T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ SÜREKLİ FONKSİYONLARIN EN İYİ DÜZGÜN YAKLAŞIMI ÜZERİNE

Erhan DENİZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

ARALIK–2006
KARS

Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA danışmanlığında Arş.Gör. Erhan DENİZ in Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "Kompleks Değişkenli Sürekli Fonksiyonların En İyi Düzgün Yaklaşımı Üzerine" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında ……………………………… ile kabul edilmiştir.

..../…./……

.

Adı Soyadı		**İmza**
Başkan	**:** Prof. Dr. Gabil YAGUBOV	………………………
Üye	**:** Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	………………………
Üye	**:** Doç. Dr. Rafiğ ABDULLAYEV	………………………
Y. Üye	**:** Doç. Dr. Mithat KAYA	..……………………..

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …../…../…… Gün ve …………../…………. Sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Vahit ALİŞOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda katkı ve yardımlarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi ve Bölüm Başkanı değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA , Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Gabil YAGUBOV ve Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Dekan Yardımcısı ve Fizik Bölümü öğretim üyesi Doç. Dr. Mevlüt KARABUT hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam esnasında ve tezin hazırlanması sürecinde değerli fikir ve düşüncelerinden yararlandığım kıymetli arkadaşım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim elemanı Arş. Gör. Ömür DEVECİ' ye de teşekkürlerimi borç bilirim.

Kars-2006 Arş. Gör. Erhan DENİZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında kompleks değişkenli sürekli fonksiyonların polinomlarla en iyi düzgün yaklaşımı ele alınmıştır.

Reel Analizden fonksiyonların en iyi düzgün yaklaşımı üzerine bilinen Chebyshev ve Kolmogorov teoremlerinin benzerleri kompleks düzlemde verilmiştir.

Ayrıca, çalışmada Kolmogorov-tipli karakterizasyon öğrenilmiştir. En iyi düzgün yaklaşımın tekliği ve kuvvetli tekliği üzerine teoremler verilmiş ve ispatlanmıştır. Çalışmada en iyi düzgün yaklaşım polinomlarının davranışları üzerine bilgiler verilir. En iyi düzgün yaklaşım üzerine klasik çalışmalardan farklı olarak en iyi düzgün kısıtlı aralık yaklaşımı da verilmiştir.

2006, 50 Sayfa

Anahtar Kelimeler: En iyi düzgün yaklaşım, Karakterizasyon, Haar uzayı, Genelleştirilmiş polinom, Banach uzayı

ABSTRACT

In this thesis, best uniform approximation to complex-valued continuous functions with polynomials is studied.

The similar version of Chebyshev and Kolmogorov theorems that are known from Real Analysis is given in complex plane.

Furthermore, the kolmogorov-type characterization is learned. Theorems about the uniqueness and strongly uniqueness of best uniform approximation are given and the theorems are proven. In this study, information about the behaviors of best uniform approximation polynomials is proposed. Apart from classical studies on best uniform restricted interval approximation is also given.

2006, 50 Pages

Key words: Best uniform approximation, characterization, generalized polynomial, Haar space, Banach space

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
ξ	Kompleks Sayılar
$\exists$	En az
$\Vert \; \Vert$	Normlu uzayda norm
$E_n(f)$	f ’ e en iyi yaklaşım
$\operatorname{Re} f(z)$	$f(z)$ ’ nin Reel kısmı
$\overline{f(z)}$	$f(z)$ ’ nin kompleks eşleniği
$\lvert A \cup B \rvert$	$A \cup B$ ’ nin ölçümü
$C(Q)$	Q ’ da sürekli fonksiyonlar kümesi
$A(K)$	K’ da analitik fonksiyonlar kümesi
$\overline{\lim_{n\to\infty}} \alpha_n$	(α_n) dizisinin üst limiti
$C^{(k)}(Q)$	Q ’da k. mertebeden sürekli fonksiyonlar kümesi

GİRİŞ

Matematikte fonksiyonların yaklaşım teorisi geniş uygulama alanı olan bir teoridir. Operatör denklemlerin yaklaşık çözümü [1], analitik fonksiyonlar için periodik Riemann sınır değer probleminin yaklaşık çözümü [2], singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümü [3] ve diğer bu türden problemlerin çözümünde fonksiyonların yaklaşımı kullanılmaktadır. Bu sebepten fonksiyonlara yaklaşım ve en iyi yaklaşım günümüzde de önem taşımaktadır.

