GRAFLARDA ORTALAMA ALT BAĞIMLILIK SAYISININ BULUNMASI ÜZERİNE

2019
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK

Gamze KOÇAY

GRAFLARDA ORTALAMA ALT BAĞIMLILIK SAYISININ BULUNMASI ÜZERİNE

Gamze KOÇAY

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi
Olarak Hazırlanmıştır

KARABÜK
Nisan 2019

Gamze KOÇAY tarafından hazırlanan “GRAFLARDA ORTALAMA ALT BAĞIMLILIK SAYISININ BULUNMASI ÜZERİNE” başlıklı bu tezin Yüksek Lisans Tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Tufan TURACI ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir. 18/04/2019

Ünvanı, Adı SOYADI (Kurumu)	İmzası
Başkan : Prof. Dr. Ayşe NALLI (KBÜ)	....
Üye : Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN (ZBEÜ)	....
Üye : Doç. Dr. Tufan TURACI (KBÜ)	....

...../...../2019

KBÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu, bu tez ile, Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Filiz ERSÖZ ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdür V.

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Gamze KOÇAY

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

GRAFLARDA ORTALAMA ALT BAĞIMLILIK SAYISININ BULUNMASI ÜZERİNE

Gamze KOÇAY

Karabük Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı:
Doç. Dr. Tufan TURACI
Nisan 2019, 39 Sayfa

Günümüzde iletişim ağları; internet, tedarik zinciri, elektrik devreleri ve bunun gibi birçok sistemde geniş bir biçimde yer alır. Bir iletişim ağını modellerken bu ağın dayanıklılığının hesabı ağ tasarımcıları için önemlidir. Matematiksel olarak bir iletişim ağı graflar ile modellenir. İletişim ağının dayanıklılığını ölçmek için graf teoride birçok dayanıklılık parametresi tanımlanmıştır. Bu tez çalışmasında ilk olarak genel graf tanımları, son zamanlarda tanımlanmış ortalama alt bağımlılık sayısı tanımı ve bununla ilgili teoremler verilmiştir. Daha sonra, tekerlek graf içeren graf yapıları için ortalama alt bağımlılık sayıları hesaplanmıştır. Bununla beraber verilen herhangi bağlantılı iki G_1 ve G_2 grafının taçlama$(G_1 \circ G_2)$ ve toplama$(G_1 + G_2)$ işlemlerinin ortalama alt bağımlılık değerleri elde edilmiştir. Son olarak elde edilen ortalama alt bağımlılık değerleri sonuçlarının karşılaştırılması verilmiştir.

Anahtar Sözcükler : Graf teori, iletişim ağları, ortalama alt bağımlılık sayısı, tekerlek graf, taçlama işlemi, toplama işlemi.

Bilim Kodu : 204.1.138

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

ON FINDING THE AVERAGE LOWER BONDAGE NUMBER OF GRAPHS

Gamze KOÇAY

Karabük University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Thesis Advisor:
Assoc. Prof. Dr. Tufan TURACI

April 2019, 39 pages

Networks desribe a wide range of systems in nature and society including examples the ınternet, metabolic networks, electric power grids, supply chains. The reliability of a network is of prime importance of network designers. In mathematics a network is described by a graph. There are a lot of parameters to find reliabilty of a given network which is modelled by a graph. In this thesis, firstly general graph definitions, the definition of the average lower bondage number that is defined recently and theorems which are related to the average lower bondage numbers are given. Then the average lower bondage number of wheel graph and wheel related graphs are calculated. Furtermore the average lower bondage numbers of corona graphs$(G_1 \circ G_2)$ and join graphs$(G_1 + G_2)$ of given any two graphs G_1 and G_2 are investigated also exact formulas are obtained. Finally the experimental comparisons of our results with the average lower bondage numbers are given.

Key Word **:** Graph theory, communication networks, average lower bondage number, wheel graph, corona operation, join operation.

Science Code **:** 204.1.138

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın planlanması ile araştırılmasında, yürütülmesi ile oluşumunda ilgisini desteğini esirgemeyen, engin bilgi donanımları ile tecrübelerinden yararlandığım, bilgilendirmeleriyle çalışmamı bilimsel olarak aydınlatan sayın hocam Doç.Dr. Tufan TURACI'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sevgili aileme manevi hiçbir yardımı esirgemeden yanımda oldukları için tüm kalbimle teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ... iv
ABSTRACT ... vi
TEŞEKKÜR ... viii
İÇİNDEKİLER ... ix
ŞEKİLLER DİZİNİ ... x
ÇİZELGELER DİZİNİ ... xi
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ... xii

BÖLÜM 1 ... 1
GİRİŞ ... 1

BÖLÜM 2 ... 3
TEMEL GRAF TANIM VE TEOREMLERİ ... 3

BÖLÜM 3 ... 9
TEKERLEK GRAF İÇEREN GRAFLARDA ORTALAMA ALT BAĞIMLILIK SAYILARININ BULUNMASI ... 9

BÖLÜM 4 ... 21
GRAF İŞLEMLERİNDE ORTALAMA ALT BAĞIMLILIK SAYILARININ BULUNMASI ... 21

BÖLÜM 5 ... 35
SONUÇ VE ÖNERİ ... 35

KAYNAKLAR ... 37

ÖZGEÇMİŞ ... 39

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. 6 tepeli ve 6 ayrıtlı G grafı. ... 5

Şekil 3.1. 6 tepeli, 10 ayrıtlı $W_{1,5}$ grafı ... 9

Şekil 3.2. 11 tepeli, 15 ayrıtlı G_5 grafı. ... 9

Şekil 3.3. 11 tepeli, 15 ayrıtlı H_5 grafı. ... 10

Şekil 3.4. 11 tepeli, 15 ayrıtlı f_5 grafı. ... 10

Şekil 3.5. 11 tepeli, 20 ayrıtlı Sf_5 grafı. ... 11

Şekil 4.1. 16 tepeli, 24 ayrıtlı $C_4 \circ P_3$ grafı ... 22

Şekil 4.2. 7 tepeli, 18 ayrıtlı $C_4 + P_3$ grafı. ... 28

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 2.1. Her $e_k \in E(G)$ için bağımlılık sayıları. 6

Çizelge 4.1. Teorem 4.1 için sonuçlar... 23

Çizelge 4.2. Teorem 4.2 için sonuçlar... 26

Çizelge 5.1. 6 farklı graf için alt bağımlılık ve ortalama alt bağımlılık değerleri...... 35

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

$N_G(v)$: tepenin açık komşuluğu

$N_G[v]$: tepenin kapalı komşuluğu

$V(G)$: tepeler kümesi

$E(G)$: ayrıtlar kümesi

$d_G(v)$: v tepesinin derecesi

$\delta(G)$: minimum tepe derecesi

$\Delta(G)$: maksimum tepe derecesi

$k(G)$: bağlantılılık değeri

$\gamma(G)$: baskınlık sayısı

$b(G)$: bağımlılık sayısı

$b_e(G)$: e ayrıtını içeren alt bağımlılık sayısı

$b_{av}(G)$: ortalama alt bağımlılık sayısı

$G_1 \circ G_2$: G_1 ve G_2 graflarının taçlama işlemi

$G_1 + G_2$: G_1 ve G_2 graflarının toplama işlemi

P_n : yol graf

C_n : çevre graf

W_n : tekerlek graf

K_n : tam graf

$K_{1,n}$: yıldız graf

$W_{1,n}$: tekerlek graf

G_n : dişli graf

H_n : dümen graf

f_n : arkadaşlık graf

SF_n : ayçiçeği graf

BÖLÜM 1

GİRİŞ

Graflar, kimyasal sistemler, yapay sinir ağları, sosyal sistemler veya internet ve World Wide Web gibi farklı sistemleri modellemek için kullanılmaktadır. Karmaşık ağların incelenmesi, son yıllarda fizik, matematik, biyoloji, sosyal bilimler, bilişim ve diğer teorik ve uygulamalı bilimleri içeren disiplinler arası alanda en yaygın konulardan biri olmuştur ve bu konu ile ilgili birçok bilimsel çalışma yapılmıştır.

Bir iletişim ağı, merkezlerden ve bu merkezleri birbirine bağlayan bağlantı hatlarından oluşur. Bir $G = (V(G), E(G))$ grafı, tepeler olarak adlandırılan ve $V(G)$ ile gösterilen sonlu sayıda nesneden oluşan boştan farklı bir küme ile G grafının ayrık tepe çiftlerinin düzensiz sıralanışı olan ve $E(G)$ ile gösterilen kümeden (bu küme boş olabilir) oluşur (West, 1996). Bir iletişim ağının temelini oluşturan topoloji bir graf ile modellendiğinde, grafın tepeler kümesi ağdaki merkezlere, grafın ayrıtlar kümesi ağdaki bağlantı hatlarına karşılık gelir. Graf teori, bir iletişim ağının mimarisinin tasarımında ve analizinde güçlü bir matematiksel araçtır.

Karmaşık ağların analizinde temel konu, ağların sağlamlığının ve güvenilirliğinin belirlenmesidir. Amaç, her türlü saldırı veya işlev bozukluğu durumunda, ağ sisteminin davranışını öngörmek, anlamak ve mümkünse bunu önceden kontrol altına almaktır. İletişim ağlarının tasarımında ağ topolojisinin sağlamlığı oldukça önemlidir. Bir iletişim ağı, dıştan gelen etkiler altında kolayca bozulmayacak biçimde, bozulmaya uğraması durumunda da kolayca yeniden yapılandırılabilecek biçimde tasarlanmalıdır. Bu nedenle iletişim ağları tasarlanırken, veri akışında sürekliliği sağlamak için ağın dıştan gelen etkilere karşı göstereceği direnci önemsemek gerekir. Direnci yüksek olan bir model diğer ağ modellerine göre daha çok tercih edilir. Böylece bir sorunla karşılaşılması durumunda ağda oluşabilecek hasar baştan en aza indirgenebilir.

Bunun için önceden teorik yaklaşımlar yapılarak oluşabilecek hasarlar için önlemler alınabilir. Bu yaklaşımlar zedelenebilirlik(vulnerability) adıyla graf teoride önemli bir yere sahiptir. 1950'lerden beri graf teori ile çalışanlar pek çok ölçüm kullanmışlardır. Örneğin, bir çizgenin bağlantılılığı (connectivity) önemlidir ve iletişim ağının dayanıklılığının ilk ölçümlerinden biridir (Frank ve Frisch, 1970). Ancak, bağlantılılık sayısı, graftan tepe ya da ayrıt silinmesinden sonra bağlantılılığın devam etmesi için grafın dayanıklılığının sadece bir kısmını yansıtır. Bu parametrenin dışında zedelenebilirlikle ilgili graf teoride pek çok ölçüm çalışılmıştır. Bunlar; ayrıt bağlantılık (edge-connectivity), toplam bağlantılık (total-connectivity), bütünlük (integrity), ayrıt bütünlük (edge-integrity), sağlamlık (toughness), kararlılık (tenacity), dayanıklılık (toughness), saçılma sayısı (scattering number), baskınlık sayısı (domination number), bağımlılık sayısı (bondage number) vb. olarak isimlendirilmişlerdir. Bu parametrelere ek olarak bir grafın dayanıklılığını hesaplamak için yeni bir parametre olan ve son zamanlarda tanımlanan ortalama alt bağımlılık sayısı (average lower bondage number) tanımlanmıştır. Ortalama alt bağımlılık sayısı diğer parametrelere göre daha hassas bir ölçümdür. Bununla beraber, bir grafın baskınlık ve bağımlılık sayılarının eşit olduğu durumlarda graf dayanıklılığı hakkında bilgi edinmeyi sağlar (Turacı, 2016a).

