STURM LIOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ARAŞTIRILMASI

Serap AKYÜZ

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

KARABÜK
Ocak 2016

Serap AKYÜZ tarafından hazırlanan "STURM LIOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ARAŞTIRILMASI" başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Şerif AMİROV ....
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir. 22/01/2016

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan: Yard. Doç. Dr. Murat DÜZ (KBÜ)	....
Üye : Yard. Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU (BEÜ)	....
Üye : Doç. Dr. Şerif AMİROV (KBÜ)	....

…../…../ 2016

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nevin AYTEMİZ ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

"Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim."

Serap AKYÜZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

STURM LIOUVILLE SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ARAŞTIRILMASI

Serap AKYÜZ

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Şerif AMİROV
Ocak 2016, 36 sayfa

İki bölümden oluşan bu çalışmanın, birinci bölümünde Sturm Liouville Teoremi ve Sturm Liouville problemi anlatılmıştır. İkinci bölümde sınır değer problemi, Green fonksiyonu ve Green formülü tanımlanmıştır. Devamında ise sınır değer problemlerinin Green formülü kullanılarak çözümünün elde edildiği ve belli şartlar sağlandığında sınır şartlarını sağlayan tek çözümünün olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Sözcükler : Sturm Liouville teoremi, sınır değer problemi, özdeğer, özfonksiyon, Green fonksiyonu, Green formülü.

Bilim Kodu : 204

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INVESTIGATION OF STURM LIOUVILLE BOUNDARY VALUE PROBLEM

Serap AKYÜZ

Karabük University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assoc. Prof. Şerif AMİROV

January 2016, 36 pages

In the first part of this work, which consists of two parts, definition of Sturm Liouville problem and Sturm Liouville theorem are explained. In the second part of it, boundary value problem, Green functions and Green formula are defined. Following, it is showed that, the solution of boundary value problem is obtained using Green formula and boundary value problem has a unique solution when some conditions are provided.

Key Words : Sturm Liouville theorem, boundary value problem, eigenvalues, eigenfunction, Green function, Green formula.

Science Code : 204

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$\dot{x}, x'$	: Aynı anlama gelmekte olup birinci mertebeden türevi göstermektedir.
$\ddot{x}, x''$	: Aynı anlama gelmekte olup ikinci mertebeden türevi göstermektedir.
$\bar{\lambda}$	: λ sayısının kompleks eşleniğidir.
$\bar{A}$	: A matrisinin genişletilmiş matrisidir.
$C[\alpha, \beta]$	: $[\alpha, \beta]$ aralığında sürekli olan fonksiyonlar kümesidir.
$C_2[\alpha, \beta]$	: $[\alpha, \beta]$ aralığında sürekli olan vektör fonksiyonlar kümesidir.
Φ	: Phi
α	: Alfa
β	: Beta
λ	: Lambda
γ	: Gama
φ	: Phi
ψ	: Psi
τ	: Tau

BÖLÜM 1

STURM LIOUVILLE TEOREMİ VE STURM LIOUVILLE PROBLEMİ

1.1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1: (X, d) bir metrik uzay ve f fonksiyonu X in kendi içine bir dönüşümü olsun. Her $x, y \in X$ için $d(fx, fy) \leq k.\,d(x, y), 0 \leq k < 1$ koşulunu sağlayan bir k sayısı varsa f ye bir daralma dönüşümü denir.

Teorem 1.1 (Banach Sabit Nokta Teoremi): Varsayalım ki $\mathcal{M}$ kümesinde tanımlı boş olmayan $\{\varphi\}$ fonksiyonlar ailesi aşağıdaki özellikleri sağlasın.

1) Her φ fonksiyonu sınırlıdır (her φ nin kendi sabiti olmak şartıyla). Yani, $|\varphi| \leq M_\varphi$ eşitsizliği sağlanır.

2) Her düzgün yakınsak fonksiyon dizisinin limiti de aynı kümeye aittir.

3) Bu kümenin her bir elemanı aynı kümenin elemanına dönüştüren A operatörü tanımlanmış olsun.

4) Her $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{M}$ fonksiyonu için

$$|A(\varphi_2) - A(\varphi_1)| \leq m.\sup|\varphi_2 - \varphi_1|\,, 0 \leq m < 1$$

olsun.

Bu durumda, $\varphi = A(\varphi)$ denkleminin $\mathcal{M}$ kümesinde ancak ve ancak tek çözümü vardır.

Teorem 1.2: $p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0$ ikinci mertebeden homojen diferansiyel denklemi verilsin. Burada $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$ birinci mertebeden sürekli fonksiyonlar olmak üzere verilen denklemin aşikâr olmayan çözümlerinin sıfırları sadedir. (Yani, çift katlı sıfırları yoktur.)

İspat: Tersini farz edelim. $p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0$ denkleminin aşikar olmayan $x(t) \neq 0$ çözümünün çift katlı çözümü olsun. Yani, $x(t_0) = 0$, $\dot{x}(t_0) = 0$ olsun. O zaman, Cauchy probleminin çözümünün teklik teoremine göre $x(t) \equiv 0$ olması gerekir. Bu ise farz ettiğimiz duruma zıttır. O halde verilen denklemin aşikar olmayan çözümlerinin sıfırları sadedir.

Teorem 1.3 (Ostrogradski-Liouville Teoremi): $p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0$ ikinci mertebeden homojen diferansiyel denkleminin lineer bağımsız özel çözümleri $x_1(t)$, $x_2(t)$ ise, o zaman

$$W(x_1, x_2)(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = c.e^{-\int \frac{p_1(t)}{p_0(t)} dt}$$

eşitliği doğrudur.

1.2. STURM LIOUVILLE TEOREMİ

Teorem 1.4:

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy}{dt}\right) + q(t)y = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy}{dt}\right) + q_1(t)y = 0 \tag{1.1'}$$

denklemlerine bakalım. Farz edelim ki $p(t), \dot{p}(t), q(t), q_1(t)$ fonksiyonları $[\alpha, \beta]$ aralığında sürekli olsun ve bu aralıkta

$$q_1(t) \geq q(t) \tag{1.2}$$

şartı sağlansın. Bu durumda, (1.1) denkleminin her bir çözümünün iki ardışık sıfırı arasında $(1.1)'$ denkleminin keyfi çözümünün en az bir sıfırı vardır [1].

İspat: Farz edelim ki $x(t)$ fonksiyonu (1.1) denkleminin t_1, t_2 $(\alpha \leq t_1 < t_2 \leq \beta)$ noktalarında sıfıra eşit olan bir çözümü olsun. $y(t)$ ise $(1.1)'$ denkleminin keyfi bir çözümü olsun. Bu durumda $[\alpha, \beta]$ aralığında

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx(t)}{dt}\right) + q(t)x(t) = 0,$$
$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy(t)}{dt}\right) + q_1(t)y(t) = 0$$

özdeşlikleri sağlanacaktır. Bu özdeşliklerden birincisini $y(t)$ ile, ikincisini $-x(t)$ ile çarparsak,

$$y(t)\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dx(t)}{dt}\right) + y(t)q(t)x(t) = 0,$$
$$-x(t)\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy(t)}{dt}\right) - x(t)q_1(t)y(t) = 0$$

olur. Son iki eşitliği taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{d}{dt}\left[y(t)p(t)\frac{dx(t)}{dt} - x(t)p(t)\frac{dy(t)}{dt}\right] = (q_1(t) - q(t))x(t)y(t)$$

özdeşliği elde edilir. Son özdeşliği t_1-den t_2-ye kadar integre edersek ve $x(t_1) = 0$, $x(t_2) = 0$ olduğunu dikkate alırsak,

$$y(t_2)p(t_2)\,\dot{x}(t_2) - y(t_1)p(t_1)\,\dot{x}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2}\big(q_1(t) - q(t)\big)x(t)y(t)dt \qquad (1.3)$$

eşitliğini buluruz. Genelliği bozmadan (t_1, t_2) aralığında $x(t) > 0$ kabul edelim. Bu durumda $\dot{x}(t_1) > 0, \dot{x}(t_2) < 0$ olur.

Teoremin ispatı için aşağıdaki durumlara bakalım.