Yaklaşım teorisi Chebyshev'in klasik teoremlerinden başlayarak günümüzde de önemli ilgi alanı olmaktadır. Öyle ki, yaklaşım teorisi önce reel fonksiyonlar için reel sayı ekseninin aralıklarında tanımlı fonksiyonlar için öğrenilmiş, daha sonra bu teori kompleks düzleme taşınmıştır [4]. Günümüz matematiğinde n boyutlu uzaylarda [5–10] fonksiyonların en iyi yaklaşımı öğrenilmektedir.

En iyi düzgün yaklaşım, farklı kümelerde sürekli fonksiyonların en iyi düzgün yaklaşımı, eğri üzerinde fonksiyonlara yaklaşım, sonlu elemanlı kümelerde yaklaşım, kompakt kümelerde yaklaşım gibi farklı yönlerde ele alınabilir.

Bu tez çalışmasında kompleks değişkenli sürekli fonksiyonların en iyi düzgün yaklaşımı ele alınmıştır.

Öncelikle yaklaşım üzerine klasik çalışmalar incelenmiş. Daha sonra kompleks düzlemde ve çok boyutlu uzaylarda en iyi düzgün yaklaşım verilmiştir. En iyi yaklaşımın hızı, yani üstten değerlendirilmesi farklı sınıf fonksiyonlar için bulunmuştur.

Ayrıca, kompleks düzlemde kapalı diskte analitik fonksiyonlara derecesi n'yi aşmayan kompleks polinomlarla en iyi düzgün yaklaşımın davranışı öğrenilmiştir. En iyi yaklaşım için üsten değerlendirmeler bulunmuş ve hız belirlenmiştir.

Bunların yanı sıra kompleks düzlemde sürekli fonksiyonlara genelleştirilmiş polinomlarla en iyi düzgün kısıtlı aralık yaklaşımına bakılmıştır.

Ele alınan durumların hepsinde en iyi düzgün yaklaşım için bilinen klasik teoremlerin benzerleri ispatlanmıştır.

En iyi yaklaşımın Kolmogorov-tipli karakterizasyonu öğrenilmiş. Bunlara ek olarak en iyi düzgün yaklaşımın çeşitli uygulamaları verilmiştir.

Son yıllardaki çalışmalar incelenerek sonuçları verilmiştir.

1. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 1.1: L lineer normlu bir uzay $x, y \in L$ olsun.

$$\rho(x, y) = \|x - y\|_L$$

büyüklüğüne x ile y arasındaki uzaklık denir.

L lineer uzayının M alt uzayı için

$$\rho(y, M) = \inf\{\|y - x\| : x \in M\}$$

büyüklüğüne y' den M' ye olan uzaklık diyeceğiz.

Çalışma boyunca M_n ile P reel ya da kompleks sayı cismi üzerindeki $n+1$ boyutlu lineer uzay alınacaktır.

Aksi belirtilmedikçe,

$$\rho(y, M_n) = E_n(y)_L$$

(ya da kısaca $E_n(y)$) ifadesine y' nin M_n alt uzayı yardımıyla **en iyi yaklaşımı** diyeceğiz.

Tanım 1.2: Eğer,

$$\rho(y, x^*) = \rho(y, M_n)$$

koşulunu sağlayan $\exists x^* \in M_n$ elemanı varsa, x^*' a M_n' de y' ye **en iyi yaklaşım** (ya da y' den en az sapan) **elemanı** denir.

Çalışma boyunca bir D kümesinde sürekli fonksiyonları $C(D)$ ile gösterecek ve bu kümede normu

$$\|f\|_C = \|f\|_{C(D)} = \sup\{|f(z)| : z \in D\}$$

şeklinde vereceğiz.

Teorem 1.1 (En iyi yaklaşan elemanın varlığı üzerine Borel Teoremi):

$f(x)$ $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli herhangi bir fonksiyon ve M_n

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^{n-j}$$

şekilli $P_n(x)$ polinomlarının alt uzayı olsun. Herhangi $n \in \mathbb{N}$ için $f(x)$ ' e M_n 'de en iyi yaklaşan polinom vardır.