Bu tez çalışmasında ikinci bölümünde genel graf tanımları ve teoremleri, son zamanlarda tanımlanmış ortalama alt bağımlılık sayısı tanımı ve bununla ilgili teoremler verilmiştir. Tezin üçüncü bölümünde, tekerlek graf içeren graf yapıları için ortalama alt bağımlılık sayıları hesaplanmıştır. Dördüncü bölümde, verilen herhangi bağlantılı iki G_1 ve G_2 grafının taçlama($G_1 \circ G_2$) ve toplama($G_1 + G_2$) işlemlerinin sonuçları elde edilmiştir. Son olarak beşinci bölümde elde edilen sonuçların karşılaştırılması yapılmıştır.

BÖLÜM 2

TEMEL GRAF TANIM VE TEOREMLERİ

Tanım 2.1. Bir G grafındaki herhangi bir v tepesinin açık komşuluğu (open neigborhood)**,** v tepesine komşu olan tepelerin oluşturduğu kümedir ve $N_G(v)$ olarak gösterilir. Benzer şekilde v tepesinin kapalı komşular kümesi ise $N_G(v) \cup \{v\}$ şeklinde tanımlanır ve $N_G[v]$ olarak gösterilir (Chartrand ve Lesniak, 1986).

Tanım 2.2. Bir G grafında herhangi bir $v \in V(G)$ tepesinin derecesi, o tepenin bitişik olduğu ayrıtların sayısıdır ve $d_G(v)$ ile gösterilir (Buckley ve Harary, 1990).

Tanım 2.3. Bir G grafının tepe derecelerinin en küçüğüne grafın minimum tepe derecesi (minimum vertex degree) denir ve $\delta(G)$ ile gösterilir (Chartrand ve Lesniak, 1986).

Tanım 2.4. Bir G grafının tepe derecelerinin en büyüğüne grafın maksimum tepe derecesi (maximum vertex degree) denir ve $\Delta(G)$ ile gösterilir (Chartrand ve Lesniak, 1986).

Tanım 2.5. Bir $G(V(G), E(G))$ grafının bazı ayrıt ve tepelerinden $V_1(G) \subset V(G)$ ve $E_1(G) \subset E(G)$ olmak üzere $H(V_1(G), E_1(G))$ ile tanımlı grafa, G grafının bir alt grafı (subgraph) denir (Buckley ve Harary, 1990).

Tanım 2.6. Bağlantılı bir G grafını bağlantısız yapmak veya tek izole tepe elde etmek için graftan çıkarılması gereken en az tepe sayısına grafın bağlantılılığı (connectivity) denir ve $k(G)$ ile gösterilir (Buckley ve Harary, 1990).

Tanım 2.7. G grafının bağımsız ikili ayrıtlar kümesi G'de bir eşleme olarak adlandırılır, maksimum eleman sayısında bir eşleme ise maksimum (en büyük) eşleme olarak adlandırılır. *M*, *G* grafında bir eşleme olmak üzere *G*'nin her tepesi M'nin bir ayrıtı ile eşleşiyorsa *M*, *G*'de mükemmel eşlemedir (Chartrand ve Lesniak, 1986).

Tanım 2.8. $S \subseteq V(G)$, bir *G* grafının tepeler kümesinin boş olmayan bir alt kümesi olsun. *G* grafının her bir tepesi; *S* kümesine ait veya *S* kümesinin bir tepesine bitişik ise bu S kümesine bir baskın küme denir. Bir grafın baskınlık sayısı ise baskın kümeler arasında en az elemana sahip kümenin eleman sayısı olarak tanımlanır ve $\gamma(G)$ ile gösterilir (Chartrand ve Lesniak, 1986).

Tanım 2.9. $E^{'} \subseteq E(G)$ olmak üzere, $\gamma(G - E^{'}) > \gamma(G)$ şartını sağlayan minimum elemanlı $E^{'}$ kümesinin eleman sayısına grafın bağımlılık sayısı (bondage number) denir ve $b(G)$ ile gösterilir (Fink vd., 1990).

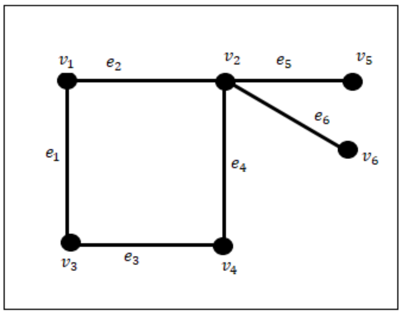
Başka bir deyişle,
$b(G) = \min_{E^{'} \subseteq E(G)}\{\,|E^{'}|: \gamma(G - E^{'}) > \gamma(G)\}'$ dir.

Tanım 2.10. Bir $G(V(G), E(G))$ grafında, bir *e* ayrıtını içeren minimum elemanlı bağımlılık kümesinin eleman sayısına *e* ayrıtının alt bağımlılık değeri denir ve $b_e(G)$ ile gösterilir. Her $e \in E(G)$ için elde edilen ortalama alt bağımlılık değeri (average lower bondage number)

$$b_{av}(G) = \frac{1}{|E(G)|} \sum_{e_i \in E(G)} b_{e_i}(G)$$

şeklinde tanımlanır (Turacı, 2016a).

Örnek 2.1. Şekil 2.1'de gösterilen *G*; 4 tepeli bir çevre grafa eklenen 2 tepe ve 2 ayrıtın birleştirilmesiyle oluşan bir graf olsun.



Şekil 2.1. 6 tepeli ve 6 ayrıtlı G grafı.

Öncelikle baskınlık ve bağımlılık kümelerini ve sayılarını bulalım.

$S_1 = \{v_1, v_2\}$ baskın kümedir.
$S_2 = \{v_2, v_3\}$ baskın kümedir.
$S_3 = \{v_2, v_4\}$ baskın kümedir.
$S_4 = \{v_3, v_5, v_6\}$ baskın kümedir.
$S_5 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ baskın kümedir.
$S_6 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ baskın kümedir.
$S_7 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_{5,} v_6\}$ baskın kümedir.

$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$ ve S_7 kümeleri G grafının baskın kümeleridir. Bu grafın baskınlık sayısı ise bu baskın kümelerden minimum elemanlı kümenin eleman sayısıdır. S_1, S_2 ve S_3 kümeleri minimum elemanlı baskın küme olup, baskınlık sayısı $\gamma(G) = 2$'dir.

$E_1 = \{e_1, e_2\}$ ayrıtları graftan silindiğinde geriye kalan $G - \{e_1, e_2\}$ grafının minimum elemanlı baskın kümesi, baskınlık sayısı tanımından $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ olur. Böylece, $G - \{e_1, e_2\}$ grafının baskınlık sayısı ise $\gamma(G - \{e_1, e_2\}) = 3$ bulunur.

$E_2 = \{e_5\}$ ayrıtı graftan silindiğinde geriye kalan $G - \{e_5\}$ grafının minimum elemanlı baskın kümesi, baskınlık sayısı tanımından $S = \{v_1, v_2, v_5\}$ olur. Böylece, $G - \{e_1, e_2\}$ grafının baskınlık sayısı ise $\gamma(G - \{e_5\}) = 3$ bulunur.

Diğer durumlarda da baskınlık sayısının 3 olması için graftan silinen ayrıt sayısı 1 ya da 1’den büyük bulunur. Minimum elemanlı kümenin eleman sayısı, bağımlılık sayısı olduğundan G grafının bağımlılık sayısı $b(G) = 1$’dir.

Çizelge 2.1' den görüldüğü gibi $b_{e_1}(G) = 2\, , b_{e_2}(G) = 2\, , b_3(G) = 2\, , b_{e_4}(G) = 2, b_5(G) = 1, b_{e_6}(G) = 1$ olduğundan $b_{av}(G) = \frac{(2+2+2+2+1+1)}{6} = \frac{5}{3}$ elde edilir.

Çizelge 2.1. Her $e_k \in E(G)$ için bağımlılık sayıları.

Ayrıtlar	$\boldsymbol{e_k}$ **ayrıtını içeren minimum bağımlılık kümesi**	$\boldsymbol{b_{e_k}(G)}$
e_1	$\{e_1, e_2\}, \{e_1, e_5\}, \{e_1, e_6\}$	2
e_2	$\{e_2, e_1\}, \{e_2, e_5\}, \{e_2, e_6\}$	2
e_3	$\{e_3, e_4\}, \{e_3, e_5\}, \{e_3, e_6\}$	2
e_4	$\{e_4, e_3\}, \{e_4, e_5\}, \{e_4, e_6\}$	2
e_5	$\{e_5\}$	1
e_6	$\{e_6\}$	1

Şimdi, baskınlık sayısı, bağımlılık sayısı ve ortalama alt bağımlılık sayıları ile ilgili bilinen sonuçlar verilecektir.

Teorem 2.1. $W_{1,n}$, *n+1* tepeli bir tekerlek graf olmak üzere $\gamma\left(W_{1,n}\right) = 1$' dir (Haynes vd., 1998).

Teorem 2.2. G_n, *2n+1* tepeli bir dişli graf olmak üzere $n \geq 4$ için $\gamma(G_n) = \left\lceil \frac{\mathrm{n}}{2} \right\rceil + 1'$ dir (Aytaç vd., 2011).

Teorem 2.3. f_n, *2n+1* tepeli bir arkadaşlık graf olmak üzere $n \geq 3$ için $\gamma(f_n) = 1'$ dir (Haynes vd., 1998).

Teorem 2.4. H_n, *2n+1* tepeli bir dümen graf olmak üzere $n \geq 4$ için $\gamma(H_n) = n'$ dir (Khalil, 2011).

Teorem 2.5. SF_n, 2n+1 tepeli bir ay çiçeği graf olmak üzere $n \geq 4$ için $\gamma(SF_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil'$ dir (Turacı, 2016b).

Teorem 2.6. K_n bir tam graf olmak üzere $n \geq 2$ için $b(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil'$dir (Fink vd., 1990).

Teorem 2.7. P_n bir yol graf olmak üzere $n \geq 2$ için

$b(P_n) = \begin{cases} 2, & n \equiv 1(mod\ 3); \\ 1, & aksi\ halde. \end{cases}$ (Fink vd., 1990).

Teorem 2.8. C_n bir çevre graf olmak üzere $n \geq 3$ için

$b(C_n) = \begin{cases} 3, & n \equiv 1(mod\ 3); \\ 2, & aksi\ halde. \end{cases}$ (Fink vd., 1990).

Teorem 2.9. $K_{1,n}$ bir yıldız graf olmak üzere $n \geq 3$ için $b(K_{1,n}) = 1'$ dir (Fink vd., 1990).

Teorem 2.10. $W_{1,n}$, *n+1* tepeli bir tekerlek graf olmak üzere $n \geq 3$ için $b(W_{1,n}) =$ 1' dir (Aytaç vd., 2011).

Teorem 2.11. G_n, *2n+1* tepeli bir dişli graf olmak üzere $n \geq 4$ için

$b(G_n) = \begin{cases} 3, n\ tek; \\ 2, n\ çift. \end{cases}$ (Aytaç vd., 2011).

Teorem 2.12. K_n bir tam graf olmak üzere $n \geq 2$ için $b_{av}(K_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil'$dir (Turacı, 2016a).

Teorem 2.13. P_n bir yol graf olmak üzere $n \geq 2$ için

$b_{av}(P_n) = \begin{cases} \frac{4n-6}{3n-3}, & n \equiv 0(mod\ 3); \\ 2, & n \equiv 1(mod\ 3); \\ \frac{5n-7}{3n-3}, & n \equiv 2(mod\ 3). \end{cases}$ (Turacı, 2016a).

Teorem 2.14. C_n bir çevre graf olmak üzere $n \geq 3$ için

$$b_{av}(C_n) = \begin{cases} 3, & n \equiv 1(mod\ 3); \\ 2, & aksi\ halde. \end{cases}$$ (Turacı, 2016a).

