 2016, 78 sayfa

R değişmeli olması gerekli olmayan birimli bir halka ve V bir sol R-modül olsun. V'nin öz altmodüllerini tepe kabul eden ve kesişimleri sıfırdan farklı öz altmodülleri bir ayrıtla birleştiren çizgeye *kesişim çizgesi (intersection graph)* denir ve $G(V)$ ile gösterilir. Bu tezin genel amacı; $G(V)$ çizgesini bazı durumlar için çizge kuramında inceleyip, R-modül V'nin modül kuramındaki özellikleriyle ilişkilendirmeyi yapmaktır.

İlk bölümde; çizge ve cebir kuramları ile ilgili genel kavram ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde; modülün kesişim çizgelerinin bağlantılı olma koşulları incelenmiştir.

Üçüncü bölümde; bir modülün çevre içerdiği ve içermediği durumlarda ne gibi cebirsel özelliklere sahip olduğu incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; klik sayısı ve bazı sonluluk durumları incelenmiştir. Ve kesişim çizgesi tam çizge olan modüller karekterize edilmiştir.

Beşinci bölümde; bir modülün kesişim çizgesinin baskınlık sayıları ile ilgili durumlar incelenmiştir.

Altıncı bölümde; modülün kesişim çizgesinin boyama sayısı ile cebirsel özellikleri arasında ilişkilendirme yapılmıştır, ve Z_n'nin boyama sayısı karakterize edilmiştir.

Anahtar Sözcükler : Kesişim çizgesi, modül, baskınlık sayısı, kromatik sayısı, klik sayısı, boyama sayısı.

Bilim Kodu : 204.1.138

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON ALGEBRAIC STRUCTURES DENOTED BY INTERSECTION GRAPH

Sema KOŞAR SÜRÜL

Karabük University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assoc. Prof. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ

April 2016, 78 pages

Let R be a unital ring which is not necessarily commutative and M be a unitary left R-module. The intersection graph of a module assumes the proper submodules of a module as vertices and providing that the intersection of these vertices is non-trival, they are connected with an edge and is denoted by G(M). In this thesis, the main aim is to study the connection between the algebraic properties of a module and the graph theoretic properties of the graph associated to it.

In the first part, general definitions and theorems about graph and algebraic theory were given.

In the second part, the condition of connectedness of intersection graph of module was analyzed.

In the third part, the existence of cycles in G(M) was examined.

In the fourth part, clique number and connectedness conditions of $G(M)$ were examined. And it was characterized modules whose intersection graphs are complete.

In the fifth part, it was examined conditions about domination number of ıntersection graph of a module.

In the sixth part, chromatic number of intersection graph of a module was associated with algebraic properties of module mentioned. And it was characterized chromatic number of Z_n.

Key Words : Intersection graph, submodule, domination number, chromatic number, clique number.

Science Code : 204.1.138

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasında, araştırılmasında, yürütülmesinde ve oluşumunda ilgi ve desteğini esirgemeyen, engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, yönlendirme ve bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel temeller ışığında şekillendiren sayın hocam Doç. Dr. Nil ORHAN ERTAŞ'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca bir çok fedakarlık gösteren sevgili eşim Uğur SÜRÜL'e çok teşekkür ederim.

Hayatım boyunca maddi manevi hiçbir yardımı esirgemeden yanımda olan annem Hatice KOŞAR ve babam Nevzat KOŞAR'a sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

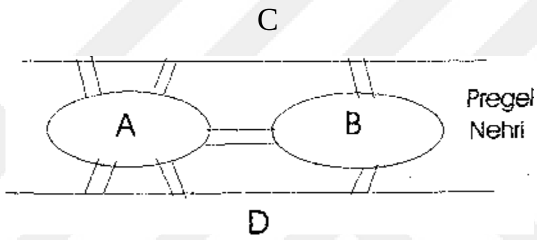
SİMGELER

$E(G)$	: G çizgesinin ayrıt kümesi
$\|G\|$	: G çizgesindeki tepe sayısı
$V(G)$	: G çizgesinin tepe kümesi
$d(x,y)$	: x ve y tepeleri arasındaki uzaklık
$d(v)$	: v tepesinin derecesi
$diam(G)$	: G çizgesinin çapı
$\alpha(G)$	: G çizgesinin bağımsızlık sayısı
$\gamma(G)$	: G çizgesinin baskınlık sayısı
$\chi(G)$	: G çizgesinin kromatik sayısı
$girth(G)$	: G çizgesinin çevre ölçüsü
$\omega(G)$	: G çizgesinin klik sayısı
K_n	: n tepeli tam çizge
C_n	: n tepeli çevre çizge
P_n	: n tepeli yol çizge
$K_{1,n-1}$	: n tepeli ağaç çizge
S_M	: M modülünün alt modülleri ailesi
$End(S)$	: S değişmeli grubunun bütün endomorfizmalarının kümesi
$\leq_{max}$	: Maksimal altmodül
$\leq_d$	: Dik toplam şeklinde yazılabilen altmodül
$\leq_e$	: Esas genişleme
$Rad(M)$	: M'nin maksimal altmodüllerin kesişimi
$Soc(M)$	: M'nin basit altmodüllerinin toplamı
$\ll$	: Atık modül

BÖLÜM 1

GİRİŞ

(G. Bacak ve T.Beşeri, 2002) Königsberg kentinde Eski ve Yeni Pregel nehirleri birleşerek Pregel (Pregolya) nehrini oluşturmaktadır. Bu nehirler şehri 4 bölüme ayırmaktadır ve nehir üzerinde bu bölgeleri birleştiren yedi köprü bulunmaktadır.



Şekil 1.1. Königsberg'in yedi köprüsü .

Kasabanın bir yakasından gezinti yapmak için çıkan biri tüm köprüleri sadece bir kez geçerek başladığı noktaya dönebilir mi sorusu çizge kuramının temelini oluşturmaktadır. Bu soru İsviçreli matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) tarafından olumsuz olarak cevaplandırılmıştır. Leonhard Euler, 1736 yılında, *Königsberg'in yedi köprüsü (Seven Bridges of Königsberg)* adında günümüzde de hala popülerliğini koruyan bu problem ile ilgili bir makale yazarak çizge kuramının kesin başlangıç tarihini atmıştır.

(G. Bacak ve T. Beşeri, 2002) Çizgenin önemli problemlerinden biri uzun yıllar sonra 1852 yılında, ünlü matematikçi Augustus De Morgan, Sir William R.Hamilton'a gönderdiği bir mektupta öğrencisinin, İngiltere haritasındaki şehirleri, birbirlerine komşu olanları farklı renklerde boyamak için 4 rengin yeterli olduğunu tespit ettiğini fakat bunu matematiksel olarak ispatlayamadığını yazmasıyla ortaya çıkmıştı. *4 Renk Problemi(Four-Color Map* Problem*)* olarak anılan bu problem ancak 1976 yılında K.Appel ve W.Hakken tarafından bilgisayar yardımıyla ispatlanmıştır. Bu iki problemin çözümü matematikte yeni bir çığır açmıştır. Daha sonraları Çizge Kuramı olarak bilinen bu yeni uygulama alanı birçok problemin çözümüne katkıda bulunacaktır.

Çizge Kuramı ve uygulamalarına olan ilgi son yıllarda büyük bir hızla artmıştır. Bu artışın sebebi günlük hayatta karşılaştığımız birçok soruna çizge kuramı ile çözüm bulunabilmesidir. Her bir telefonu birbirine ulaşılabilir yapmak için minimum maliyetle nasıl kablo döşenebilir? Başkentten her bir şehire en hızlı rota hangisidir? n sayıda iş n sayıda işçiyle maksimum verimlilikle nasıl doldurulabilir? Boru şebekesinde kaynaktan kanallara ünite başına maksimum akış nedir? Aynı katmandaki kabloların çakışmaması için bir bilgisayar çipi kaç katmana ihtiyaç duyar? Spor lig sezonları minimum hafta olacak şekilde nasıl planlanır? Bir gezgin seyahat süresini minimuma indirmek için hangi sıraya göre seyahat eder? Bu ve bunun gibi birçok pratik problemin çözümü çizge kuramının konusudur.

Son yıllarda, cebirsel yapıların kesişim çizgeleri yaygınca çalışılmaktadır. J. Bosak tarafından yarıgrupların çizgeleri 1964'te tanımlanmıştır. B. Csákány ve G. Pollák çalışmalarıyla sonlu bir grubun alt grubunun çizgelerini 1969'da göstermiştir. 2009'da S. Ghosh, T. K. Mukherjee ve M. K. Sen tarafından bir halkanın ideallerinin kesişim çizgesi tanımlanmış ve cebirsel yapılar araştırılmıştır. Ayrıca 2012'de S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad ve 2013'de E. Yaraneri tarafından da bir modülün kesişim çizgeleri incelenmiştir.

1.1. ÇİZGELER

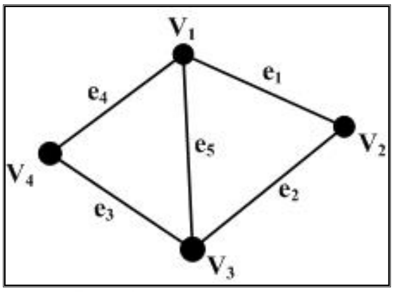
Bu bölümde çizge kuramı ile ilgili gerekli temel kavramlar verilecektir.

Tanım1.1.1.

(D. B. West, 1996) V sıfırdan farklı bir küme ve $E \subset V \times V$ olmak üzere $G = (V, E)$ ikilisine *çizge (graph)* denir. Burada V'ye G'nin *tepelerinin kümesi (set of vertices)* denir ve $V(G)$ ile gösterilir. E'ye ise G'nin *ayrıtlarının kümesi (set of edges)* denir ve $E(G)$ ile gösterilir. Ayrıca bir G çizgesinde tepelerinin sayısı $|G|$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.2.

G çizgesinde $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, tepe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ve tepe sayısı $|G| = 4$'dir.



Şekil 1.2. 4 tepeli, 5 ayrıtlı G çizgesi.

Tanım 1.1.3.

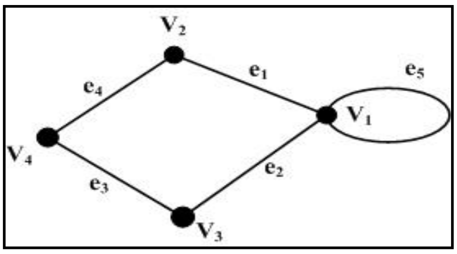
(D. B. West, 1996) G ve H birer çizge olsun. $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$ ise H çizgesine *G 'nin altçizgesi (subgraph)* denir ve $H \subseteq G$ şeklinde yazılır.

Tanım 1.1.4.

(D. B. West, 1996) Uç noktaları aynı olan ayrıta *bukle (loop)* denir.

Örnek 1.1.5.

Şekil 1.3, ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, tepe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ olan çizge örneğidir. Bu çizgede e_5 ayrıtı bukle ayrıttır.



Şekil 1.3. 4 tepeli, 5 ayrıtlı G çizgesi.

<u>Tanım 1.1.6.</u>

(D. B. West, 1996) Bukle ayrıt içermeyen çizgeye *basit çizge (simple graph)* denir. Basit çizgede bir e ayrıtının uç noktaları u ve v ise $e = uv$ ya da $e = vu$ şeklinde yazılır.

<u>Örnek 1.1.7.</u>

Şekil 1.3'deki çizge bukle ayrıt içerdiğinden basit çizge değildir.

<u>Örnek 1.1.8.</u>

Şekil 1.2'deki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ve tepe kümesi $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4\}$ olarak ifade edilen basit çizge örneğinin ayrıt kümesi $\{v_1 v_2, v_2 v_3, v_3 v_4 , v_4 v_1, v_1 v_3\}$ olarak da ifade edilebilir.

<u>Tanım 1.1.9.</u>

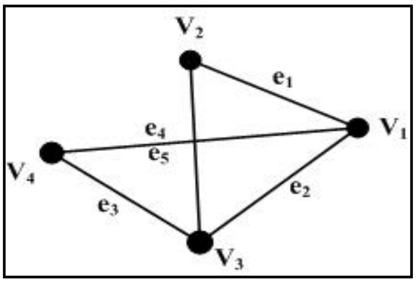
(D. B. West, 1996) Ayrıt kümesi ve tepe kümesi boş olan çizgeye *boş çizge (null graph)* denir.

<u>Tanım 1.1.10.</u>

(D. B. West, 1996) G çizgesinde bir v tepesinin bitişik olduğu ayrıt sayısına v *tepesinin derecesi (degree of v)* denir ve $d(v)$ ile gösterilir.

<u>Örnek 1.1.11.</u>

Şekil 1.4 ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ ve tepe kümesi $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4\}$ olan G çizgesi örneğidir. $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 2$, $d(v_3) = 3$ ve $d(v_4) = 2$'dir.



Şekil 1.4. 4 tepeli, 4 ayrıtlı G çizgesi.

Tanım 1.1.12.

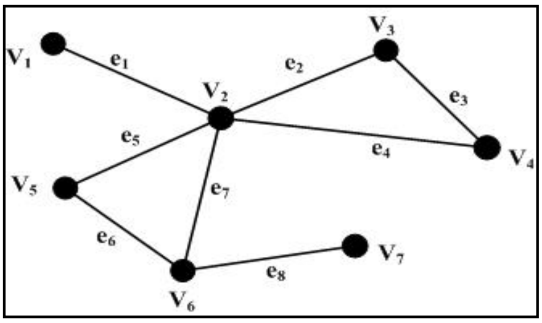
(D. B. West, 1996) Derecesi 0 olan tepeye *izole tepe (isolated vertex)* denir.

Tanım 1.1.13.

(D. B. West, 1996) Bir tepeden diğerine gidilirken izlenecek ayrıtların tamamına *bir yol(path)* denir.

Örnek 1.1.14.

Şekil 1.5'deki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ ve tepe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ olan G çizgesinde $(v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4)$ dizisi v_1 tepesinden v_4 tepesine uzunluğu üç olan bir yoldur.



Şekil 1.5. 7 tepeli, 8 ayrıtlı G çizgesi.

Tanım 1.1.15.

(D. B. West, 1996) G çizgesinin farklı iki tepesi x ve y arasında x'de başlayıp y'de biten yolların en kısasına *x ve y arasındaki uzaklık (distance between x and y)* denir ve $\mathrm{d(x, y)}$ ile gösterilir. Bu uzaklıklardan en büyüğüne *G çizgesinin çapı (diamater)* denir ve $diam(G)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.16.

Şekil 1.2'deki G çizgesinde $d(v_1, v_2) = 1$, $d(v_1, v_4) = 1$, $d(v_2, v_3) = 1$, $d(v_2, v_4) = 2$, $d(v_3, v_4) = 1$ olup $diam(G) = 2$'dir.

Tanım1.1.17.

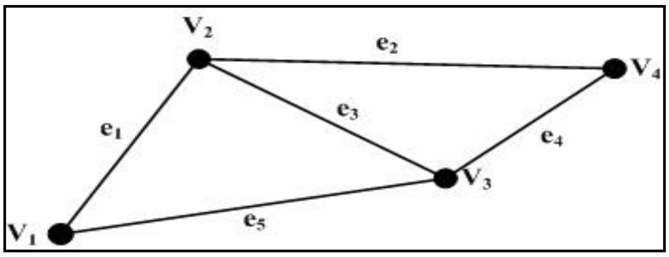
(D. B. West, 1996) Başlangıç ve bitiş tepeleri aynı olan yola *çevre(cyle)* denir.

Tanım 1.1.18.

(D. B. West, 1996) G bir çizge ve G çizgesindeki çevrelerin ayrıt sayılarından en küçüğüne *G'nin çevre ölçüsü(girth)* denir ve $girth(G)$ ile gösterilir. Çevreye sahip olmayan bir çizgenin çevre ölçüsü sonsuzdur.

Örnek 1.1.19

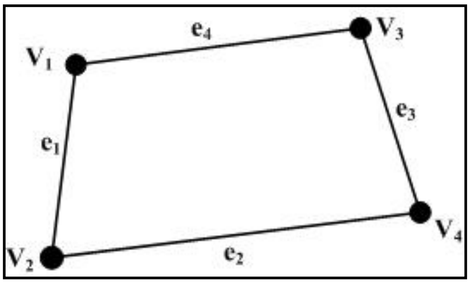
Şekil 1.6'daki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, tepe kümesi $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4\}$ olan G çizgesinde $girth(G(V)) = 3$'tür.



Şekil 1.6. 4 tepeli, 5 ayrıtlı G çizgesi.

Örnek 1.1.20.

Şekil 1.7'deki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, tepe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ olan G çizgesinde $girth(G(V)) = 4$'tür.



Şekil 1.7. 4 tepeli, 4 ayrıtlı G çizgesi.

Tanım 1.1.21.

(D. B. West, 1996) Bir çizgede herhangi iki tepe arasında en az bir yol varsa çizgeye *bağlantılı (connected)*, aksi halde *bağlantısızdır (not connected)* denir.

Tanım 1.1.22.

(D. B. West, 1996) G çizgesinin $V(G)$ tepe kümesi $V(G_1)$ ve $V(G_2)$ olacak şekilde bağımsız iki kümenin parçalanışı olarak yazılabiliyorsa çizgeye *iki parçalı çizge (bipartite graph)* denir.

$|V(G_1)| = m$, $|V(G_2)| = n$ olsun. G çizgesinde aşağıdaki özellikler vardır.

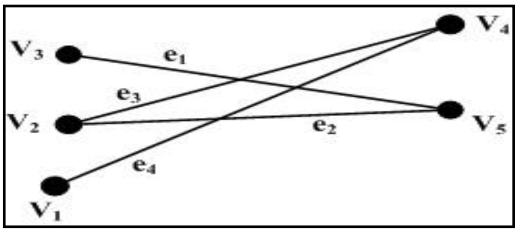
(i) $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$

(ii) $V(G)| = m + n$

(iii) $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$.

Örnek 1.1.23.

Şekil 1.8'deki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$,tepe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ olan iki parçalı G çizgesinde,



Şekil 1.8. 5 tepeli, 4 ayrıtlı G çizgesi.

(i) $V(G_1) = \{ v_1, v_2, v_3\}, V(G_1) = \{v_4, v_5\}$

(ii) $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$

(iii) $|V(G_1)| = 3,\ |V(G_2)| = 2$

(iv) $|V(G)| = 5$

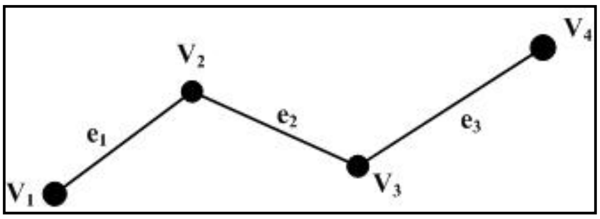
(v) $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$

Tanım 1.1.24.

(D. B. West, 1996) Komşu tepelerin ardışık sıralanmasıyla oluşan basit çizgeye *yol çizge (path graph)* denir ve n tepe sayısı olmak üzere P_n ile gösterilir.

Örnek 1.1.25.

Şekil 1.9'daki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$, tepe kümesi $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4\}$ olan G çizgesi yol çizgedir.



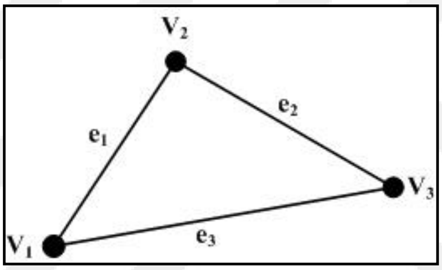
Şekil 1.9. 4 tepeli, 3 ayrıtlı G çizgesi.

Tanım 1.1.26.

(D. B. West, 1996) Başlangıç ve bitiş tepeleri aynı olan çizgeye *çevre çizge (cycle graph)* denir. $n \geq 3$ olmak üzere n adet tepe ve $\{v_1, v_2\}$, $\{v_2, v_3\}$, ..., $\{v_{n-1}, v_n\}$ $\{v_n, v_1\}$ tepe çiftlerinden oluşan ayrıtlardan meydana gelen çevre çizge C_n ile gösterilir. Çevre çizgenin ayrıt sayısı ve tepe sayısı eşittir.

Örnek 1.1.27.

Şekil 1.10'daki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$ tepe kümesi $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3\}$ olan G çizgesi çevre çizgedir ve C_3 ile gösterilir.



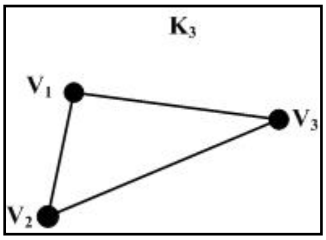
Şekil 1.10. 3 tepeli, 3 ayrıtlı G çizgesi.

Tanım 1.1.28.