İspat: Teoremin ispatı için $P_n(x)$ polinomunun katsayılarının $n+1$ değişkenli fonksiyonu olan reel değerli

$$\varphi(a_0, a_1, ..., a_n) = \left\| f(x) - (a_0 x^n + ... + a_n) \right\|_C : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \tag{1.1}$$

fonksiyonunun $(n+1)$ boyutlu $\mathbb{R}^{n+1}$ Euclid uzayında bir $(a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ noktasında minimum değerini aldığını göstermek yeterlidir. Çünkü, $\forall (a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ için

$$\varphi(a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*) = \left\| f(x) - \sum_{j=0}^{n} a_i^* x^{n-j} \right\|_C \leq \left\| f(x) - P_n(x) \right\|_C = \varphi(a_0, a_1, ..., a_n)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi (1.1) fonksiyonunun $\mathbb{R}^{n+1}$ ' de bir $(a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*)$ noktasında minimum değerini aldığını gösterelim.

$$\begin{aligned} |\Delta\varphi| &= |\varphi(a_0 + a_0, a_1 + \Delta a_1, ..., a_n + \Delta a_n) - \varphi(a_0, a_1, ..., a_n)| \\ &\leq maks\left\{ \underset{x\in[a,b]}{maks} |x^j| \left(|\Delta a_0| + |\Delta a_1| + ... + |\Delta a_n| \right) : j = 0,1,...,n \right\} \end{aligned}$$

eşitsizliğinden, $\sigma = maks\{ |\Delta a_j| : j = 0,1,...,n \}$ olmak üzere,

$$\lim_{\sigma \to 0} |\Delta\varphi| = 0$$

olduğu görülür.

Dolayısıyla, $\varphi(a_0, a_1, ..., a_n)$ $\mathbb{R}^{n+1}$ ' de sürekli fonksiyondur.

Benzer şekilde,

$$\psi(a_0, a_1, ..., a_n) = \left\| a_0 x^n + ... + a_n \right\|_C : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \tag{1.2}$$

fonksiyonunun $\mathbb{R}^{n+1}$ ' de sürekli olduğu gösterilir.

$\psi(a_0, a_1, ..., a_n)$ fonksiyonu

$$|a_0| + |a_1| + ... + |a_n| = 1 \tag{1.3}$$

koşulunu sağlayan kapalı ve sınırlı bir $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ kümesinde minimum değerini alacaktır.

$\psi(a_0, a_1, ..., a_n)$ fonksiyonunun minimum değerini aldığı nokta $(\overline{a}_0, \overline{a}_1, ..., \overline{a}_n) \in M$ ve

$$\begin{aligned} \min \psi = \psi(\overline{a}_0, \overline{a}_1, ..., \overline{a}_n) = \mu = \left\| \overline{a}_0 x^n + ... + \overline{a}_n \right\|_C \\ \leq \left\| a_0 x^n + ... + a_n \right\|_C \end{aligned} \tag{1.4}$$

olsun.

$\mu > 0$ olacaktır. Çünkü $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ lineer bağımsız bir sistemdir.

Katsayıları

$$|a_0| + |a_1| + ... + |a_n| = \alpha > \frac{2}{\mu} \|f(x)\|_C$$

koşulunu sağlayan

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{n-k}$$

polinomu için (1.1) ve (1.4) ‘ den

$$\begin{aligned} \|f(x) - P_n(x)\|_C &\geq \left\| a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n \right\|_C - \|f(x)\|_C \\ &\geq \alpha.\mu - \|f\|_C \\ &> 2.\|f(x)\|_C - \|f\|_C = \|f\|_C \end{aligned}$$

elde edilir.

Buradan $\varphi(a_0, a_1, ..., a_n)$ fonksiyonunun minimum değerini

$$|a_0| + |a_1| + ... + |a_n| \leq \frac{2}{\mu} \|f(x)\|_C \tag{1.5}$$

koşulunu sağlayan $(a_0, a_1, ..., a_n)$ noktalarında alacağı görülür.

$f(x)$ $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyon olduğundan, $\varphi(a_0, a_1, ..., a_n)$ fonksiyonunun minimum değeri aldığı küme kapalı ve sınırlı kümedir.

Böylece, $\varphi(a_0, a_1, ..., a_n)$ kapalı ve sınırlı bir kümede sürekli olduğundan (Weierstrass teoremi gereğince) minimum değerini alır.

Dolayısıyla, $\exists (a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*) \in \mathbb{R}^{n+1}$ noktası vardır öyleki,

$$\min \varphi(a_0, a_1, ..., a_n) = \varphi(a_0^*, a_1^*, ..., a_n^*)$$

dır. Bu demek oluyor ki,

$$\exists P_n^*(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k^* x^{n-k}$$

vardır. Öyle ki,

$$\inf_{P_n}\|f(x)-P_n(x)\|_C=\|f(x)-P_n^*(x)\|_C$$

olur.