1) $[t_1, t_2]$ aralığında $q_1(t) \not\equiv q(t)$ olsun. Burada (1.2) şartına göre $[t_1, t_2]$ aralığında en az bir $\bar{t} \in [t_1, t_2]$ vardır ki $q_1(\bar{t}) > q(\bar{t})$ olur. Diğer taraftan $q(t), q_1(t)$ fonksiyonları sürekli olduğundan $\bar{t}$ nün $[t_1, t_2]$ parçasına dahil olan öyle küçük komşuluğu vardır ki bu komşulukta $q_1(t) > q(t)$ eşitsizliği sağlanır. Gösterelim ki bu durumda, $y(t)$ çözümünün (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır. Tersini farz edelim. (t_1, t_2) aralığında $y(t)$ çözümünün sıfırının olmadığını farz edelim. Genelliği bozmadan bu aralıkta $y(t) > 0$ kabul edelim. Bu durumda, (1.3) eşitliğinin sol tarafı negatif sayı, ($y(t)$ parçasının uçlarında sıfıra eşit olabilir), (1.3) eşitliğinin sağ tarafı ise pozitif sayıdır. Bu çelişki gösteriyor ki $(1.1)'$ denkleminin $y(t)$ çözümünün (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

2) $[t_1, t_2]$ aralığında $q_1(t) \equiv q(t)$ olsun. Bu durumda $[t_1, t_2]$ aralığında (1.1) ve $(1.1)'$ denklemleri çakışırlar. O zaman ya $y(t) = cx(t)$ olmalıdır ya da $y(t)$ çözümünün (t_1, t_2) aralığında hiç olmazsa bir sıfırı vardır. Aksi takdirde (t_1, t_2) aralığında $y(t) > 0$ kabul edersek (1.3) eşitliğinden sağ tarafı sıfır, sol tarafı da negatif olur. Alınan çelişki gösteriyor ki $(1.1)'$ denkleminin $y(t)$ çözümünün (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

<u>Sonuç 1.1:</u> Farz edelim ki Sturm-Liouville teoreminin şartları sağlansın ve (t_1, t_2) aralığında $q_1(t) \not\equiv q(t)$ olsun. Bu durumda $(1.1)'$ denkleminin $y(t_1) = 0$ şartını sağlayan keyfi $y(t)$ çözümünün (t_1, t_2) aralığında en az bir sıfırı vardır.

Gerçekten (1.3) eşitliği,

$$y(t_2)p(t_2)\,\dot{x}(t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \big(q_1(t) - q(t)\big)x(t)y(t)dt \tag{1.4}$$

şekline girer ve (t_1, t_2) aralığında $x(t) > 0, y(t) > 0$ olduğunu kabul edersek, (1.4) eşitliğinin sol tarafı negatif veya sıfır ($y(t_2) = 0$ olabilir), sağ tarafı ise daima pozitif olur. Alınan çelişki sonucun doğruluğunu gösterir.

Sonuç 1.2: (1.1) denkleminin herhangi çözümünün iki ardışık sıfırı arasında, aynı denklemin bu çözüm ile lineer bağımlı olmayan başka bir çözümünün yegane sıfırı vardır.

Bu durumda diyebiliriz ki (1.1) denkleminin lineer bağımlı olmayan çözümlerinin sıfırları birbirine karşılıklı olarak sıralanırlar. Yani, bir çözümün herhangi iki sıfırı arasında öteki çözümün bir sıfırı vardır. Bu sonucu Sturm-Liouville teoreminde $q_1(t) \equiv q(t)$ alarak göstermek mümkündür.

Diğer bir sonuca geçmeden önce bir tanım verelim.

Tanım 1.2: İkinci mertebeden lineer homojen diferansiyel denklemin herhangi $[\alpha, \beta]$ aralığında verilmiş çözümünün bu parçada en az iki sıfırı var ise bu çözüm $[\alpha, \beta]$ parçasında "zıplar" şeklinde adlandırılır.

Sonuç 1.3: Farz edelim ki $[\alpha, \beta]$ aralığında $q(t) \leq 0$ olsun. Bu durumda (1.1) denkleminin çözümleri bu aralıkta zıplamazlar.

Tersini farz edelim. Yani $q(t) \leq 0$ olmasına rağmen (1.1) denkleminin aşikar olmayan öyle bir çözümü vardır ki bu çözümün bakılan parçada en az iki sıfırı vardır. O zaman Sturm-Liouville teoremine göre,

$$\frac{d}{dt}\left(p(t)\frac{dy}{dt}\right) = 0$$

denkleminin keyfi çözümünün $[t_1, t_2]$ aralığında en az bir sıfırı vardır. Fakat $y = c\ (c \neq 0)$ olmak şartıyla bu denklemin hiçbir noktasında sıfıra eşit olmayan çözümü olduğundan alınan çelişki sonucun doğruluğunu gösterir.

1.3. STURM LIOUVILLE PROBLEMİ

Tanım 1.3:

$$\ddot{x} + \{\lambda - q(t)\}x = 0 \tag{1.5}$$

denkleminin,

$$\begin{cases} a_{11}\, x(\alpha) + a_{12}\, \dot{x}(\alpha) = 0 \\ b_{21}\, x(\beta) + b_{22}\, \dot{x}(\beta) = 0 \end{cases} \tag{1.6}$$

sınır değer şartlarını sağlayan çözümlerine bakalım.

Burada λ parametre, $q(t)$ fonksiyonu $[\alpha, \beta]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyondur. $a_{11}, a_{12}, b_{21}, b_{22}$ reel sayılardır ve $a_{11}^2 + a_{12}^2 > 0$, $b_{21}^2 + b_{22}^2 > 0$ şartlarını sağlarlar.

Aşikârdır ki, $(1.5) - (1.6)$ probleminin her zaman aşikar çözümü vardır. Fakat λ parametresinin bazı değerleri için $(1.5) - (1.6)$ probleminin aşikar olmayan çözümü de olabilir. λ parametresinin $(1.5) - (1.6)$ probleminin aşikar olmayan çözümlerinin varlığını sağlayan değerlerine bu problemin özdeğerleri, bu özdeğerlere karşılık gelen çözümlerine ise $(1.5) - (1.6)$ problemin özfonksiyonları denir. Buna göre de, (1.5)-(1.6) probleminin özdeğer ve özfonksiyonlar hakkındaki problemine "Sturm-Liouville Problemi" denir.

Özel durumda,

$$\ddot{x} + \lambda x = 0 \tag{1.7}$$

denkleminin,

$$x(0) = 0, x(\pi) = 0 \tag{1.8}$$

şartlarını sağlayan çözümlerinin bulunması problemine bakalım.

Sturm-Liouville Teoreminden çıkan Sonuç 1.3'e dayanarak $\lambda \leq 0$ olduğunda, $(1.7)-(1.8)$ probleminin aşikar olmayan çözümleri yoktur. Buna göre, $(1.7)-(1.8)$ probleminin ancak $\lambda > 0$ olduğunda aşikar olmayan çözümü olabilir. Aşikardır ki, $\lambda > 0$ olduğunda (1.7) denkleminin genel çözümü, $x = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\, t + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, t$ şeklindedir ve (1.8) şartlarından birincisine esasen $c_1 = 0$ alırız. Demek ki, $(1.7)-(1.8)$ probleminin çözümü, $x = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\, t$ seçilmelidir. Diğer taraftan, (1.8) şartlarından ikincisine göre $c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$ olmalıdır. Buradan aşikardır ki $(1.7)-(1.8)$ probleminin aşikar olmayan çözümünün varlığı için $c_2 \neq 0$ olmalıdır ve λ parametresini öyle seçmek gerekir ki, $\sin\sqrt{\lambda}\,\pi = 0$ olsun. Bunun için $\sqrt{\lambda}\pi = k\pi$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ olmalıdır. Demek ki, $\lambda = k^2,\ k = 1,2,\ldots$ olduğunda $(1.7)-(1.8)$ probleminin aşikar olmayan çözümü vardır.

Böylelikle, $\lambda_k = k^2,\ k = 1,2,\ldots$ sayıları $(1.7)-(1.8)$ probleminin özdeğerleri, $x_k(t) = c_k \sin kt$ ise uygun özfonksiyonları olur. Burada c_k keyfi sabitlerdir. Buradan görüldüğü gibi $(1.7)-(1.8)$ probleminin sonsuz sayıda özdeğerleri ve özfonksiyonları vardır. Aşikardır ki, $x_1(t) = c_1 \sin t\ (c_1 \neq 0)$ özfonksiyonu $[0,\pi]$ kapalı aralığının ancak uç noktalarında, $x_2(t) = c_2 \sin 2t\ (c_2 \neq 0)$ özfonksiyonu $[0,\pi]$ kapalı parçasında üç noktada (uç noktalarda dahil olmak şartıyla) sıfıra eşit olur. Bu şekilde devam edersek, $x_l(t) = c_l \sin lt,\ (c_l \neq 0)$ özfonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında $l+1$ noktada sıfıra eşit olur. Göstermek mümkündür ki $k \neq m$ olduğunda,

$$\int_0^\pi x_k(t)\, x_m(t) dt = 0, \qquad k, m = 1,2,\ldots$$

olur. Bu durumda $(1.7)-(1.8)$ probleminin iki farklı özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldir.

Diğer taraftan, $x_k(t) = c_k \sin kt$ özfonksiyonlarında $c_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ alırsak, kolaylıkla gösterebiliriz ki,

$$\int_0^{\pi} x_k^2(t)\,dt = 1, \qquad k = 1,2,\ldots$$

şeklindedir. O zaman, $x_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kt$ özfonksiyonlarına normalleştirilmiş özfonksiyonları denir.