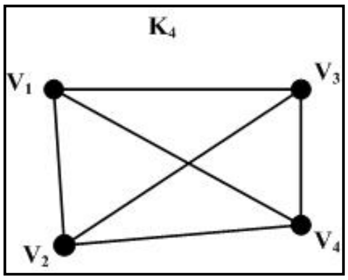
(D. B. West, 1996) Farklı tepe çiftlerinin tümü bir ayrıt ile bağlı olan basit çizgeye *tam çizge (complete graph)* denir ve n tepe sayısı olmak üzere K_n ile gösterilir.

Örnek 1.1.29.

Şekil 1.11, tepe kümesi $V_1(G) = \{ v_1, v_2, v_3\}$ olan üç tepeli ve Şekil 1.12, tepe kümesi $V_2(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4\}$ olan dört tepeli tam çizge örneğidir.



Şekil 1.11. 3 tepeli, 3 ayrıtlı G çizgesi.



Şekil 1.12. 4 tepeli, 4 ayrıtlı G çizgesi.

<u>*Tanım 1.1.30.*</u>

(F. Buckley ve F. Harary, 1990) $r \in Z^+$ olmak üzere bir G çizgesinde, herhangi bir $v \in V(G)$ için $d(v) = r$ ise G çizgesine *r-düzenli çizge (r-regular graph)* denir.

<u>*Tanım 1.1.31.*</u>

(D. B. West, 1996) G çizgesinin en büyük tam alt çizgesinin tepe sayısına *klik sayısı (clique number)* denir ve $\omega(G)$ ile gösterilir.

<u>*Örnek 1.1.32.*</u>

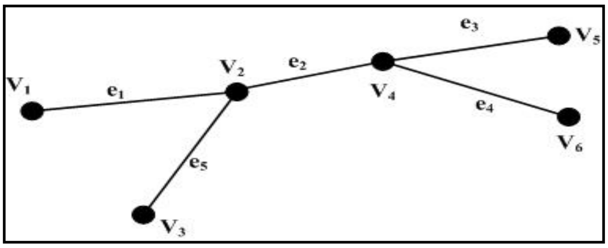
Şekil 1.12'deki G çizgesinde $\omega(G) = 4$'tür.

<u>*Tanım 1.1.33.*</u>

(D. B. West, 1996) Çevre içermeyen bağlantılı çizgeye *ağaç çizge (tree graph)* denir. Özel olarak bir tepenin diğer tepelerle birleştiği ağaç çizgeye de *yıldız çizge (star graph)* denir ve n tepeli bir yıldız çizge $K_{1,n-1}$ ile gösterilir.

<u>*Örnek 1.1.34.*</u>

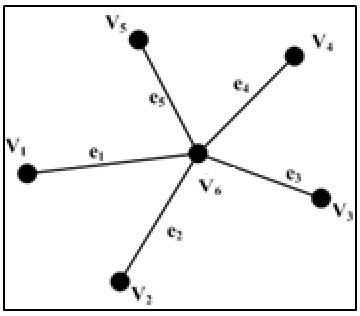
Şekil 1.13'deki, ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, tepe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ olan G çizgesi ağaç çizgedir.



Şekil 1.13. 6 tepeli, 5 ayrıtlı **G** çizgesi.

Örnek 1.1.35.

Şekil 1.14'deki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, tepe kümesi $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ olan G çizgesi yıldız çizgedir ve $K_{1,5}$ ile gösterilir.



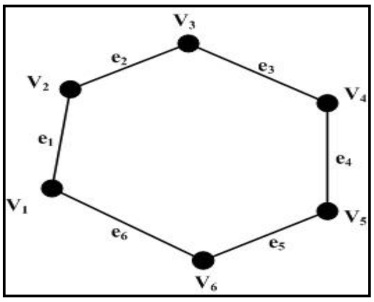
Şekil 1.14. 6 tepeli, 5 ayrıtlı **G** çizgesi.

Tanım 1.1.36.

(D. B. West, 1996) G bir çizge, tepeler kümesi $V(G)$ ve $S \subset V(G)$ olsun. S'deki hiçbir tepe çifti G çizgesinde bir ayrıt ile birleştirilmemiş ise S'ye *G'nin bağımsız kümesi (independent set of G)* denir. Bir G çizgesinin birden fazla bağımsız kümesi olabilir. Bu kümeler içersinde en çok elemana sahip kümenin eleman sayısına *G'nin bağımsızlık sayısı (independence number of G)* denir ve $\alpha(G)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.37.

Şekil 1.15'deki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$, tepe kümesi $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ olan çizgesinde;



Şekil 1.15. 6 tepeli, 6 ayrıtlı G çizgesi.

$S = \{v_3, v_5\}$ bağımsız küme,

$S = \{v_1, v_3, v_5\}$ bağımsız küme,

$S = \{v_2, v_4, v_6\}$ bağımsız kümedir ve

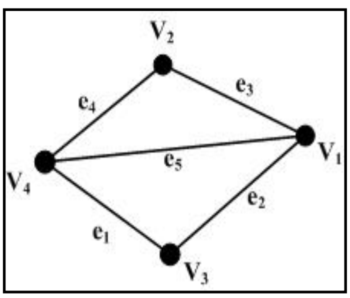
$S = \{v_1, v_2\}$, bağımsız küme değildir. $\alpha(G) = 3$'tür.

Tanım 1.1.38.

(T. W. Haynes, S. T. Hedeniemi ve P. J. Slater, 1998) $V(G)$, G çizgesinin tepeler kümesi olmak üzere $D \subseteq V(G)$ olsun. $V(G) \setminus D$ kümesindeki her tepe; D kümesindeki herhangi bir tepeye komşu ise, D kümesine *baskın küme (dominating set)* denir. G çizgesinin baskın kümeleri arasındaki en az elemana sahip kümenin eleman sayısına *baskınlık sayısı (domination number)* denir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir.

Örnek 1.1.39.

Şekil 1.16'daki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, tepe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ olan G çizgesinde;



Şekil 1.16. 4 tepeli, 5 ayrıtlı G çizgesi.

$\{v_4\}, \{v_1\}, \{v_2, v_3\}$ kümeleri baskınlık kümeleri olup $\gamma(G) = 1$'dir.

Örnek 1.1.40.

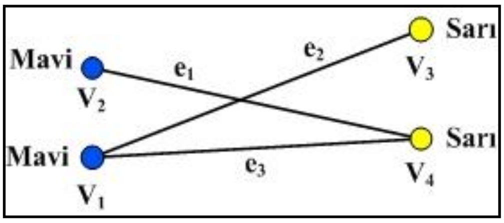
Şekil 1.15'deki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ tepe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ olan G çizgesinde, $\{v_1, v_3, v_5,\}$ ve $\{v_2, v_4, v_6\}$ kümeleri baskınlık kümeleri olup $\gamma(G) = 3$'tür.

Tanım1.1.41.

(D. B. West, 1996) İki komşu tepe aynı renkte olmayacak şekilde her tepeye bir renk vermek için yeterli olan en az renk sayısına G çizgesinin *kromatik sayısı (chromatic number of G)* denir ve $\chi(G)$ gösterilir.

Örnek 1.1.42.

Şekil 1.17'deki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3\}$, tepe kümesi $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ olan G çizgesinin,



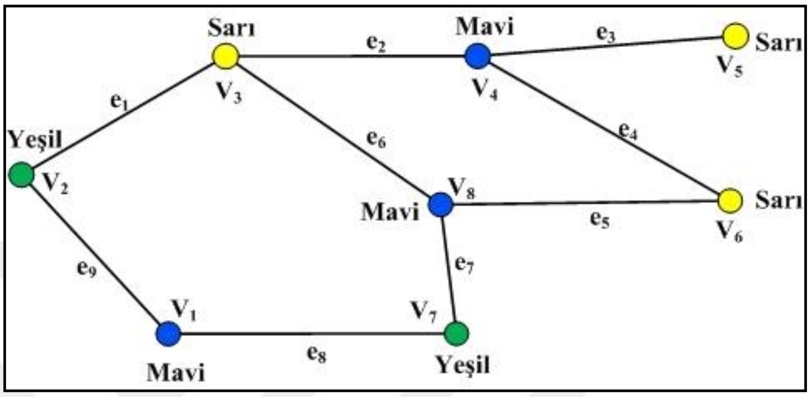
Şekil 1.17. 4 tepeli, 3 ayrıtlı G çizgesi.

4 tepesi 4 farklı renk kullanılarak komşu tepeler aynı olmayacak şekilde boyanabilir. Komşu olmayan tepelere aynı renk verilerek en az 2 renk kullanılarak G çizgesi boyanabilir.

Yani $\chi(G) = 2$'dir.

Örnek 1.1.43.

Şekil 1.18'deki ayrıt kümesi $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9\}$, tepe kümesi $V(G) = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ olan G çizgesinin kromatik sayısı $\chi(G) =$ 3'tür.



Şekil 1.18. 8 tepeli, 9 ayrıtlı G çizgesi.

1.2. HALKALAR VE MODÜLLER

Bu bölümde halka ve modül kuramı ile ilgili gerekli temel kavram ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.2.1.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) G boş olmayan bir küme G üzerinde bir $*$ ikili işlemi tanımlı olsun. Eğer

(i) $*$ işlemi birleşme özelliğini sağlarsa; yani, her $a, b, c \in G$ için $(a * b) * c = a * (b * c)$ ise ;

(ii) Her $a \in G$ için $a * e = e * a = a$ olacak biçimde $e \in G$ varsa *(e 'ye G ' nin birim elemanı* denir).

(iii) Her $a \in G$ için $a * b = b * a = e$ olacak şekilde $b \in G$ varsa *(b 'ye a 'nın bir ters elemanı* denir) o zaman $(G,*)$ sıralı ikilisine *bir grup(group)* denir.

Eğer $(G,*)$ grubunda her $a, b \in R$ için $a * b = b * a$ ise bu gruba *değişmeli* ya da *abelyan grup(abelian group)* denir.

Örnek 1.2.2.

Bilinen toplama işlemine göre Z, Q, R, C birer abelyan gruptur. Bu gruplar $(Z, +), (Q, +), (R, +), (C, +)$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.3.

Bilinen çarpma işlemine göre $Q \setminus \{0\}, R \setminus \{0\}, C \setminus \{0\}$ birer değişmeli gruptur. Fakat aynı işleme göre $Z \setminus \{0\}$ bir grup değildir, çünkü $2^{-1} \notin Z$ 'dir.

Tanım 1.2.4.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) R boş olmayan bir küme olsun. R üzerinde her $a, b \in R$ için $+ : (a, b) \to a + b$,. $: (a, b) \to a \,.\, b$ biçiminde tanımlı ve sırasıyla, toplama ve çarpma denilen " $+$ " ve "$.$" ikili işlemleri verilsin. Eğer;

(i) $(R, +)$ bir abelyan grup ise,

(ii) Çarpma işlemi üzerinde birleşme özelliğini sağlarsa; yani; her $a, b, c \in R$ için $(a \,.\, b) \,.\, c = a.(b \,.\, c)$ ise,

(iii) Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliğini sağlarsa; yani; her $a, b, c \in R$ için: $a \,.\, (b + c) = a \,.\, b + a.c$ (sol dağılma özelliği), $(a + b) \,.\, c = a \,.\, c + b.c$ (sağ dağılma özelliği) ise, $(R, +, .)$ sıralı üçlüsüne *bir halka(ring)* denir.

$(R, +, .)$ halkası verilsin. Eğer her $a, b \in R$ için $a \,.\, b = b \,.\, a$ ise halkaya *değişmeli halka(commutative ring)* denir. R'nin toplamsal birimi 0_R ile gösterilir ve buna *R'nin sıfırı* denir. Eğer her $a \in R$ için $a \,.\, 1_R = 1_R \,.\, a = a$ olacak biçimde $1_R \in R$ varsa 1_R elemanına halkanın *birim elemanı(unit element)* halkaya da *birimli halka(unital ring)* denir.

Örnek 1.2.5.

Z, Q, R ve C sayılar üzerindeki bilinen toplama ve çarpmaya göre birer birimli ve değişmeli halkadır. $(Z, +, \,.\,)$, $(Q, +, \,.\,)$, $(R, +, \,.\,)$, $(C, +, \,.\,)$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.6.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) R bir halka ve I, R'nin bir toplamsal altgrubu olsun. Eğer her $a \in I$ ve $r \in R$ için $ra \in I$ ise I'ya R'nin bir *sol ideali(left ideal)* ve her $a \in I$ ve $r \in R$ için $ar \in I$ ise I'ya R'nin bir *sağ ideali(right ideal)* denir. Eğer I hem sol ideal hem de sağ ideal ise I'ya R'nin bir *ideali(ideal)* denir.

R ve $\{0_R\}$,her R halkasının idealidir. R'nin R'den ve sıfırdan farklı her idealine R'nin bir *öz ideali(proper ideal)* denir.

Teorem 1.2.7.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) R bir halka ve $I,$ R'nin bir ideali olsun. R/I kümesi üzerinde toplama ve çarpma her $a + l, b + l \in R/I$ için $(a + l) + (b + l) = (a + b) + I$ ve $(a + I)(b + I) = ab + I$ olarak tanımlansın. O zaman R/I bir halkadır. R/I'ya *bölüm halkası (quotient ring)* denir.

Tanım 1.2.8.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) $(M, +)$ değişmeli bir grup ve R birimli bir halka olsun. M'deki elemanların, R' deki elemanlarla skaler çarpımı, $R \times M \rightarrow M$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, M'ye *sol R-modül (left R - modüle)* denir. Her $r, s \in R$ ve x, y $\in$ M için;

(i) $r.(x + y) = r.x + r.y$

(ii) $(r + s).x = r.x + s.x$

(iii) $r.(s.x) = (r.s).x$

(iv) $1_R.x = x \in M$

Örnek 1.2.9.

Her R halkasının skaler çarpımı halkadaki çarpım olarak alınırsa R bir sol R-modül olur.

Örnek 1.2.10.

Z tamsayılar kümesi ve her G toplamsal grubu için; $Z\ x\ G \rightarrow G$ skaler çarpımı $(m, g) \rightarrow m\ .\ g$ ile tanımlanırsa, G bir sol Z -modüldür.

Tanım 1.2.11.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir sol R-modül ve N, M'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun.

(i) Her $a, b \in N$ için $a - b \in N$,
(ii) Her $a \in N, r \in R$ için $ra \in N$

koşulları sağlanıyorsa N'ye, M'nin bir *altmodülü (submodule)* denir ve $N \leq M$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.12.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M sıfırdan farklı bir sol R-modül olsun. M'nin sıfır ve kendinden başka alt modülü yoksa M'ye *basit modül (simple module)* denir.

Yardımcı Teorem 1.2.13.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) Eger S basit sol R-modül ise, End(S) bölmeli halkasidir.

Tanım 1.2.14.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir R-modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$, M 'nin bir R-altmodüller ailesi olsun.

(i) $M = \sum_{i\in I} M_i$

(ii) Her $i \neq j$ için $M_i \cap (\sum_{i \neq j} M_i) = 0$ oluyorsa R-modül M'ye $\{M_i\}_{i \in I}$ ailesinin direkt toplamı denir ve $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olarak gösterilir.

<u>Tanım 1.2.15.</u>

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) Eğer M sıfırdan farklı iki alt modülünün direkt toplamı olarak yazılamıyorsa M 'ye *ayrışmaz modül(indecomposable module)* denir.

<u>Örnek 1.2.16.</u>

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) Z-modül Q, ayrışmaz bir modüldür. Çünkü $Q = N_1 \oplus N_2$ olacak şekilde iki alt modül yoktur. Gerçekten N_1 ve N_2 bu özellikte iki alt modül olsa idi , $0 \neq \frac{a}{b} \in N_1$ ve $0 \neq \frac{a'}{b'} \in N_2$ için $0 \neq ba'\frac{a}{b} = b'a\frac{a'}{b'} \in N_1 \cap N_2 = 0$ çelişkisi bulunurdu.

<u>Tanım 1.2.17.</u>

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) $(T_\alpha)_{\alpha \in A}$, M 'nin basit altmodüllerin bir ailesi olsun.

$$M = \bigoplus_{\alpha \in A} T_a$$

parçalanışı varsa M 'ye *yarıbasit modül (semisimple)* denir.

<u>Tanım 1.2.18.</u>

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir modül ve $A \leq M$ olsun. M 'nin sıfırdan farklı her K altmodülü için $A \cap K \neq 0$ ise A'ya M'nin *esas altmodülü (essential submodule)*, M 'ye A'nın *esas genişlemesi (essential extension)* denir ve $A \leq_e M$ ile gösterilir.

Sıfırdan farklı bir M modülünün her sıfırdan farklı altmodülü M'de esas ise M'ye *düzgün modül (uniform)* denir.

Önerme1.2.19.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) **M** yarıbasit altmodüldür ancak ve ancak **M**'nin esas öz altmodülü yoktur.

Önerme 1.2.20.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) $K \leq N \leq M$ ve $H \leq M$ modülleri için

(i) $K \leq_e M \Leftrightarrow K \leq_e N \; ve \; N \leq_e M$'dir.

(ii) $H \cap K \leq_e M \Leftrightarrow H \leq_e M$ ve $K \leq_e M$'dir.

Yardımcı Teorem 1.2.21.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) $K \leq M$ olmak üzere $K \leq_e M$'dir ancak ve ancak her $0 \neq x \in M$ için $r \in R$ vardır öyle ki $0 \neq xr \in K$'dır.

Sonuç 1.2.22.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) $f : L \to M$ bir esas monomorfizmadır ancak ve ancak bütün uygun h homomorfizmaları için $h\,f$ birebir ise h birebirdir.

Tanım 1.2.23.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir sol R-modül ve $N \leq M$ olsun. Eğer $L \leq M$ için $M = N + L$ iken $M = L$ ise N'ye M'nin *atık modülü* (*small submodüle*) denir ve $N \ll M$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.24.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) $K_1 \leq M_1 \leq M, K_2 \leq M_2 \leq M$ ve $M = M_1 \oplus M_2$ olsun.

$K_1 \oplus K_1 \leq_e M_1 \oplus M_2 \Leftrightarrow K_1 \leq_e M_1$ ve $K_2 \leq_e M_2$ ‘dir.

Tanım 1.2.25.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir sol R-modül olsun.

$Soc(M) = \sum\{K \leq M \mid K, M'nin\ basit\ alt\ modülü\} = \cap \{L \leq M \mid L \leq_e M\}$

olarak tanımlanan $Soc(M)$ modülüne *M’nin sokulu(socle)* denir.

Önerme 1.2.26.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M ve N iki sol R -modül olsun. $f: M \to N$ bir modül homomorfizması olmak üzere, $f(Soc(M)) \leq Soc(N)$ olur.

Önerme 1.2.27.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir sol R-modül ve $K \leq M$ olsun.

$Soc(K) = K \cap Soc(M)$ ve $Soc(Soc(M)) = Soc(M)$ olur.

Tanım 1.2.28.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir sol R-modül olsun. M’nin bir A öz altmodulü için A’dan farklı herhangi bir N modülü için $A \subseteq N \subseteq M$ iken N=M ya da N=A oluyorsa A’ya M’nin maksimal altmodülü (maximal submodule) denir ve $A \leq_{max} M$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.29.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) A, M'nin maksimal altmodüldür ancak ve ancak M/A basit bir modüldür.

Önerme 1.2.30.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) $N \leq_{max} M$ modülü için $N \leq_d M$ ya da $N \leq_e M$'dir.

Tanım 1.2.31.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir sol R-modül olsun.
$Rad(M) = \cap \{N \leq M \mid N\ maksimal\ bir\ altmodül\} = \sum\{K \leq M \mid K \ll M\}$
altmodülüne M modülünün *Jacobson radikali(Jacopson radical)* denir.
$M = R$ ise $Rad(M) = J(R)$ ile gösterilir.

Yardımcı Teorem 1.2.32.

(Goodearl, 1972) R bir halka olsun.
$J(R) = \{r \in R \mid \forall s \in R$ için $1 - rs$ sağ tersinir$\}$
$J(R) = \{r \in R \mid \forall s \in R$ için $1 - sr$ sol tersinir$\}$'dir.

Önerme 1.2.33.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M ve N iki sol R-modül ve $f: M \to N$ bir modül homomorfizması olsun. O zaman

$$f(Rad(M)) \leq Rad(N)$$

olur.

Önerme 1.2.34.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) $\{M_i \mid i \in I\}$ sol R-modüllerin bir ailesi olsun. O zaman $\bigoplus_{i\in I} Rad(M_i) = Rad(\bigoplus_{i\in I} M_i)$ olur.

Tanım 1.2.35.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) A bir sol R-modül olsun. A'nın $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$. altmodüllerinin zinciri varsa, her $i \geq n$ için $A_i = A_n$ olacak şekilde $n \in Z$ varsa bu zincire *artan zincir kuralı (ascending chain condition)* denir.

Tanım 1.2.36.

(T. W. Hungerford, 1974) B bir sol R-modül olsun. B'nin $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \ldots$ altmodüllerinin zinciri varsa, her $i \geq m$ için $B_i = B_m$ olacak şekilde $m \in Z$ varsa bu zincire *azalan zincir kuralı (descending chain condition)* denir.

Tanım 1.2.37.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir sol R-modül olsun. M altmodüller üzerinde artan (azalan) zincir koşulunu sağlarsa M'ye *Noether (Artin) modül (Noetherian (Artinian)* denir.