Bununla teoremin ispatı tamamdır.

2π periyotlu sürekli fonksiyonlar için benzer teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 1.1′: 2π periyotlu ve sürekli herhangi bir $f(t)$ fonksiyonu ve $\forall n=0,1,2,...$ için en iyi yaklaşan $T_n^*(t)$ trigonometrik polinomu vardır.

Teorem 1.1 herhangi normlu lineer uzayda aşağıdaki şekilde (N.İ. Ahiyezer) ifade edilir.

Teorem 1.1″: E herhangi normlu lineer uzay ve $\{g_0,g_1,...,g_n\}$ E ‘ de lineer bağımsız bir sistem olsun. O halde $\forall x\in E$ elemanına

$$P_n\,(c;g)=\sum_{k=0}^{n} c_k g_k$$

şekilli polinomlardan en iyi yaklaşan

$$\exists P_n^*(c;g)=\sum_{k=0}^{n} c_k^* g_k$$

elemanı vardır. Yani,

$$\inf_{c_k}\left\|x-\sum_{k=0}^{n} c_k g_k\right\|=\left\|x-\sum_{k=0}^{n} c_k^* g_k\right\|_C$$

olacaktır.

Tanım 1.3: $f\in C[a,b]$ ve $P_n(x)$ *n*. dereceden cebirsel polinom olsun.

$$f(x)-P_n(x)=r_n(x)$$

alalım.

1. $r_n(x)$ bu noktalarda ard-arda işaret değiştirir.

2. $r_n(x)$ modülce en büyük değerini bu noktalarda alır, yani,

$$r_n(x_1) = -r_n(x_2) = ... = (-1)^{n+1} r_n(x_{n+2}) = \pm \|r_n(x)\|_C$$

oluyorsa,

$$a \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{n+2} \leq b$$

koşulunu sağlayan $x_i \in [a,b]$, $i = 1,2,...,n+2$ noktalarına, ya da $\{x_i\}_1^{n+2}$ sistemine **Chebyshev alternansı** denir.

Tanım 1.4:

$$|f(x_0) - P_n(x_0)| = maks\{|f(x) - P_n(x)| : x \in [a,b]\} = \|f(x) - P_n(x)\|_C \qquad (1.7)$$

koşulunu sağlayan $x_0 \in [a,b]$ noktasına $f(x) - P_n(x)$ farkı için (ya da $P_n(x)$ için) ***e*-noktası** (ya da $e(P_n)$ noktası) denir.

Ayrıca, eğer,

$$f(x_0) - P_n(x_0) = maks\{|f(x) - P_n(x)| : x \in [a,b]\} \qquad (1.8)$$

oluyorsa **(+) nokta**, eğer,

$$f(x_0) - P_n(x_0) = -maks\{|f(x) - P_n(x)| : x \in [a,b]\} \qquad (1.9)$$

oluyorsa **(-) nokta** olarak adlandırılır.

Teorem 1.2 (P.L. Chebyshev): $f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Derecesi n 'yi aşmayan $P_n(x)$ polinomunun $f(x)$' e en iyi yaklaşan polinom olması için gerekli ve yeterli koşul $[a,b]$ aralığında en azından bir tane $\{x_i\}_1^{n+2}$ Chebyshev alternansının var olmasıdır.

Tanım 1.5: Herhangi M metrik uzayında

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x) \qquad (1.10)$$

sürekli fonksiyonları verilsin.

Eğer,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x) \qquad (1.11)$$

şekilli her polinomun *M*' de en fazla *n* kökü varsa (1.10) sistemine **Chebyshev** ya da **T-sistemi** denir.

Not: (1.10) sistemi bir M metrik uzayında Chebyshev sistemiyse bu uzayın en azından *n+1* tane noktasını içeren altkümesi de bir Chebyshev sistemidir.
Chebyshev sistemleri için örnekler:

Örnek 1.1: Her $n \in \leq$ için

$$\{1, z, z^2, ..., z^n\} \tag{1.12}$$

sistemi kompleks düzlemde bir Chebyshev sistemidir.