Aşikardır ki normalleştirilmiş $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin t, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin 2t, \ldots, \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kt, \ldots$ özfonksiyonları ortogonaldirler. Böyle özfonksiyonlar sistemine (1.7) – (1.8) probleminin ortonormal özfonksiyonlar sistemi denir. Uygun kavramlar daha genel olan, (1.5) – (1.6) problemi içinde doğrudur.

Teorem 1.5: Farz edelim ki λ_1, λ_2 (1.5) – (1.6) probleminin farklı özdeğerleri, $x(t,\lambda_1)$, $x(t,\lambda_2)$ ise uygun özfonksiyonları olsun. Bu durumda,

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t,\lambda_1)\, x(t,\lambda_2)dt = 0$$

olur.

İspat: Şarta göre $[\alpha,\beta]$ parçasında

$$\ddot{x}(t,\lambda_1) + \{\lambda_1 - q(t)\}x(t,\lambda_1) = 0,$$
$$\ddot{x}(t,\lambda_2) + \{\lambda_2 - q(t)\}x(t,\lambda_2) = 0$$

özdeşlikleri sağlanır. Bu özdeşliklerden birincisini $x(t,\lambda_2)$, ikincisini $-x(t,\lambda_1)$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak,

$$x(t,\lambda_2)\ddot{x}(t,\lambda_1) - x(t,\lambda_1)\ddot{x}(t,\lambda_2) + (\lambda_1 - \lambda_2)x(t,\lambda_1)x(t,\lambda_2) = 0$$

özdeşliği elde edilir. Bu özdeşliği α-dan β-ya kadar integrallersek ve

$$x(t,\lambda_2)\ddot{x}(t,\lambda_1) - x(t,\lambda_1)\ddot{x}(t,\lambda_2) = (x(t,\lambda_2)\dot{x}(t,\lambda_1) - x(t,\lambda_1)\dot{x}(t,\lambda_2))'$$

denklemini dikkate alırsak,

$$x(\beta,\lambda_2)\dot{x}(\beta,\lambda_1) - x(\beta,\lambda_1)\dot{x}(\beta,\lambda_2) - [x(\alpha,\lambda_2)\dot{x}(\alpha,\lambda_1) - x(\alpha,\lambda_1)\dot{x}(\alpha,\lambda_2)]$$
$$+ (\lambda_1 - \lambda_2)\int_{\alpha}^{\beta} x(t,\lambda_1)\,x(t,\lambda_2)dt = 0 \qquad (1.9)$$

eşitliğini elde ederiz.

Sınır şartlarının birincisine göre,

$$a_{11}x(\alpha,\lambda_1) + a_{12}\dot{x}(\alpha,\lambda_1) = 0,$$
$$a_{11}x(\alpha,\lambda_2) + a_{12}\dot{x}(\alpha,\lambda_2) = 0$$

olur. Şarta göre $a_{11}^2+a_{12}^2 > 0$ olduğundan, $x(\alpha,\lambda_1)\dot{x}(\alpha,\lambda_2) - x(\alpha,\lambda_2)\dot{x}(\alpha,\lambda_1) = 0$ alınır.

Aynı şekilde sınır şartlarının ikincisine göre,

$$x(\beta,\lambda_2)\dot{x}(\beta,\lambda_1) - x(\beta,\lambda_1)\dot{x}(\beta,\lambda_2) = 0$$

olur.

O zaman (1.9) eşitliği,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\int_{\alpha}^{\beta} x(t,\lambda_1)\,x(t,\lambda_2)dt = 0 \qquad (1.10)$$

şeklinde elde edilir. Teoremin ispatı gösterir ki $(1.5)-(1.6)$ probleminin iki farklı özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonları ortogonaldir.

Teorem 1.6: $(1.5)-(1.6)$ probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: Tersini farz edelim ki $\lambda_1 = u + iv, v \neq 0$ sayısı $(1.5)-(1.6)$ probleminin özdeğeri, $x(t,\lambda_1)$ ise uygun özfonksiyonu olsun. Şarta göre $q(t)$ reel fonksiyon, $a_{11}, a_{12}, b_{21}, b_{22}$ reel sayılar olduğundan $\overline{\lambda_1} = u - iv$ sayısı da özdeğerdir ve uygun özfonksiyonu $x(t,\overline{\lambda_1}) = \overline{x}(t,\lambda_1)$ olur. O zaman $\lambda_1 \neq \overline{\lambda_1}$ olduğundan (1.10) eşitliğinden alırız ki,

$$\int_{\alpha}^{\beta} x(t,\lambda_1)\,\overline{x}(t,\lambda_1)dt = \int_{\alpha}^{\beta} |x(t,\lambda_1)|^2 dt = 0$$

dır. Buradan da, $x(t,\lambda_1) \equiv 0$ elde edilir. Bu ise, λ_1 sayısının özdeğer olması şartına zıttır. Alınan çelişki teoremin doğruluğunu gösterir.

BÖLÜM 2

SINIR DEĞER PROBLEMLERİ VE GREEN FONKSİYONU

2.1. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Aşikârdır ki, $n.(n \geq 1)$ mertebeden diferansiyel denklemin genel çözümü n tane farklı sabite bağlıdır. Buna göre, n.mertebeden diferansiyel denklemin serbestlik derecesi n şeklinde adlandırılır.

Şimdiye kadar genel çözümden özel çözümü elde etmek için başlangıç şartlarını kullanıyorduk. Yani aranan fonksiyon ve onun türevleri serbest değişkenin aynı değerinde verilirdi. Fakat birçok problemde bakılan denklemin öyle bir çözümü bulmak istenir ki, bu çözüm serbest değişkenin farklı değerlerinde verilmiş şartları sağlasın. Bu problem sınır değer problemine bağlı bir problemdir.

Tanım 2.1: Farz edelim ki,

$$p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = 0 \tag{2.1}$$

denkleminin,

$$x(\alpha) = a_1, x(\beta) = a_2 \ (\alpha < \beta) \tag{2.2}$$

şartlarını sağlayan çözümünü bulalım. Burada α, β, a_1, a_2 verilmiş sayılardır. Bu probleme sınır değer problemi, (2.2) şartlarına da sınır şartları denir.

Aşikardır ki $(2.1) - (2.2)$ sınır değer probleminin çözümünü bulmak, geometrik olarak (2.1) denkleminin (α, a_1) , (β, a_2) noktalarından geçen integral eğrisinin bulunması demektir.

(2.1) denklemi için (2.2) den daha genel olan,

$$\begin{cases} a_{11}x(\alpha) + a_{12}\dot{x}(\alpha) + b_{11}x(\beta) + b_{12}\dot{x}(\beta) = a_1, \\ a_{21}x(\alpha) + a_{22}\dot{x}(\alpha) + b_{21}x(\beta) + b_{22}\dot{x}(\beta) = a_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

şartlarını da vermek mümkündür. Ayrıca,

$$\begin{cases} a_{11}x(\alpha) + a_{12}\dot{x}(\alpha) + b_{11}x(\beta) + b_{12}\dot{x}(\beta) = 0, \\ a_{21}x(\alpha) + a_{22}\dot{x}(\alpha) + b_{21}x(\beta) + b_{22}\dot{x}(\beta) = 0 \end{cases} \tag{2.3$'$}$$

şeklinde verilen $(2.3)'$ sınır şartlarına homojen sınır şartları, (2.1) denkleminin homojen sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemine ise homojen sınır değer problemi denir.

Basit örneklerle göstermek mümkündür ki, (2.1) denkleminin katsayıları belirli şartları sağladığında Cauchy probleminin tek çözümü vardır. Lakin sınır değer probleminin çözümü her zaman olmayabilir veya bazen sonsuz sayıdadır.

<u>Örnek 2.1:</u> $\ddot{x} + x = 0$ denkleminin $x(0) = 0,\ x(\pi) = 1$ şartlarını sağlayan çözümü yoktur. Gerçekten denklemin genel çözümü, $x = A\sin t + B\cos t$ şeklindedir. $x(0) = 0$ sağlayan çözümleri ise $x = A\sin t$ şeklindedir. Bellidir ki, bu çözümler içerisinde $x(\pi) = 1$ şartını sağlayan çözüm yoktur. Kolaylıkla kontrol etmek mümkündür ki, keyfi A için $x = A\sin t$ fonksiyonu bakılan denklemin $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$ şartlarını sağlayan çözümüdür. Lakin denklemin $x(0) = 0,\ x(\frac{\pi}{2}) = 1$ şartlarını sağlayan $x = \sin t$ tek çözümü vardır.

Aşikardır ki, $x_1(t)$, $x_2(t)$ fonksiyonları (2.1) denkleminin lineer bağımsız çözümleri ise denklemin genel çözümü

$$x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \tag{2.4}$$

şeklinde olur.