Önerme 1.2.38.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir sol R-modül olsun. Aşağıdakiler denktir:

(i) M Noether modüldür;

(ii) M'nin her altmodülü sonlu üretilmiştir;

(iii) M'nin altmodüllerinin sıfırdan farklı her kümesinin maksimal elemanı vardır.

Önerme 1.2.39.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir sol R-modül olsun. Aşağıdakiler denktir.

(i) M Artin modüldür;
(ii) M'nin altmodüllerinin sıfırdan farklı her kümesinin minimal elemanı vardır.

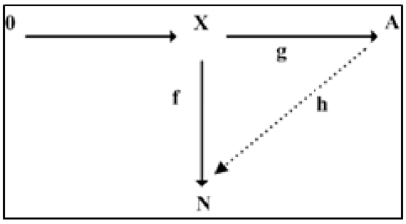
Teorem 1.2.40.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) Artin modüllerin sonlu tane maksimali vardır.

İspat:
M Artin modül olsun.
$S = \{ \bigcap_{i \in I} M_i \leq M;\ M_i \in\ _{max} M\}$ olacak şekilde bir küme ailesi tanımlansın. M Artin modül olduğundan S küme ailesinde bir minimal eleman vardır. Bu eleman I olsun.
$I = M_1 \cap M_2 \dots \cap M_n$ olacak şekilde $M_i \leq_{max} M$ vardır.
n tane maksimal altmodülden başka maksimal altmodül olmadığı gösterilecektir.
$M_{n+1} \leq_{max} M$ ve $M_{n+1} \neq M_i \quad (i = 1,2,\dots,n)$ olsun.
$M_{n+1} \cap M_1 \cap \dots \cap M_n \subseteq M_1 \cap \dots \cap M_n = I$ ve I minimum olduğundan
$M_{n+1} \cap M_1 \cap \dots \cap M_n = M_1 \cap \dots \cap M_n$'dir.
$M_1 \cap \dots \cap M_n \subseteq M_{n+1}$
$\Longrightarrow M_i \subseteq M_{n+1}$ olur.
M_i ve M_{n+1} maksimal olduğundan $M_{n+1} = M_i$ olur.

Tanım 1.2.41.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) A ve N iki R-modül olsun. A modülünün her X-altmodülü için her $f: X \longrightarrow N$ homomorfizması $h: A \longrightarrow N$ homomorfizmasına genişliyorsa, yani, $g: X \longrightarrow A$ içerim dönüşümü olmak üzere $hg = f$ oluyorsa N'ye $A -$injektif *(injective)* modüldenir. Eğer $N, N -$injektif ise *N'ye yarı-injektif* *modül(quasi injevtive)* denir. Eğer her A modülü için $N,\ A-$injektif ise N*'ye injektif modül* denir.



Teorem 1.2.42.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) Her A modülü için, J injektif modül olmak üzere bir $f: A \to J$ monomorfizması bulunur.

Teorem 1.2.43.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) Bir J sol R-modülü için aşağıdaki koşullar denktir.

(i) J injektiftir;

(ii) $0 \to J \to A \to B \to 0$ şeklinde olan her kısa tam dizi parçalandır;

(iii) J modülü, D bölünebilir bir grup olmak üzere $Hom_{\mathbb{Z}}(R, D)$şeklinde bir modülün direk toplam terimine izomorftur.

Tanım 1.2.44.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M bir sol R-modül olsun. J injektif modülüne, $f: M \to J$ esas monomorfizması ile birlikte M modülünün *injektif zarfı(injective hull)* denir ve $E(M)$ ile gösterilir.

Önerme 1.2.45.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) $f: M \to N$ esas monomorfizma ve K modülü $g : N \to K$ monomorfizması ile birlikte N'nin injektif zarfı ise K modülü $gf : M \to K$ monomorfizması ile M'nin injektif zarfıdır.

Tanım 1.2.46.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) Her modülün bir injektif zarfı bulunur ve injektif zarf izomorfizma farkıyla tektir.

Önerme 1.2.47.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) M modülü için aşağıdakiler denktir.

(i) M injektiftir ancak $M = E(M)$'dir.

(ii) $M \leq_e N$ ise $E(M) = E(N)$'dir.

(iii) Q injektif ve $M \leq_e Q$ ise $Q = E(M)$'dir.

Teorem 1.2.48.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) Ayrışmaz injektif modüller düzgündür.

İspat:
M ayrışmaz injektif bir modül ve $0 \neq N \leq M$ olsun. $N \leq_e E(N) \leq E(M) = M$ olduğundan $E(N) \leq_d M$ olur. M parçalanamaz olduğu için $E(N) = M$ olur. Böylece $N \leq_e M$ elde edilir.

Tanım 1.2.49.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) R bir halka ve bir sol R-modül M 'nin , alt modüllerinin $0 = M_n \subset M_{n-1} \subset \cdots \subset M_0 = M$ kesin azalan zincirine n -uzunluğunda bir kesin azalan zincir denir. Eğer bu kesin zincirde her M_{i-1} / M_i , $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bölüm modülü basit ise bu uzunluğa n *uzunluğunda bir kompozisyon serisi* denir ve R-modül M 'nin bir kompozisyon serisi varsa M 'nin tüm kompozisyon serilerinin uzunluklarının en küçüğüne *M'nin uzunluğu* denir ve $l_R(M)$ ile gösterilir. Eğer M 'nin kompozisyon serisi yoksa $l_R(M) = \infty$ ile gösterebiliriz.

Yardımcı Teorem 1.2.50.

(F. W. Anderson ve K. R. Fuller, 1992) (Modülarite Kuralı) $A, B, C \leq M$ ve $A \leq C$ ise $(A + B) \cap C = A + (B \cap C)$ 'dir.

İspat:

a + b = c ∈ (A + B) ∩ C (a ∈ A, b ∈ B, c ∈ C) olsun. A ≤ C olduğundan b = c – a ∈ B ∩ C 'dir. Bu durumda a + b ∈ A + (B ∈ C) olur. O halde (A + B) ∩ C ⊆ A+ (B ∩ C)'dir.

Diğer taraftan, $a + x \in A + (B \cap C)$ $(a \in A, x \in B \cap C)$ için $a + x \in A + B$ olduğu açıktır.

$a \in A \subseteq C$ ve $x \in C$ olduğundan $a + x \in C$ olur. Dolayısıyla $a + x \in (A + B) \cap C$ 'dir. Böylece,

$A + (B \cap C) \subseteq (A + B) \cap C$ elde edilir.

Tanım 1.2.51.

(A. Facchini, 2010) M bir sol R-modül olsun.

$$Soc_0(M) = 0,$$

her ordinal α için

$$Soc_{\alpha+1}(M)/Soc_\alpha(M) = Soc(M/Soc_\alpha(M))$$

ve her limit ordinal β için

$$Soc_\beta(M) = \bigcup_{\alpha<\beta}(Soc_\alpha(M))$$

M'nin altmodülleri olsun. O zaman,

$$Soc_0(M) \subseteq Soc_1(M) \subseteq \cdots \subseteq Soc_\alpha(M) \subseteq \cdots$$

zincirine *M'nin artan Loewy serisi* (*ascending Loewy series)* denir. Sıra sayısını gösteren α için $M = Soc_\alpha(M)$ ise M modülüne *Loewy modülü* denir. $M = Soc_\alpha(M)$ olacak şekilde en küçük ordinal α'ya *M'nin Loewy uzunluğu(Loewy length)* denir.

Tanım 1.2.52.

(A. Facchini, 2010) R bir halka ve M bir sol R-modül olsun. M'nin herhangi iki öz altmodülü A ve B için $A \subseteq B$ ya da $B \subseteq A$ oluyorsa M'ye *karşılaştırılabilir modül(uniserial module)* denir.

BÖLÜM 2

BAĞLANTILILIK

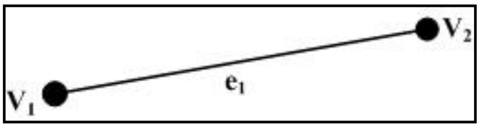
R bir halka ve V bir sol R-modül olsun. Bu bölümde V modülünün kesişim çizgesinin tanımı yapılacak ve modülün kesişim çizgesinin herhangi iki tepesi arasında yol olması yani bağlantılı olması için modülün hangi koşulları sağlaması gerektiği incelenecektir.

Tanım 2.1.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) R bir halka ve V bir sol R-modül olsun. V'nin öz altmodüllerini tepe kabul eden ve kesişimleri sıfırdan farklı öz altmodülleri bir ayrıtla birleştiren çizgeye *kesişim çizgesi (intersection graph)* denir.

Örnek 2.2.

$\boldsymbol{V}$ bir sol $\boldsymbol{R}$- modül ve $\boldsymbol{V_1}$, V_2 V'nin iki öz altmodülü olsun. $V_1 \cap V_2 \neq 0$ ise $G(V)$ kesişim çizgesi aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.1. 2 tepeli, 1 ayrıtlı G çizgesi.

Yardımcı Teorem 2.3.

(E. Yaraneri, 2013) V bir sol R-modül olsun. X ve Y, V'nin farklı öz R-altmodülleri olmak üzere; $G(V)$ de X ve Y arasında yol yoktur ancak ve ancak X ve Y, V'nin iki basit altmodülü olmak üzere $V = X \oplus Y$'dir.

İspat:

V bir sol R-modül ve X ve Y, V'nin farklı öz R-altmodülleri olsun.

($\Rightarrow$) $G(V)$ de X ve Y arasında yol olmasın. O halde tanımdan $X \cap Y = 0$'dır. $Z \leq X$ olsun.

$X \cap Y = 0$ olduğundan $Z \cap Y = 0$ 'dır.

$Z + Y \neq V$ ise $(X, Z + Y, Y)$ olacak şekilde 2 uzunluğunda yol olur. Fakat X ile Y arasında yol olmadığı için bu bir çelişkidir. Böylece $Z + Y = V$ ve $Z \cap Y = 0$ olur. $V = X \oplus Y$ elde edilir. Şimdi X ve Y nin basit olduğu gösterilecektir. $A \leq X$ olsun. Yukarıdaki ispat gereği $V = A \oplus Y$ olur. Yardımcı Teorem 1.2.50 **(**Modülarite Kuralı) den $A = X$ elde edilir. Benzer şekilde, Y'nin basit olduğu gösterilebilir.

($\Leftarrow$) V, iki basit altmodülün dik toplamı şeklinde yazılsın. X ve Y basit altmodüller olmak üzere $V = X \oplus Y$ ve $T < V$ olsun. X basit olduğu için $T \cap X = 0$ veya $T \cap X = X$'dir.

$T \cap X = 0$ ise X aynı zamanda maksimal altmodül olduğu için $V = T \oplus X = Y \oplus X$'dir. Böylece T'nin basit olduğu görülür.

$T \cap X = X$ ise $V = T \oplus Y = X \oplus Y$ sonucundan T'nin yine basit olduğu görülür. Böylece; V'nin her öz altmodülü basittir. Bu durumda V'nin kesişim çizgesi $G(V)$ ayrıta sahip değildir. Böylece X ve Y arasında yol yoktur.

Önerme 2.4.

(E. Yaraneri, 2013) V basit olmayan bir sol R-modül olsun. $G(V)$ bağlantılıdır ancak ve ancak ya V üç basit R-modülün dik toplamını içeren yarıbasit R-modüldür ya da V yarıbasit R-modül değildir.

İspat:

(⇒) $G(V)$ bağlantılı olsun.

1.Durum: V yarıbasit olmasın. Bu durumda ispat biter.

2.Durum: V yarıbasit olsun. Yardımcı Teorem 2.3'ten V en az üç basit modülün dik toplamını içerir.

(⇐) V üç basit R-modülün direkt toplamını içeren yarıbasit sol R-modül ya da yarıbasit olmayan modül olsun. İki durumda da V iki basit R-modülün dik toplamına eşit olmadığından Yardımcı Teorem 2.3'ten bağlantılı olduğu görülür.

Sonuç 2.5.

(E. Yaraneri, 2013) $G(V)$ bir ayrıta sahipse $G(V)$ bağlantılıdır.

İspat:

$G(V)$ bir ayrıta sahip olsun. Böylece V iki farklı öz altmodüle sahiptir. Her ikisi de basit olsaydı aralarında ayrıt olmazdı. Böylece en az bir basit değildir. Önerme 2.4'ten $G(V)$ bağlantılıdır.

Sonuç 2.6.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) $\boldsymbol{V}$ bir sol $\boldsymbol{R}$-modül olsun. $\boldsymbol{G(V)}$ çizgesi bağlantılı ise her maksimal altmodül çiftinin kesişimi sıfırdan farklıdır.

İspat:

$G(V)$ çizgesi bağlantılı; V_1, V_2, V'nin iki maksimal altmodülü ve $V_1 \cap V_2 = 0$ olsun. $V_1 + V_2 = V$ olduğu için $V = V_1 \oplus V_2$ olur. $X \subseteq V_1$ olsun. Böylece $X \cap V_2 = 0$'dır. V_2 maksimal olduğu için $V = X \oplus V_2$'dir. Aynı zamanda $V = V_1 \oplus V_2 = X \oplus V_2$ olduğundan Yardımcı Teorem 1.2.50 (Modülarite Kuralı)'den $X = V_1$ elde edilir ve V_1'in basit sol R-modül olduğu görülür. Benzer şekilde V_2'nin de basit olduğu görülebilir. Yardımcı Teorem 2.3'den çizge bağlantısızdır. Bu ise çelişkidir.

Sonuç 2.7.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir sol R-modül olsun. $|G(V)| \geq 2$ ve $G(V)$ çizgesi bağlantılı olmayan çizge olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

(i) $G(V)$ çizgesine ait her tepe izole tepedir.
(ii) $l_R(V) = 2$'dir.

İspat:
V bir sol R-modül olsun. $|G(V)| \geq 2$ ve $G(V)$ çizgesi bağlantılı olmasın.
(i) $G(V)$ bağlantılı değilse sıfırdan farklı her altmodül basittir. Böylece $G(V)$ çizgesine ait her tepenin derecesi 0'dır.
(ii) V'nin sıfırdan farklı her altmodülü basit olduğundan $l_R(V) = 2$'dir.

Örnek 2.8.

Z_6 bağlantılı olmayan bir çizgeye sahiptir.Z_6'nın $\frac{2Z}{6Z}$ ve $\frac{3Z}{6Z}$ olmak üzere iki öz altmodülü vardır.
$0 \subset \frac{2Z}{6Z} \subset Z_6$
$0 \subset \frac{3Z}{6Z} \subset Z_6$ olup $l(Z_6) = 2$'dir ve $G(Z_6)$' daki 2 tepe izole tepedir.

Teorem 2.9

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir sol R-modül ve $G(V)$ bağlantılı olsun. $diamG(V) \leq 2$'dir.

İspat:
N ve K, V'nin birbirinden farklı öz altmodülleri olsun.

1.Durum: $N \cap K \neq 0$ ise $d(N, K) = 1$'dir.

2.Durum: $N \cap K = 0$ olsun.

2.1.Durum: $N + K \neq V$ ise $(N, N + K, K)$ olacak şekilde 2 uzunluğunda bir yol bulunur. Dolayısıyla $d(N, K) \leq 2$ olur.

2.2.Durum: $N + K = V$ ise, $G(V)$ bağlantılı olduğu için Sonuç 2.6'dan N ve K'dan en az biri maksimal değildir. K maksimal olmayan altmodül olsun. $K \subsetneq L \subsetneq V$ olacak şekilde V'nin bir L altmodülü vardır.

İddia: $N \cap L \neq 0$'dır.

Kabul edilsin ki $N \cap L = 0$ ve $x \in L$ olsun. $V = N + K$ olduğu için $x = y + z$ olacak şekilde $y \in N$, $z \in K$ vardır. $K \subseteq L$ olduğu için $x - z = y \in L \cap N = 0$ olur. Buradan $x = z$ elde edilir. Böylece $L \subset K$ olur. Bu ise çelişkidir. Böylece $N \cap L \neq 0$'dır. (N, L, K) 2 uzunluğunda bir yol olur. Bu yüzden $d(N, K) \leq 2$ ve $diamG(V) \leq 2$ elde edilir.

Uyarı 2.10.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) $G(V)$ tam çizgedir ancak ve ancak V düzgün bir R-modüldür.

Örnek 2.11.

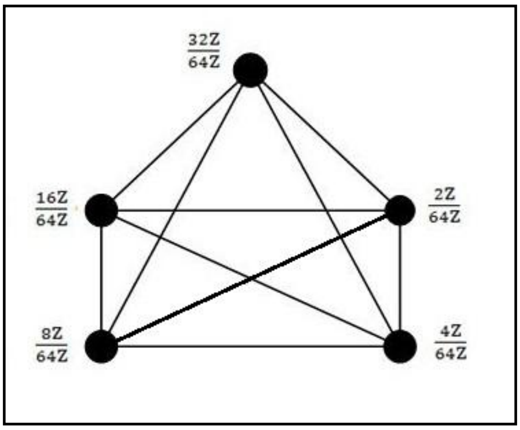
p asal sayı olmak üzere Z, Q ve $Z_{p^n} (n \geq 2)$ Z-modüller düzgündür ve kesişim çizgeleri tamdır.

Örnek 2.12.

$\boldsymbol{Z_{64}}$ $\boldsymbol{Z}$-modülün kesişim çizgesi aşağıdaki gibidir.

Z_{64}'ün 5 tane öz Z-altmodülü vardır.

$0 \subseteq \frac{32Z}{64Z} \subseteq \frac{16Z}{64Z} \subseteq \frac{8Z}{64Z} \subseteq \frac{4Z}{64Z} \subseteq \frac{2Z}{64Z} \subseteq Z_{64}$



Şekil 2.2. 5 tepeli, 10 ayrıtlı $G(Z_{64})$ çizgesi.

Teorem 2.13.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V Artin bir modül olsun. $G(V)$ tam çizgedir ancak ve ancak V tek bir basit altmodül içerir.

İspat:

V Artin bir modül olsun.

(⇒) $G(V)$ tam çizge olsun. Uyarı 2.10'dan V düzgün olur. L_1 ve L_2 V'nin birbirinden farklı iki basit altmodülleri olsun. $L_1 \cap L_2 = 0$ ya da $L_1 \cap L_2 = L_1$'dir.

V düzgün olduğu için $L_1 \cap L_2 = L_1$ olur. Benzer şekilde $L_1 \cap L_2 = L_2$ olduğu görülebilir. Böylece $L_1 = L_2$ elde edilir.

(⇐) V Artin bir modül ve tek bir basit altmodüle sahip olsun. V Artin olduğundan sıfırdan farklı her altmodülü bir basit altmodül içerir. V'nin basit altmodülü L olarak alnırsa, L'nin tek olması nedeniyle V'nin sıfırdan farklı her altmodülü L'yi içerir. Bu da $G(V)$'nin tam çizge olduğunu gösterir.

Örnek 2.14.

Örnek 2.12'te incelenen Z-modül Z_{64} tek bir minimal altmodül içeren Artin modüldür ve $G(Z_{64})$ tam çizgedir.

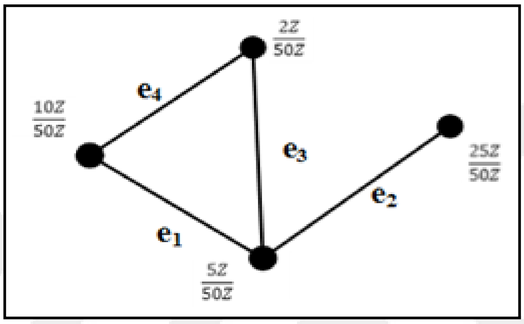
Örnek 2.15

Z-modül Z_{50}'nin

$0 \subseteq \frac{25Z}{50Z} \subseteq \frac{5Z}{50Z} \subseteq Z_{50}$

$0 \subseteq \frac{10Z}{50Z} \subseteq \frac{2Z}{50Z} \subseteq Z_{50}$

olacak şekilde iki basit altmodülü olduğundan kesişim çizgesi tam çizge değildir. Şekil 2.3 tepe kümesi $G(V) = \{\frac{2Z}{50Z}, \frac{25Z}{50Z}, \frac{10Z}{50Z}, \frac{5Z}{50Z}\}$ olan Z_{50}'nin kesişim çizgesidir.



Şekil 2.3. 4 tepeli, 4 ayrıtlı $G(Z_{50})$ çizgesi.

$G(Z_{50})$ çizgesi bağlantılı tam olmayan çizgedir.

Teorem 2.16.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V injektif R-modül olsun. $G(V)$ tam çizgedir ancak ve ancak V ayrışmaz modüldür.

İspat:

V injektif R-modül olsun.

($\Leftarrow$) V'nin ayrışmaz olduğu kabul edilsin. V injektif ise Teorem 1.2.48'den V düzgün ve Uyarı 2.10'dan $G(V)$ tamdır.

($\Rightarrow$) $G(V)$ tam çizge olsun. Uyarı 2.10'dan V düzgündür. V düzgün ve injektif olduğu için ayrışmaz modüldür.