Teorem 2.15. $K_{1,n}$ bir yıldız graf olmak üzere $n \geq 3$ için, $b_{av}\left(K_{1,n}\right) = 1'$ dir (Turacı, 2016a).

Teorem 2.16. n tepeli ve bağlantılı bir G grafı için $\gamma(G) = 2$ ise $b(G) \leq \Delta(G) + 1'$dir (Fink vd., 1990).

Teorem 2.17. n tepeli ve bağlantılı bir G grafı için $b(G) \leq b_{av}(G) \leq (b(G) + 1) - \frac{b(G)}{|E(G)|}$'dir (Turacı, 2016a).

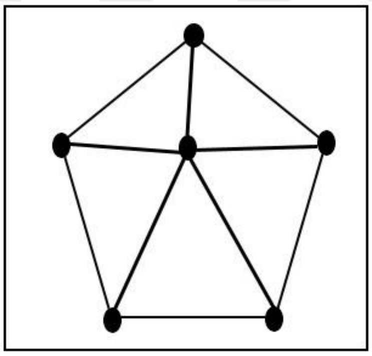
Teorem 2.18. *G; n* tepeli ve bağlantılı bir graf olsun. Eğer *G* grafının baskın kümesayısı 1 ise, $b_{av}(G) = 2 - \frac{n-1}{|E(G)|}$'dir (Turacı, 2016a).

BÖLÜM 3

TEKERLEK GRAF İÇEREN GRAFLARDA ORTALAMA ALT BAĞIMLILIK SAYILARININ BULUNMASI

Tanım 3.1.

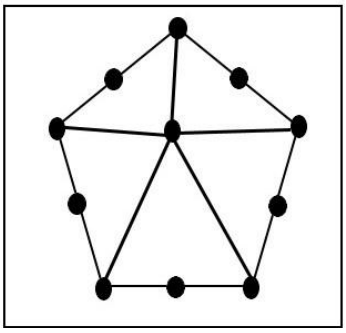
Tekerlek graf (Wheel Graph); C_n çevre grafının tepelerinin bir merkez tepe ile birleştirilmesiyle elde edilir ve $W_{1,n}$ ile gösterilir (West, 1996).



Şekil 3.1. 6 tepeli,10 ayrıtlı $W_{1,5}$ grafı.

Tanım 3.2.

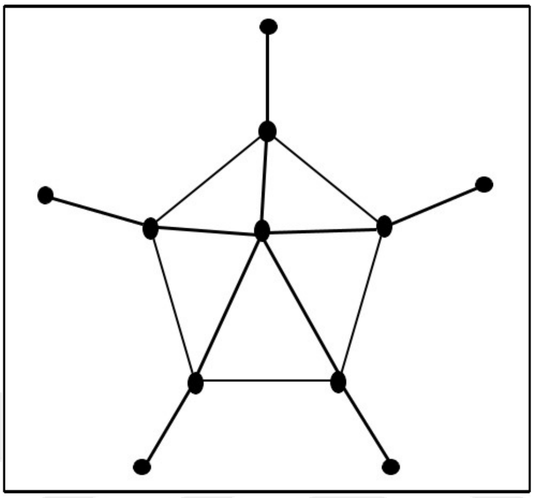
Dişli graf (Gear Graph); $W_{1,n}$ tekerlek grafının, C_n üzerindeki her ayrıtına birer tepe eklenmesiyle elde edilir ve G_n ile gösterilir (Aytaç ve Turacı 2011).



Şekil 3.2. 11 tepeli, 15 ayrıtlı G_5 grafı.

Tanım 3.3.

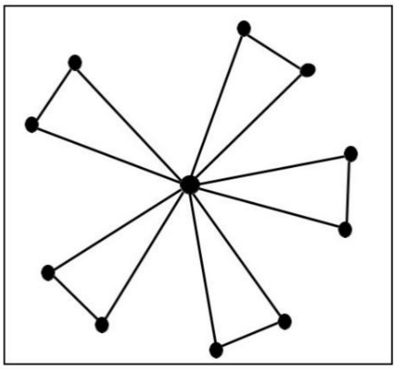
Dümen graf (Helm Graph); Bir $W_{1,n}$ tekerlek grafının C_n çevre grafının üzerindeki her tepeye yeni bir tepe eklenmesiyle elde edilir ve H_n ile gösterilir (Javaid ve Shokat 2008).



Şekil 3.3. 11 tepeli, 15 ayrıtlı H_5 grafı.

Tanım 3.4.

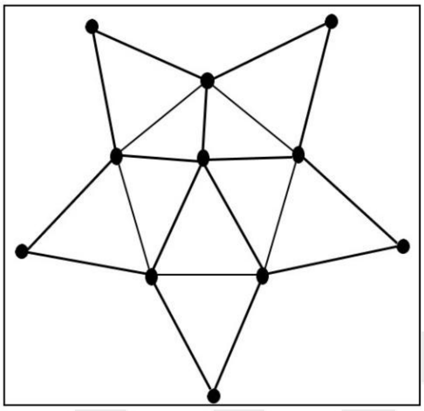
Arkadaşlık graf (Friendship Graph); Sabit bir noktadan n tane C_3 gafının birleşme-siyle elde edilir ve f_n ile gösterilir (Aytaç ve Odabaş 2011).



Şekil 3.4. 11 tepeli, 15 ayrıtlı f_5 grafı.

Tanım 3.5.

Ay çiçeği graf (Sun Flower Graph); Bir W_n tekerlek grafının çevre üzerindeki ardışık tepeleri bir tepe ile birleştirmesiyle elde edilir ve Sf_n ile gösterilir (Javaid ve Shokat 2008).



Şekil 3.5. 11 tepeli, 20 ayrıtlı Sf_5 grafı.

Teorem 3.1. $W_{1,n}$, $n+1$ tepeli bir tekerlek graf olmak üzere $n > 3$ için $b_{av}\left(W_{1,n}\right) = \frac{3}{2}$ dir.

İspat: $W_{1,n}$ grafının tepeler kümesi $V(W_{1,n})$ olmak üzere $V(W_{1,n}) = V_1 \cup V_2$ olsun. Ve bu kümeler aşağıdaki şekilde oluşturulsun.

$$V_1 = \{v_i \in V(W_{1,n}) | d_{W_{1,n}}(v_i) = n\}, |V_1| = 1,$$

$$V_2 = \{v_i \in V(W_{1,n}) | d_{W_{1,n}}(v_i) = 3\}, |V_2| = n.$$

Benzer şekilde $W_{1,n}$ grafının ayrıtlar kümesi $E\left(W_{1,n}\right)$ olmak üzere $E\left(W_{1,n}\right) = E_1 \cup E_2$ olsun ve bu kümeler aşağıdaki şekilde oluşturulsun.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E\left(W_{1,n}\right) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_2\}, |E_1| = n,$$

$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E\left(W_{1,n}\right) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_1\}, |E_2| = n.$$

Ortalama alt bağımlılık sayısı bulunurken baskınlık sayısını artırmak için silinecek ayrıtlar için iki durum söz konusudur. Bu durumlar ayrıtların E_1 ve E_2 kümesinden seçilmesine göre değişir.

Durum 1: Teorem 2.1' den $\gamma(W_{1,n}) = 1$ dir. Amacımız E_1 kümesinden minimum sayıda ayrıt silerek baskınlık sayısını artırmaktır. Fakat E_1 kümesinden herhangi bir ayrıt silindiğinde baskınlık sayısının değişmeyeceği açık olarak görülür. Bu durumda $e_i \in E_1$ ve $e_j \in E_2$ olacak şekilde 2 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. $v_x, v_y \in V_2$ iki ardışık tepe ve $v_z \in V_1$ olsun. v_x ile v_y arasındaki bir ayrıt $(e_i \in E_1)$ ve v_z ile v_x arasındaki bir ayrıtın $(e_j \in E_2)$ silinmesiyle baskınlık sayısı 1 artar. Buradan E_1 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayılarının 2 olduğu görülür.

Durum 2: $\forall\, e_i \in E_2$ için 1 ayrıt silerek baskınlık sayısı 1 artırılır. Buradan E_2 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısının 1 olduğu açıktır.
Durum 1 ve durum 2'den

$$b_{av}(W_{1,n}) = \sum_{e_i \in E_1} b_{e_i}(W_{1,n}) + \sum_{e_i \in E_2} b_{e_i}(W_{1,n})$$
$$= \frac{n.2+n.1}{2n} = \frac{3n}{2n} = \frac{3}{2}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.2. G_n, $2n+1$ tepeli bir dişli graf olmak üzere $n \geq 4$ için

$$b_{av}(G_n) = \begin{cases} \dfrac{10}{3} & , n \text{ tek ise,} \\ \dfrac{7}{3} & , n \text{ çift ise.} \end{cases}$$

İspat: G_n grafının tepeler kümesi $V(G_n)$ olmak üzere $V(G_n) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ olsun. Bu kümeler aşağıdaki şekilde oluşturulsun.

$V_1 = \{v_i \in V(G_n) | d_{G_n}(v_i) = n\}, |V_1| = 1,$

$V_2 = \{v_i \in V(G_n) | d_{G_n}(v_i) = 3\}, |V_2| = n,$

$V_3 = \{v_i \in V(G_n) | d_{G_n}(v_i) = 2\}, |V_3| = n.$

Benzer şekilde G_n grafının ayrıtlar kümesi $E(G_n)$ olmak üzere $E(G_n) = E_1 \cup E_2$ olsun. Bu kümeler aşağıdaki şekilde oluşturulsun.

$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(G_n) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_3\}, |E_1| = 2n,$

$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(G_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}, |E_2| = n.$

Ortalama alt bağımlılık sayısı bulunurken n' nin çift ya da tek olmasına göre 2 durum vardır.

Durum 1: n tek olsun. Silinecek ayrıtların E_1 ya da E_2 kümesinden seçilmesine göre 2 alt durum oluşur.

Alt Durum 1: Teorem 2.2' den $\gamma(G_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ olduğu aşikardır($n \geq 4$). Amacımız E_1 kümesinden minimum sayıda ayrıt silerek baskınlık sayısını artırmaktır. Fakat E_1 kümesinden 1 ya da 2 ayrıt silindiğinde baskınlık sayısı artırılamaz. E_1 kümesinden silinecek 3 ayrıtla baskınlık sayısı 1 artırabilir. Aralarındaki uzaklık 2 olacak şekilde V_2' nin 2 tepesi v_x, v_y olsun. v_x ile v_y arasındaki 2 ayrıt ve $v_z \in V_3$ olacak şekilde v_z ile v_x arasındaki 1 ayrıt olmak üzere toplamda 3 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Böylece, E_1 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 3 elde edilir.

Alt Durum 2: Sadece E_2 kümesinden ayrıtların silinmesiyle baskınlık sayısının artmadığı kolayca görülür. Bu durumda, E_1 kümesinden 3 ayrıt ve E_2 kümesinden 1 ayrıt olmak üzere toplamda 4 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Aralarındaki uzaklık 2 olacak şekilde V_2' nin 2 tepesi v_x, v_y olsun. Bununla beraber, $v_z \in V_3$ ve $v_m \in V_1$ olacak şekilde 4 tepeyi ele alalım. v_x ile v_y arasındaki 2 ayrıt, v_y ile v_z arasındaki 1 ayrıt ve v_y ile v_m arasındaki 1 ayrıt silinerek baskınlık sayısı 1 artacağı kolayca görülür. Buradan E_2 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 4 elde edilir.

Alt durum 1 ve alt durum 2' den

$$b_{av}(G_n) = \sum_{e_i \in E_1} b_{e_i}(G_n) + \sum_{e_i \in E_2} b_{e_i}(G_n)$$
$$= \frac{2n.3+n.4}{3n} = \frac{10n}{3n} = \frac{10}{3}$$

elde edilir.