Demek ki, (2.3) şartlarını sağlayan çözümü de (eğer varsa) bu çözümler içerisindedir. Burada, c_1, c_2 keyfi sabitlerdir. Bu sabitleri öyle seçelim ki (2.4) çözümü (2.3) şartlarını sağlasın. O zaman c_1, c_2 bilinmeyen sabitlerine göre,

$$\begin{cases} A_{11}c_1 + A_{12}c_2 = a_1, \\ A_{21}c_1 + A_{22}c_2 = a_2 \end{cases} \tag{2.5}$$

cebirsel denklem sistemini elde ederiz.

Burada, $i = 1,2$ olmak üzere

$$A_{i1} = a_{i1}x_1(\alpha) + a_{i2}\dot{x}_1(\alpha) + b_{i1}x_1(\beta) + b_{i2}\dot{x}_1(\beta)\,,$$
$$A_{i2} = a_{i1}x_2(\alpha) + a_{i2}\dot{x}_2(\alpha) + b_{i1}x_2(\beta) + b_{i2}\dot{x}_2(\beta)$$

şeklindedir.

Sadelik için,

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & a_1 \\ A_{21} & A_{22} & a_2 \end{pmatrix}$$

ile ifade edelim.

Cebirden bilinen Kronecker-Kapelli teoremine esasen (2.5) sisteminin uyuşan olup olmamasına bağlı olarak,

1) $\det A \neq 0$ ise (2.5) sisteminin tek çözümü var ve (2.1) denkleminin (keyfi a_1, a_2 sayıları için), (2.3) şartlarını sağlayan yegane çözümü vardır. Buradan aynı zamanda $\det A \neq 0$ iken homojen sınır değer probleminin aşikâr çözümü vardır ve tersine homojen sınır değer probleminin aşikâr çözümü varsa determinantı sıfırdan farklıdır. Yani (2.1) denkleminin (2.3) şartlarını sağlayan yegâne çözümü vardır.

2) $\det A = 0$ ve a_1, a_2 sayılarından en az biri sıfırdan farklı ise A matrisinin rankı $\bar{A}$ matrisinin rankına eşit olduğunda (2.5) denklem sisteminin sonsuz sayıda çözümü vardır. Yani (2.1) denkleminin (2.3) şartlarını sağlayan sonsuz sayıda çözümü vardır demektir. A matrisinin rankı $\bar{A}$ matrisinin rankına eşit olmadığında ise (2.5) sistemi uyuşan değildir. Demek ki (2.1) denkleminin (2.3) şartlarını sağlayan çözümü yoktur.

3) $\det A = 0$ olduğunda (2.1) denkleminin $(2.3)'$ homojen sınır şartlarını sağlayan aşikar olmayan sonsuz sayıda çözümü vardır.

2.2. GREEN FONKSİYONU

Homojen olmayan

$$p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x = f(t) \tag{2.6}$$

denklemine bakalım. Bu denklemin $(2.3)'$ homojen sınır şartlarını sağlayan çözümünün yapılmasında Green fonksiyonunun mühim rolü vardır. Buna göre, önce Green fonksiyonunu tanımlayalım.

Tanım 2.2: Farz edelim ki $R = \{\alpha \leq t \leq \beta; \alpha \leq \tau \leq \beta\}$ karesinde tanımlı $G(t,\tau)$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlasın.

1) $G(t,\tau)$ fonksiyonu R karesinde süreklidir, her bir keyfi $\tau \in (\alpha,\beta)$ için $(\alpha,\tau), (\tau,\beta)$ aralıklarında t-ye göre ikinci mertebeden sürekli türevleri vardır ve bu aralıklarda (2.1) denklemini sağlıyordur.

2) $G_t(t,\tau)$ türevi $t = \tau$ noktasında birinci çeşit süreksizliğe sahiptir ve

$$G_t(\tau + 0,\tau) - G_t(\tau - 0,\tau) = \frac{1}{p_0(\tau)} \tag{2.7}$$

şartını sağlıyordur.

3) $G(t,\tau)$ fonksiyonu t-ye göre $(2.3)'$ homojen sınır değer şartlarını sağlar.

Öyle ki $G(t,\tau)$ fonksiyonu $(2.1)-(2.3)'$ sınır değer probleminin veya $L(x) = p_0(t)\ddot{x} + p_1(t)\dot{x} + p_2(t)x$ diferansiyel operatörünün $(2.3)'$ şartlarını sağlayan Green Fonksiyonu denir [1,2].

Green fonksiyonun varlığı hakkında aşağıdaki teoremi ispat edelim.

<u>Teorem 2.1:</u> Farz edelim ki (2.1) denkleminin $(2.3)'$ homojen sınır şartlarını sağlayan ancak aşikar çözümü vardır. Bu durumda $(2.1)-(2.3)'$ probleminin bir Green Fonksiyonu vardır [1].

<u>İspat:</u> Farz edelim ki $x_1(t)$, $x_2(t)$ fonksiyonları (2.1) denkleminin $[\alpha,\beta]$ parçasında lineer bağımsız çözümleridir. Green fonksiyonun tanımına göre, her bir $\tau \in (\alpha,\beta)$ için $(\alpha,\tau),(\tau,\beta)$ aralıklarında (2.1) denkleminin çözümü olduğundan,

$$G(t,\tau) = \begin{cases} c_1x_1(t) + c_2x_2(t), & t \in [\alpha,\tau] \\ \overline{c_1}x_1(t) + \overline{c_2}x_2(t), & t \in [\tau,\beta] \end{cases}$$

olmalıdır.

Burada $c_1, c_2, \overline{c_1}, \overline{c_2}$ şimdilik bilinmeyen sabitlerdir. Şarta göre $G(t,\tau)$ fonksiyonu R karesinde sürekli olduğundan,

$$c_1x_1(\tau) + c_2x_2(\tau) = \overline{c_1}x_1(\tau) + \overline{c_2}x_2(\tau)$$

olur.

Diğer taraftan (2.7) şartına göre,

$$\overline{c_1}\dot{x}_1(\tau) + \overline{c_2}\dot{x}_2(\tau) - c_1\dot{x}_1(\tau) - c_2\dot{x}_2(\tau) = \frac{1}{p_0(\tau)}$$

olur.

Aşikârdır ki, $\bar{c_1} - c_1 = \gamma_1$, $\bar{c_2} - c_2 = \gamma_2$ şeklinde ifade edersek, sonuncu iki eşitlikten γ_1, γ_2 bilinmeyenlerine göre lineer homojen olmayan

$$\begin{cases} x_1(\tau)\gamma_1 + x_2(\tau)\gamma_2 = 0 \quad , \\ \dot{x_1}(\tau)\gamma_1 + \dot{x_2}(\tau)\gamma_2 = \frac{1}{p_0(\tau)} \end{cases} \tag{2.8}$$

cebirsel denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sisteminin katsayılarından oluşturulan determinant (2.1) denkleminin lineer bağımsız $x_1(t)$, $x_2(t)$ çözümlerinden oluşturulan $W(t)$ Wronski determinantının $t = \tau$ noktasındaki değerlerine eşit olduğundan, sıfırdan farklıdır.

Buna göre (2.8) sisteminden γ_1, γ_2 yi bulalım:

$$W = \begin{vmatrix} x_1(\tau) & x_2(\tau) \\ \dot{x_1}(\tau) & \dot{x_2}(\tau) \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x_2(\tau) \\ \frac{1}{p_0(\tau)} & \dot{x_2}(\tau) \end{vmatrix} = -\frac{x_2(\tau)}{p_0(\tau)} \ ,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x_1(\tau) & 0 \\ \dot{x_1}(\tau) & \frac{1}{p_0(\tau)} \end{vmatrix} = \frac{x_1(\tau)}{p_0(\tau)}$$

olup (2.8) sisteminin yegane $\gamma_1(\tau) = \frac{W_1}{W} = -\frac{x_2(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)}$, $\gamma_2(\tau) = \frac{W_2}{W} = \frac{x_1(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)}$ çözümü vardır. O yüzden $\bar{c_1} = c_1 + \gamma_1(\tau)$, $\bar{c_2} = c_2 + \gamma_2(\tau)$ şeklindedir.

Demek ki,

$$G(t,\tau) = \begin{cases} c_1x_1(t) + c_2x_2(t), & t \in [\alpha, \tau] \\ (c_1 + \gamma_1(\tau))x_1(t) + (c_2 + \gamma_2(\tau))x_2(t), & t \in [\tau, \beta] \end{cases}$$

olur. Tanım 2.2 ye göre $G(t,\tau)$ fonksiyonu $(2.3)'$ sınır şartlarını sağlamalıdır. Bu şartlardan c_1, c_2 bilinmeyenlerine göre

$$A_{11}c_1 + A_{12}c_2 = -[a_{11}x_1(\alpha) + a_{12}\dot{x}_1(\alpha) + b_{11}x_1(\beta) + b_{12}\dot{x}_1(\beta)]\gamma_1 - [a_{11}x_2(\alpha) + a_{12}\dot{x}_2(\alpha) + b_{11}x_2(\beta) + b_{12}\dot{x}_2(\beta)]\gamma_2$$

$$A_{21}c_1 + A_{22}c_2 = -[a_{21}x_1(\alpha) + a_{22}\dot{x}_1(\alpha) + b_{21}x_1(\beta) + b_{22}\dot{x}_1(\beta)]\gamma_1 - [a_{21}x_2(\alpha) + a_{22}\dot{x}_2(\alpha) + b_{21}x_2(\beta) + b_{22}\dot{x}_2(\beta)]\gamma_2$$

denklem sistemini alırız.