Tanım 2.17.

(D. B. West, 1996) $\{v\}, G$ çizgesinin bir tepesi olsun. $G-\{v\}$ ile v tepesi ve v tepesine bitişik bütün ayrıtların G'den çıkarılması ile elde edilen çizge anlaşılır. $G-\{v\}$ de G'den daha fazla bağlantılı bileşen varsa v tepesine *ayırıcı tepe (cut vertex)* denir.

Teorem 2.18.

(E. Yaraneri, 2013) $G(V)$ bir ayırıcı tepeye sahiptir ancak ve ancak $soc(V)$ iki basit R-modülün direkt toplamıdır ve $soc(V)$, V'nin maksimal altmodülüdür. Dahası, bu durumda, $soc(V), G(V)$ de tek ayırıcı tepedir.

İspat:
($\Rightarrow$) $X, G(V)$'nin ayırıcı tepesi olsun. $G(V)-\{X\}$'de iki farklı tepe A ve B arasında $G(V)$'de yol varken $G(V)\setminus\{X\}$ de A ve B arasında yol yoktur. Böylece $A \cap B =$ 0'dır ve Teorem 2.9'dan (A, X, B) $G(V)$'de bir yol olduğundan $A \cap X \neq 0$ ve $B \cap X \neq 0$ dır.

İddia: X, V'nin maksimal altmodülüdür.
$X \lneqq Y \lneqq V$ olsun. $A \cap Y \neq 0$ ve $A \cap Y \neq 0$ olduğu için, (A, Y, B), $G(V) \setminus \{X\}$ de A ve B arasında yol olur. Bu ise çelişkidir. Böylece X, V'nin maksimal altmodülü olur.

İddia: X, iki basit modülün toplamıdır.
$A \cap X$'in sıfırdan farklı altmodülü $A', B \cap X$'in sıfırdan farklı altmodülü B' olsun.
$X \neq A' + B'$ ise, $(A, A` + B`, B)$ olacak şekilde $G(V)\setminus\{X\}$'de A ve B arasında yol olur. Bu ise çelişkidir. Böylece $X = A' + B'$ elde edilir. Buradan $A \cap X \cap B \cap X = 0$ olduğundan $X = (A \cap X) \oplus (B \cap X)$ olur. $0 \neq T \lneqq A \cap X$ olsun. $(A, B + T, B)$ olacak şekilde $G(V)\setminus\{X\}$ de A ve B arasında yol olur. Bu ise çelişkidir. $A \cap X$ basit bir modüldür. Benzer şekilde $B \cap X$'de basit bir modüldür. Buradan X, iki basit modülün diktoplamı şeklinde yazılabilir.

İddia: $X = SocV$'dir.

Kabul edilsin ki $X \neq SocV$ olsun. V'nin X'i içermediği S basit altmodülü vardır. O zaman $(A, (A \cap X) + S, (B \cap X) + S, B)$, $G(V) \backslash \{X\}$'de bir yol olur. Bu ise çelişkidir. Böylece $X = SocV$ elde edilir.

($\Leftarrow$) $SocV = Z = U \oplus T$ olmak üzere U ve T basit altmodüller ve Z'de maksimal altmodül olsun. (U, Z, T) olacak şekilde $G(V)$'de U ile T arasında bir yol vardır.

İddia: $Z, G(V)$'nin ayırıcı tepesidir.

Kabul edilsin ki, $G(V) \backslash \{Z\}$ de U ile T arasında yol olsun. U_1 ve T_1 bu yolda tepeler, U_1, U ya ve T_1, T ye bazı ayrıtlar ile bitişik olsun. Böylece $U \cap U_1 \neq 0$ ve $T \cap T_1 \neq 0$'dır. U ve T basit modüller olduğu için; $U \cap U_1 = U$ ve $T \cap T_1 = T$ olur. Böylece $U \leq U_1$ ve $T \leq T_1$ elde edilir. V'nin uzunluğu 3 olduğundan U_1 ve T_1, V'nin maksimal altmodülü olur ve farklı maksimal altmodüllerinin kesişimi basittir. Bu nedenle $Z \cap U_1 = U$ ve $Z \cap T_1 = T$ olur. Buradan, $0 = U \cap T = (U_1 \cap T_1) \cap Z$ olur. Böylece $(U_1 \cap T_1) \cap Z = U_1 \cap T_1 = 0$ elde edilir. $U_1 \cap T_1$ basit olduğu için $U_1 \cap T_1 = 0$ olması çelişkidir. Böylece $Z, G(V)$'nin ayırıcı tepesidir.

Tanım 2.19.

(E. Yaraneri, 2013) $\{\boldsymbol{e}\}$ G'de bir ayrıt olsun. $G \backslash \{e\}$ ile e ayrıtı çıkarılarak elde edilen G çizgesi anlaşılır. $G \backslash \{e\}$ de G'den daha fazla bağlantılı bileşen varsa , e'ye G'nin *ayırıcı ayrıtı(cut edge)* denir.

Teorem 2.20.

(E. Yaraneri, 2013) $G(V)$ ayırıcı ayrıta sahiptir ancak ve ancak V'nin komposizyon serisinin uzunluğu 3 ve V'nin tek bir maksimal altmodülü vardır ve bu altmodül $G(V)$ çizgesinde ayırıcı ayrıtın uç noktası olan V'nin basit altmodülünü içerir.

İspat:

($\Rightarrow$) $\{e\}, G(V)$ de A ve B tepelerini bağlayan ayırıcı ayrıt olsun.

İddia: V'nin komposizyon serisinin uzunluğu 3 tür.

$\{e\}, G(V)$ de A ve B tepelerini bağlayan ayırıcı ayrıt olsun. A ve B arasındaki her yol e'yi içerecek şekilde iki tepe olmalıdır. Böylece e'den başka A ile B arasında yol olmaz.

$A \cap B \neq 0$ olduğu için, A, B ve $A \cap B$ hepsi birbirinden farklı olmak üzere $(A, A \cap B, B)$ ile A ile B arasında bir yol olur. Bu yüzden $B < A$ ya da $A < B$ olmalıdır.

$B < A$ olduğu kabul edilsin. $0 < X < B < A < V$ olacak şekilde V'nin bir X altmodülü olduğu varsayalım. (A, X, B) olacak şekilde A ve B arasında yol olur. Bu ise e'nin ayırıcı ayrıt olması ile çelişir. Böylece B'nin basit altmodül olduğu görülür. Benzer şekilde $\frac{A}{B}$ ve $\frac{V}{A}$ basit modüllerdir. Böylece $O \leq B \leq A \leq V$ olur. V'nin kompozisyon serisi 3 olur.

İddia: B'yi içeren tek maksimal altmodül A'dır. $J \neq A$ maksimal altmodül ve $B \subseteq J$ olsun. $B < J$ olacak şekilde V'nin B'yi içeren A dan başka J maksimal altmodülü olsaydı, (A, J, B) olacak şekilde A ile B arasında başka bir yol olurdu. Bu ise çelişkidir. Buradan B'yi içeren V'nin tek maksimal altmodülü A olur.

($\Leftarrow$) V'nin komposizyon uzunluğu $3, W, V$ nin tek maksimal altmodülü olup V'nin basit altmodülü S'yi içersin. S ile W arasındaki yol f olsun.

İddia: f ayırıcı ayrıttır.

f'nin ayırıcı ayrıt olmadığı kabul edilsin. Böylece S ile W arasında f'den başka bir yol vardır. Bu yol üzerinde T, S'ye komşu olan tepe olsun. $T \neq W$'dır. S basit olduğu için $S < T$'dir. V'nin komposizyon uzunluğu 3 olduğundan T, V'nin maksimal altmodülüdür. Tek maksimal olması ile çelişir. Böylece f ayırıcı ayrıttır.

BÖLÜM 3

ÇEVRE

R bir halka ve V bir sol R-modül olsun. V'nin altmodüllerinin kesişim çizgesi G(V) olsun. Başlangıç ve bitiş tepeleri aynı olan yola *çevre(cycle)* denir. G bir çizge ve G çizgesindeki çevrelerin ayrıt sayılarından en küçüğüne *G'nin çevre ölçüsü* denir ve $girth(G(V))$ ile gösterilir. Bu bölümde kesişim çizgeleri çevre içeren V modülünün hangi koşulları sağladığı incelenecek ve çevre ölçüsü hesaplanacaktır.

Teorem 3.1.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir sol R-modül olsun. $G(V)$ çevre içeriyor ise $girth((G(V)) = 3$'tür.

İspat:
$G(V)$ döngü içersin ve $girth\big(G(V)\big) \geq 4$ olsun. $0 \neq A, B \leq V, A \neq B$ ve $A \cap B \neq 0$ olacak şekilde V'nin herhangi iki alt modülü olsun. $A \nsubseteq B$ ve $B \nsubseteq A$ ise $(A, A \cap B, B)$ yolu bulunur. Buradan $girth((G(V)) = 3$ olur. Bu ise çelişkidir. Böylece V'nin herhangi iki alt modülünün karşılaştırılabilir olduğu görülür. $girth\ \big(G(V)\big) \geq 4$ olduğu için, $G(V)$ uzunluğu 3 olan bir yol içerir. $N, L, K, P \leq V$ olmak üzere bu yol (N, L, K, P) olsun. Bu yolda herhangi iki altmodül karşılaştırılabilir ve $G(V)$'nin 3 uzunluğunda bir döngü içermesine sebep olmamak için zincir uzunluğu 2 olmalıdır. Bütün durumlar incelendiğinde 2 durum vardır.

Durumlar: $N \cap L = N$ yada $N \cap L = L$'dir.

1.Durum: $N \cap L = N$ olsun. Böylece $N \subseteq L$ olur.
1.1.Durum: $L \cap K = L$ *olsun. Böylece* $L \subseteq K$ olur. Yani $N \subseteq L \subseteq K$ olur. Bu durumda (N, L, K) $G(V)$'de uzunluğu 3 olan bir yoldur.

1.2.Durum: $L \cap K = K$ olsun. Bu durumda $K \subseteq L$ olur. Yani N$\subseteq L$ ve $K \subseteq L$ elde edilir.

1.2.1.Altdurum: $K \cap P = K$ ise $K \subseteq P$ olur. Böylece $N \subseteq L$, $K \subseteq L$ ve $K \subseteq P$ durumu elde edilir. Bu durumda $K \subseteq L \cap P$ elde edilir. Böylece $L \cap P \neq 0$'dır. (L, K, P) $G(V)$'de uzunluğu 3 olan bir döngü olur.

1.2.2.Altdurum: $K \cap P = P$ ise $P \subseteq K$ olur. (L, K, P) $G(V)$'de uzunluğu 3 olan bir yol olur.

2.Durum: $N \cap L = L$ olsun. Böylece $L \subseteq N$ olur.

2.1.Durum: $L \cap K = L$ ise $L \subseteq K$ olur. Buradan $L \subseteq K \cap N$ elde edilir. Yani $K \cap N \neq 0$'dır. Böylece $(L, K \cap N, K)$ $G(V)$'de uzunluğu 3 olan bir yoldur.

2.2.Durum: $L \cap K = K$ ise $K \subseteq L$ olur. Böylece $K \subseteq L \subseteq N$ elde edilir. (K, L, N) $G(V)$'de uzunluğu 3 olan bir yoldur.

Yardımcı Teorem 3.2.

(E. Yaraneri, 2013) $m \geq 3$ bir doğal sayı ve V bir modül olsun. $G(V)$ m - çevreye sahip değilse, V'nin kompozisyon serisinin uzunluğu m'ye eşit veya m'den daha küçüktür.

İspat:

V bir modül ve $m \geq 3$ bir doğal sayı olmak üzere $G(V)$ m - çevreye sahip olmasın. V, m tane öz altmodülün artan ya da azalan zincirine sahip ise m tane altmodülün oluşturduğu $G(V)$'nin alt çizgesinin tam olduğu açıktır. Böylece $G(V)$ içinde m - çevre olur. Bu ise çelişkidir. Böylece V'nin kompozisyon serisinin uzunluğunun m'ye eşit veya m'den daha küçük olması gerektiği görülür.

Önerme 3.3.

(i) (E. Yaraneri, 2013) Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(ii) $G(V)$ çevreye sahip değildir.

(iii) $G(V)$ de 3 - çevre yoktur.

(iv) V'nin uzunluğu 2'ye eşit veya daha azdır ya da 3 uzunluğundadır ve tek bir maksimal R-altmodülü vardır.

<u>İspat :</u>

(i) ⇒ (ii): Açık.

(ii) ⇒(iii): $G(V)$ 3 - çevre içermesin. Yardımcı Teorem 3.2'den V'nin uzunluğu 3'e eşit veya daha kısa olan kompozisyon serisi vardır. Farz edelim V'nin kompozisyon serisinin uzunluğu 3 olsun.

<u>İddia:</u> V tek bir maksimal altmodüle sahiptir.

V, J_1 ve J_2 olacak şekilde iki maksimal altmodüle sahip olsun. J_1 ve J_2 maksimal altmodüller olduğu için J_1 , J_2 ve $J_1 \cap J_2$ farklıdır. Buradan $J_1 \cap J_2 = 0$ olur. Çünkü, aksi halde (J_1, $J_2 \cap J_2$,J_2,J_1) bir 3-çevre olurdu.

Aynı zamanda J_1 ve J_2 maksimal altmodül olduğu için $V = J_1 + J_2$ olur. Buradan $V = J_1 \oplus J_2$ bulunur. Böylece $V/J_1 \cong J_2$ ve $V / J_2 \cong J_1$ olduğu görülür. Böylece V,V / J_1 ve V / J_2 izomorf olan basit altmodüllerin direkt toplamına izomorftur. Böylece V'nin kompozisyon uzunluğu 2 olur.

(iii) ⇒ (i): V'nin kompozisyon uzunluğu 2 ya da daha azsa V'nin sıfırdan farklı altmodülleri basittir. Bu yüzden $G(V)$ ayrıta sahip değildir. Böylece $G(V)$ çevre içermez. V'nin kompozisyon uzunluğu 3 ve V'nin tek maksimal altmodülü J olsun. V'nin kompozisyon uzunluğu 3 olduğu için V'nin her özaltmodülü J tarafından kapsanır. Böylece J'nin uzunluğu 2 olur. V'nin J'den farklı olan her altmodülü basit olur. Böylece c, J'nin öz altmodüllerinin kümesinin kardinalitesi olmak üzere, $G(V)$, $K_{1,c}$ şeklinde bir yıldız çizgedir ve J diğer tepeler ile komşudur. Böylece $G(V)$ çevre içermez.

<u>Teorem 3.4.</u>

V bir sol R-modül ve $|G(V)| < \infty$ olsun. $G(V)$ çevreye sahip değilse yıldız çizgedir ya da iki izole tepe içerir.

İspat:

V yerel değilse V_1ve V_2 gibi en az iki farklı maksimal altmodüle sahiptir. Eğer $V_1 \cap V_2 \neq 0$ ise $G(V)$ çevre içerirdi. Böylece $V = V_1 \oplus V_2$'dir. Bu V_1ve V_2'nin basit olduğu anlamına gelir. Bu yüzden $G(V)$ iki izole tepe içerir. V yerel modül ise V'nin bir N maksimal modülü için iki durum vardır.

1.Durum: $N \leq_d V$ olsun. $V = S \oplus N$ olacak şekilde V'nin basit bir altmodülü S vardır. V'nin bir altmodülü T olsun. $T \cap N \neq 0$ ise $G(V)$, 3 uzunluğunda bir çevre içerir. Bu ise çelişkidir. Bu yüzden $T \cap N = 0$'dır. Bu T'nin basit olduğu anlamına gelir. $G(V)$ S ve T gibi iki izole tepe içerir.

2.Durum: $N \leq_e V$ olsun. Bu yüzden V'nin maksimal altmodülü $G(V)$'nin diğer tepeleriyle bitişiktir. Bu yüzden G(V) bir yıldız içerir.

Örnek 3.5.

R= $\frac{Z_{2[x,y]}}{(x,y)^2}$'nin değişkenleri x ve y olmak üzere $\overline{(x,y)}$, $\overline{(x)}$, $\overline{(y)}$ ve $\overline{(x,2y)}$ R'nin bütün idealleridir ve G(R) çizgesi çevre içermez ve yıldız çizge içerir.

Teorem 3.6.

V Artin bir modül ve $|G(V)| \geq 3$ olsun.Eğer $G(V)$ bağlantılı ise $girthG(V) = 3$'tür.

İspat:

V'nin sadece bir V_1 maksimal altmodülü için göstermek yeterli olacaktır. V Artin modül olduğundan V_1 de Artin modültür. Bu yüzden S_1 gibi basit bir altmodüle sahiptir. Kabulümüzden $SocV \leq_e V$'dir. V_1ve $SocV$ bitişiktir. Bu yüzden 3 uzunluğunda bir çevreye sahiptir. Teorem 3.1.'den $girthG(V) = 3$'tür.

Teorem 3.7.

V bir modül ve $|G(V)| < \infty$ olsun. $G(V)$ bağlantılı ve çevre içermeyen bir çizge ise V yerel modüldür.

İspat:

V'nin birbirinden farklı maksimal altmodülleri V_1 ve V_2 olsun. Sonuç 2.6'dan $V_1 \cap V_2 \neq 0$ olur. Buradan $(V_1, V_1 \cap V_2, V_2)$ arasında bir yol olur.Çevre içerdiği için bu çelişkidir. $V_1 = V_2$'dir.

BÖLÜM 4

KLİK SAYISI ve BAZI SONLULUK DURUMLARI

R bir halka ve V bir sol R-modül olsun. $G(V)$ çizgesinin içerdiği en büyük tam çizgenin tepe sayısına klik sayısı denir ve $\omega(G(V))$ ile gösterilir. Bu bölümde modülün kesişim çizgesinin klik sayısı ile modülün cebirsel özellikleri arasındaki ilişkiler araştırılacaktır.

Yardımcı Teorem 4.1.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir sol R-modül ve $\omega(G(V)) < \infty$ Aşağıdakiler sağlanır.

(i) $l_R(V) < \infty$ dur

(ii) $\omega\big(G(V)\big) = 1$ ise ancak ve ancak $|G(V)| = 1$ ya da $|G(V)| \geq 2$ ve V iki basit R-modülün direkt toplamıdır. ($G(V)$'nin tepeleri izole tepedir).

(iii) $\omega(G(V)) > 1$ ise V'nin maksimal alt modüllerin sayısı sonludur.

İspat:

(i) V'nin altmodüllerinin herhangi sonsuz artan ya da azalan dizileri $G(V)$'nin klik sayısının sonsuz olmasına sebep olur. Bu da $\omega(G(V))$'nin sonlu olmasıyla çelişeceğinden V Noether ve Artin modül olup $l_R(V) < \infty$'dur.

(ii) ($\Rightarrow$) $\omega\big(G(V)\big) = 1$ ve $|G(V)| \geq 2$ olsun. $G(V)$ çizgesi ayrıta sahip değildir. Bu da $G(V)$'nin bağlantılı olmadığını gösterir. Yardımcı Teorem 2.3'ten V iki basit altmodülün direkt toplamıdır.

($\Leftarrow$)

1.Durum: $|G(V)| = 1$ olsun. Bu durumda $\omega(G(V)) = 1$ olduğu açıktır.

2.Durum: $|G(V)| \geq 2$ ve V iki basit altmodülün direkt toplamı şeklinde yazılsın. Bu durumda çizge bağlantısızdır ve Sonuç 2.5'ten ayrıta sahip değildir. $\omega(G(V)) = 1$ dir.

(iii) $\omega(G(V)) \neq 1$ olsun. (ii) ve Yardımcı Teorem 2.3'den $G(V)$ bağlantılı olur. $S = \{J_i : J_i$ 'ler V'nin maksimal altmodülleri$\}$ kümesi göz önüne alınsın. Sonuç 2.6'dan her i, j için $J_i \cap J_j \neq 0$'dır. Eğer $|S| = \infty$ ise $\omega(G(V)) = \infty$ olur. Bu ise çelişkidir. Böylece $|S| < \infty$ olur. Yani V'nin maksimal altmodüllerinin sayısı sonludur.

Örnek 4.2.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) Yardımcı Teorem 4.1 (iii) için $\omega(G(V)) > 1$ koşulu gereklidir. Bunun için F sonsuz bir cisim olmak üzere, $R = M_2(F)$ halkası göz önüne alınsın. R'nin iki basit sol idealin direkt toplamı şeklinde yazılabileceği kolayca görülür ve Yardımcı Teorem 2.3'den $G(R)$ bağlantılı değildir. Böylece $\omega(G(R)) = 1$ dir. Fakat R'nin sol ideallerinin sayısı sonsuzdur ve her sıfırdan farklı sol ideali maksimal idealdir.

Uyarı 4.3.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir sol R-modül ve N, V'nin altmodülü olsun.