Örnek 1.2: Her $n \in \leq$ için

$$\{1, e^{iz}, e^{-iz}, ..., z, e^{inz}, e^{-inz}\} \tag{1.13}$$

ve dolayısıyla,

$$1, \cos z, \sin z, ..., \cos(nz), \sin(nz) \tag{1.14}$$

sistemi $\alpha \in$ ▪ olmak üzere, $\alpha \leq \operatorname{Re} z < \alpha + 2\pi$ kümesinde bir Chebyshev sistemidir.

Örnek 1.3: Eğer, $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\}$ M ‘ de bir Chebyshev sistemi ise, herhangi $p(x)$ pozitif fonksiyonu için $p(x).\varphi_0(x), p(x).\varphi_1(x), ..., p(x).\varphi_n(x)$ sitemi de M ‘ de bir Chebyshev sistemidir.

Örnek 1.4: $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(x) = x^3$ fonksiyonlarının $\{1, x^3\}$ sistemi ▪ ’ de bir Chebyshev sistemidir.

Örnek 1.5: $\{1, x^{-3}\}$ sistemi $(0, +\infty)$ ’ da bir Chebyshev sistemidir.

Örnek 1.6: $\{x^2 - x, x^2 + x, x^2 + 1\}$ sistemi ▪ ’ de bir Chebyshev sistemidir.

Tanım 1.6: Eğer, $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$ sisteminin herhangi $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_m(x)\}$ $0<m<n$ alt sistemi Chebyshev sistemi ise $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$ sistemine **Markov sistemi** denir.

Teorem 1.2: Herhangi bir M kümesinde verilen $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$ sisteminin bir Chebyshev sistemi olması için gerekli ve yeterli şart, farklı herhangi $\{x_j\}_0^n \subset M$ için

$$D(\varphi;x)=D\begin{pmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \cdots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \cdots & \varphi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \cdots & \varphi_n(x_n)\end{vmatrix}\neq 0 \tag{1.15}$$

olmasıdır.

Önerme 1.1: Eğer, $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$ $[a,b]$ aralığında bir Chebyshev sistemi ise,

$$\min\{|x_j-x_k| : j,k=0,1,...,n\}\geq c>0$$

koşulunu sağlayan $x_j\in[a,b], j=0,1,...,n$ noktaları için

$$D(\varphi;x)=\left|D\begin{pmatrix}\varphi_0 & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\right|\geq r>0$$

dır.

Teorem 1.3: M metrik uzayının herhangi kümesinde $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$ Chebyshev sistemi verilsin. O halde, aralarında farklı herhangi $x_j\in M$, $j=\overline{0,n}$ ve herhangi y_j, $j=\overline{0,n}$ noktaları için

$$P_n(x_j)=y_j \tag{1.16}$$

koşullarını sağlayan bir tek $P_n(x)$ polinomu vardır.

Bu polinom

$$P_n(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ y_0 & \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_n & \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_0(x_0) & \varphi_0(x_1) & \dots & \varphi_0(x_n) \\ \varphi_1(x_0) & \varphi_1(x_1) & \dots & \varphi_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x_0) & \varphi_n(x_1) & \dots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}} \tag{1.17}$$

şeklinde tanımlanır ve **enterpolasyon polinomu** olarak adlandırılır.

Tanım 1.7: $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\}$ reel fonksiyonları $[a,b]$ aralığında bir Chebyshev sistemi ve $P_n(x)$ bu sistemin polinomu (yani, $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(x)$) olsun.

Eğer, bir $x_0 \in (a,b)$ için $P_n(x_0) = 0$ ve $\operatorname{sgn} P_n(x_0 - 0).\operatorname{sgn} P_n(x_0 + 0) < 0$ ise (yani, $P_n(x)$ polinomu x_0 kökünden geçerken işaret değiştiriyorsa) x_0' a $P_n(x)$ polinomunun **tek kökü**, eğer,

$$\operatorname{sgn} P_n(x_0 - 0).\operatorname{sgn} P_n(x_0 + 0) > 0$$

ise (yani, $P_n(x)$ polinomu x_0 kökünden geçerken işaretini koruyorsa) x_0' a $P_n(x)$ polinomunun **çift kökü** denir.

Eğer, polinomun kökü $[a,b]$ aralığının herhangi ucu ile çakışırsa bu köke tek kök diyeceğiz.