Verilen teorem şartlarına göre homojen sınır değer probleminin yegâne aşikâr çözümü vardır. Demek ki $detA \neq 0$ dır. Buna göre, sonuncu denklem sisteminden $c_1(\tau)$, $c_2(\tau)$ tek şekilde bulunur. Bu değerleri yukarıda dikkate alırsak $\bar{c_1}(\tau)$, $\bar{c_2}(\tau)$ bilinmeyenlerini de bulabiliriz. Böylece,

$$G(t,\tau) = \begin{cases} c_1x_1(t) + c_2x_2(t), & t \in [\alpha,\tau] \\ \bar{c_1}x_1(t) + \bar{c_2}x_2(t), & t \in [\tau,\beta] \end{cases}$$

fonksiyonu $(2.1) - (2.3)'$ probleminin Green fonksiyonu olur.

Teorem 2.2: Farz edelim ki $G(t,\tau)$ fonksiyonu (2.1)-$(2.3)'$ probleminin Green fonksiyonu ve $[\alpha,\beta]$ aralığında $f(t)$ sürekli olsun. Bu durumda,

$$x(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G(t,\tau)f(\tau)d\tau \qquad (2.9)$$

formülünden bulunan $x(t)$ fonksiyonu (2.6) denkleminin $(2.3)'$ şartlarını sağlayan çözümüdür. (2.9) formülüne Green Formülü denir [3].

İspat: Green fonksiyonuyla bulunan $x(t)$ fonksiyonunun $(2.3)'$ şartlarının sağlanması, $G(t,\tau)$ fonksiyonunun t değişkenine göre verilen şartların sağlanmasından elde edilir. Gösterelim ki $x(t)$ fonksiyonu aynı zamanda (2.6) denklemini de sağlar. Bunun için Green formülünü,

$$x(t) = \int_{\alpha}^{t} G(t,\tau)f(\tau)d\tau + \int_{t}^{\beta} G(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

şeklinde yazarsak ve $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ türevlerini hesaplarsak,

$$\dot{x}(t) = G(t,t)f(t) + \int_{\alpha}^{t} G_t(t,\tau)f(\tau)d\tau - G(t,t)f(t) + \int_{t}^{\beta} G_t(t,\tau)f(\tau)d\tau$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} G_t(t,\tau)f(\tau)d\tau,$$

$$\ddot{x}(t) = G_t(t,t-0)f(t) + \int_{\alpha}^{t} G_{tt}(t,\tau)f(\tau)d\tau - G_t(t,t+0)f(t) + \int_{t}^{\beta} G_{tt}(t,\tau)f(\tau)d\tau$$
$$= [G_t(t,t-0) - G_t(t,t+0)]f(t) + \int_{\alpha}^{\beta} G_{tt}(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

elde edilir. Buradan $G_t(t,t-0) = G_t(t+0,t)$ ve $G_t(t,t+0) = G_t(t-0,t)$ olduğunu dikkate alırsak, (2.7) şartına göre,

$$\ddot{x}(t) = \frac{1}{p_0(t)}f(t) + \int_{\alpha}^{\beta} G_{tt}(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

elde ederiz. Öyle ki, Green formülü ile bulunan $x(t)$ fonksiyonu için

$$L[x(t)] \equiv p_0(t)\ddot{x}(t) + p_1(t)\dot{x}(t) + p_2(t)x(t)$$
$$= f(t) + \int_{\alpha}^{\beta} [p_0(t)G_{tt}(t,\tau) + p_1(t)G_t(t,\tau) + p_2(t)G(t,\tau)]f(\tau)d\tau$$

eşitliğini alırız.

Şarta göre keyfi $\tau \in (\alpha, \beta)$ için $G(t, \tau)$ fonksiyonu $(\alpha, \tau), (\tau, \beta)$ aralıklarında (2.1) denkleminin çözümü olduğundan, $L[x(t)] \equiv f(t)$ özdeşliğini elde ederiz. Böylece teorem ispatlanmış olur.

<u>Örnek 2.2:</u> $(2t+1)\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = f(t)$ denkleminin $x(0) - e^2 x(1) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$ sınır şartlarını sağlayan çözümünü bulalım.

Bunun için öncelikle $(2t+1)\ddot{x} + 4t\dot{x} - 4x = 0$ homojen denkleminin lineer bağımsız çözümlerini bulalım. Denklemin bir tane özel çözümünü $x = at^n + bt^{n-1} + \cdots$ şeklinde arayalım. Denklemde yerine yazıp t nin aynı dereceden katsayılarını kıyaslayarak $n = 1$ olduğunu buluruz. Bu durumda, özel çözüm $x = at + b$ şekline dönüşür. Çözümün bu ifadesini denklemde yerine yazıp katsayıları bulursak $a = 1, b = 0$ olduğunu elde ederiz. Demek ki, $x_1(t) = t$ çözümü homojen denklemin bir özel çözümüdür.

Ayrıca Ostrogradski-Liouville Teoremine göre, diğer bir $x_2(t)$ özel çözümünü arayalım:

$\begin{vmatrix} t & x_2(t) \\ 1 & \dot{x}_2(t) \end{vmatrix} = c.e^{-\int \frac{4t}{2t+1}dt}$ eşitliğinde gerekli hesaplamalar yapılırsa,

$$t.\dot{x}_2(t) - x_2(t) = c.e^{-2t}(2t+1)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını $\frac{1}{t^2}$ ile çarpıp gerekli işlemler yapılırsa,

$$\frac{1}{t^2}\left(t.\dot{x}_2(t) - x_2(t)\right) = c.e^{-2t}\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)$$

$$\left(\frac{x_2(t)}{t}\right)' = c.e^{-2t}\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)$$

$$\frac{x_2(t)}{t} = c\int e^{-2t}\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$x_2(t) = t.c\int e^{-2t}\left(\frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$x_2(t) = t.c\left[2\int e^{-2t}.\frac{1}{t}dt + \int e^{-2t}.\frac{1}{t^2}dt\right]$$

$$x_2(t) = t.c\left[2\int e^{-2t}.\frac{1}{t}dt - \frac{1}{t}e^{-2t} - 2\int e^{-2t}.\frac{1}{t}dt\right]$$

$$x_2(t) = ce^{-2t}$$

özel çözümü bulunur. Burada $c = 1$ alırsak, $x_2(t) = e^{-2t}$ özel çözümünü elde ederiz.

Aşikârdır ki $x_1(t) = t$, $x_2(t) = e^{-2t}$ çözümleri lineer bağımsızdır. Buna göre bakılan problemin Green fonksiyonunu,

$$G(t,\tau) = \begin{cases} c_1 t + c_2 e^{-2t}, & 0 \le t \le \tau, \\ \bar{c_1} t + \bar{c_2} e^{-2t}, & \tau \le t \le 1 \end{cases}$$

şeklinde aramalıyız.

$$W = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ \dot{x_1}(t) & \dot{x_2}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & e^{-2t} \\ 1 & -2e^{-2t} \end{vmatrix} = -(2t+1)e^{-2t} \ ,$$

$$W_1 = \begin{vmatrix} 0 & x_2(t) \\ \dfrac{1}{p_0(t)} & \dot{x_2}(t) \end{vmatrix} = -\frac{x_2(t)}{p_0(t)} = -\frac{e^{-2t}}{(2t+1)} \ ,$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} x_1(t) & 0 \\ \dot{x_1}(t) & \dfrac{1}{p_0(t)} \end{vmatrix} = \frac{x_1(t)}{p_0(t)} = \frac{t}{2t+1} \quad \text{ve} \quad p_0(t) = 2t+1$$

ifadelerini yerine yazarsak,

$$\bar{c_1} - c_1 = \gamma_1(\tau) = \frac{W_1}{W} = -\frac{x_2(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)} = \frac{1}{(2\tau+1)^2} \ ,$$

$$\bar{c_2} - c_2 = \gamma_2(\tau) = \frac{W_2}{W} = \frac{x_1(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)} = -\frac{\tau e^{2\tau}}{(2\tau+1)^2}$$

elde ederiz. Buradan $\bar{c_1} = c_1 + \frac{1}{(2\tau+1)^2}$, $\bar{c_2} = c_2 - \frac{\tau e^{2\tau}}{(2\tau+1)^2}$ olur. Bu değerleri Green fonksiyonunun ifadesinde yerine yazıp sınır şartlarını sağlatırsak,

$$G(t,\tau)=\begin{cases} c_1t+c_2e^{-2t}, & 0\le t\le\tau, \\ \left(c_1+\dfrac{1}{(2\tau+1)^2}\right)t+\left(c_2-\dfrac{\tau e^{2\tau}}{(2\tau+1)^2}\right)e^{-2t}, & \tau\le t\le 1\end{cases}$$