$\omega(G(N)) \leq \omega(G(V))$ ve $\omega(G\left(\frac{V}{N}\right)) \leq \omega(G(V))$ olduğu açıktır. Eğer $\omega(G(V)) < \infty$ ise $\omega(G(N)) < \infty$ ve $\omega(G(\frac{V}{N})) < \infty$ olur. Fakat tersi doğru değildir. F sonsuz bir cisim olmak üzere, $R = M_2(F), R' = R \oplus R$ alınsın. Örnek 4.2'den $\omega(G(R)) = 1$'dir *ve* $\omega(G(\frac{R'}{R})) = 1$ dir. Fakat R sonsuz sol ideale sahip olduğu için $\omega(G(R'))$ sonsuzdur.

Yardımcı Teorem 4.4.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir sol R-modül ve N, V'nin bir altmodülü olsun. $deg(N), G(V)$'de sonlu ise V sonlu uzunluğa sahiptir.

İspat:
$deg(N)$ sonlu olsun. N ve $\frac{V}{N}$ sonsuz azalan ya da artan altmodül zinciri içermez. Bu yüzden hem Artin hem de Noether modüldürler. Buradan M'nin sonlu uzunluğa sahip olduğu görülür.

Yardımcı Teorem 4.5.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir sol R-modül ve N, V'nin bir maksimal altmodülü olsun. V'nin sıfırdan farklı öz altmodülü L için $L \cap N = 0$ ise o zaman L, V'nin bir basit altmodülüdür.

İspat:
L', L'nin sıfırdan farklı bir altmodülü olsun. $L \cap N = 0$ olduğu için $L' \cap N = 0$ ve N maksimal altmodül olduğu için $L' + N = V$'dir. $x \in L$ olsun. $y \in L'$ ve $z \in N$ olmak üzere $x = y + z$ olacak şekilde elemanlar bulunabilir.
Böylece $x - y \in L \cap N = 0$ olur ve $x = y$ elde edilir. $L^{'} = L$ olur. Yani L, V'nin basit altmodülüdür.

Teorem 4.6.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir R-modül ve N, V'nin sonlu dereceli bir maksimal altmodülü olsun. $G(V)$ bağlantılı ise V'nin maksimal altmodül sayısı sonludur.

İspat:

$G(V)$ bağlantılı olduğundan Sonuç 2.6'dan, N'nin diğer maksimal altmodüllerle kesişimi sıfırdan farklıdır. N'nin derecesi sonlu olduğundan maksimal altmodül sayısı da sonludur

Sonuç 4.7.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir sol R-modül olsun. Aşağıdakiler sağlanır.

(i) V maksimal altmodüle sahip değilse, $G(V)$ sonsuzdur.

(ii) V maksimal altmodül içerirse ve her maksimal altmodülü sonlu dereceli ise $G(V)$ boş ya da sonludur.

İspat:

(i) V maksimal altmodüle sahip olmasın. V sonsuz artan altmodüllerin zincirini içerir. Böylece $G(V)$ sonsuz olur.

(ii) $G(V)$ boş olmasın. Sonuç 2.7, Yardımcı Teorem 4.4 ve Teorem 4.6'dan $G(V)$ bağlantılı, V Noether ve V'nin maksimal altmodül sayısı sonlu olur. $G(V)$ sonsuz olduğundan, V'nin maksimal altmodülü N sonsuz sayıda altmodül içerir. $d(N) < \infty$ olduğu için bu bir çelişkidir. Böylece $G(V)$ sonlu bir çizgedir.

Teorem 4.8.

V bir sol R-modül olsun. Negatif olmayan r sayısı için $G(V)$ r- düzenli bir çizge ise $G(V)$ tam çizgedir ya da $G(V)$'nin tepeleri izole tepedir.

İspat:

$G(V)$ tam çizge ve $G(V)$'nin tepeleri izole olmasın. Yardımcı Teorem 4.4'ten **V** Artin bir modüldür ve Teorem 2.13'ten N_1 ve N_2 gibi en az iki basit altmodülü vardır. Sonuç 2.7'den $G(V)$ bağlantılıdır ve böylece $diamG(V) \leq 2$'dir. Bu V'nin bir N alt modülü $N_1 - N - N_2$ olacak şekilde iki uzunluğunda bir yola sahip olur. N_1ve N_2 basit olduğundan N tarafından içerilir. Böylece $i = 1,2$ için $\mathrm{d}(N) >$

d(N_i)'dir. Bu bir çelişkidir. Böylece $G(V)$ tam çizge ya da $G(V)$'nin tepeleri izole tepedir.

Örnek 4.9.

Z_{35} modülü 0-düzenli modüldür. Z_{35} modülünün altmodülleri $\frac{5Z}{35Z}$ ve $\frac{7Z}{35Z}$'dir ve G(Z_{35}) çizgesinin tepeleri izole tepedir.

Şekil 4.1. 2 tepeli, 0 ayrıtlı $G(Z_{35})$ çizgesi.

Teorem 4.10.

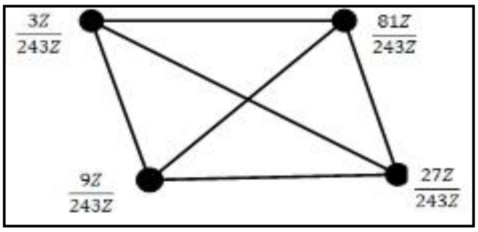
V yarıbasit modül olmasın. Negatif olmayan r sayısı için $G(V)$ r- düzenli bir çizge ise $G(V)$ tam çizgedir.

İspat:

Yardımcı Teorem 4.4'ten V Artin bir modüldür. Bu yüzden V'nin maksimal altmodül sayısı sonludur. Eğer V'nin bir tane maksimal altmodülü varsa bir tane minimali vardır ve Teorem 2.13'den G(V) tam çizgedir. V'nin birden fazla maksimali olsun. V, S basit modülünün direkt toplamı şeklinde yazılsın. $V = N \oplus S$ olacak şekilde N, V'nin maksimal altmodülü olsun. V Artin ve yarıbasit olmadığından $rad(V) \neq 0$'dır ve $rad(V) \subseteq N$'dir. Bu yüzden $rad(V)$ ve N bitişiktir. Fakat $rad(V) \cap S = 0$ olduğundan d$(N) >$ d(S) olur. Bu ise çelişkidir. Böylece her maksimal altmodül esas modüldür. Bu yüzden maksimal altmodül $G(V)$'nin bütün tepeleri ile bitişiktir. İspat tamamlanmış olur.

Örnek 4.11.

Z_{243} modülünün altmodülleri $\frac{3Z}{243Z}$, $\frac{9Z}{243Z}$, $\frac{27Z}{243Z}$ ve $\frac{81Z}{243Z}$ olup $G(Z_{243})$ çizgesi 4 tepeli tam çizgedir.



Şekil 4.2. 4 tepeli, 6 ayrıtlı $G(Z_{243})$ çizgesi.

Teorem 4.12.

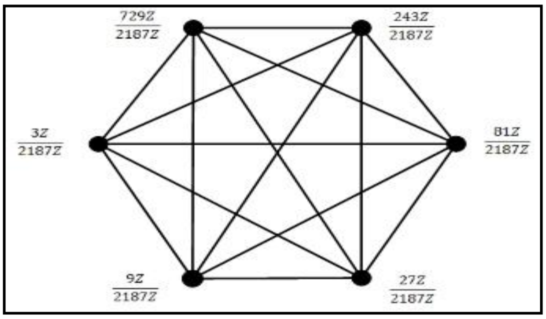
V, n uzunluğunda karşılaştırılabilir modül ise $G(V) = K_{n-1}$'dir.

İspat:

V, n uzunluğunda karşılaştırılabilir modül olsun. $n = 2$ için teoremin doğruluğu incelensin. $0 \subseteq A \subseteq V$ olacak şekilde bir altmodüle sahiptir ve A basittir. V nin A'dan farklı herhangi bir altmodülü X olsun. V karşılaştırılabilir modül olduğundan $X \subseteq A$ ya da $A \subset X$'dir. Eğer $X \subseteq A$ ise A basit olduğundan $X = A$ ya da $X = 0$'dır. Eğer $A \subseteq X$ ise $A = X$ ya da $X = V$'dir. İki durumda da $G(V) = K_1$ olur. $t < n$ için doğru olsun. $0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_{n-1} \subseteq V$ n uzunluğunda bir zincirdir. Kabulden $G(A_{n-1}) = K_{n-2}$'dir. A_{n-1} de karşılaştırılabilir olduğundan $G(V) = K_{n-1}$'dir.

Örnek 4.13.

Z_{2187} modülünün altmodülleri $\frac{3Z}{2187Z}$, $\frac{9Z}{2187Z}$, $\frac{27Z}{2197Z}$, $\frac{81Z}{2187Z}$, $\frac{243Z}{2187Z}$ ve $\frac{729Z}{2187Z}$ olup $G(Z_{2187})$ çizgesi 6 tepeli tam çizgedir.



Şekil 4.3. 6 tepeli, 15 ayrıtlı $G(Z_{2187})$ çizgesi.

BÖLÜM 5

BASKINLIK

R bir halka ve V bir R-modül olsun. $V(G)$, G çizgesinin tepeler kümesi olmak üzere $D \subseteq V(G)$ olsun. $V(G) \setminus D$ kümesindeki her tepe; D kümesindeki herhangi bir tepeye komşu ise, D kümesine baskın küme denir. G çizgesinin baskın kümeleri arasındaki en az elemana ait kümenin eleman sayısına baskınlık sayısı denir ve $\gamma(G)$ ile gösterilir. Bu durumda, V'nin öz R-altmodüllerinin kümesi S, $G(V)$ için baskınlık kümesi ise ancak ve ancak V'nin herhangi U öz altmodülü ve S kümesindeki W için $U \cap W \neq 0$'dır.Bu bölümde modülün, kesişim çizgesinin baskınlık kümesi ve cebirsel özellikleri arasındaki ilişki incelenecektir.

<u>*Önerme 5.1.*</u>

(E. Yaraneri, 2013) V bir sol R-modül ve U, V'nin basit olmayan bir altmodülü ve kapsama veya eşitlik bağıntılarına göre $\{X \leq V : X \cap U = 0\}$ kümesinin maksimal elemanı W olsun. $G(U)$ için baskınlık kümesi $\mathcal{A}$ ise $G(V)$ için baskınlık kümesi $\{T + W : T \in \mathcal{A}\}$ olur.

<u>*İspat:*</u>
Y, V'nin öz altmodülü olsun.

<u>*İddia:*</u> $T \in \mathcal{A}$ için $Y \cap (T + W) \neq 0$ dır.
$Y \cap U$ için 3 farklı durum vardır.

<u>*1.Durum:*</u>$Y \cap U, U$'nun öz altmodülü ise $\mathcal{A}, G(U)$ için baskınlık kümesi olduğundan $(Y \cap U) \cap T_1 \neq 0$ olacak şekilde bir $T_1 \in \mathcal{A}$ vardır.
$(Y \cap U) \cap T_1 \subseteq Y \cap T_1 \subseteq Y \cap (T_1 + W)$ olduğu için $Y \cap (T_1 + W) \neq 0$ elde edilir.

2.Durum: $Y \cap U = U$ ise Y, U'yu içerir ve dolayısıyla $\mathcal{A}$ baskınlık kümesindeki her elemanı içerir. Böylece herhangi $T_2 \in \mathcal{A}$ için $0 \neq T_2 \subseteq Y \cap (T_2 + W)$'dur. Böylece $Y \cap (T_2 + W) \neq 0$ elde edilir.

3.Durum: $Y \cap U = 0$ olsun. W, Y'yi içeriyorsa herhangi $T_3 \in \mathcal{A}$ için $0 \neq T_3 + W \subseteq Y \cap (T_3 + W) \neq 0$ olur. Bu yüzden W'nun Y'yi içermediği kabul edilsin. Buradan Y$+W$ nun öz altkümesi W olur. W maksimal olduğundan $U \cap (Y + W) \neq 0$'dır. U basit olmadığından $0 \neq Ru \neq U$ olacak şekilde $u \in U \cap (Y + W)$ vardır. $G(U)$'nun baskınlık kümesi $\mathcal{A}$ olduğu için $Ru \cap T_4 \neq 0$ olacak şekilde $T_4 \in \mathcal{A}$ ve $0 \neq ru \in T_4$ olacak şekilde $r \in R$ vardır. $u \in Y + W$ olduğu için $ru = y + w$ olacak şekilde $y \in Y$ ve $w \in W$ vardır. $Y \cap U = 0$ ve $Y \cap W = 0$ olduğu için y ve w'nun her ikisi de sıfırdan farklıdır. $y = ru - w \in (T_4 + W)$ olduğu için $Y \cap (T_4 + W) \neq 0$' dır. Böylece $\{T + W : T \in \mathcal{A}\}, G(V)$ için baskınlık kümesi olur.

Önerme 5.2.

(E. Yaraneri, 2013) V, üç basit modülün direkt toplamını içeren yarıbasit sol R-modül ve C, iki basit modülün dik toplamı olarak yazılabilen V'nin altmodüllerinin kümesi olsun. Eğer $\mathcal{A}$, $G(V)$ için bir minimal baskınlık kümesi ise her $A \in \mathcal{A}$ için $U \cap A \neq U$ olacak şekilde $U \in C$ vardır. Üstelik bu şekilde elde edilen U için $\{T \cap U : T \in \mathcal{A}\}$ kümesi $G(U)$'nun bir baskınlık kümesidir.

İspat:

İlk olarak, her $A \in \mathcal{A}$ için $U \cap A \neq U$ olacak şekilde $U \in C$'nin var olduğu gösterilecektir. Tersi kabul edilsin. Yani her $W \in C$ ve en az bir $A \in \mathcal{A}$ için $W \cap A = W$ olsun. $\mathcal{A} \setminus \{A\}$ da ki bir eleman ile W'nun bir öz altmodülü X'in kesişiminin sıfırdan farklı olduğu gösterilerek $\mathcal{A}$'nın minimalliği çelişki elde edilecektir. $\mathcal{A}, G(V)$ nin baskınlık kümesi olduğundan, X ve $\mathcal{A}$'ya ait bir kümenin kesişimi sıfırdan farklıdır. Bu yüzden $X \cap A \neq 0$'dır. V yarıbasit olduğu için, $V = A \oplus B$ olacak şekilde $B \leq V$ vardır. $A \in \mathcal{A}$ olduğu için B sıfırdan farklıdır. V yarıbasit olduğu için $X \cap A$'nın basit R-altmodülü olarak S_1 ve B'nin basit R-altmodülü olarak S_2 seçilsin. $W' = S_1 + S_2$ olarak alınsın. $A \cap B = 0$ olduğu için S_1 ve S_2 basit altmodülleri de birbirinden farklıdır ve bu yüzden $W' \in C$ olur. Kabulden $W' \cap A' = W'$ olacak şekilde $A' \in \mathcal{A}$ vardır.

Böylece $S_1 + S_2 = W' \subseteq A'$ olur. Buradan $S_2 \subseteq A'$ fakat $S_2 \not\subset A$ olduğu için $A' \neq A$'dır ve böylece $A' \in \mathcal{A} \setminus \{A\}$ olur. Üstelik $S_1 \in X \cap A'$ olduğundan $X \cap A' \neq 0$' dır. Bu ise $\mathcal{A}$'nın minimal baskınlık kümesi olması ile çelişir.

<u>*Not 5.3.*</u>

(E. Yaraneri, 2013) V basit R-modül ise $G(V)$ çizgesi tepeye sahip değildir; bu yüzden $\gamma(G(V)) = 0$' dır.

<u>*Teorem 5.4.*</u>

(E. Yaraneri, 2013) V basit bir modül olmasın. Bu durumda;

(i) $\gamma(G(V)) = 1$'dir ancak ve ancak V yarıbasit R-modül değildir.

(ii) $\gamma(G(V)) = 2$'dir ancak ve ancak V, en az iki tane izomorf olmayan basit R-altmodüle sahip yarıbasit R-modüldür.

(iii) V, basit R-altmodüllerinin hepsi izomorf olan yarıbasit modül ise S, V'nin basit R-altmodülü olmak üzere $\gamma(G(V)) = |EndR(S)| + 1$'dir.

<u>*İspat:*</u>

(i) ($\Leftarrow$) V yarıbasit modül olmasın. Tanım 1.2.18'den $SocV \neq V$ ve $K \leq_e V$ olacak şekilde V'nin öz altmodülü vardır. $K \leq_e V$ olduğundan V'nin her öz altmodülü ile kesişimi sıfırdan farklıdır. Böylece $\gamma(G(V)) = 1$ olur.

($\Rightarrow$) $\gamma(G(V)) = 1$ olsun. Kabul edilsin ki V yarıbasit bir modül olsun. $\gamma(G(V)) = 1$ olduğu için, V'nin bir N alt modülü vardır ki V'nin sıfırdan farklı alt modülleri ile kesişimi sıfırdan farklıdır. Yani $N \leq_e V$'dir. Bu ise çelişkidir. Böylece V yarıbasit olamaz.

(ii) ($\Leftarrow$) V izomorf olmayan en az ikitane basit modül içeren yarıbasit bir modül olsun ve izomorf olmayan basit modülleri S_1 ve S_2 olarak adlandırılsın. V'nin S_1'e izomorf bütün basit R-altmodüllerin toplamı V_1 ve V içinde tamamlayanı V_2 olsun. $V = V_1 \oplus V_2$'dir. Açıktır ki V_1 ve V_2'nin izomorfik kısmı yoktur. V'nin altmodülleri $X \leq V_1$ ve $Y \leq V_2$ olacak şekilde $X \oplus Y$ formundadır. $T \leq V$ olsun. Böylece $T = X \oplus Y$ şeklinde yazılabilir. Açıktırki $T \cap V_1 \neq 0$ ve $T \cap V_2 \neq 0$'dır. Böylece $\{V_1, V_2\}$ kümesi bir baskınlık kümesidir. Buradan $\gamma(G(V)) \leq 2$ olduğu görülür. (i)'den $\gamma(G(V)) = 1$ olamaz. Böylece $\gamma(G(V)) = 2$ elde edilir.

($\Rightarrow$) $\gamma(G(V)) = 2$ olsun. (i)'den V yarıbasit modüldür. Kabul edilsin ki V'nin tüm basit altmodülleri izomorfik ve V'nin S basit altmodülüne izomorf olsun. Schur Yardımcı Teoreminden dolayı $End_R(S)$ bölüm halkasıdır ve böylece $|End_R(S)| + 1 \geq 3$'tür. (iii)'den $\gamma\big(G(V)\big) = 2 = |End_R(S)| + 1$ olduğu için kabul yanlıştır. Böylece V'nin izomorf olmayan en az iki tane basit altmodülü vardır.
(iii) İlk olarak S, V'nin basit altmodülü olmak üzere, $G(V)$'nin minimal baskınlık kümesinin eleman sayısının $|End(S)| + 1$ olduğu gösterilecektir. V'nin herhangi iki basit altmodülünün direkt toplamı olarak yazılan altmodülü U alınsın. $G(U)$'nun baskınlık kümesi $\mathcal{A}$ olsun. U'nun bütün öz altmodülleri basit olduğundan $\mathcal{A}$, U'nun tüm öz altmodüllerinden oluşur. Teorem 4.1[28,Sayfa 6]'dan SxS nin tüm altmodülleri $\alpha \in Aut(S)$ olmak üzere

$$0x0, Sx0, 0xS, SxS \text{ ve } \{(s, \alpha(s)) : s \in S\}$$

$U \simeq S \, x \, S$ olduğundan, U'nun öz altmodüllerinin sayısı $|Aut(S)| + 2$'dir. S basit modül olduğundan Schur Yardımcı Teoreminden, $|\mathcal{A}| = |End(S)| + 1$'dir. V yarıbasitmodül olduğundan, $V = U \oplus W$ olacak şekilde $W \leq V$ vardır. Önerme 5.1 den, $\mathcal{B} = \{T + W : T \in \mathcal{A}\}$, $G(V)$'nin baskınlık kümesi olur. $U \cap W = 0$ olduğundan; $T \in \mathcal{A}$ olmak üzere $T + W$ modülleri birbirinden farklıdır. Böylece $|\mathcal{B}| = |\mathcal{A}|$ olur.

<u>İddia1:</u> β minimal baskınlık kümesidir.
$T \in \mathcal{A}$ olmak üzere $U \cap W = 0$ olduğu için $\mathcal{B}$'nin T'ye bitişik(komşu) olan tek elemanı $T + W$'dir. Böylece $\mathcal{B}$ minimal baskınlık kümesi olur.

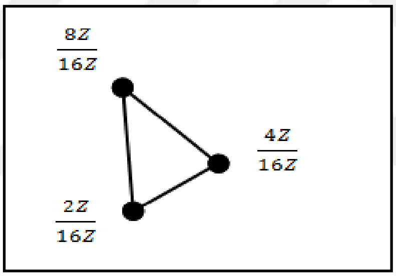
İddia2: $G(V)$'nin minimal baskınlık kümesinin eleman sayısı $|End(S)|+1$'den büyük ya da eşittir.