Durum 2: n çift olsun. Silinecek ayrıtların E_1 ya da E_2 kümesinden seçilmesine göre 2 alt durum oluşur.

Alt Durum 1: Teorem 2.2' den $\gamma(G_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + 1$ dir. E_1 kümesinden 1 ayrıt silerek baskınlık sayısı artırılamaz. Bu durumda E_1 kümesinden silinecek 2 ayrıtla baskınlık sayısı 1 artırılır. Aralarındaki uzaklık 2 olacak şekilde V_2' nin 2 tepesi v_x, v_y olsun. v_x ile v_y arasındaki 2 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Böylece, E_1 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 2 elde edilir.

Alt Durum 2: Sadece E_2 kümesinden seçilecek ayrıtların silinmesiyle baskınlık sayısı artırılamaz. E_1 kümesinden 2 ayrıt ve E_2 kümesinden 1 ayrıt olmak üzere toplamda 3 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Aralarındaki uzaklık 2 olan V_2' nin 2 tepesi v_x, v_y ve $v_z \in V_1$ olsun. v_x ile v_y arasındaki 2 ayrıt ve, v_x ile v_z arasındaki 1 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısının 1 artacağı kolayca görülür. Böylece E_2 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 3 elde edilir.
Alt durum 1 ve alt durum 2' den

$$b_{av}(G_n) = \sum_{e_i \in E_1} b_{e_i}(G_n) + \sum_{e_i \in E_2} b_{e_i}(G_n)$$
$$= \frac{2n.2+n.3}{3n} = \frac{7n}{3n} = \frac{7}{3}$$

elde edilir.

Durum 1 ve durum 2 'den ispat tamamlanmıştır.

Teorem 3.3. f_n, $2n+1$ tepeli bir arkadaşlık graf olmak üzere $n > 3$ için $b_{av}(f_n) = \frac{4}{3}$ tür.

İspat: f_n grafının tepeler kümesi $V(f_n)$ olmak üzere $V(f_n) = V_1 \cup V_2$ olarak aşağıdaki şekilde yazılsın.

$$V_1 = \{v_i \in V(f_n) | d_{f_n}(v_i) = 2n\}, |V_1| = 1,$$
$$V_2 = \{v_i \in V(f_n) | d_{f_n}(v_i) = 2\}, |V_2| = 2n.$$

Benzer şekilde f_n grafının ayrıtlar kümesi $E(f_n)$ olmak üzere $E(f_n) = E_1 \cup E_2$ olarak aşağıdaki şekilde yazılsın.

$$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(f_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}, |E_1| = 2n,$$
$$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(f_n) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_2\}, |E_2| = n.$$

Ortalama alt bağımlılık sayısı bulunurken silinecek ayrıtların E_1 ya da E_2 kümesinden seçimine göre 2 durum vardır.

Durum 1: Teorem 2.3' ten $\gamma(f_n) = 1$ dir. E_1 kümesindeki her e_i ayrıtı için $v_x \in V_1$ ve $v_y \in V_2$ olacak şekilde 2 tepe seçilip bu tepeler arasındaki 1 ayrıt silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Buradan E_1 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısının 1 olduğu açıktır.

Durum 2: E_2 kümesindeki ayrıtların tek başına silinmesi baskınlık sayısını artırmak için yeterli değildir. Fakat E_1 kümesinden 1 ayrıt ve E_2 kümesinden 1 ayrıt olmak üzere toplamda 2 ayrıt silerek baskınlık sayısını artırabiliriz. $v_x, v_y \in V_2$ olacak şekilde 2 ardışık tepe ve $v_z \in V_1$ olacak şekilde 1 tepe, v_x ile v_z komşu tepeler olacak şekilde seçilsin. v_x ile v_y arasındaki 1 ayrıt ve v_x ile v_z arasındaki 1 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Buradan E_2 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 2 elde edilir.

Durum 1 ve durum 2’den

$$b_{av}(f_n) = \sum_{e_i \in E_1} b_{e_i}(f_n) + \sum_{e_i \in E_2} b_{e_i}(f_n)$$

$$= \frac{2n.1+2.n}{3n} = \frac{4n}{3n} = \frac{4}{3}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4. H_n, $2n+1$ tepeli bir dümen graf olmak üzere $n > 4$ için $b_{av}(H_n) = \frac{10}{3}$ tür.

İspat: H_n grafının tepeler kümesi $V(H_n)$ olsun. $V(H_n) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ olarak aşağıdaki şekilde yazılsın.

$V_1 = \{v_i \in V(H_n) | d_{H_n}(v_i) = n\}, |V_1| = 1,$
$V_2 = \{v_i \in V(H_n) | d_{H_n}(v_i) = 4\}, |V_2| = n,$
$V_3 = \{v_i \in V(H_n) | d_{H_n}(v_i) = 1\}, |V_3| = n.$

Benzer şekilde H_n grafının ayrıtlar kümesi $E(H_n)$ olmak üzere $E(H_n) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ olsun ve bu kümeler aşağıdaki şekilde yazılsın.

$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(H_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}, |E_1| = n,$
$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(H_n) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_2\}, |E_2| = n,$
$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(H_n) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_3\}, |E_3| = n.$

Ortalama alt bağımlılık sayısı bulunurken silinecek ayrıtların E_1, E_2 ya da E_3 kümesinden seçimesine göre 3 durum vardır.

Durum 1: Teorem 2.4' ten $\gamma(H_n) = n$ dir. Sadece E_1 kümesinden silinecek ayrıtlarla baskınlık sayısı artırılamaz. Fakat, E_1 kümesinden 1 ayrıt, E_2 kümesinden 2 ayrıt ve E_3 kümesinden 1 ayrıt olmak üzere toplamda 4 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı en az 1 artırılabilir. $v_x \in V_2$ olacak şekilde bir v_x tepesi seçilsin. Bu v_x tepesine bitişik tüm ayrıtlar silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Buradan E_1 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 4 elde edilir.

Durum 2: Yalnızca E_2 kümesinden silinecek ayrıtlarla baskınlık sayısı artırılamaz. Bu durumda E_2 kümesinden 2 ayrıt ve E_3 kümesinden 1 ayrıt olmak üzere toplamda 3 ayrıt silindiğinde baskınlık sayısı 1 arttırılabilir. $v_x, v_{y,} v_z \in V_2$ olacak şekilde ardışık 3 tepe ve $v_k \in V_3$ olacak şekilde 1 tepe, v_y ile v_k tepeleri komşu tepeler olacak şekilde alınsın. v_x ile v_y arasındaki 1 ayrıt, v_y ile v_z arasındaki 1 ayrıt ve v_y ile v_k arasındaki 1 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısının 1 artacağı kolayca görülür. Böylece, E_2 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 3 elde edilir.

Durum 3: : Yalnızca E_3 kümesinden silinecek ayrıtlarla baskınlık sayısı artırılamaz. Bu durumda E_2 kümesinden 2 ayrıt ve E_3 kümesinden 1ayrıt olmak üzere toplamda 3 ayrıt silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. $v_x, v_{y,} v_z \in V_2$ olacak şekilde ardışık 3 tepe ve $v_k \in V_3$ olacak şekilde 1 tepe alınsın. Burada v_y tepesi ile v_k tepesi komşu tepeler olmak üzere v_x ile v_y arasındaki 1 ayrıt, v_y ile v_z arasındaki 1 ayrıt ve v_y ile v_k arasındaki 1 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artırılabilir. Böylece, E_3 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 3 elde edilir.
Durum 1, durum 2 ve durum 3'ten

$$b_{av}(H_n) = \sum_{e_i \in E_1} b_{e_i}(H_n) + \sum_{e_i \in E_2} b_{e_i}(H_n) + \sum_{e_i \in E_3} b_{e_i}(H_n)$$
$$= \frac{n.4+n.3+n.3}{3n} = \frac{10n}{3n} = \frac{10}{3}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.5. SF_n, $2n+1$ tepeli bir ay çiçeği graf olmak üzere $n \geq 4$ için

$$b_{av}(Sf_n) = \begin{cases} \frac{7}{2} & , n\ tek\ ise; \\ \frac{5}{2} & , n\ çift\ ise. \end{cases}$$

İspat: Sf_n grafının tepeler kümesi $V(Sf_n)$ ve $V(Sf_n) = V_1 \cup V_2 \cup V_3$ olmak üzere bu kümeler aşağıdaki şekilde yazılsın.

$V_1 = \{v_i \in V(Sf_n) | d_{Sf_n}(v_i) = n\}, |V_1| = 1,$
$V_2 = \{v_i \in V(Sf_n) | d_{Sf_n}(v_i) = 5\}, |V_2| = n,$
$V_3 = \{v_i \in V(Sf_n) | d_{Sf_n}(v_i) = 2\}, |V_3| = n.$

Benzer şekilde Sf_n grafının ayrıtlar kümesi $E(Sf_n)$ olmak üzere $E(Sf_n) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ olacak şekilde bu kümeler aşağıdaki şekilde yazılsın.

$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(Sf_n) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}, |E_1| = n,$
$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(Sf_n) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_2\}, |E_2| = n,$
$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(Sf_n) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_3\}, |E_3| = 2n.$

Ortalama alt bağımlılık sayısı bulunurken n 'nin çift ya da tek olmasına göre 2 durum söz konusudur.

Durum 1: n tek olsun. Silinecek ayrıtların E_1, E_2 ya da E_3 kümesinden seçilmesine göre 3 alt durum oluşur.

Alt Durum 1: Teorem 2.5' ten $\gamma(Sf_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ dir. Sadece E_1 kümesinden silinecek ayrıtlarla baskınlık sayısı artırılamaz. Bu durumda, E_1 kümesinden 1 ayrıt ve E_3 kümesinden 3 ayrıt olmak üzere toplamda 4 ayrıt silindiğinde baskınlık sayısı 1 artırılabilir. $i = 2k + 1$ ($i = 1,3, \dots, 2n - 5$) olmak üzere $\{e_i, e_{i+2}, e_{i+4}\} \in E_3$ olacak şekilde herhangi 3 ayrıt veya $i = 2k(i = 2,4, \dots, 2n - 6)$ olmak üzere $\{e_i, e_{i+2}, e_{i+4}\} \in E_3$ olacak şekilde herhangi 3 ayrıt ve bu ayrıtlara ek olarak E_1 kümesinden herhangi bir ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artırılabilir. Böylece, E_1 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 4 elde edilir.

Alt Durum 2: Sadece E_2 kümesinden sileceğimiz ayrıtlarla baskınlık sayısı artırılamaz. Fakat, E_2 kümesinden 1 ayrıt ve E_3 kümesinden 3 ayrıt olmak üzere toplamda 4 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı en az 1 artırılabilir. $i = 2k + 1$ ($i = 1,3, \dots ,2n - 5$) olmak üzere $\{e_i, e_{i+2}, e_{i+4}\} \in E_3$ olacak şekilde herhangi 3 ayrıt veya $i = 2k$ ($i = 2,4, \dots ,2n - 6$) olmak üzere $\{e_i, e_{i+2}, e_{i+4}\} \in E_3$ olacak şekilde herhangi 3 ayrıt ve bu ayrıtlara ek olarak E_2 kümesinden herhangi bir ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Böylece, E_2 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 4 olur.

Alt Durum 3: E_3 kümesinden 3 ayrıt silindiğinde baskınlık sayısı 1 artırılabilir.
$i = 2k + 1$ ($i = 1,3, \dots ,2n - 5$) olmak üzere $\{e_i, e_{i+2}, e_{i+4}\} \in E_3$ olacak şekilde herhangi 3 ayrıt veya $i = 2k$ ($i = 2,4, \dots ,2n - 6$) olmak üzere $\{e_i, e_{i+2}, e_{i+4}\} \in E_3$ olacak şekilde herhangi 3 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artırılabilir. Böylece, E_3 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 3 elde edilir.