Teorem 1.4: $\{\varphi_0(x), \varphi_1(x), ..., \varphi_n(x)\}$, $[a,b]$ aralığında bir Chebyshev sistemi olsun. O halde, aralarında çakışmayan herhangi $\{x_i\}_1^k \subset [a,b]$ ve $\{y_j\}_1^p \subset (a,b)$,

$$n - (k + 2p) = 2r, \ r = 0,1,2,...$$

koşulunu sağlayan, noktalar için $P_n(x)$ polinomu vardır ve $P_n(x)$ polinomunun kökleri x_i, $i = \overline{1,k}$ 'lar ve çift kökleri de y_j, $j = \overline{1,p}$ ' dir.

Teorem 1.5: $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$, $[a,b]$ aralığında bir Chebyshev sistemi ve $f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. O halde, $P_n^*(x)$ polinomunun $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$sisteminin diğer polinomlarına göre $f(x)$’e en iyi yaklaşan polinom olması için gerekli ve yeterli koşul $[a,b]$ aralığında

$$f(x)-P_n^*(x)=r_n^*(x)$$

farkı

1. Peş-peşe işaret değiştiren,
2. $r_n^*(x_1)=-r_n^*(x_2)=...=(-1)^{n+1}r_n^*(x_{n+2})=\pm\left\|r_n^*(x\ )\right\|_C$

olacak şekilde en azından bir tane

$$a\le x_1<x_2<...<x_{n+2}\le b$$

$\{x_i\}_{i=1}^{n+2}$ Chebyshev alternasının olmasıdır.

Teorem 1.6: Herhangi $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$ Chebyshev sistemi ve $\forall f\in C[a,b]$ için tek bir $P_n^*(x)$ en iyi yaklaşım polinomu vardır.

Teorem 1.7 (Haar, A.N. Kolmogorov): En azından n+1 tane nokta bulunduran kapalı sınırlı $M\subset$ ▪ ^{n} kümesinde reel ya da kompleks $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$sistemi verilsin. O halde, $\forall f\in C(M)$fonksiyonu için

$$P_n^*(x)=\sum_{k=0}^{n}c_k^*\varphi_k(x) \tag{1.18}$$

şekilli tek bir en iyi yaklaşım polinomunun var olması için gerekli ve yeterli koşul $\{\varphi_j(x)\}_{j=0}^{n}$ sisteminin Chebyshev sistemi olmasıdır.

Teorem 1.8 (Valle-Poisson): Eğer, $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir $f(x)$ fonksiyonu ve $\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)\}$ Chebyshev sistemi üzre $P_n(x)$ polinomu için

$$a\le x_1<x_2<...<x_{n+2}\le b$$

koşullarını sağlayan x_j, $j=\overline{1,n+2}$ noktalarında

$$\operatorname{sgn}\{f(x_j) - P_n(x_j)\} = -\operatorname{sgn}\{f(x_{j+1}) - P_n(x_{j+1})\}$$

oluyorsa,

$$E_n(f) \geq \min\{|f(x_j) - P_n(x_j)| : j = \overline{1, n+2}\} \tag{1.19}$$

dir.

2. KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ SÜREKLİ FONKSİYONLARIN EN İYİ DÜZGÜN YAKLAŞIMI ÜZERİNE

Bu bölümde reel değişkenli sürekli fonksiyonların en iyi yaklaşımından elde edilen sonuçların kompleks düzlemde sınırlı, kapalı $\Re$ kümesinde verilmiş kompleks değerli sürekli fonksiyonlar için genelleştirildiğini göreceğiz. Verilmiş bir $f(z)$ fonksiyonunun en iyi yaklaşımının varlığı $1.1''$ teoremine göre bulunduğundan ve böyle polinomun yegane olması ise 1.7 teoremi gereğince çözüldüğüne göre ilk önce A.N. Kolmogorov teoreminin benzerini kompleks düzlemde ispat edelim. Çünkü bu teorem, Chebyshevin 1.5 teoremine benzer olarak $P_n^*(z)$ polinomunun $\Re$ kümesindeki $f(z)$ fonksiyonunun n. dereceden en iyi yaklaşımı için gerekli ve yeterli şartlar verir.

Bundan sonra kısaca aşağıdaki problemler üzerinde duracağız.