$\mathcal{D}$, $G(V)$'nin minimal baskınlık kümesi olsun. Önerme 5.2'den, V'nin U altmodülü vardır öyle ki SxS ve $U^{'}$'nun baskınlık kümesinin eleman sayısı $|\mathcal{D}|$'den küçük ya da eşittir. İspatın ilk kısmında yapıldığı gibi $U' \cong SxS$ olduğu için, $G(U')$'nün baskınlık kümesi U''nün tüm öz altmodüllerini kapsar ve U' , $|End(S)|+1$ tane öz altmodüle sahiptir.

Örnek 5.5.

Z_{16} modülünü yarıbasit olmadığından baskınlık sayısı 1'dir.

$$0 \subset \frac{8Z}{16Z} \subset \frac{4Z}{16Z} \subset \frac{2Z}{16Z} \subset Z_{16}$$



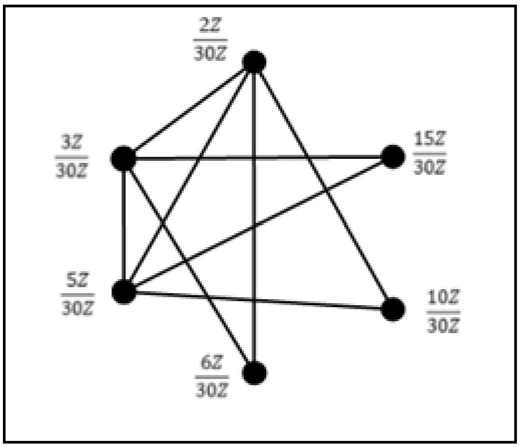
Şekil 5.1. 3 tepeli,3 ayrıtlı $\boldsymbol{G(Z_{16})}$ çizgesi.

$$\gamma(G(V)) = 1$$

Örnek 5.6.

$Z_{30} \cong \frac{15Z}{30Z} \oplus \frac{10Z}{30Z} \oplus \frac{6Z}{30Z}$ şeklinde izomorf olmayan iki basit modülü içeren yarıbasitmodül olsun.

Z_{30} un öz altmodülleri $\frac{15Z}{30Z}, \frac{10Z}{30Z}, \frac{6Z}{30Z}, \frac{5Z}{30Z}, \frac{3Z}{30Z}, \frac{2Z}{30Z}$'dır.



Şekil 5.2. 6 tepeli,7 ayrıtlı G(Z_{30}) çizgesi.

Baskınlık kümesi olarak $\left\{\frac{5Z}{30Z}, \frac{2Z}{30Z}, \frac{3Z}{30Z}\right\}$, $\{\frac{15Z}{30Z}, \frac{2Z}{30Z}\}$ gibi kümeler alınabilir.

$\gamma(G(V)) = 2$'dir.

<u>Örnek 5.7.</u>

$V = Z_7 \oplus Z_7$ 'ye izomorf modül olsun.

$V = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), \dots, (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{2}) \dots, (\bar{6}, \bar{6})\}$ gibi 49 tane ikiliden oluşur.

$f: Z/7Z \rightarrow Z/7Z$'ye bir Z-modül homomorfizma olsun.

Bu durumda $x \in Z/7Z$ olmak üzere $\{(x, f(x)) | x \in Z/7Z\}$ V'nin bir altmodülü olur.

$V_1 = \{(0,0), (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (5,0), (6,0)\}$

$V_2 = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$V_3 = \{(0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,1), (5,3), (6,5)\}$

$V_4 = \{(0,0), (1,3), (2,6), (3,2), (4,5), (5,1), (6,4)\}$

$V_5 = \{(0,0), (1,4), (2,1), (3,5), (4,2), (5,6), (6,3)\}$

$V_6 = \{(0,0), (1,5), (2,3), (3,1), (4,6), (5,4), (6,2)\}$

$V_7 = \{(0,0), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}$

$V_8 = 0xZ_7$

V'nin altmodülleridir. V'nin 8 tane öz altmodülü vardır ve hepsi $Z/7Z$'ye izomorftur. Ve basit olduklarından kesişimleri boş kümedir. V'nin baskınlık kümesi tüm altmodüllerini içerir.

$\gamma(G(V)) = 8 = |End(S)| + 1 = 7 + 1 = 8$'dir.

BÖLÜM 6

BOYAMA

R bir halka ve V bir sol R-modül olsun. İki komşu tepe aynı renkte olmayacak şekilde her tepeye bir renk vermek için yeterli olan en az renk sayısına G çizgesinin boyama sayısı denir ve $\chi(G)$ gösterilir. Bu bölümde modülün kesişim çizgesinin boyama sayısı ile cebirsel özellikleri arasında ilişkilendirme yapılacaktır. Ayrıca n bir doğal sayı olmak üzere Z_n'in boyama sayısı araştırılmıştır. Bazı özel durumlar için Z_n'in boyama sayısı belirlenmiştir. Genel durum için algoritma geliştirilmiştir ve C^{++} programında bir kod yazılmıştır.

Teorem 6.1.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir sol R-modül ve $|G(V)| \geq 2$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

(i) $G(V)$ bir yıldız çizge,
(ii) $G(V)$ bir ağaç çizge,
(iii) $\chi(G(V)) = 2$
(iv) $l_R(V) = 3$, V tek bir N maksimal altmodüle sahiptir ve V'nin sıfırdan farklı her öz altmodülü basittir.

İspat:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ve (iv) $\Rightarrow$ (i) açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) $\chi(G(V)) = 2$ olduğundan $G(V)$ boş çizge değildir ve Sonuç 2.7'den $G(V)$ bağlantılıdır. Yardımcı Teorem 4.1(i)'den V Noether modüldür. Dolaysıyla V, N gibi bir maksimal altmodül içerir. V'nin L gibi bir maksimal altmodülü daha olduğu varsayılsın. Bu durumda Sonuç 2.6'dan $G(V)$ de $(N, N \cap L, L, N)$ 3 uzunluğunda bir çevre oluşur ve bu ise $\chi(G(V)) = 2$ olması ile çelişir. Böylece V, tek bir maksimal altmodül N'ye sahiptir ve N maksimal altmodülü her öz altmodülü içerir. $0 \neq L$, N'nin öz altmodülü ve K, L'nin sıfırdan farklı altmodülü ve $K \subsetneq L \subsetneq N$ olsun. (K, L, N, K) şeklinde bir çevre meydana gelir. Bu ise $\chi(G(V)) = 2$ olması ile çelişir. Böylece L basit altmodül olur ve $l_R(V) = 3$'tür.

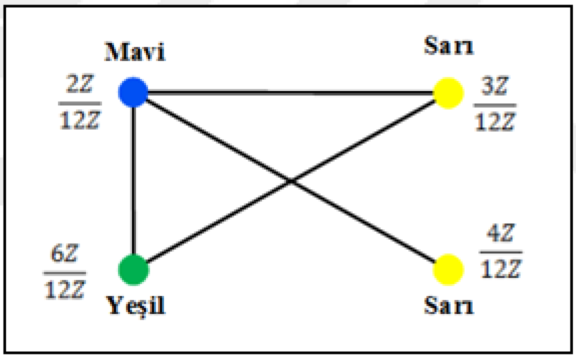
Örnek 6.2.

Z_{12} için inceleyelim:

$0 \subset \frac{4Z}{12Z} \subset \frac{2Z}{12Z} \subset Z_{12}$

$0 \subset \frac{6Z}{12Z} \subset \frac{2Z}{12Z} \subset Z_{12}$

$0 \subset \frac{6Z}{12Z} \subset \frac{3Z}{12Z} \subset Z_{12}$



Şekil 6.1. 4 tepeli, 4 ayrıtlı G(Z_{12}) çizgesi.

Z_{12}'nin çizgesi yıldız çizge olmadığından boyama sayısı 2 değildir.

Örnek 6.3.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) K sonsuz bir cisim, $\boldsymbol{x}$ ve $\boldsymbol{y}$ değişkenler olmak üzere R=$\frac{K(x,y)}{(x,y)^2}$ şeklinde tanımlansın. $\{(\overline{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}), (\overline{\boldsymbol{x}}), (\overline{\boldsymbol{y}})$ve $\{(\overline{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}) : 0 \neq a \in K\}$ R'nin sıfırdan farklı idealleridir. Dahası $(\overline{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})$ maksimal idealdir ve R'nin bütün öz alt modüllerini içerir. Her öz idealin $(\overline{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}})$ ile kesişimleri sıfırdan farklı iken diğer ideallerle kesişimleri boştur. Böylece $G(R)$ sonsuz yıldız çizgedir.

Teorem 6.4.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir R-modül ve N, V'nin sonlu dereceli bir maksimal altmodülü olsun. $G(V)$ bağlantılı ise aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\chi(G(V)) < \infty$,

(ii) V yarıbasit değilse, $G(V)$ diğer tüm ayrıtlarla bitişik bir ayrıta sahiptir.

İspat:

(i) $\{L_i\}_{i \in I}$ N ile bitişik olmayan birbirinden farklı öz altmodüllerin bir ailesi olsun. Böylece her $i \in I, L_i \cap N = 0$ dır. Şimdi , Yardımcı Teorem 4.5'den her $i \in I$ için L_i altmodülleri basittir ve basit altmodüllerin kesişimleri sıfırdır. $\{L_i\}_{i \in I}$ bir renk verilir ve diğer tepelere başka renkler verilir.N ile bitişik olan ayrıtlar sonlu olduğundan $G(V)$'yi boyamak için kullanılan renk sayısı da sonlu olur.

(ii) V yarıbasit olmasın. Yardımcı Teorem 4.4 den, V Artin bir modüldür. V yarıbasit olmadığı için $soc(V) \neq V$'dir. V Artin olduğu için $soc(V) \leq_e V$ dir. Böylece sıfırdan farklı altmodül ile $soc(V)$'nin kesişimi sıfırdan farklıdır. Böylece $soc(V)$ diğer her tepe ile bitişiktir.

Teorem 6.5.

(S. Akbaria, H. A. Tavallaeeb, S. Khalashi Ghezelahmad, 2012) V bir R-modül, $G(V)$ sonsuz ve $\omega(G(V)) < \infty$ ise $\chi(G(V)) < \infty$ dur.

İspat:

$\omega(G(V)) = 1$ için ispat açıktır. $\omega(G(V)) > 1$ olsun. $\omega(G(V)) < \infty$ olduğu için Yardımcı Teorem 4.1(i) den $l_R(V) < \infty$ olur. Ayrıca $l_R(V) \leq \omega(G(V)) + 1$'dir.

İddia: V'nin basit olmayan altmodülleri sayısı sonludur.

$l_0 = max\{\ell : \ell$ uzunluğunda altmodüllerin sayısı sonsuz$\}$ olsun.

Açık ki , $1 \leq l_0 \leq \omega(G(V))$ dir. $l_R(V)$ olduğu için, Teorem 5 [22, sayfa 19]'dan l_0 uzunluğundaki her öz altmodülü içeren $l_0 + 1$ uzunluğunda altmodül var olduğu anlamına gelir. Böylece, $l_0 + 1$ uzunluğundaki altmodül sayısı sonludur. Böylece

$l_0 + 1$ uzunluğunda N altmodülü vardır öyle ki l_0 uzunluğunda sonsuz sayıda altmodül içerir. $\omega(G(V)) < \infty$ olduğu için N nin, L ve K altmodülleri vardır öyle ki $l_R(L) = l_R(K) = l_0$ ve $L \cap K = 0$'dır.
$l_0 + 1 = l_R(N) \geq l_R(L + K) = l_R(L \oplus K) = l_R(L) + l_R(K) = 2l_0$ olduğundan $l_0 = 1$ elde edilir. Birbirinden farklı basit altmodüllerin kesişimi sıfır olduğu için, basit altmodüllere bir renk ve diğer tepelere yeni renk verilirse kullanılan renk sayısı sonlu olur. Buradan $\chi(G(M)) < \infty$ elde edilir.

Önerme 6.6.

(E. Yaraneri, 2013) $G(V)$ çizgesinin boyama sayısı sonludur ancak ve ancak
(i) V sonlu kompozisyon serisine sahiptir.
(ii) n doğal sayı olmak üzere, V'nin herhangi basit R-altmodülü S için , V/S'nin altmodül sayısı n'ye eşit ya da daha azdır.
(iii) $G(Soc(V))$ boyama sayısı sonludur.

$G(Soc(V))$'nin alt çizgesi $\bar{G}$'nin tepeleri $X \in \{X \leq V : X \nsubseteq Soc(V)$ ve $Soc(V) \nsubseteq X\}$ olmak üzere $Soc(X)$'lerdir ve $V/Soc(V)$'nin altmodüllerinin sayısı m doğal sayısı olmak üzere
$\chi(G(V)) \leq \chi(G(Soc(V))) + (n-2)\, \chi(\bar{G}) + m - 1$ sağlanır.

İspat:
$G(V)$ çizgesinin boyama sayısı sonsuz olsun.
(i) V sonlu kompozisyon serisine sahip olmasın. Böylece V'nin altmodüllerinin zinciri sonsuz artan veya azalan olur. Zincirde görülen öz altmodüller $G(V)$ çizgesinde komşudur ve çizgenin boyama sayısı sonsuz olur. Bu ise çelişkidir. Buradan V sonlu kompozisyon serisine sahip olur.
(ii) Tersini kabul edelim. Herhangi n doğal sayısı için, V/S en az $n+1$ altmodüle sahip olsun. V'nin S'yi içeren en az n altmodülü vardır. Bu n altmodül $G(V)$'de komşudur. Bu yüzden herhangi n sayısı için $\chi(G(V)) \geq n-1$ dir. Bu ise çelişkidir ve (b)'nin sağlandığı görülmüş olur.

(iii) $G(Soc(V))$, $G(V)$'nin alt çizgesi olup $G(Soc(V))$'de komşu iki tepe $G(V)$ içinde de komşudur. Böylece $G(V)$'nin boyama sayısı sonlu olduğundan $G(Soc(V))$'nin de boyama sayısının sonlu olur.

Teoremin son kısmı için, $(a)-(c)$ koşulları sağlansın. Bu durumda V sonlu kompozisyon serisine sahiptir ve U, V'nin sıfırdan farklı altmodülü olmak üzere $Soc(U) = Soc(V) \cap U \neq 0$ dır. $P(V)$, V'nin özaltmodüllerinin kümesi olmak üzere;
$A = \{X \in P(V) : Soc(V) \leq X\}$
$B = \{X \in P(V) : X \leq Soc(V), X \neq Soc\ (V)\}$
$C = P(V) - (A \cup B)$
Şeklinde üç küme tanımlansın. Açıktır ki $P(V) = A \cup B \cup C$ dir.
Şimdi $\chi(G(V))$ için bir üst sınır araştırılacaktır. İlk olarak; A'nın herhangi iki elemanı X ve Y için $X \cap Y \neq 0$'dır. Ayrıca $0 \neq U \leq V$ için $Soc(V) \cap U = Soc(U) \neq 0$ olduğu için, $G(V)$ çizgesini boyamak için en az $|A|$ tane renge ihtiyaç vardır. Üstelik B'nin elemanları A'nın elemanları ile komşu olduğu için, B'nin tepelerini boyamak için; A tepelerinden farklı renklere ihtiyaç vardır. Böylece $A \cup B$'yi boyalamak için en az $|A| + \chi(G(Soc(V)))$ renge ihtiyaç vardır. $V/Soc(V)$ nin alt modüllerinin sayısı m olduğu için; açıktır ki $|A| = m - 1$ olur.

<u>*İddia:*</u> $\chi(C) = (n-2)\chi(\bar{G})$'dir.
C'nin herhangi iki elemanı Y_1 ve Y_1 olsun. $Soc(Y_1) \in B$ olduğu açıktır. $Y_1 \cap Y_2 \neq 0$ ise $(Y_1 \cap Y_2) \cap Soc\ (V) \neq 0$'dır. Böylece $G(V)$ çizgesinde Y_1 ve Y_2 komşudur ancak ve ancak $Soc\ (Y_1)$ ve $Soc(Y_2)$ eşittir ya da $G(Soc(V))$ çizgesinde komşudur.
C üzerinde $\sim$ bir bağlantı aşağıdaki gibi tanımlansın. $Y_1 \sim Y_2$'dir ancak ve ancak $Soc(Y_1) = Soc(Y_2)$ 'dir. $\sim$ bir denklik bağlantısıdır:
$Y_1 \sim Y_1 \Leftrightarrow Soc(Y_1) = Soc(Y_1)$ yansıma
$Y_1 \sim Y_2 \Leftrightarrow Soc(Y_1) = Soc(Y_2) \Leftrightarrow Soc(Y_2) = Soc(Y_1) \Leftrightarrow Y_2 \sim Y_1$ simetri
$Y_1 \sim Y_2 \Leftrightarrow \mathrm{Soc}(Y_1) = \mathrm{Soc}(Y_2)$, $Y_2 \sim Y_3 \Leftrightarrow \mathrm{Soc}(Y_2) = \mathrm{Soc}(Y_3)$ olup $\mathrm{Soc}(Y_1) = \mathrm{Soc}(Y_3)$ $\Leftrightarrow Y_1 \sim Y_3$ geçişme özelliklerini sağlar.
U, $\bar{G}$ çizgesinde tepe olmak üzere, $\sim$ denklik bağlantısına göre denklik sınıfları $C_U = \{Z \in C : Soc\ (Z) = U\}$ şeklindedir. Ayrıca; C bu denklik sınıflarının ayrık birleşimidir. C_U denklik sınıfının her elemanı U'yu içerdiği için, (b) 'den $|C_U| \leq n -$

2 ‘dir. Bu nedenle; $G(V)$ çizgesinde, C_U denklik sınıfının elemanları komşudur. Böylece $\chi(C_U) = n - 2$ olur.

Ayrıca; herhangi farklı iki denklik sınıfları C_U ve C_U’ nın $Z \in C_U$ ve $Z' \in C_U{}'$ elemanları için, $Z \cap Z' \neq 0$’dır ancak ve ancak $\bar{G}$ çizgesinde U ve U' komşu tepelerdir. Sonuç olarak; $\chi(C) = n - 2)\ \chi\ (\bar{G})$ olur.

Tersine; teoremin (a)–(c) koşulları sağlansın. $\chi(\bar{G}) \leq \chi(G(\mathrm{Soc}(V)))$ olduğu için, (b) ve (c) koşullarından $\chi(G(V))$ ’nin üst sınırı sonlu olur.

Yardımcı Teorem 6.7.

(E. Yaraneri, 2013) $G(V)$ çizgesi sonlu renkle boyanabilsin. V’nin herhangi öz R-altmodülü için , $G(W)$ sonlu renkle boyanabilir ve m, V/W’nin altmodül sayısı olmak üzere $\chi(G(W)) + m - 1 \leq \chi(G(V)$ sağlanır.

İspat:

$P(V)$, V’nin öz altmodüllerinin kümesi olsun. Herhangi bir $W \in P(V)$ kümesi için $G(W)$ çizgesinin sonlu renkli boyanabildiği açıktır, çünkü $G(W)$, $G(V)$’nin alt çizgesidir. Dahası, Önerme 6.6(a) dan W’nun basit altmodüllerini var olduğunu ve (b)’den V/W’nun altmodülleri sayısının sonlu olduğu anlamına gelir.

$A = \{X \in P(V) : W \subseteq X\}$,

$B = \{X \in P(V) : X \subseteq W, X \neq W\}$ şeklinde iki küme tanımlansın.

Bir önceki önermeden $|A| + \chi(G(W))$ olduğu kolayca anlaşılır. $|A| = m - 1$ olduğundan $A \oplus B$ içinde $G(V)$’nin tepeleri olduğu düşünülürse en az $m - 1 + \chi(G(W))$ renk gerekli olduğu görülür, ispat tamamlanmış olur.

Uyarı 6.8.

Yarıbasit Artin bir modül bağlantısızdır.

İspat:

Önerme 2.4’ten açıktır.

Önerme 6.9.

V Artin bir modül ve $G(V)$ çizgesi bağlantılı olsun. V'nin tüm maksimal altmodüllerinin kesişimleri sıfırdan farklıdır.

İspat:

V Artin bir modül ve $G(V)$ çizgesi bağlantılı olsun. n V'nin maksimal altmodül sayısı olmak üzere n üzerinde tümevarım yapılacaktır.

$n = 2$ için Sonuç 2.6'dan $V_1 \cap V_2 \neq 0$'dır. $k < n$ için doğru olduğu kabul edilsin. V'nin maksimal altmodülleri $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ olarak adlandırılsın. Kabulden $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \dots \cap V_{n-1} \neq 0$'dır. $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \dots \cap V_n = 0$ olduğunu kabul edilsin. V=$(V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \dots \cap V_{n-1}) \oplus V_n$' dir. Bu $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \dots \cap V_{n-1}$'in basit olduğu anlamına gelir. Benzer sonuçlardan $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_{n-2} \cap V_n$ de basittir. Yardımcı Teorem 1.2.50 Modülarite kuralından $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_{n-2} = (V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_{n-1}) \oplus (V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_{n-2} \cap V_n)$'dir. Yardımcı Teorem 2.3'ten $V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_{n-2}$ bağlantısızdır. Böylece $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \dots \cap V_{n-1} = 0$ olur. Bu ise çelişkidir.