Alt durum 1, alt durum 2 ve alt durum 3'ten

$$b_{av}(Sf_n) = \sum_{e_i \in E_1} b_{e_i}(Sf_n) + \sum_{e_i \in E_2} b_{e_i}(Sf_n) + \sum_{e_i \in E_3} b_{e_i}(Sf_n)$$
$$= \frac{n.4 + n.4 + 3.2n}{4n} = \frac{14n}{4n} = \frac{7}{2}$$

elde edilir.

Durum 2: n çift olsun. Silinecek ayrıtların E_1, E_2 ya da E_3 kümesinden seçilmesine göre 3 alt durum oluşur.

Alt Durum 1: Amacımız E_1 kümesinden minimum sayıda ayrıt silerek baskınlık sayısını 1 artırmaktır. Sadece E_1 kümesinden silinecek ayrıtlarla baskınlık sayısı artırılamaz. Fakat, E_1 kümesinden 1 ayrıt ve E_3 kümesinden 2 ayrıt olmak üzere toplamda 3 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artırılabilir. $v_x \in V_3$ olacak şekilde herhangi bir v_x tepesi seçilsin. Bu v_x tepesine bitişik 2 ayrıt ve E_1 kümesindeki herhangi bir ayrıt graftan sildiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Buradan E_1 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 3 elde edilir.

Alt Durum 2: Sadece E_2 kümesinden silinecek ayrıtlarla baskınlık sayısı artmaz. Ancak, E_2 kümesinden 1 ayrıt ve E_3 kümesinden 2 ayrıt olmak üzere toplamda 3 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artırılabilir. $v_x \in V_3$ olacak şekilde herhangi bir v_x tepesi seçilsin. Bu v_x tepesine bitişik 2 ayrıt ve E_2 kümesindeki herhangi bir ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Böylece, E_2 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 3 elde edilir.

Alt Durum 3: E_3 kümesinden 2 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artırılabilir. $v_x \in V_3$ olacak şekilde herhangi bir v_x tepesi seçilsin. Bu v_x tepesine bitişik 2 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artırılabilir. Böylece, E_3 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayısı 2 elde edilir.

Alt durum 1, alt durum 2 ve alt durum 3' ten

$$b_{av}(Sf_n) = \sum_{e_i \in E_1} b_{e_i}(Sf_n) + \sum_{e_i \in E_2} b_{e_i}(Sf_n) + \sum_{e_i \in E_3} b_{e_i}(Sf_n)$$
$$= \frac{n.3+n.3+2.2n}{4n} = \frac{10n}{4n} = \frac{5}{2}$$

elde edilir.

Böylece, Durum 1 ve durum 2' den ispat tamamlanmıştır.

BÖLÜM 4

GRAF İŞLEMLERİNDE ORTALAMA ALT BAĞIMLILIK SAYILARININ BULUNMASI

Tanım 4.1. $G_1 \circ G_2$ şeklinde gösterilen taçlama işlemi G_2 grafının kopyalarının G_1 grafındaki her tepeyle ve G_2grafının i. kopyasındaki her tepesinin G_1 grafının i.tepesi ile birleştirilmesi ile elde edilir. i=1,2,…,$|G_1|$ (Chartrand ve Lesniak 2004).

G_1 n tepeli, s ayrıtlı ve G_2 m tepeli, k ayrıtlı iki bağlantılı graf olsun.

$G_1 \circ G_2$ grafının tepeler kümesi $V(G_1 \circ G_2)$ olsun ve $V(G_1 \circ G_2) = V_1 \cup V_2$ olarak yazılsın. V_1 kümesi G_1 grafının ve V_2 kümesi G_1 grafının her bir tepesine bağlı G_2 graflarının tepeler kümesi olsun.

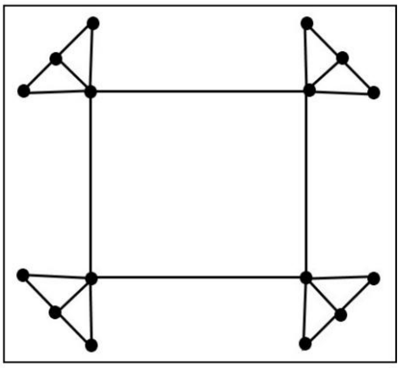
Benzer şekilde $G_1 \circ G_2$ grafının ayrıtlar kümesi $E(G_1 \circ G_2)$ olmak üzere $E(G_1 \circ G_2) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ olacak şekilde bu kümeler aşağıdaki şekilde yazılsın.

$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(G_1 \circ G_2) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_1\}, |E_1| = s,$

$E_2 = \left\{e_{v_i v_j} \in E(G_1 \circ G_2)\right) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}, |E_2| = n.m,$

$E_3 = \left\{e_{v_i v_j} \in E(G_1 \circ G_2)\right) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_2\}, |E_3| = n.k.$

Buradan $\gamma(G_1 \circ G_2) = n$ dir (Haynes vd., 1998).



Şekil 4.1. 16 tepeli, 24 ayrıtlı $C_4 \circ P_3$ grafı.

Teorem 4.1. G_1 n tepeli, s ayrıtlı ve G_2 m tepeli, k ayrıtlı iki bağlantılı graf olsun.

Eğer $\gamma(G_2) \geq 2$ ise $b_{av}(G_1 \circ G_2) = \frac{2.s+n.m+2.n.k}{s+n.m+n.k}$' dir.

İspat: Ortalama alt bağımlılık sayısı bulunurken silinecek ayrıtların E_1, E_2 ya da E_3 kümesinden seçilmesine göre 3 durum oluşur.

Durum 1: $e_i \in E_1$ olsun. Baskınlık sayısını en az 1 artırmak için E_1 kümesinden minimum sayıda ayrıt silinmesi gerekir. Sadece E_1 kümesinden silinecek ayrıtlarla baskınlık sayısı artırılamaz. Fakat, E_1 kümesinden 1 ayrıt ve E_2 kümesinden 1 ayrıt olmak üzere toplamda 2 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artırılabilir. $v_x, v_y \in V_1$ iki ardışık tepe ,$v_z \in V_2$ olsun. v_x ile v_y arasındaki 1 ayrıt ve v_x ile v_z arasındaki 1 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Çünkü $\gamma(G_2) \geq 2'$ dir. Buradan E_1 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayılarının 2 olduğu görülür.

Durum 2: $e_i \in E_2$ olsun. E_2 kümesinden seçilen 1 ayrıt graftan silindiğinde $\gamma(G_2) \geq 2$ olduğundan baskınlık sayısı 1 artar. $v_x \in V_1$ ve $v_y \in V_2$ olacak şekilde iki tepe seçilsin. v_x ile v_y arasındaki 1 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Buradan E_2 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayılarının 1 olduğu açıktır.

Durum 3: $e_i \in E_3$ olsun. Sadece E_3 kümesinden silinecek ayrıtlarla baskınlık sayısı artırılamaz. Fakat, E_2 kümesinden 1 ayrıt ve E_3 kümesinden 1 ayrıt olmak üzere toplamda 2 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artırılabilir.$v_x, v_y \in V_2$,$v_z \in V_1$

olsun. v_x ile v_y arasındaki 1 ayrıt ve v_x ile v_z arasındaki 1 ayrıt graftan silindiğinde baskınlık sayısı 1 artar. Buradan E_3 kümesindeki her e_i ayrıtı için alt bağımlılık sayılarının 2 olduğu görülür.

Durum 1,durum 2 ve durum 3'ten

$$b_{av}(G_1 \circ G_2) = \sum_{e_i \in E_1} b_{e_i}(G_1 \circ G_2) + \sum_{e_i \in E_2} b_{e_i}(G_1 \circ G_2) + \sum_{e_i \in E_3} b_{e_i}(G_1 \circ G_2)$$

$$= \frac{2.s+n.m.1+n.k.2}{s+n.m+n.k}$$

$$= \frac{2.s+n.m+2.n.k}{s+n.m+n.k}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1. P_n ve P_m sırasıyla *n* ve *m* tepeli yol graflar, C_n ve C_m sırasıyla *n* ve *m* tepeli çevre graflar, K_n ; *n* tepeli tam graf, $K_{1,n}$; *n*+1 tepeli yıldız graf ve $W_{1,n}$; *n*+1 tepeli tam graf olmak üzere aşağıdaki tabloda Teorem 4.1'in özel graflar için sonuçları verilmiştir. ($m \geq 4$).

Çizelge 4.1. Teorem 4.1 için sonuçlar.

Graflar	**Ortalama alt bağımlılık değerleri**
$P_n \circ P_m$	$\frac{3nm-2}{2nm-1}$
$C_n \circ P_m$	$\frac{3nm}{2nm} = \frac{3}{2}$
$K_{1,n} \circ P_m$	$\frac{3nm+3m-2}{2nm+2m}$
$K_n \circ P_m$	$\frac{2(n^2+3nm-3n)}{n^2+4nm-3n}$
$W_{1,n} \circ P_m$	$\frac{3nm+3m+2n-2}{2nm+2m+n-1}$
$P_n \circ C_m$	$\frac{3nm+2n-2}{2nm+n-1}$
$C_n \circ C_m$	$\frac{3nm+2n}{2nm+n}$
$K_{1,n} \circ C_m$	$\frac{3m(n+1)+2n}{2m(n+1)+n}$
$K_n \circ C_m$	$\frac{2(n^2+3nm-n)}{n^2+4nm-n}$
$W_{1,n} \circ C_m$	$\frac{3nm+3m+4n}{2(n+nm+m)}$

Teorem 4.2. G_1; n tepeli, s ayrıtlı ve G_2 m tepeli, k ayrıtlı iki bağlantılı graf ve $\gamma(G_2) = 1$ olsun. t, G_2 grafındaki (n-1) dereceli tepeleri göstermek üzere;
t tek ise:

$$b_{av}(G_1 \circ G_2) = \frac{s.\left(\frac{t+3}{2}\right)+n.\left[\binom{t+1}{2}.\left(\frac{t+1}{2}\right)+\left(\left(k+m-\binom{t+1}{2}\right).\left(\frac{t+3}{2}\right)\right)\right]}{s+n.m+n.k}$$

t çift ise:

$$b_{av}(G_1 \circ G_2) = \frac{s.\left(\frac{t+4}{2}\right)+n.\left[\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\left(\frac{t+2}{2}\right)+\left(\left(k+m-\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\right).\left(\frac{t+4}{2}\right)\right)\right]}{s+n.m+n.k}, \text{ dir.}$$

İspat: Ortalama alt bağımlılık sayısı bulunurken t'nin tek ya da çift olmasına göre 2 durum oluşur.

Durum 1: *t* tek olsun.
$\exists v_i \in V_1$ olmak üzere, taçlama işlemi tanımından dolayı v_i tepesi taçlama işleminin yapıldığı G_i grafının tüm tepeleriyle bağlantılıdır. Buradan görülür ki v_i tepesi ve (n-1) dereceli t tane tepe kendi aralarında K_{t+1} alt tam grafını oluşturur. t+1 çift sayı olduğundan $b(K_{t+1}) = \frac{t+1}{2}$'dir (Fink vd., 1990). K_{t+1} alt grafından bir mükemmel eşleme çıkarıldığında K_{t+1} alt grafının tüm tepe dereceleri 1 azalır. Böylece $G_i + \{v_i\}$ alt grafının baskınlık sayısı 1 artar, bununla beraber $G_1{}_\circ G_2$ grafının baskınlık sayısı 1 artmış olur.

$|E(K_{t+1})| = \frac{(t+1).t}{2} = \binom{t+1}{2}$ olduğu açıktır ve $X = \binom{t+1}{2}$ olsun.