$x(0)-e^2x(1)=0,\ \dot{x}(0)=0$ sınır şartlarından $c_1-\frac{\tau e^{2(\tau-1)}}{(2\tau+1)^2}+\frac{1}{(2\tau+1)^2}=0,\ c_1-2c_2=0$ eşitlikleri elde edilir. Buradan,

$$\begin{cases} c_1-\dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}}{(2\tau+1)^2}+\dfrac{1}{(2\tau+1)^2}=0, \\ c_1-2c_2=0\end{cases}$$

denklem sistemini alırız. c_1 , c_2 bilinmeyenlerini bularak genel teorideki kural ile

$$G(t,\tau)=\begin{cases} \left(\dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}-1}{(2\tau+1)^2}\right)t+\left(\dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}-1}{2(2\tau+1)^2}\right)e^{-2t}, & 0\le t\le\tau, \\ \left(\dfrac{\tau e^{2(\tau-1)}}{(2\tau+1)^2}\right)t+\left(\dfrac{\tau(e^{-2}-2)e^{2\tau}-1}{2(2\tau+1)^2}\right)e^{-2t}, & \tau\le t\le 1\end{cases}$$

kurabiliriz.

O zaman Teorem 2.2 den,

$$x(t)=\int_0^1 G(t,\tau)f(\tau)d\tau$$

fonksiyonu bakılan problemin çözümü olur.

2.3. LİNEER OLMAYAN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ VE GREEN FONKSİYONU

$$\ddot{x}=f(t,x) \tag{2.10}$$

denkleminin,

$$x(\alpha) = A \;, x(\beta) = B \tag{2.11}$$

sınır şartlarını sağlayan çözümünün bulunması problemine bakalım. Burada $\alpha, \beta \ (\alpha < \beta)$, A, B verilmiş reel sayılardır.

Bu problemin çözümü,

$$x = y + \frac{B-A}{\beta-\alpha} t + \frac{\beta A-\alpha B}{\beta-\alpha} \tag{2.12}$$

değişken değiştirmesi ile

$$\ddot{y} = F(t, y) \tag*{(2.10)'}$$

denkleminin,

$$y(\alpha) = 0 \;, y(\beta) = 0 \tag*{(2.11)'}$$

sınır şartlarını sağlayan problemin çözümünün bulunması problemine dönüştürülsün.

Burada,

$$F(t, y) = f\left(t, y + \frac{B - A}{\beta - \alpha} t + \frac{\beta A - \alpha B}{\beta - \alpha}\right)$$

olur.

Green formülünü kullanarak gösterelim ki, bakılan problemin çözümünün bulunması, belli integral denkleminin probleminin çözümünün bulunmasına denktir.

$$G(t, \tau) = \begin{cases} -\dfrac{(t-\alpha)(\beta-\tau)}{\beta-\alpha}, & \alpha \le t \le \tau, \\ -\dfrac{(\tau-\alpha)(\beta-t)}{\beta-\alpha}, & \tau \le t \le \beta \end{cases}$$

fonksiyonunun $\ddot{y} = 0$ denkleminin $(2.11)'$ sınır şartlarını sağlayan Green fonksiyonu olduğunu gösterelim:

$\ddot{y} = 0$ denkleminin $y_1(t) = t$, $y_2(t) = 1$ lineer bağımsız iki özel çözümü olmak üzere Green fonksiyonunu,

$$G(t,\tau) = \begin{cases} c_1 t + c_2, & \alpha \leq t \leq \tau, \\ \bar{c_1} t + \bar{c_2}, & \tau \leq t \leq \beta \end{cases}$$

şeklinde aramalıyız.

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ \dot{y_1}(t) & \dot{y_2}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, W_1 = -\frac{y_2(t)}{p_0(t)} = -1, W_2 = \frac{y_1(t)}{p_0(t)} = t$$

ve $p_0(t) = 1$ ifadelerini yerine yazarsak,

$$\bar{c_1} - c_1 = \gamma_1(\tau) = \frac{W_1}{W} = -\frac{x_2(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)} = 1$$

$$\bar{c_2} - c_2 = \gamma_2(\tau) = \frac{W_2}{W} = \frac{x_1(\tau)}{p_0(\tau)W(\tau)} = -\tau$$

elde ederiz. Buradan $\bar{c_1} = c_1 + 1$, $\bar{c_2} = c_2 - \tau$ olur. Bu değerleri Green fonksiyonunun ifadesinde yerine yazıp sınır şartlarını sağlatalım.

$$G(t,\tau) = \begin{cases} c_1 t + c_2, & \alpha \leq t \leq \tau, \\ (c_1 + 1)t + c_2 - \tau, & \tau \leq t \leq \beta \end{cases}$$

olmak üzere,

$y(\alpha) = 0,\ y(\beta) = 0$ sınır şartlarından $c_1 = \frac{-\beta+\tau}{\beta-\alpha}$, $c_2 = \alpha\left(\frac{\beta-\tau}{\beta-\alpha}\right)$ eşitlikleri elde edilir. c_1 , c_2 bilinmeyenlerini Green fonksiyonun ifadesinde yerine yazarsak

$$G(t,\tau) = \begin{cases} -\dfrac{(t-\alpha)(\beta-\tau)}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq t \leq \tau, \\ -\dfrac{(\tau-\alpha)(\beta-t)}{\beta-\alpha}, & \tau \leq t \leq \beta \end{cases}$$

kurabiliriz.

$(2.10)'$ denkleminin sağ tarafını bilinen fonksiyon gibi bakarak bu denklemin $(2.11)'$ sınır şartlarını sağlayan çözümün bulunması problemi Green formülüne göre,

$$y(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G(t,\tau)F(\tau,y(\tau))d\tau$$

integral denkleminin çözümünün bulunması problemine dönüşüyor. Elde ettiğimiz integral denkleminde (2.12) dönüşümünü dikkate alırsak $(2.10)-(2.11)$ sınır değer probleminin çözümü için,

$$x(t) = \varphi_0(t) + \int_{\alpha}^{\beta} G(t,\tau)f(\tau,x(\tau))d\tau \tag{2.13}$$

integral denklemini alırız. Burada,

$$\varphi_0(t) = \frac{B-A}{\beta-\alpha}t + \frac{\beta A-\alpha B}{\beta-\alpha}$$

olur.

Teorem 2.2 de kullanılan ispat yöntemine esasen kolaylıkla gösterebiliriz ki (2.13) denkleminin her bir sürekli çözümü $(2.10)-(2.11)$ sınır değer probleminin çözümüdür.

<u>Teorem 2.3:</u> Farz edelim ki $f(t,x)$ fonksiyonu $D=\{\alpha \le t \le \beta; -\infty < x < +\infty\}$ sınırsız bölgesinde sürekli olsun ve

a) $|f(t,x)-f(t,y)| \le K|x-y|$,

b) $K(\beta-\alpha)^2 < 8$

şartlarını sağlasın. Bu durumda (2.10) denkleminin (2.11) sınır şartlarını sağlayan tek çözümü vardır [1].

İspat: $[\alpha,\beta]$ aralığında sürekli olan fonksiyonlar kümesini $C[\alpha,\beta]$ ile gösterelim ve bu kümede,

$$A(\varphi(t)) = \varphi_0(t) + \int_\alpha^\beta G(t,\tau) f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

operatörüne bakalım. Green fonksiyonu $G(t,\tau)$ ve $f(t,x)$ fonksiyonları sürekli olduğundan her bir $\varphi(t) \in C[\alpha,\beta]$ fonksiyonu için,

$$\psi(t) \equiv A\big(\varphi(t)\big) = \varphi_0(t) + \int_\alpha^\beta G(t,\tau) f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ parçasında süreklidir. O zaman, *A* operatörü $C[\alpha,\beta]$ kümesinde bir operatördür.

Teoremin a) şartına göre keyfi iki $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in C[\alpha,\beta]$ uzayından fonksiyonlar için,

$$\begin{aligned} \big|A\big(\varphi_2(t)\big) - A\big(\varphi_1(t)\big)\big| &\le K \int_\alpha^\beta |G(t,\tau)||\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau)|d\tau \\ &\le K \sup_{\alpha \le \tau \le \beta} |\varphi_2(\tau) - \varphi_1(\tau)| \int_\alpha^\beta |G(t,\tau)|d\tau \end{aligned} \tag{2.14}$$

eşitsizliği sağlanır.

Green fonksiyonun ifadesine göre,

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G(t,\tau)|d\tau = \int_{\alpha}^{t} |G(t,\tau)|d\tau + \int_{t}^{\beta} |G(t,\tau)|d\tau = \frac{(\beta-t)(t-\alpha)^2}{2(\beta-\alpha)} + \frac{(t-\alpha)(\beta-t)^2}{2(\beta-\alpha)}$$

olur.