Önerme 6.10.

V Artin bir modül ve $G(V)$ çizgesi bağlantılı olsun. V'nin farklı maksimal altmodüllerinin arakesitleri birbirinden farklıdır.

İspat:

V Artin bir modül ve $G(V)$ çizgesi bağlantılı olsun. V_1, V_2 ve V_3; V'nin farklı maksimal altmodülleri ve $V_1 \cap V_3 = V_2 \cap V_3$ olsun.

$V = V_1 + V_2 \cap V_3 = V_1 + V_1 \cap V_3 = V_1$ olurdu. Bu ise çelişkidir. Böylece V'nin farklı maksimal altmodüllerinin arakesitleri birbirinden farklı olur.

Teorem 6.11.

V Artin bir modül ve $G(V)$ çizgesi bağlantılı olsun. $Soc(V)$, V'nin maksimal altmodüllerinden ve kesişimlerinden farklı ise n V'nin maksimal altmodül sayısı olmak üzere $\omega(G) \geq 2^n$ ve $\chi(G) \geq 2^n$'dir.

İspat:

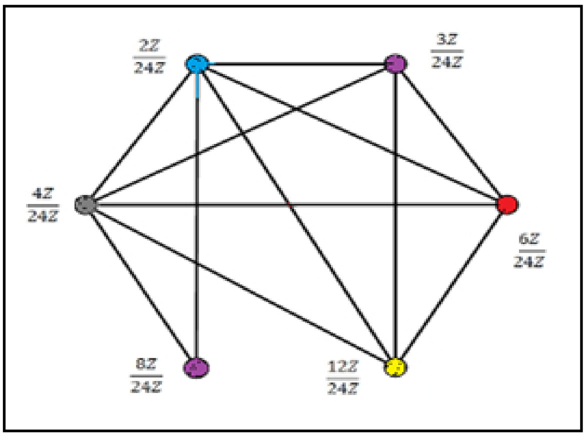
V Artin bir modül, $G(V)$ çizgesi bağlantılı ve $Soc(V)$, V'nin maksimal altmodüllerinden ve kesişimlerinden farklı olsun. n V'nin maksimal altmodül sayısı olmak üzere n üzerinde tümevarım yapılacaktır.

$n = 1$ olsun. V'nin maksimal altmodülü V_1 olarak adlandırılsın. V Artin modül olduğundan $Soc(V) \leq_e V$ olur. Böylece $Soc(V) \cap V_1 \neq 0$ olur. Yani klik sayısı en az ikidir. $Soc(V)$, V_1'e farklı renkler verilmesi gerektiğinden en az iki renk kullanılmalıdır. $n = 1$ için doğrudur.

$k < n$ için doğru olduğu kabul edilsin. V'nin maksimal altmodülleri $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n$ olarak adlandırılsın. Kabulden $\omega(G) \geq 2^{n-1}$ ve $\chi(G) \geq 2^{n-1}$'dir. Önerme 6.9'dan $V_1 \cap V_2 \cap V_3 \cap \dots \cap V_n \neq 0$ olur. $V_i \cap V_n \neq 0$; $i = 1,2, \dots, n-1$ için olduğu anlamına gelir. Çizgeye yeni eklenen tepe V_n'in diğer maksimaller ile mümkün olan bütün kesişmeleri sıfırdan farklı olduğundan $\omega(G) \geq 2^n$ ve $\chi(G) \geq 2^n$'dir.

Örnek 6.12.

Z_{24} modülünün 2 tane maksimal altmodülü vardır. Teorem 6.11'den $\omega(G) \geq 2^2$ ve $\chi(G) \geq 2^2$'dir. Gerçekten de modülün kesişim çizgesi incelendiğinde $\omega(G) = 5$ ve $\chi(G) = 5$ olduğu görülür.



Şekil 6.2. 6 tepeli, 12 ayrıtlı G(Z_{24}) çizgesi.

Teorem 6.13.

M bir modül ve $\mathcal{X}(G(M)) < \infty$'dur ancak ve ancak aşağıdaki koşullar sağlanır:
a) M'nin Loewy uzunluğu sonludur.
b) $n \in N$ olmak üzere, M'nin her basit altmodülü S için, $\frac{M}{S}$'nin altmodüllerinin sayısı n'den küçük yada eşittir.
Bu durumda m, M'nin uzunluğu olmak üzere, $\mathcal{X}\big(G(M)\big) < m + n$'dir.

İspat:
($\Rightarrow$) Önerme 6.6'dan açıktır.
($\Leftarrow$) $(a) ve$ (b) koşulları sağlansın ve X, M'nin sıfırdan farklı bir alt modülü olsun.2 durum vardır.
1.Durum: X, M'nin Loewy serisinde ise yani bir $\propto$ ordinal sayısı için $X = Soc_{\propto}(M)$ ise, (a)'dan $G(M)$ sonlu tane renk ile boyanır.
2.Durum: X, M'nin Loewy serisinde olmasın. (a)'dan $X \cap Soc(M) \neq 0$ olduğundan M'nin basit bir altmodülü vardır, öyle ki $S \subseteq X$'dir. (b)'den S'yi kapsayan sonlu tane altmodül olduğu için $\mathcal{X}(G(M)) < \infty$ olur.

Teorem 6.14.

Z_n için $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = \omega(G(Z_n))$'dir.

İspat: $\omega\big(G(Z_n)\big) = m$ olsun. $G(Z_n)$ çizgesinin en büyük alt çizgesinin m tepesi vardır ve bunlar $N_1, \dots, N_m$ olarak adlandırılsın. $X \in V(G(Z_n))$ olacak şekilde herhangi bir eleman alınsın..
İlk olarak $\mathcal{X}(G(Z_n)) \geq \omega(G(Z_n))$ olduğu gösterilecektir.
$\forall i = 1,2, \dots m$ için,
1.Durum: $X \cap N_i = 0$ olsun. Bu durumda $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = m$ olur.
2.Durum: $X \cap N_i \neq 0$ olsun. Bu durumda X'e yeni bir renk verilir. Böylece $\mathcal{X}(G(Z_n)) > \omega(G(Z_n))$ elde edilir. Sonuç olarak $\mathcal{X}(G(Z_n)) \geq \omega\big(G(Z_n)\big)$ olur.

Şimdi $\omega(G(Z_n)) \geq \mathcal{X}(G(Z_n))$ olduğu gösterilecektir. Eğer çizgenin boyama sayısı m+1 olsaydı $X \in V(G(Z_n))$ gibi herhangi bir tepe için $\forall i = 1,2,..n$ için $X \cap N_i \neq 0$ olurdu. Bu ise $\omega\big(G(Z_n)\big) = m$ olması ile çelişir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

Teorem 6.15.

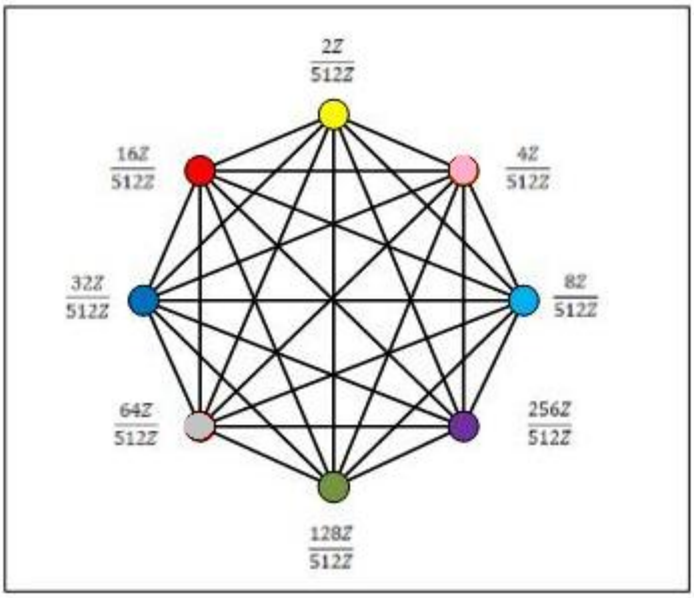
n,m birer doğal sayı ve p asal sayı olmak üzere eğer $n = p^m$ ise $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = m -$ 1'dir.

İspat:

$n = p^m$ ise n'nin 1 ve kendisinden başka bölenleri $p, p^2, \dots, \mathrm{p}^{\mathrm{m}-1}$'dir. Böylece $G(Z_n)$ çizgesi m-1 tepeli tam çizgedir ve $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = m - 1$'dir.

Örnek 6.16.

Z_{512} modülü incelensin. Z_{512} modülünün öz idealleri $\frac{2Z}{512Z}, \frac{4Z}{512Z}, \frac{8Z}{512Z}, \frac{16Z}{512Z}, \frac{32Z}{512Z}, \frac{64Z}{512Z}, \frac{128Z}{512Z}, \frac{256Z}{512Z}$'dir. Kesişim çizgesi Şekil 6.3'deki gibidir ve aşağıdaki gibi renklendirilebilir.



Şekil 6.3. 8 tepeli, 28 ayrıtlı G(Z_{512}) çizgesi.

Teorem 6.17.

p ve q birbirinden farklı asallar olsun. Eğer $n = pq$ ise $G(Z_n)$ çizgesinin tepeleri izole tepedir ve $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = 1$'dir.

İspat: Eğer $n = pq$ ise n'nin bölenleri p ve q olur. $pZ \cap qZ = pqZ$ olduğundan p ile q arasında bir yol yoktur. Böylece $G(Z_n)$ çizgesinin tepeleri p ve q izole tepedir ve $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = 1$'dir.

Örnek 6.18.

Z_{33} modülü incelensin. Z_{33} modülünün öz idealleri $\frac{3Z}{33Z}, \frac{11Z}{33Z}$'dir. Kesişim çizgesi Şekil 6.4'deki gibidir ve aşağıdaki gibi renklendirilebilir.

Şekil 6.4. 2 tepeli, 0 ayrıtlı $G(Z_{33})$ çizgesi.

Teorem 6.19.

n karesiz bir sayıdır ancak ve ancak t, n'nin asal bölenlerinin sayısı olmak üzere $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = 2^{t-1} - 1$'dir.

İspat:

($\Rightarrow$) n karesiz bir sayı olsun. n=$p_1 p_2 \dots p_t$ şeklinde asal çarpanlara ayrılsın. Z_n'nin idealleri şu şekilde karakterize edilsin.

$F_1 = \{p_i \; ; \quad i = 1, \dots, t\},$

$F_2 = \{p_i p_j \; ; \quad i \neq j = 1, \dots, t\},$

$F_3 = \{p_i p_j p_k ; \; i \neq j \neq k = 1, \dots, t\},$

.

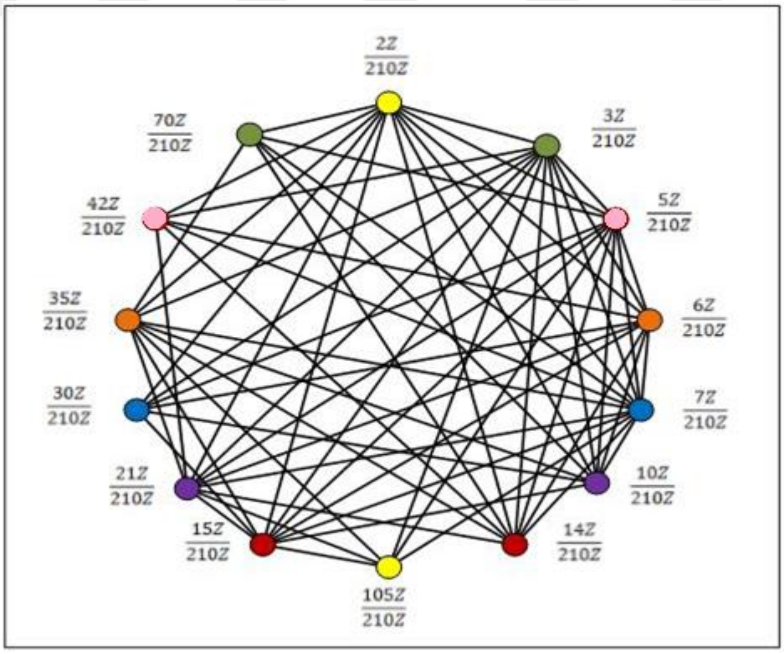
$F_{t-1} = \left\{ \mathrm{p}_{\mathrm{i}_1} \mathrm{p}_{\mathrm{i}_2} \dots \mathrm{p}_{\mathrm{i}_{t-1}} \; ; \; \mathrm{p}_{\mathrm{i}_j} \neq \mathrm{p}_{\mathrm{i}_k}, \;\; \mathrm{i}_1, \dots, \mathrm{i}_{t-1} = \in \{1, \dots, t\} \right\}$ olsun.

Z_n'nin tüm öz ideallerinin sayısı $2^t - 2$'dir. Her i$\in \{1, \dots, t\}$ için $\mathrm{p}_{\mathrm{i}} \mathrm{p}_2 \dots \mathrm{p}_t \in F_i \cap F_{t-i}$ olduğundan $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = \frac{2^t - 2}{2} = 2^{t-1} - 1$'dir.

($\Leftarrow$) p_i'ler birbirinden farklı asallar ve en az bir i$\in \{1, \dots, t\}$ için $a_i > 1$ olmak üzere, n= $\mathrm{p}_1^{\mathrm{a}_1} \mathrm{p}_2^{\mathrm{a}_2} \dots \mathrm{p}_t^{\mathrm{a}_t}$'dir. $\mathrm{p}_1 \mathrm{p}_2 \dots \mathrm{p}_t$ n'nin bir böleni olduğu için $G(Z_n)$ çizgesi boyama sayısı $2^{t-1} - 1$ olan bir alt çizgeye sahiptir. $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) > 2^{t-1} - 1$'dir. Bu ise kabul ile çelişir. Böylece n karesiz bir sayı olmalıdır.

Örnek 6.20.

Z_{210} modülü incelensin. Z_{210} modülünün öz idealleri $\frac{2Z}{210Z}, \frac{3Z}{210Z}, \frac{5Z}{210Z}, \frac{6Z}{210Z}, \frac{7Z}{210Z}, \frac{10Z}{210Z}, \frac{14Z}{210Z}, \frac{15Z}{210Z}, \frac{21Z}{210Z}, \frac{30Z}{210Z}, \frac{35Z}{210Z}, \frac{42Z}{210Z}, \frac{70Z}{210Z}, \frac{105Z}{210Z}$'dir. Kesişim çizgesi aşağıdaki gibi renklendirilebilir.



Şekil 6.5. 14 tepeli, 64 ayrıtlı $G(Z_{210})$ çizgesi.

Teorem 6.21.

a, b pozitif tamsayılar ve p, q birbirinden farklı asallar olsun.

Eğer $n = p^a q^b$ ise $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = (a+1)(b+1) - 3 - \min\{a-1, b-1\}$'dir.

İspat:

Eğer $n = p^a q^b$ (p, q asal) ise Z_n'nin idealleri şu şekilde karakterize edilsin.

$F_1 = \{p^i \;;\quad i = 1, \dots, a\}$

$F_2 = \{q^j \;;\quad j = 1, \dots, b\}$

$F_3 = \{p^a q^j \;;\quad j = 1, \dots, b-1\}$

$F_4 = \{p^i q^b \;;\quad i = 1, \dots, a-1\}$

$F_5 = \{p^i q^j \;;\quad 1 \leq i \leq a-1, \quad 1 \leq j \leq b-1\}$

Z_n'nin öz ideallerinin sayısı $(a+1)(b+1) - 2$'dir.

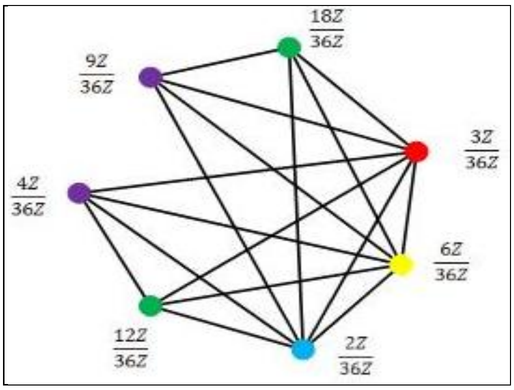
$F_1 \cap F_2$ de $p^a q^b$ 'lerin sayısı 1'dir.

$F_3 \cap F_4$ 'de $p^a q^b$ 'lerin sayısı $\min\{a-1, b-1\}$'dir.

O halde $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = (a+1)(b+1) - 3 - \min\{a-1, b-1\}$'dir.

Örnek 6.22.

Z_{36} modülü incelensin. Z_{36} modülünün öz idealleri $\frac{2Z}{36Z}, \frac{3Z}{36Z}, \frac{4Z}{36Z}, \frac{6Z}{36Z}, \frac{9Z}{36Z}, \frac{12Z}{36Z}, \frac{18Z}{36Z}$'dir. Kesişim çizgesi Şekil 6.6'daki gibidir ve aşağıdaki gibi renklendirilebilir.



Şekil 6.6. 7 tepeli, 17 ayrıtlı $G(Z_{36})$ çizgesi.

Teorem 6.23.

a, b, c pozitif tam sayılar ve p, q, r birbirinden farklı asallar olsun. Eğer $n = p^a q^b r^c$ ise $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = (a+1)(b+1)(c+1) - 5 - \min\{bc-1, a-1\} - \min\{ac-1, b-1\} - \min\{ab-1, c-1\}$'dir.

İspat:

$n = p^a q^b r^c$ ise Z_n'nin öz ideallerinin sayısı şu şekilde karakterize edilsin.

$F_1 = \{p^i \ ; \ i = 1, \dots, a\}$

$F_2 = \{q^\propto \ ; \ \propto = 1, \dots, b\}$

$F_3 = \{r^t \ ; \ t = 1, \dots, c\}$

$F_4 = \{p^i q^\propto \ ; \ i = 1, \dots, a; \ \propto = 1, \dots, b\}$

$F_5 = \{p^i r^t \ ; \ i = 1, \dots, a; \ t = 1, \dots, c\}$

$F_6 = \{q^\propto r^t \ ; \ \propto = 1, \dots, b; \ t = 1, \dots, c\}$

$F_7 = \{p^i q^\propto r^t \ ; \ i = 1, \dots, a-1; \ \propto = 1, \dots, b-1; \ t = 1,2, \dots, c-1\}$

$F_8 = \{p^i q^\propto r^c \ ; \ i = 1, \dots, a-1; \ \propto = 1, \dots, b-1\}$

$F_9 = \{p^a q^\propto r^t \ ; \ \propto = 1, \dots, b-1; \ t = 1, \dots, c-1\}$

$F_{10} = \{p^i q^b r^t \ ; \ i = 1, \dots, a-1; \ t = 1, \dots, c-1\}$

$F_{11} = \{p^a q^b r^t \ ; \ t = 1, \dots, c-1\}$

$F_{12} = \{p^i q^b r^c \ ; \ i = 1, \dots, a-1\}$

$F_{13} = \{p^a q^\propto r^c \ ; \ \propto = 1, \dots, b-1\}$

Z_n 'nin öz ideallerinn sayısı $(a+1)(b+1)(c+1) - 2$'dir.

Karakterize ettiğimiz bu kümelerin keşisimlerinde $p^a q^b r^c$ elemanı aranacak ve sayıları belirlenecektir. Bu kesişimleri sıfır olan tepe sayısını verir. Bu tepelere aynı renk verileceğinden toplam tepe sayısından çıkarıldığında çizgenin boyama sayısı bulunur.

$F_1 \cap F_6$ da $p^a q^b r^c$ 'lerin sayısı 1

$F_2 \cap F_5$ de $p^a q^b r^c$ 'lerin sayısı 1

$F_3 \cap F_4$ de $p^a q^b r^c$ 'lerin sayısı 1

F_4'de p^a'yı içeren elemanların sayısı $b-1$ tane,

F_5'de p^a'yı içeren elemanların sayısı $c-1$ tane ve

F_9'da p^a'yı içeren elemanların sayısı $(b-1)(c-1)$ tanedir.Toplam sayı $bc-1$'dir.

F_{12}'de p^a'ların eksik sayısı $a-1$'dir.

Bu kümelerin kesişiminden toplam oluşabilecek $p^a q^b r^c$'lerin sayısı $min\{bc-1, a-1\}$'dir. Ve aralarında bir yol olmadığından aynı renk ile boyanabilirler.

F_4'de q^b'yi içeren elemanların sayısı $a-1$ tane,

F_6'da q^b'yi içeren elemanların sayısı $c-1$ tane ve

F_{10}'da q^b'yi içeren elemanların sayısı $(a-1)(c-1)$ tanedir. Toplam sayı $ac-1$'dir.

F_{13}'de q^b'lerın eksik sayısı $b-1$'dir.

Bu kümelerin kesişiminden toplam oluşabilecek $p^a q^b r^c$'lerin sayısı $min\{ac-1, b-1\}$'dir. Ve aralarında yol olmadığından aynı renk ile boyanabilirler.