$e_1^{i^*}, e_2^{i^*}, \dots, e_x^{i^*}$ $G_i + \{v_i\}$ grafındaki K_{t+1} grafının ayrıtları olsun. Ayrıca D kümesi $G_1{}_\circ G_2$ grafındaki tüm $e_j^{i^*}$ ayrıtlarını içersin, $i \in \{1,2,\dots,n\}$ ve $j \in \{1,2,\dots,x\}$.

Böylece her $e_j^{i^*} \in D$ ayrıtı için $b_{e_j^{i^*}}(K_{t+1}) = \frac{t+1}{2}$ elde edilir. Ayrıca $E(G_1 \circ G_2)\backslash D'$ nin her ayrıtı için alt bağımlılık sayısı $\frac{t+3}{2}$ elde edilir.

Buradan;

$$b_{av}(G_1 \circ G_2) = \frac{1}{|E(G_1 \circ G_2)|}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{x} b_{e_j^{i*}}(G_1 \circ G_2) + \sum_{e\in E(G_1 \circ G_2)\setminus D} b_e\,(G_1 \circ G_2)\right)$$

$$= \frac{n.\left(\binom{t+1}{2}.\left(\frac{t+1}{2}\right)\right)+n.\left(k+m-\binom{t+1}{2}\right).\left(\frac{t+3}{2}\right)+s.\left(\frac{t+3}{2}\right)}{s+n.m+n.k}$$

$$= \frac{s.\left(\frac{t+3}{2}\right)+n.\left[\binom{t+1}{2}.\left(\frac{t+1}{2}\right)+\left(\left(k+m-\binom{t+1}{2}\right).\left(\frac{t+3}{2}\right)\right)\right]}{s+n.m+n.k}$$

elde edilir.

Durum 2: t çift olsun.

$\exists v_i \in V_1$ için v_i tepesinin taçlama işlemi yapılan G_i grafıyla oluşturulan $G_i + \{v_i\}$ alt grafı , v_i tepesi ile (n-1) dereceli t tane tepe K_{t+1} alt tam grafını oluşturur. t+1 değeri tek sayı olduğundan $b(K_{t+1}) = \frac{t+2}{2}$'dir (Fink vd, 1990). K_{t+1} alt grafından bir en büyük eşleme çıkarılırsa K_{t+1} alt grafında *t* dereceli sadece 1 tepe kalır. Bu en büyük eşlemeyle birlikte t dereceli tepeye bitişik herhangi bir ayrıt $G_i + \{v_i\}$ alt grafından çıkarılırsa bu grafın baskınlık sayısı 1 artar. Açıktır ki $G_1 \circ G_2$ grafının baskınlık sayısı 1 artmış olur.

B^* kümesi $G_i + \{v_i\}$ grafındaki K_{t+1} alt grafına bitişik ayrıtları göstersin ve $e_j^{i^*} \in E(K_{t+1}) \cup B^*$ olsun, $i \in \{1,2,\dots,n\}$ ve $j \in \{1,2,\dots,((t+1).m)-x\}$.

Durum 1'den $X = \binom{t+1}{2}$ olduğu biliniyor. Diğer taraftan D kümesi $G_1{}_\circ G_2$ grafındaki tüm $e_j^{i^*}$ ayrıtlarını içersin, $i \in \{1,2,\dots,n\}$ ve $j \in \{1,2,\dots,((t+1).m)-x\}$.

Böylece her $e_j^{i^*} \in D$ ayrıtı için $b_{e_j^{i*}}(K_{t+1}) = \frac{t+2}{2}$' dir. Ayrıca $E(G_1 \circ G_2)\setminus D'$ nin her ayrıtı için alt bağımlılık sayısı $\frac{t+4}{2}$' dir.

Buradan;

$$b_{av}(G_1 \circ G_2) = \frac{1}{|E(G_1 \circ G_2)|}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{x} b_{e_j^{i^*}}(G_1{}_\circ G_2) + \sum_{e\in E(G_1\circ G_2)\setminus D} b_e(G_1 \circ G_2)\right)$$

$$= \frac{n.\left(\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right).\left(\frac{t+2}{2}\right)\right)+n.\left(k+m-(t+1).m-\binom{t+1}{2}\right).\left(\frac{t+4}{2}\right)+s.\left(\frac{t+4}{2}\right)}{s+n.m+n.k}$$

$$= \frac{s.\left(\frac{t+4}{2}\right)+n.\left[\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\left(\frac{t+2}{2}\right)+\left(\left(k+m-\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\right).\left(\frac{t+4}{2}\right)\right)\right]}{s+n.m+n.k}$$

elde edilir.

Durum 1 ve durum 2’den ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2. P_n ve P_m sırasıyla *n* ve *m* tepeli yol graflar, C_n ve C_m sırasıyla *n* ve *m* tepeli çevre graflar, K_n ve K_m sırasıyla *n* ve *m* tepeli tam graflar, $K_{1,n}$ ve $K_{1,m}$ sırasıyla *n*+1 ve *m*+1 tepeli yıldız graflar ve $W_{1,n}$ ve $W_{1,m}$ sırasıyla *n*+1 ve *m*+1 tepeli tekerlek graflar olmak üzere aşağıdaki tabloda Teorem 4.2’in özel graflar için sonuçları verilmiştir.

$\gamma(G_2) = 1$ olacağından P_m için *m*=2, *m*=3 ve C_m için *m*=3 olmalıdır. $K_{1,m}$,K_m ,$W_{1,m}$ için $m \geq 4$ olmalıdır.

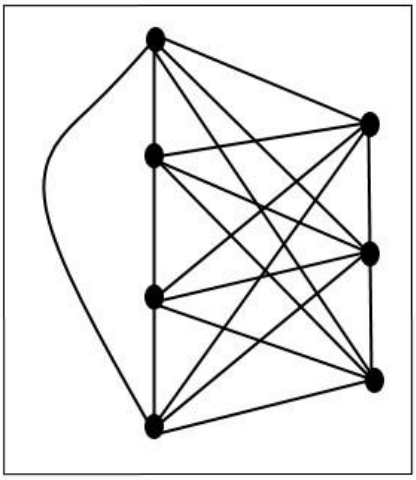
Çizelge 4.2. Teorem 4.2 için sonuçlar.

Graflar	**Ortalama alt bağımlılık değerleri**
$P_n \circ P_m$	*m*=2 ise $\frac{3nm+3n-3}{2nm-1}$ m=3 ise $\frac{4nm-n-2}{2nm-1}$
$P_n \circ C_m$	$\frac{6nm-3n-3}{2nm+n-1}$
$P_n \circ K_{1,m}$	$\frac{4nm+3n-2}{2nm+2n-1}$
$P_n \circ K_m$	*m* tek ise: $\frac{(n-1).\left(\frac{t+3}{2}\right)+n.\left[\binom{t+1}{2}.\left(\frac{t+1}{2}\right)+\left(\left(\frac{m.(m-1)}{2}.+m-\binom{t+1}{2}\right).\left(\frac{t+3}{2}\right)\right)\right]}{(n-1)+n.m+n.\frac{m.(m-1)}{2}}$ *m* çift ise: $\frac{(n-1).\left(\frac{t+4}{2}\right)+n.\left[\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\left(\frac{t+2}{2}\right)+\left(\left(\frac{m.(m-1)}{2}+m-\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\right).\left(\frac{t+4}{2}\right)\right)\right]}{(n-1)+n.m+n.\frac{m.(m-1)}{2}}$

$P_n \circ W_{1,m}$	$\frac{6nm+3n-2}{3nm+2n-1}$
$C_n \circ P_m$	m=2 ise $\frac{3nm+3n}{2nm}$ m=3 ise $\frac{4nm-n}{2nm}$
$C_n \circ C_m$	$\frac{6nm-3n}{2nm+n}$
$C_n \circ K_{1,m}$	$\frac{4nm+3n}{2nm+2n}$
$C_n \circ K_m$	*m* tek ise: $\frac{n.\left(\frac{t+3}{2}\right)+n.\left[\binom{t+1}{2}.\left(\frac{t+1}{2}\right)+\left(\left(\frac{m.(m-1)}{2}+m-\binom{t+1}{2}\right).\left(\frac{t+3}{2}\right)\right)\right]}{n+n.m+n.\frac{m.(m-1)}{2}}$ *m* çift ise: $\frac{n.\left(\frac{t+4}{2}\right)+n.\left[\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\left(\frac{t+2}{2}\right)+\left(\left(\frac{m.(m-1)}{2}+m-\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\right).\left(\frac{t+4}{2}\right)\right)\right]}{n+n.m+n.\frac{m.(m-1)}{2}}$
$C_n \circ W_{1,m}$	$\frac{6nmn+3n}{3nm+2n}$
$K_{1,n} \circ P_m$	m=2 ise $\frac{3nm+3n+3m}{2nm+2m-1}$ m=3 ise $\frac{4nm+4m-n-3}{2nm+2n-1}$
$K_{1,n} \circ C_m$	$\frac{6nm+6m-3n-6}{2nm+2m+n}$
$K_{1,n} \circ K_{1,m}$	$\frac{4nm+3n+4m+1}{2nm+2m+2n+1}$
$K_{1,n} \circ K_m$	*m* tek ise: $\frac{n.\left(\frac{t+3}{2}\right)+(n+1).\left[\binom{t+1}{2}.\left(\frac{t+1}{2}\right)+\left(\left(\frac{m.(m-1)}{2}+m-\binom{t+1}{2}\right).\left(\frac{t+3}{2}\right)\right)\right]}{n+(n+1).m+(n+1).\frac{m.(m-1)}{2}}$ *m* çift ise: $\frac{n.\left(\frac{t+4}{2}\right)+(n+1).\left[\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\left(\frac{t+2}{2}\right)+\left(\left(\frac{m.(m-1)}{2}+m-\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\right).\left(\frac{t+4}{2}\right)\right)\right]}{n+(n+1).m+(n+1).\frac{m.(m-1)}{2}}$
$K_{1,n} \circ W_{1,m}$	$\frac{6nm+3n+6m+1}{3nm+2n+2m+1}$
$K_n \circ P_m$	m=2 ise $\frac{\frac{3}{2}(n^2-n)+3nm}{\frac{n.(n-1)}{2}+2nm-n}$ m=3 ise $\frac{n^2+4nm-4n}{\frac{n.(n-1)}{2}+2nm-n}$
$K_n \circ C_m$	$\frac{\frac{3}{2}n.(n-1)+6nm-6n}{\frac{n.(n-1)}{2}+2nm}$
$K_n \circ K_{1,m}$	$\frac{n^2+4nm}{\frac{n.(n-1)}{2}+2m+n}$
$K_n \circ K_m$	*m* tek ise $\frac{\frac{n.(n-1)}{2}.\left(\frac{t+3}{2}\right)+n.\left[\binom{t+1}{2}.\left(\frac{t+1}{2}\right)+\left(\left(\frac{m.(m-1)}{2}+m-\binom{t+1}{2}\right).\left(\frac{t+3}{2}\right)\right)\right]}{\frac{n.(n-1)}{2}+n.m+n.\frac{m.(m-1)}{2}}$ *m* çift ise