Şimdi, $H(t) = \frac{(\beta-t)(t-\alpha)^2}{2(\beta-\alpha)} + \frac{(t-\alpha)(\beta-t)^2}{2(\beta-\alpha)}$ fonksiyonunun $[\alpha,\beta]$ parçasında en büyük değerini $t = \frac{\alpha+\beta}{2}$ noktasında aldığını gösterelim:

$$H'(t) = \frac{-(t-\alpha)^2 + 2(\beta-t)(t-\alpha)}{2(\beta-\alpha)} + \frac{(\beta-t)^2 - 2(t-\alpha)(\beta-t)}{2(\beta-\alpha)}$$
$$= \frac{(\beta-t)^2 - (t-\alpha)^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{(\alpha+\beta-2t)(\beta-\alpha)}{2(\beta-\alpha)} = \alpha+\beta-2t$$

olup, $H'(t) = \alpha+\beta-2t = 0$ eşitliğinden $t = \frac{\alpha+\beta}{2}$ bulunur.

Buradan,

$$H\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \frac{\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^2}{2(\beta-\alpha)} + \frac{\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2}{2(\beta-\alpha)} = \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}$$

elde edilir.

Buna göre de,

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G(t,\tau)|d\tau \le \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}, \alpha \le t \le \beta$$

olup bu eşitsizliği (2.14) de dikkate alırsak,

$$\left|A(\varphi_2(t)) - A(\varphi_1(t))\right| \le \frac{K(\beta-\alpha)^2}{8} \sup_{\alpha\le t\le\beta} |\varphi_2(t) - \varphi_1(t)| \qquad (2.15)$$

olur.

Buradan, teoremin b) şartını da dikkate alırsak, *A* operatörü $C[\alpha,\beta]$ uzayında daralma operatörüdür. O zaman sabit nokta prensibine esasen alırız ki (2.13) integral denkleminin $C[\alpha,\beta]$ uzayında tek çözümü vardır. Doğal olarak (2.10) – (2.11) sınır değer probleminin de çözümü tektir.

<u>Sonuç 2.1:</u> Farz edelim ki $f(t,x)$ fonksiyonu kapalı $D_R = \{\alpha \le t \le \beta; -R \le x \le R\}$ bölgesinde teorem şartını sağlıyor ve

$$\sup_{\alpha\le t\le\beta} |\varphi_0(t)| + \frac{(\beta-\alpha)^2}{8} \sup_{D_R} |f(t,x)| \le R \tag{2.16}$$

olsun. Bu durumda, (2.10) – (2.11) sınır değer probleminin tek çözümü vardır.

<u>İspat:</u> $C[\alpha,\beta]$ uzayında $\sup_{\alpha\le t\le\beta} |\varphi(t)| \le R$ şartını sağlayan $\varphi(t)$ fonksiyonlar kümesini $\Phi = \{\varphi(t)\}$ ile ifade edelim ve yukarıda tanımladığımız *A* operatörüne Φ kümesinde bakalım.

Keyfi $\varphi(t) \in \Phi$ fonksiyonu için,

$$|A(\varphi(t))| \le |\varphi_0(t)| + \int_\alpha^\beta |G(t,\tau)||f(\tau,\varphi(\tau)|d\tau$$
$$\le \sup_{\alpha\le t\le\beta} |\varphi_0(t)| + \frac{(\beta-\alpha)^2}{8} \sup_{D_R} |f(t,x)|$$

eşitsizliği sağlanır.

Buradan (2.16) şartına göre, $|A(\varphi(t))| \le R$ elde ederiz. Yani *A* operatörü Φ kümesinde bir operatördür.

Diğer taraftan teoremin a) şartına göre $\varphi(t), \psi(t) \in \Phi$ için (2.15) eşitsizliği sağlanır ve b) şartına göre *A* operatörü Φ kümesinde daralma operatörüdür. Böylelikle Φ

kümesi ve A operatörü için sabit nokta prensibinin şartları sağlanır. Buna göre de (2.13) integral denkleminin Φ kümesinde yegâne çözümü vardır.

Not edelim ki, teorem şartları sağlanmadığı zaman sınır değer probleminin çözümü olmayabilir. Bunu göstermek için bir örnek yapalım.

<u>Örnek 2.3:</u> $\ddot{x} = 1 - x,\ x(0) = 0,\ x(\pi) = 0$ sınır değer problemine bakalım. Bu problemde, $K = 1,\ K(\beta - \alpha)^2 = \pi^2 > 8$ olur. Aşikârdır ki, $x = c_1 \sin t + c_2 \cos t + 1$ ailesi $\ddot{x} = 1 - x$ denkleminin genel çözümüdür ve bu aile içerisinde $x(0) = 0$, $x(\pi) = 0$ şartlarını sağlayan fonksiyon yoktur.

Şimdi,

$$\ddot{x} = f(t, x, \dot{x}) \tag{2.17}$$

denkleminin,

$$x(\alpha) = 0, \qquad x(\beta) = 0 \tag{2.18}$$

sınır değer şartını sağlayan çözümünün bulunması problemine bakalım.

Yukarıdaki muhakemelere dayanarak, (2.17) denkleminin (2.18) sınır değer şartını sağlayan çözümü aynı zamanda,

$$x(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G(t, \tau) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau$$

denkleminin de çözümüdür.

Burada,

$$\dot{x}(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G_t(t,\tau) f(\tau, x(\tau), \dot{x}(\tau)) d\tau$$

olduğuna göre (2.17) – (2.18) sınır değer probleminin çözümünün bulunması,

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G(t,\tau) f\big(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)\big) d\tau \ , \\ \varphi_2(t) = \int_{\alpha}^{\beta} G_t(t,\tau) f\big(\tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau)\big) d\tau \end{cases} \tag{2.19}$$

integral denklem sisteminin çözümünün bulunması problemine dönüştürülür.

<u>Teorem 2.4:</u> Farz edelim ki $f(t, x_1, x_2)$ fonksiyonu, $\pi = \{ \alpha \le t \le \beta \ ; -\infty < x_i < +\infty, i = 1,2 \}$ aralığında sürekli olsun ve

a) $|f(t, x_1, x_2) - f(t, y_1, y_2)| \le K_1|x_1 - y_1| + K_2|x_2 - y_2|$,

b) $\frac{K_1(\beta-\alpha)^2}{8} + \frac{K_2(\beta-\alpha)}{2} < 1$

şartlarını sağlasın. Bu durumda, (2.17) denkleminin (2.18) sınır değer şartlarını sağlayan tek çözümü vardır [1].

<u>İspat:</u> Teorem ispatı için (2.19) integral denklem sisteminin yegâne sürekli çözümünün varlığını göstermemiz yeterlidir. Bu amaçla bileşenleri $[\alpha, \beta]$ parçasında sürekli olan $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$ vektör fonksiyonlar kümesini $C_2[\alpha, \beta]$ ile ifade edelim. Her bir $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \in C_2[\alpha, \beta]$ fonksiyonuna,

$$\|\varphi\| = \max\left\{ \sup_{\alpha \le t \le \beta} |\varphi_1(t)| \, , \frac{\beta-\alpha}{4} \sup_{\alpha \le t \le \beta} |\varphi_2(t)| \right\}$$

sayısını karşılık getirelim. Bu sayıya $\varphi(t)$ vektör fonksiyonunun normu denir. Eğer $C_2[\alpha, \beta]$ kümesinden aldığımız $\{\varphi^n(t)\}$ fonksiyonlar dizisi ve $\varphi(t)$ fonksiyonu için

$\lim_{n\to\infty}\|\varphi^n(t)-\varphi(t)\|=0$ olursa, $\{\varphi^n(t)\}$ vektör fonksiyonlar dizisi $\varphi(t)$ vektör fonksiyonuna norma göre yakınsar denir. Normun tanımından bellidir ki bu vektör fonksiyonlar dizisinin bileşenlerine yapılmış $\{\varphi_1^n(t)\},\{\varphi_2^n(t)\}$ dizileri uygun olarak $\varphi(t)$ fonksiyonunun bileşenlerine, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ fonksiyonların, $[\alpha,\beta]$ parçasında düzgün yakınsarlar. Buna göre $C_2[\alpha,\beta]$ kümesinde norm anlamında yakınsayan her bir dizinin limiti de bu kümeye dahildir. $C_2[\alpha,\beta]$ kümesinden aldığımız her bir $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ vektör fonksiyonuna bileşenleri

$$\begin{cases}\psi_1(t)=\displaystyle\int_\alpha^\beta G(t,\tau)f\big(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)\big)d\tau \quad, \\ \psi_2(t)=\displaystyle\int_\alpha^\beta G_t(t,\tau)f\big(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)\big)d\tau\end{cases}$$

formülleri ile tanımlanan $\psi(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t))$ vektör fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu durumda $C_2[\alpha,\beta]$ kümesinden bir operatör tanımlayalım ve bu operatörü A ile gösterelim. Operatörün tanımına göre $C_2[\alpha,\beta]$ kümesinden aldığımız $\varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ vektör fonksiyonu aynı kümenin elemanı olan $A\big(\varphi(t)\big)=\big(A(\varphi_1(t)),A(\varphi_2(t))\big)$ vektör fonksiyonu karşılık getirilmiştir.