F_5'de r^c'yi içeren elemanların sayısı $a-1$ tane,

F_6'da r^c'yi içeren elemanların sayısı $b-1$ tane ve

F_8'da r^c'yi içeren elemanların sayısı $(a-1)(b-1)$ tanedir.Toplam sayı $ab-1$'dir.

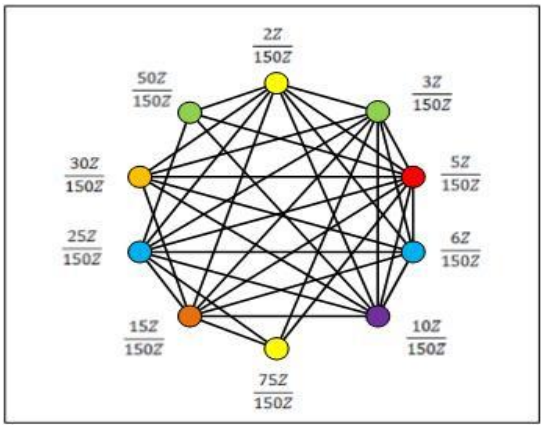
F_{11}'de r^c'lerın eksik sayısı $c-1$'dir.

Bu kümelerin kesişiminden toplam oluşabilecek $p^a q^b r^c$'lerin sayısı $min\{bc-1, a-1\}$'dir. Ve aralarında yol olmadığından aynı renk ile boyanabilirler.

$\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big) = (a+1)(b+1)(c+1) - 5 - \min\{bc-1, a-1\} - \min\{ac-1, b-1\} - \min\{ab-1, c-1\}$'dir.

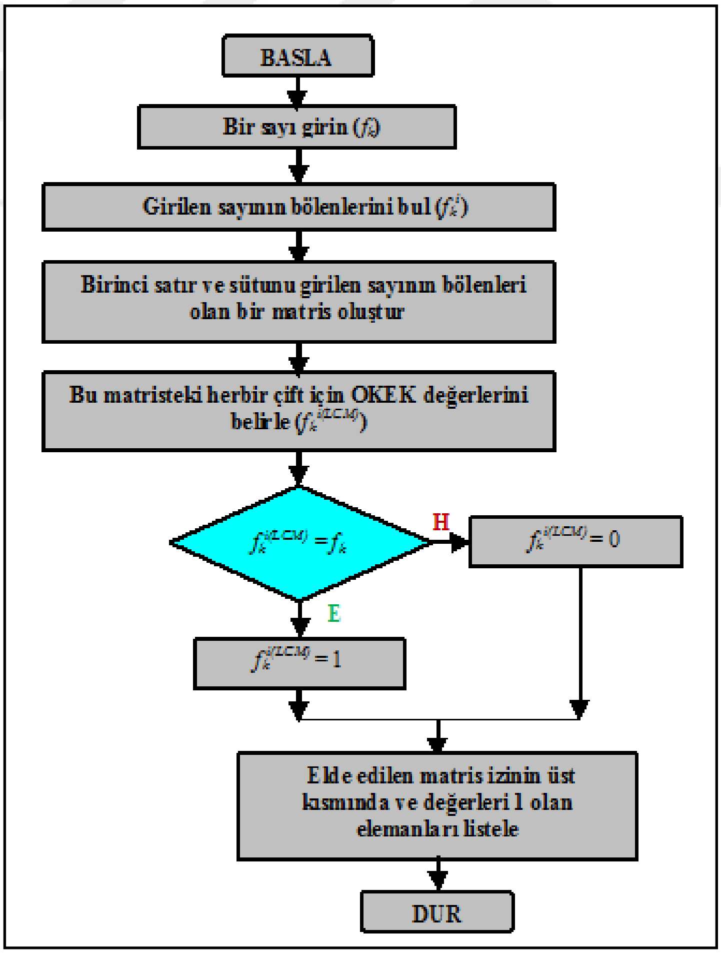
Örnek 6.24.

Z_{150} modülü incelensin. Z_{150} modülünün öz idealleri $\frac{2Z}{150Z}, \frac{3Z}{150Z}, , \frac{5Z}{150Z}, \frac{6Z}{150Z}, \frac{10Z}{150Z}, \frac{15Z}{150Z}, \frac{25Z}{150Z}, \frac{30Z}{150Z}, \frac{50Z}{150Z}, \frac{75Z}{150Z}$'dir. Kesişim çizgesi Şekil 6.7'deki gibidir ve aşağıdaki gibi renklendirilebilir.



Şekil 6.7. 10 tepeli, 35 ayrıtlı $G(Z_{150})$ çizgesi.

Diğer karekterizasyonlar için elle yapmak zorlaştığından aşağıdaki gibi bir algoritma geliştirilmiştir. Bu algoritma ile Z_n'nin idealleri karakterize edilmiştir.



Şekil 6.8. Algoritma akış diyagramı.

Bu algoritma C^{++} programına uygulandığında; aşağıdaki kod elde edilmiştir. C^{++} programında boyama sayısı bulan bir kod vardır. Bu koda entegre edildiğinde bir n doğal sayısı için $\mathcal{X}\big(G(Z_n)\big)$ bulunmuş olur.

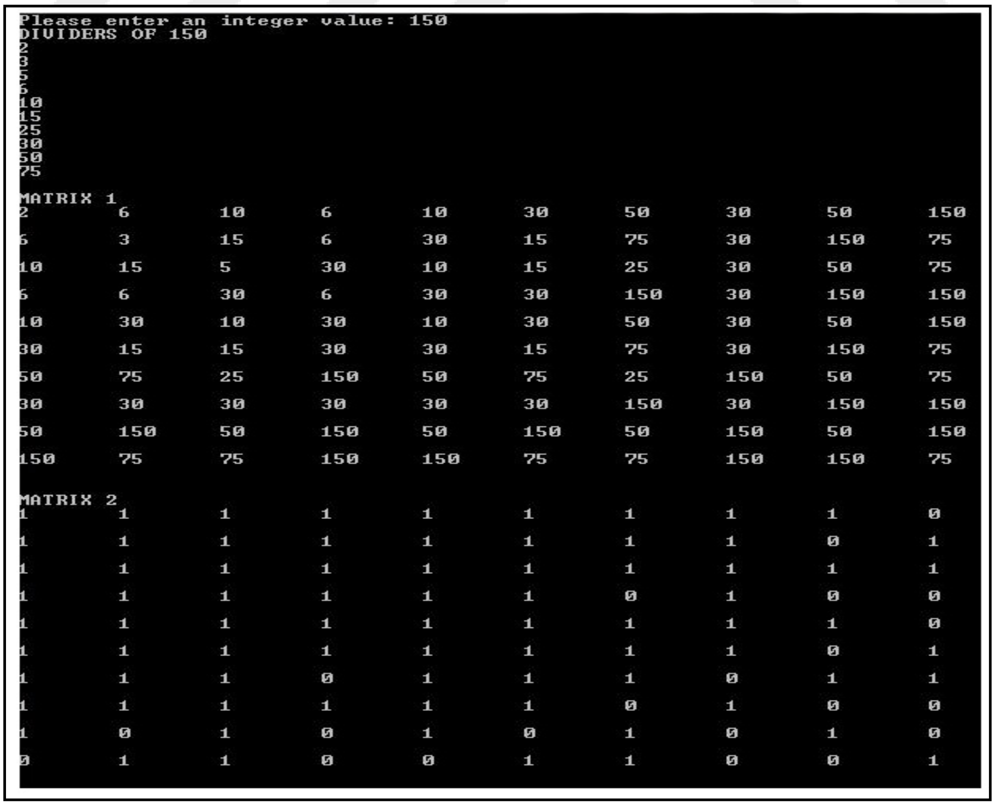
```
#include <iostream>
using namespace std;
int OKEK(int sayi1, int sayi2)
{
	int okek = 1;
	for (int i = sayi1; i <= sayi1 * sayi2; i++)
	{
		if (i % sayi1 == 0 && i % sayi2 == 0)
		{
			okek = i;
			break;
		}
	}
	return okek;
}
int BolenSayisi(int sayi)
{
	int sonuc = 0;
	for (int i = 2; i < sayi; i++)
	{
		if (sayi%i == 0)
		{
			sonuc++;
		}
	}
	return sonuc;
}
int main()
{
	int sayi;
	cout << "Please enter an integer value: ";
	cin >> sayi;
	int boyut = BolenSayisi(sayi);
	int *bolenler = new int[boyut];
	int sayac = 0;
	cout << "DIVIDERS OF " << sayi << endl;
	for (int i = 2; i < sayi; i++)
	{
		if (sayi % i == 0)
		{
			bolenler[sayac] = i;
```

```
				cout << bolenler[sayac] << endl;
				sayac++;
			}
		}
		cout << endl << "MATRIX 1" << endl;
		for (int i = 0; i < boyut; i++)
		{
			for (int j = 0; j < boyut; j++)
			{
			cout << OKEK(bolenler[i], bolenler[j]) << "\t";
			}
			cout << endl;
		}
		cout << endl << "MATRIX 2" << endl;
		for (int i = 0; i < boyut; i++)
		{
			for (int j = 0; j < boyut; j++)
			{
				if (OKEK(bolenler[i], bolenler[j]) == sayi)
				{
					cout << 0 << "\t";
				}
				else
				{
					cout << 1 << "\t";
				}
			}
			cout << endl;
		}
		cout << endl << "MATRIX 3" << endl;
		for (int i = 0; i < boyut; i++)
		{
			for (int j = 0; j < boyut; j++)
			{
				if (j>i)
				{
				if (OKEK(bolenler[i], bolenler[j]) == sayi)
					{
						cout << 0 << "\t";
					}
					else
					{
						cout << 1 << "\t";
					}
				}
				else
				{
					cout << "\t";
```

```
				}
			}
			cout << endl;
		}
		for (int i = 0; i < boyut; i++)
		{
			for (int j = 0; j < boyut; j++)
			{
				if (j > i)
				{
				if (OKEK(bolenler[i], bolenler[j]) != sayi)
					{
		cout << "m(" << (i + 1) << "," << (j + 1) << ")" << endl;
					}
				}
			}
		}
		system("PAUSE");
		return 0;
}
```

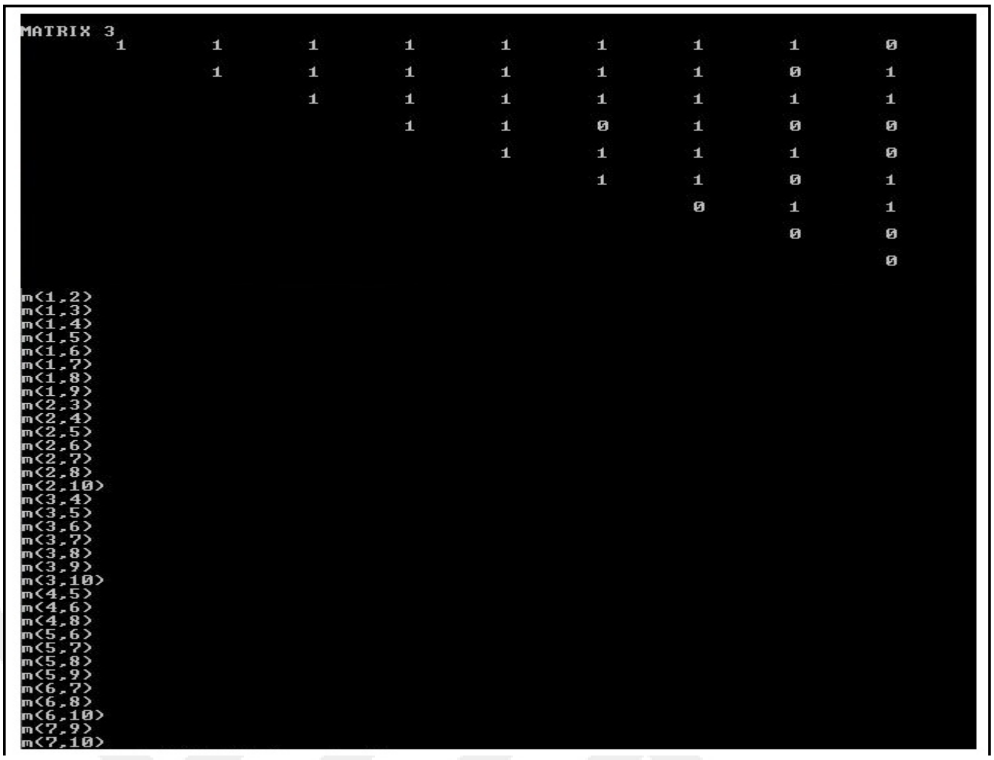
Örnek 6.25.

$\mathcal{X}\big(G(Z_{150})\big)$ için program çalıştırılmıştır.

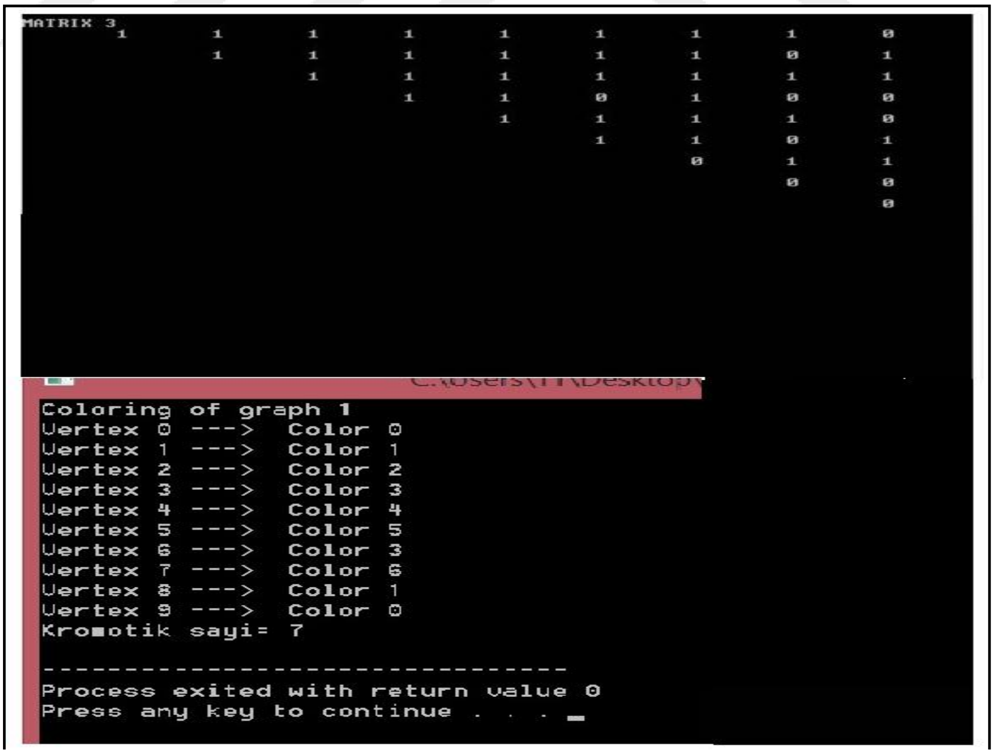


```
Please enter an integer value: 150
DIVIDERS OF 150
2
3
5
6
10
15
25
30
50
75

MATRIX 1
2       6       10      6       10      30      50      30      50      150
6       3       15      6       30      15      75      30      150     75
10      15      5       30      10      15      25      30      50      75
6       6       30      6       30      30      150     30      150     150
10      30      10      30      10      30      50      30      50      150
30      15      15      30      30      15      75      30      150     75
50      75      25      150     50      75      25      150     50      75
30      30      30      30      30      30      150     30      150     150
50      150     50      150     50      150     50      150     50      150
150     75      75      150     150     75      75      150     150     75

MATRIX 2
1       1       1       1       1       1       1       1       1       0
1       1       1       1       1       1       1       1       0       1
1       1       1       1       1       1       1       1       1       1
1       1       1       1       1       1       0       1       0       0
1       1       1       1       1       1       1       1       1       0
1       1       1       1       1       1       1       1       0       1
1       1       1       0       1       1       1       0       1       1
1       1       1       1       1       1       0       1       0       0
1       0       1       0       1       0       1       0       1       0
0       1       1       0       0       1       1       0       0       1
```

Şekil 6.9. $G(Z_{150})$'ye göre program çıktısı.



Şekil 6.10. $G(Z_{150})$'ye göre program çıktısı.



Şekil 6.11. $G(Z_{150})$'ye göre program çıktısı.

KAYNAKLAR

1. Akbaria, S., Tavallaeeb, H. A., and Khalashi Ghezelahmad, S. "Intersection graph of submodules of a modüle", ***J. Algebra Appl***., 10 (2011).

2. Anderson, F. W. and Fuller, K. R., "Rings and Categories of Modules", ***Springer –Verlag***, New York (1992).

3. Bacak, G. ve Beşeri, T. "Çizge Kuramına Genel Bakış", ***Matematik Dünyası*** (2002).

4. Bacs´o, G., Jung, H. A., and Tuza, Z., "Infinite versus finite graph domination", ***Discrete Math***.,310: 1495-1500 (2010).

5. Bosak, J., "The graphs of semigroups", Theory of Graphs and Application, ***Academic Press,*** New York, 119–125 (1964),.

6. Brouwer, A. E., Cohen, A. M., and Neumaier, A., "Distance-regular graphs", ***Springer-Verlag***, Berlin, (1989).

7. Buckley, F. and Harary, F. "Distance in Graphs", ***Perseus Press,*** US (1990).

8. Chakrabarty, I., Ghosh, S., Mukherjee, T. K., and Sen, M. K., "Intersection graphs of ideals of rings", ***Discrete Math***., 309: 5381-5392 (2009).

9. Clark, W. E., "Matching subspaces with complements in finite vector spaces", ***Bull. Inst. Combin. Appl.***, 6: 33-38 (1992).

10. Cs´ak´any, B. and Poll´ak, G., "The graph of subgroups of a finite group", ***Czechoslovak Math. J.*** 19: 241–247 (1969).

11. Dilworth, R. P., "Proof of a conjecture on finite modular lattices", ***Ann. of Math.*** 60 (2): 359-364 (1954).

12. Facchini, A. "Moduler Theory", ***Springer,*** New York (2010).

13. Flannery, D. L., "Submodule lattices of direct sums", ***Comm. Algebra***, 22 (10): 4067-4087 (1994).

14. Goodearl, K. R., "Singular torsion and splitting properties", ***American Mathematical Society, Memoirs of the AMS, No.124, Providence Rhode Island***, US (1972).

15. Goodearl, K. R., and Warfield, R. B., “An introduction to noncommutative Noetherian rings”, Second edition, ***Cambridge University Press*** (2004).

16. Haynes, T. W., Hedeniemi, S. T., and Slater, P. J., “Fundamentals of Domination in Graphs”, ***Marcel Dekker, Inc,*** New York (1998).

17. Hungerford, T. W., “Algebra”, ***Holt Reinhart and Winston,*** New York (1974).

18. Jafari, S. H., and Jafari Rad N., “Domination in the intersection graphs of rings and modules”, ***Ital. J. Pure Appl. Math.*** 28: 17-20 (2010).

19. Khuri, S. M. “Correspondence theorems for modules and their endomorphism rings”, ***Algebra, J***., 122 (2): 380-396 (1989).

20. Laison, J. D., and Qing, Y., “Subspace intersection graphs”, ***Discrete Math.,*** 310: 3413-3416 (2010).

21. Lam, T. Y., “Lectures on modules and rings”, ***Graduate Texts in Mathematics***, Springer-Verlag, New York, 189 (1999).

22. Northcott, D. G., “Lessons on Rings, Modules and Multiplicities”, ***Cambridge University Press***, Cambridge (1968).

23. Ore, O., “Theory of graphs”, ***American Mathematical Society Colloquium Publications,*** Vol. XXXVIII (1962).

24. Orhan Ertaş, N., and Koşar Sürül, S., “Some proporties of intersection graph of a modüle”, In Press (2016).

25. Orhan Ertaş, N., and Koşar Sürül, S., “On choromatic number of Z_n”, In Press (2016).

26. Shen, R., “Intersection graphs of subgroups of finite groups”, ***Czechoslovak Math. J.,*** 60: 945-950 (2010).

27. West, D. B., “Introduction to Graph Theory”, ***Prentice Hall***, Upper Saddle River, US (1996).

28. Yaraneri, E., “Intersection graph of a modüle”, ***Journal of Algebra and Its Applications*** (2013).

29. Zelinka, B., “Intersection graphs of finite abelian groups”, ***Czechoslovak Math. J.,*** 25: 171-174 (1975).

ÖZGEÇMİŞ

Sema KOŞAR SÜRÜL 1987 yılında Zonguldak'ta doğdu; ilk öğrenimini Zonguldak'ta ve orta öğrenimini Bartın'da tamamladı. 2005 yılında Marmara Üniversitesi Atatürk Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü'nde eğitime başlayıp 2010 yılında mezun oldu. 2011 yılından beri M.E.B'da matematik öğretmeni olarak çalışıyor.

ADRES BİLGİSİ:

Adres	: Esentepe Mahallesi Köşk Sokak Sürül Kent Sitesi E Blok No:2 Safranboulu- Karabük
Tel	: (543) 770 02 75
E-posta	: sema_kosar@mynet.com