	$\frac{\frac{n.(n-1)}{2}.\left(\frac{t+4}{2}\right)+n.\left[\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\left(\frac{t+2}{2}\right)+\left(\left(\frac{m.(m-1)}{2}+m-\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\right).\left(\frac{t+4}{2}\right)\right)\right]}{\frac{n.(n-1)}{2}+n.m+n.\frac{m.(m-1)}{2}}$
$K_n \circ W_{1,m}$	$\frac{n^2+6nm}{\frac{n.(n-1)}{2}+3nm+n}$
$W_{1,n} \circ P_m$	m=2 ise $\frac{3nm+6n+3m}{2nm+n+2m-1}$ m=3 ise $\frac{4nm+n+4m-3}{2nm+n+2m-1}$
$W_{1,n} \circ C_m$	$\frac{6nm+6m-6}{2nm+2n+2m}$
$W_{1,n} \circ K_{1,m}$	$\frac{4nm+5n+4m+1}{2nm+3n+2m+1}$
$W_{1,n} \circ K_m$	m tek ise: $\frac{2n.\left(\frac{t+3}{2}\right)+(n+1).\left[\binom{t+1}{2}.\left(\frac{t+1}{2}\right)+\left(\left(\frac{m.(m-1)}{2}+m-\binom{t+1}{2}\right).\left(\frac{t+3}{2}\right)\right)\right]}{2n+(n+1).m+(n+1).\frac{m.(m-1)}{2}}$ m çift ise: $\frac{2n.\left(\frac{t+4}{2}\right)+(n+1).\left[\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\left(\frac{t+2}{2}\right)+\left(\left(\frac{m.(m-1)}{2}+m-\left((t+1).m-\binom{t+1}{2}\right)\right).\left(\frac{t+4}{2}\right)\right)\right]}{2n+(n+1).m+(n+1).\frac{m.(m-1)}{2}}$
$W_{1,n} \circ W_{1,m}$	$\frac{6nm+5n+6m+1}{3nm+3n+3m+1}$

Tanım 4.2. G; G_1ve G_2graflarının toplanmasıyla elde edilen G_1+G_2 grafı olsun ve $G_1=\left(V(G_1),E(G_1)\right)$ ve $G_2=\left(V(G_2),E(G_2)\right)$ ile gösterilsin. G grafının tepeleri ve ayrıtları sırasıyla $V(G)=V(G_1)\cup V(G_2)$ ve $E(G)=E(G_1)\cup E(G_2)\cup\{e_{uv}|u\in V(G_1), v\in V(G_2)\}$ şeklinde gösterilir (Chartrand ve Lesniak 2004).



Şekil 4.2. 7 tepeli, 18 ayrıtlı C_4+P_3 grafı.

G_1 n tepeli, s ayrıtlı ve G_2 m tepeli, k ayrıtlı iki bağlantılı graf olsun.

$G_1 + G_2$ grafının tepeler kümesi $V(G_1 + G_2)$ olsun ve $V(G_1 + G_2) = V_1 \cup V_2$ olarak yazılsın. V_1 kümesi G_1 grafının ve V_2 kümesi G_2 grafının tepeler kümesi olsun.

Benzer şekilde $G_1 + G_2$ grafının ayrıtlar kümesi $E(G_1 + G_2)$ olmak üzere $E(G_1 + G_2) = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ olacak şekilde bu kümeler aşağıdaki şekilde yazılsın.

$E_1 = \{e_{v_i v_j} \in E(G_1 + G_2) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_1\}, |E_1| = s,$

$E_2 = \{e_{v_i v_j} \in E(G_1 + G_2) \mid v_i \in V_1, v_j \in V_2\}, |E_2| = n.m,$

$E_3 = \{e_{v_i v_j} \in E(G_1 + G_2) \mid v_i \in V_2, v_j \in V_2\}, |E_3| = k.$

Ayrıca G_1 grafındaki (n-1) dereceli tepelerin sayısı t, G_2 grafındaki (m-1) dereceli tepelerin sayısı w olsun.

Teorem 4.3. G_1; n tepeli, s ayrıtlı ve G_2 m tepeli, k ayrıtlı iki bağlantılı graf olsun. G_1 grafındaki (n-1) dereceli tepelerin sayısı t, G_2 grafındaki (m-1) dereceli tepelerin sayısı w olsun. (t+w)=1 ise $b_{av}(G_1 + G_2) = 2 - \frac{n+m-1}{s+n.m+k}'$ dir.

İspat: t+w=1 olması için $\gamma(G_1) = 1$ ve $\gamma(G_2) \geq 2$ veya $\gamma(G_2) = 1$ ve $\gamma(G_1) \geq 2$ olmalıdır. $\gamma(G_1) = 1$ olduğundan $\gamma(G_1 + G_2) = 1$ olduğu açıktır ve t=1 olduğundan $G_1 + G_2$ grafının baskın küme sayısı da 1 olur.

Teorem 2.18'den baskın küme sayısı 1 olan n tepeli bir bağlantılı grafta $b_{av}(G) = 2 - \frac{n-1}{|E(G)|}$'dir. Ayrıca $|V(G_1 + G_2)| = n + m$ ve $|E(G_1 + G_2)| = s + nm + k'$ dır.
O halde $G_1 + G_2$ bağlantılı grafı için (t+w)=1 olduğundan $b_{av}(G_1 + G_2) = 2 - \frac{n+m-1}{s+nm+k}$ olduğu açıkça görülür ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.4. G_1; n tepeli, s ayrıtlı ve G_2 m tepeli, k ayrıtlı iki bağlantılı graf olsun. $\gamma(G_1) = 1, \gamma(G_2) \geq 2$ veya $\gamma(G_2) = 1$ ve $\gamma(G_1) \geq 2$ olsun. (t+w) ≥2 için;
t+w çift ise:

$$b_{av}(G_1 + G_2) = \frac{\binom{t+w}{2}.\left(\frac{t+w}{2}\right)+\left[(s+n.m+k)-\binom{t+w}{2}\right].\left(\frac{t+w+2}{2}\right)}{s+n.m+k},$$

t+w tek ise:

$A = (t+w).(n+m) - \binom{t+w}{2}$ olmak üzere

$b_{av}(G_1+G_2) = \frac{A.\left(\frac{t+w+1}{2}\right)+[(s+n.m+k)-A].\left(\frac{t+w+3}{2}\right)}{s+n.m+k}$ dir.

İspat: (t+w)'nin çift ya da tek olmasına göre iki durum oluşur.

Durum 1: (t+w) çift ise:
G_1 grafındaki (n-1) dereceli t tane tepe ve G_2 grafındaki (m-1) dereceli w tane tepe K_{t+w} alt grafını oluşturur. (t+w) çift olduğundan $b(K_{t+w}) = \frac{t+w}{2}$'dir (Fink vd, 1990). K_{t+w} alt grafından bir mükemmel eşleme çıkarılırsa her tepe derecesi (t+w-2) olup G_1+G_2 grafında $\gamma(G_1+G_2)=2$ olur. K_{t+w} alt grafındaki herhangi bir e ayrıtını içeren bir mükemmel eşleme çıkarıldığında G_1+G_2 grafının baskınlık sayısının artacağı açıkça görülür.

K_{t+w} alt grafının ayrıt sayısı $E(K_{t+w}) = \frac{(t+w).(t+w-1)}{2} = \binom{t+w}{2}$ olup K_{t+w} alt grafındaki her e ayrıtı için $b(K_{t+w}) = \frac{t+w}{2}'$ dir. Ayrıca $E(G_1+G_2)\backslash E(K_{t+w})'$ nin tüm ayrıtları için alt bağımlılık sayısı $\frac{t+w+2}{2}$ olur.

Böylece;

$$b_{av}(G_1+G_2) = \frac{1}{|E(G_1+G_2)|}\left(\sum_{e\,\in\,E(K_{t+w})} b_e\,(G_1+G_2) + \sum_{e\,\in\,E(G_1+G_2)\backslash E(K_{t+w})} b_e\,(G_1+G_2)\right)$$

$$b_{av}(G_1+G_2) = \frac{\binom{t+w}{2}.\left(\frac{t+w}{2}\right)+\left[(s+n.m+k)-\binom{t+w}{2}\right].\left(\frac{t+w+2}{2}\right)}{s+n.m+k}$$

olduğu görülür.

Durum 2: (t+w) tek ise:
G_1 grafındaki (n-1) dereceli t tane tepe ve G_2 grafındaki (m-1) dereceli w tane tepe K_{t+w} alt grafını oluşturur. (t+w) tek olduğundan $b(K_{t+w}) = \frac{t+w+1}{2}$ olduğu

tır. K_{t+w} alt grafından bir en büyük eşleme çıkarılırsa K_{t+w} alt grafında t+w-1 dereceli 1 tepe kalır. Bu en büyük eşleme ile birlikte t+w-1 dereceli tepeye bitişik 1 ayrıt çıkarıldığında $G_1 + G_2$ için $\gamma(G_1 + G_2) = 2$ olur. $G_1 + G_2'$ nin baskınlık sayısı 1 artar.

B, K_{t+w} alt grafının ayrıtlarına komşu ayrıtları içeren bir küme olsun. $|B| = (t + w).(n + m) - \binom{t+w}{2}$ elde edilir. Böylece $E(K_{t+w} \cup B)$ kümesindeki her e ayrıtı için $b(K_{t+w}) = \frac{t+w+1}{2}$ olur. $E(G_1 + G_2)(E(K_{t+w}) \cup B)'$ nin tüm ayrıtları için alt bağımlılık sayısı $\frac{t+w+3}{2}$ olur. Buradan;

$$b_{av}(G_1 + G_2) = \frac{1}{|E(G_1 + G_2)|}\left(\sum_{e\,\in(E(\,K_{t+w}\,\cup B)} b_e\,(G_1 + G_2) + \sum_{e\,\in\,(E(G_1+G_2)(E(K_{t+w})\cup B)} b_e\,(G_1 + G_2)\right)$$

$$= \frac{|B|.\left(\frac{t+w+1}{2}\right)+[(s+n.m+k)-|B|].\left(\frac{t+w+3}{2}\right)}{s+n.m+k}$$

$A = (t + w).(n + m) - \binom{t+w}{2}$ olmak üzere,

$$b_{av}(G_1 + G_2) = \frac{A.\left(\frac{t+w+1}{2}\right) + [(s + n.m + k) - A].\left(\frac{t+w+3}{2}\right)}{s + n.m + k}$$

elde edilir.

Durum 1 ve durum 2'den ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3. G_1 *n* tepeli, *s* ayrıtlı ve G_2 *m* tepeli, *k* ayrıtlı iki bağlantılı graf olsun. $\gamma(G_1) = 1, \gamma(G_2) = 1$ olsun. Teorem 4.4 için 3 durum söz konusudur.

Durum 1. t=w=1 ise (t+w)=2 olacağından

$$b_{av}(G_1 + G_2) = \frac{\binom{t+w}{2}.\left(\frac{t+w}{2}\right)+[(s+n.m+k)-\binom{t+w}{2}].\left(\frac{t+w+2}{2}\right)}{s+n.m+k}$$

elde edilir.

Durum 2. $t,w \geq 2$ ise $(t+w) \geq 2$ olacağından

$t+w$ çift ise $b_{av}(G_1+G_2) = \frac{\binom{t+w}{2}.\left(\frac{t+w}{2}\right)+[(s+n.m+k)-\binom{t+w}{2}].\left(\frac{t+w+2}{2}\right)}{s+n.m+k}$,

$t+w$ tek ise $A = (t+w).(n+m) - \binom{t+w}{2}$ olup

$$b_{av}(G_1+G_2) = \frac{A.\left(\frac{t+w+1}{2}\right)+[(s+n.m+k)-A].\left(\frac{t+w+3}{2}\right)}{s+n.m+k}$$

elde edilir.

Durum 3. $t=1, w \geq 2$ ise$(t+w) \geq 2$ olup;

$t+w$ çift ise $b_{av}(G_1+G_2) = \frac{\binom{t+w}{2}.\left(\frac{t+w}{2}\right)+[(s+n.m+k)-\binom{t+w}{2}].\left(\frac{t+w+2}{2}\right)}{s+n.m+k}$,

$t+w$ tek ise $A = (t+w).(n+m) - \binom{t+w}{2}$ olup,

$$b_{av}(G_1+G_2) = \frac{A.\left(\frac{t+w+1}{2}\right)+[(s+n.m+k)-A].\left(\frac{t+w+3}{2}\right)}{s+n.m+k}$$

elde edilir.