Gösterelim ki bu operatör $C_2[\alpha,\beta]$ kümesinde daralma operatörüdür. Keyfi iki $\varphi(t)=\big(\varphi_1(t),\varphi_2(t)\big)$, $\psi(t)=(\psi_1(t),\psi_2(t))$ vektör fonksiyonları için,

$$A\big(\varphi_1(t)\big)-A\big(\psi_1(t)\big)=\int_\alpha^\beta G(t,\tau)\big[f\big(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)\big)-f\big(\tau,\psi_1(\tau),\psi_2(\tau)\big)\big]d\tau\,,$$

$$A\big(\varphi_2(t)\big)-A\big(\psi_2(t)\big)=\int_\alpha^\beta G_t(t,\tau)\big[f\big(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau)\big)-f\big(\tau,\psi_1(\tau),\psi_2(\tau)\big)\big]d\tau$$

eşitlikleri sağlanırsa, teoremin a) şartına göre

$$|A(\varphi_1(t)) - A(\psi_1(t))|$$

$$\leq \int_{\alpha}^{\beta} |G(t,\tau)|d\tau \left[K_1 \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)|\right];$$

$$|A(\varphi_2(t)) - A(\psi_2(t))|$$

$$\leq \int_{\alpha}^{\beta} |G_t(t,\tau)|d\tau \left[K_1 \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| + K_2 \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)|\right]$$

olur.

Green fonksiyonun ifadesine göre, $\int_{\alpha}^{\beta} |G_t(t,\tau)|d\tau \leq \frac{\beta-\alpha}{2}$, $\alpha \leq t \leq \beta$ olduğunu gösterelim:

$$G_t(t,\tau) = \begin{cases} -\dfrac{(\beta-\tau)}{\beta-\alpha}, & \alpha \leq t \leq \tau \\ \dfrac{\tau-\alpha}{\beta-\alpha}, & \tau \leq t \leq \beta \end{cases}$$

olur. Buradan $\int_{\alpha}^{\beta} |G_t(t,\tau)|d\tau$ integralini hesaplarsak,

$$\int_{\alpha}^{t} -\frac{(\beta-\tau)}{\beta-\alpha} d\tau + \int_{t}^{\beta} \frac{(\tau-\beta)}{\beta-\alpha} d\tau = \left(\frac{\alpha t - \beta t}{(\beta-\alpha)} + \frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}\right) = -t + \frac{(\beta+\alpha)}{2}$$

sonucunu elde ederiz.

İfadeyi büyütmek için son eşitlikte $t = \alpha$ alırsak, $-\alpha + \frac{(\beta+\alpha)}{2} = \frac{\beta-\alpha}{2}$ eşitliği elde edilir. O halde,

$$\int_{\alpha}^{\beta} |G_t(t,\tau)|d\tau \leq \frac{\beta-\alpha}{2}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

olur. O zaman,

$$\begin{aligned}
&|A(\varphi_1(t)) - A(\psi_1(t))| \\
&\qquad \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\left[K_1 \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| \right. \\
&\qquad \left. + K_2 \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)|\right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&|A(\varphi_2(t)) - A(\psi_2(t))| \\
&\qquad \leq \frac{\beta-\alpha}{2}\left[K_1 \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| \right. \\
&\qquad \left. + K_2 \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)|\right]
\end{aligned}$$

olur. Buradan $C_2[\alpha,\beta]$ kümesindeki normun tanımına göre,

$$\begin{aligned}
&\|A(\varphi) - A(\psi)\| \\
&\qquad = \max\left\{\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |A(\varphi_1(t)) \right. \\
&\qquad \left. - A(\psi_1(t))|, \frac{\beta-\alpha}{4} \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |A(\varphi_2(t)) - A(\psi_2(t))|\right\} \\
&\qquad \leq \frac{(\beta-\alpha)^2}{8}\left[K_1 \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| \right. \\
&\qquad \left. + K_2 \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)|\right] \\
&\qquad = \frac{K_1(\beta-\alpha)^2}{8} \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| \\
&\qquad + \frac{K_2(\beta-\alpha)}{2} \cdot \frac{(\beta-\alpha)}{4} \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)| \\
&\qquad \leq \left[\frac{K_1(\beta-\alpha)^2}{8} + \frac{K_2(\beta-\alpha)}{2}\right] \|\varphi - \psi\|
\end{aligned}$$

olur.

Böylelikle $C_2[\alpha,\beta]$ kümesinden aldığımız $\varphi(t), \psi(t)$ fonksiyonları için

$$\|A(\varphi)-A(\psi)\| \leq \left[\frac{K_1(\beta-\alpha)^2}{8}+\frac{K_2(\beta-\alpha)}{2}\right]\|\varphi-\psi\| \tag{2.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

Burada teoremin b) şartına göre *A* operatörü $C_2[\alpha,\beta]$ kümesinde daralma operatörüdür. Demek ki (2.19) integral denklem sisteminin yegâne sürekli çözümü vardır.

Sonuç 2.2: Farz edelim ki $f(t,x_1,x_2)$ fonksiyonu $\pi_R = \{\alpha \leq t \leq \beta\,;\, -R_1 \leq x_1 \leq R_1; -R_2 \leq x_2 \leq R_2\}$ aralığında sürekli olsun. Teoremin a), b) şartları ve $M(\beta-\alpha)^2 \leq 8R_1$, $M(\beta-\alpha) \leq 2R_2$, $M = \sup_{\pi_R}|f(t,x_1,x_2)|$ şartları sağlansın. Bu durumda (2.17) – (2.18) sınır değer probleminin tek çözümü vardır.

İspat: $C_2[\alpha,\beta]$ kümesinden bileşenleri $\sup_{\alpha\leq t\leq\beta}|\varphi_1(t)| \leq R_1$, $\sup_{\alpha\leq t\leq\beta}|\varphi_2(t)| \leq R_2$ şartlarını sağlayan $\varphi(t) = (\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ fonksiyonlar kümesini Φ_2 ile gösterelim. Aşikârdır ki, Φ_2 kümesinin norm anlamında yakınsak her bir vektör fonksiyon dizisinin limiti de bu kümeye aittir. Gösterelim ki, teoremin ispatı esnasında tanımlanan *A* operatörü Φ_2 kümesinden Φ_2 kümesine bir operatör olup aynı zamanda bir daralma operatörüdür.

Gerçekten her bir $\varphi(t) \in \Phi_2$ için,

$$A(\varphi_1(t)) = \int_\alpha^\beta G(t,\tau)f(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau))d\tau\,,$$

$$A(\varphi_2(t)) = \int_\alpha^\beta G_t(t,\tau)f(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau))d\tau$$

olduğundan,

$$|A(\varphi_1(t))| \leq \int_\alpha^\beta |G(t,\tau)||f(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau))|d\tau \leq \frac{M(\beta-\alpha)^2}{8},$$

$$|A(\varphi_2(t))| \leq \int_\alpha^\beta |G_t(t,\tau)||f(\tau,\varphi_1(\tau),\varphi_2(\tau))|d\tau \leq \frac{M(\beta-\alpha)}{2}$$

elde edilir.

Buradan, Sonuç 2.2 de verilen sonuncu şarta göre,

$$\sup_{\alpha\leq t\leq\beta} |A(\varphi_1(t))| \leq R_1 \, , \sup_{\alpha\leq t\leq\beta} |A(\varphi_2(t))| \leq R_2$$

olur.

O zaman, $A(\varphi(t)) = (A(\varphi_1(t)), A(\varphi_2(t)))$ vektör fonksiyonu Φ_2 kümesine dahil olup, yani *A* operatörü Φ_2 kümesinden Φ_2 kümesine bir operatördür ve Φ_2 kümesinden aldığımız her $\varphi(t)$, $\psi(t)$ vektör fonksiyonları için (2.20) eşitsizliği doğrudur. Buna göre de *A* operatörü Φ_2 kümesinde daralma operatörüdür. Sabit nokta prensibine göre de (2.19) integral denklem sisteminin Φ_2 kümesinde yegâne çözümü vardır. Sonuç olarak, (2.17) – (2.18) sınır değer probleminin tek çözümü vardır.

KAYNAKLAR

1. Ehmedov, G., Hesenov, K. ve Yakubov, M., "Adi Diferansiyel Denklemler Teorisi", ***Maarif Yayınevi***, Bakü (1978).

2. Hasanov, E., Uzgören, G. ve Büyükaksoy, A., "Diferansiyel Denklemler", ***Papatya Yayıncılık***, İstanbul (2002).

3. Nevitan, B. M, ve Sarkisyan, İ. S, "Spektral Teorisine Giriş", ***Nauka Yayınevi,*** Moskova (1970).