Teorem 4.5. G_1; n tepeli, s ayrıtlı ve G_2 m tepeli, k ayrıtlı iki bağlantılı graf olsun. $\gamma(G_1) \geq 2, \gamma(G_2) \geq 2$ ise;

i) $b(G_1+G_2) \leq \max\{\Delta(G_1)+m, \Delta(G_2)+n\}+1$,

ii) $b_{av}(G_1+G_2) \leq 2 + \max\{\Delta(G_1)+m, \Delta(G_2)+n\} - \frac{b(G_1+G_2)}{s+nm+k}'$ dir.

İspat:

i) 2.16. teoreminden $\gamma(G) = 2$ ise $b(G) \leq \Delta(G)+1$ olduğu açıkça görülür. Böylece herhangi bir G_1+G_2 grafı için $\gamma(G_1) \geq 2$ ve $\gamma(G_2) \geq 2$ ise:

$$b(G_1+G_2) \leq \Delta(G_1+G_2)+1$$

olur.

Ayrıca $\Delta(G_1+G_2) = \max\{\Delta(G_1)+m, \Delta(G_2)+n\}'$ dir.

Buradan,

$$b(G_1 + G_2) \leq \max\{\Delta(G_1) + m, \Delta(G_2) + n\} + 1$$

elde edilir.

ii) Herhangi bir bağlantılı G grafında $\gamma(G) = 2$ ise $b(G) \leq \Delta(G) + 1$ olduğu açıkça görülür. Böylece herhangi bir G grafı için:

$$b_{av}(G) \leq (b(G) + 1) - \frac{b(G)}{|E(G)|}$$

elde edilir.

Ayrıca herhangi iki bağlantılı graf için $\gamma(G_1) \geq 2$ ve $\gamma(G_2) \geq 2$ ise $\gamma(G_1 + G_2) = 2$ olduğu açıktır.
Bu durumda,

$$b(G) \leq \Delta(G) + 1$$
$$b(G) + 1 \leq \Delta(G) + 2$$
$$b(G) + 1 - \frac{b(G)}{|E(G)|} \leq \Delta(G) + 2 - \frac{b(G)}{|E(G)|}$$

elde edilir.

Buradan;

$$b_{av}(G) \leq b(G) + 1 - \frac{b(G)}{|E(G)|}$$

$$b_{av}(G) \leq \Delta(G) + 2 - \frac{b(G)}{|E(G)|}$$

bulunur.

$G = G_1 + G_2$ olduğundan

$$b_{av}(G_1 + G_2) \le \Delta(G_1 + G_2) + 2 - \frac{b(G_1 + G_2)}{|E(G_1 + G_2)|}$$

$$b_{av}(G_1 + G_2) \le 2 + \max\{\Delta(G_1) + m, \Delta(G_2) + n\} - \frac{b(G_1 + G_2)}{s + nm + k}$$

elde edilir.

BÖLÜM 5

SONUÇ VE ÖNERİ

Bu tez çalışmasında, son zamanlarda tanımlanan ortalama alt bağımlılık sayısının tekerlek graf içeren graflar ve verilen herhangi iki bağlantılı grafın taçlama ve toplama işlemleri altında değerleri hesaplanmıştır.

Tekerlek graf içeren graflarda $W_{1,2n}$ ve Sf_n graflarının tepe sayılarının eşit olduğu kolayca görülür. Bu iki grafın ortalama alt bağımlılık değerlerine baktığımızda $b_{av}(W_{1,2n}) = \frac{3}{2}$ ve $b_{av}(Sf_n) = \frac{7}{2}$ (n tek ise), $b_{av}(Sf_n) = \frac{5}{2}$ (n çift ise) olduğundan ortalama alt bağımlılık sayısı bakımından, Sf_n grafının $W_{1,2n}$ grafından daha sağlam olduğu görülür. Bununla beraber f_n,G_n,H_n graflarının ayrıt sayıları eşittir. Bu üç grafı ortalama alt bağımlılık değerlerine göre karşılaştırdığımızda, H_n grafının daha dayanıklı olduğu görülür.

Taçlama ve toplama işlemlerinin ortalama alt bağımlılık sayısı bakımından karşılaştırılması için aşağıdaki tablo verilmiştir.

Çizelge 5.1. 6 farklı graf için alt bağımlılık ve ortalama alt bağımlılık değerleri.

G_1	G_2	$b(G_1 \circ G_2)$	$b_{av}(G_1 \circ G_2)$	$b(G_1 + G_2)$	$b_{av}(G_1 + G_2)$
$K_{1,9}$	C_6	1	1,534	1	1,800
K_6	P_{10}	1	1,534	3	3,820
$K_{1,5}$	$W_{1,5}$	1	1,940	1	1,980
P_8	$W_{1,8}$	1	1,961	1	1,831
C_{10}	P_3	1	1,833	1	1,714
C_6	K_4	3	3,09	2	2,833

Çizelge 5.1’ deki sonuçları kontrol ettiğimizde aşağıdaki sonuçlar elde edilir. Elde edilen bu sonuçlardan $b(C_{10} \circ P_3) = b(C_{10} + P_3) = 1$, $b_{av}(C_{10} \circ P_3) = 1{,}833$ ve $b_{av}(C_{10} + P_3) = 1{,}714$ değerlerini ele alalım.

Buradan ortalama alt bağımlılık sayısının, bağımlılık sayısına göre daha hassas bir ölçüm olduğu kolayca görülür. Teorem 2.17’den biliyoruz ki $b(G) \leq b_{av}(G) \leq (b(G) + 1) - \frac{b(G)}{E(G)}'$ dir. Çizelge 5.1' den kolayca görülür ki $b(K_{1,5} + W_{1,5}) = 1$ ve $b_{av}\left(K_{1,5} + W_{1,5}\right) = 1{,}980'$ dir. Teorem 2.17’den ortalama alt bağımlılık değeri üst sınıra ne kadar yakınsa graf o kadar dayanıklıdır. $\left(K_{1,5} + W_{1,5}\right)$ grafı için bunu kolayca görebiliriz. Üst sınıra yakın olmasının anlamı baskınlık sayısını 1 ayrıt silerek artırmak için, gereken ayrıt sayısının çok az olmasıdır. Buda ortalama alt bağımlılık sayısının daha hassas bir ölçüm olduğunu gösterir. Bununla beraber $G_1 + G_2$ grafının $G_1 \circ G_2$ grafına göre ortalama alt bağımlılık sayısı bakımından daha dayanıklı olduğu görülmüştür. Diğer bir sonuç olarak, $G_1 \circ G_2$ grafından G_2 grafının baskınlık sayısı 1 ise $G_1 \circ G_2$ grafının ortalama alt bağımlılık sayısı bakımından daha dayanıklı olduğu görülmüştür. Bununla beraber, ileri çalışmalar için çevre graf içeren grafların ortalama alt bağımlılık sayılarının bulunması ilgi çekici olabilir. Bununla beraber, farklı graf işlemleri için ortalama alt bağımlılık değerleri bulunabilir.

KAYNAKLAR

Aytaç, A., Odabas,Z.N. and Turacı, T. "The Bondage Number for Some Graphs", ***Comptes Rendus de Lacademie Bulgare des Sciences***, 64 (7): 925-930 (2011).

Aytaç, A. and Odabaş, Z. N. "Residual closeness of wheels and related networks", ***International Journal of Foundations of Computer Science,*** 22 (5): 1229–1240 (2011).

Aytaç, A. and Turacı, T. "Vertex vulnerability parameter of gear graphs", ***International Journal of Foundations of Computer Science,*** 22 (5): 1187–1195 (2011).

Aytaç, A., Turacı, T. and Odabaş, Z. N. "On the bondage number of middle graphs", ***Mathematical Notes,*** 93 (6): 803-811 (2013).

Aytaç, V. "Average Lower Domination Number in Graphs", ***Comptes Rendus de L'academie Bulgare des Sciences,*** 65 (12), 1665-1674 (2012).

Barefoot, C.A., Entringer, R. and Swart, H. "Vulnerability in graphs-a comparative survey", ***J. Combin. Math. Combin. Comput.***, 1: 13-22 (1987).

Blidia, M., Chellali, M. and Maffray, F. "On Average Lower Independence and Domination Number in Graphs", ***Discrete Math***., 295: 1-11 (2005).

Buckley, F. and Harary, F, "Distance in Graphs", ***Perseus Press,*** US (1990).

Chartrand, G. and Lesniak, L."Graphs and Digraphs" , ***California Wadsworth and Brooks,*** US (1986).

Chvatal, V. "Tough graphs and Hamiltonian circuits", ***Discrete Math.***, 5: 215-228 (1973).

Fink, J.F., Jacobson, M.S. and Kinch, L.F. and Roberts, J. "The bondage number of a graph," ***Discrete Math***. 86 (1-3): 47–57 (1990).

Frank, H. and Frisch, I. T. "Analysis and Design of Survivable Networks", ***IEEE Transactions on Communications Technology,*** 18 (5): 501–519 (1970).

Hartnell, D.F. and Rall, D.F. "Bounds on the bondage number of a graph, "***Discrete Math.*** 128 (1-3): 173–177 (1994).

Haynes, T. W., Hedeniemi, S. T. and Slater, P. J., "Fundamentals of Domination in Graphs" , ***Marcel Dekker, Inc,*** New York (1998).

Haynes, T. W., Hedeniemi, S. T. and Slater, P. J. “Domination in graphs”, Advanced Topic, ***Marcel Dekker, Inc,*** New York (1998).

Henning, M.A. “Trees with Equal Average Domination and Independent Domination Numbers”, ***Ars Combin***., 71: 305-318 (2004).

Javaid, I. and Shokat, S. “On the partition dimension of some wheel related graphs”, ***Journal of Prime Research in Mathematics,*** 4: 154-164 (2008).

Khalil, A.A.“ Determination and Testing the Domination Numbers of Helm Graph, Web Graph and Live Graph Using MATLAB”, ***Journal of Education and Science***, 24 (2): 103-116 (2011).

Mishkovski, I., Biey, M. and Kocarev, L. “Vulnerability of complex Networks”, ***Commun. Nonlinear Sci Numer Simulat***., 16: 341–349 (2011).

Newport, K.T. and Varshney, P.K. “Design of survivable communication networks under performance constraints”, ***IEEE Transactions on Reliability***, 40: 433-440 (1991).

Turacı, T. and Aslan, E. “The Average Lower Reinforcement Number of a Graph”, ***RAIRO–Therotical Informatics and Applications***, 50 (2): 135-144 (2016).

Turacı, T. “ On the Average Lower Bondage Number of a Graph”, ***RAIRO–Operations Research,*** 50 (4-5): 1003-1012 (2016a).

Turacı, T. “The Average Lower 2-domination Number of Wheels Related Graphs and an Algorithm ”, ***Mathematical and Computational Applications,*** 21 (3): 29 (2016b).

West, D. B. “Introduction to Graph Theory”, ***Prentice Hall, Upper Saddle River,*** US (1996).

ÖZGEÇMİŞ

Gamze KOÇAY 1992 yılında Ankara'da doğdu; ilk ve orta öğrenimini aynı şehirde tamamladı. Ankara Kanuni Lisesi'nden mezun oldu. 2010 yılında Karabük Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nde öğrenime başlayıp 2015 yılında iyi derece ile mezun oldu. 2016 yılında Karabük Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. 2017 yılında Van ilinde Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı ve halen burada görevine devam etmektedir.

ADRES BİLGİLERİ

Adres : Şerefiye Mah. Ordu Caddesi.5/26 İpekyolu-VAN

Tel : (554) 271 19 17

E-posta : gamzekocay_@hotmail.com