1. Verilen bir fonksiyonun verilen dereceden polinomlarla ile en iyi yaklaşımının değerlendirilmesi,
2. Hangi minimal $E_0 \subset \Re$ küme altında en iyi düzgün yaklaşımın değerinin, tüm $\Re$ kümesindeki en iyi yaklaşıma eşit olması,
3. Kompleks değişkenli fonksiyonun yaklaşımı durumunda hangi işaretlerin farkının yani $f(z) - P_n(z)$ işaretlerin ardışık değişimi kuralına benzerdir. (Chebyshev teoremleri v.b)
4. Konveks kümelerin elemanlarının yardımıyla soyut fonksiyonların yaklaşımı hakkında

Tanım 2.1: Eğer kapalı sınırlı $\Re$ kümesinde sürekli $f(z)$ fonksiyonu ve $P_n(z)$ polinomu (genellikle genelleştirilmiş) verilmişse o zaman istenen $z_0 \in \Re$ noktasında

$$\left| f(z_0) - P_n(z_0) \right| = \left\| f(z) - P_n(z) \right\|_C$$

geçerli ise $z_0 \in \Re$ noktasına $e = e(P_n)$ noktası denir ($f - P_n$ nin farkı diye adlandırılır).

Teorem 2.1 (A.N Kolmogorov): Kapalı sınırlı $\Re$ kümesinde $n+1$ tane sürekli fonksiyonların, yani;

$$\varphi_0(z), \varphi_1(z), ...\varphi_n(z) \tag{2.1}$$

verildiğini ve $f(z)$ sürekli fonksiyonunu $P_n(z) = P_n(\varphi_k; c_k, z)$ genelleştirilmiş polinomları ile

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(z) \tag{2.2}$$

yaklaştırılması gerektiğini varsayalım. $P_n^*(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k^* \varphi_k(z)$ polinomunu $f(z)$ fonksiyonunun en iyi düzgün yaklaşım polinomunun

$$\left\| f(z) - P_n^*(z) \right\|_C = \inf_{P_n} \left\| f(z) - P_n(z) \right\|_C,$$

anlamında en iyi yaklaşımı için gerekli ve yeterli şart , $\Re$ de $e = e(P_n^*)$ noktalarını $E = E(P_n^*)$ kümesinde istenilen (2.2) formundaki $P_n(z)$ polinomu için

$$\min_{z \in E} \operatorname{Re}\left\{ P_n(z) \left[\overline{f(z) - P_n^*(z)} \right] \right\} \leq 0 \tag{2.3}$$

eşitsizliğinin gerçekleşmesidir.

İspat: Gereklilik: $P_n^*(z)$ polinomu $f(z)$ fonksiyonunun en iyi yaklaşımı olsun. İspatı olmayana ergi yöntemiyle yapalım. Herhangi $P_n(z)$ polinomu için (2.3) eşitsizliğinin tersinin sağlandığını yani;

$$\min_{z \in E} \operatorname{Re}\left\{ P_n(z) \left[\overline{f(z) - P_n^*(z)} \right] \right\} > c > 0 \tag{2.4}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda E kümesi kapalı ve sınırlı olduğundan dolayı (2.4) eşitsizliği herhangi $\delta > 0$ için $E_\delta \supset E$ kümesinde, E kümesinden δ dan küçük mesafede olan $\Re$ kümesinde bütün noktalarda sağlanacaktır. Bu taktirde $\Re \setminus E_\delta$ kümesinin kapalı olacağı açıktır.

$$\max_{z \in \Re} \left| f(z) - P_n^*(z) \right| = E_n; \quad \max_{z \in \Re / E_\delta} \left| f(z) - P_n^*(z) \right| = E_n^{'} \;;$$

$$E_n - E_n^{'} = h; \tag{2.5}$$

$$\max_{z \in \Re} \left| P_n(z) \right| = M; \quad \min\left\{ \frac{c}{M^2}; \frac{h}{2M} \right\} = \lambda$$

burada h ve λ sayılarının pozitif olduklarının altını çizelim. Şimdi

$$Q_n(z) = P_n^*(z) + \lambda P_n(z) \tag{2.6}$$

polinomunu oluşturalım ve bu polinomun $f(z)$ fonksiyonunun $P_n^*(z)$ polinomuna göre daha iyi yaklaştığını göreceğiz. Bu ise çelişkidir. Gerçekten de (2.4) ve (2.5) ifadelerini ve istenilen w_0 kompleks sayısı için

$$w_0 + \overline{w_0} = 2\operatorname{Re} w_0$$

olduğunu dikkate alırsak, istenen $z \in E_\delta$ için

$$\begin{aligned}
\left|f(z) - Q_n(z)\right|^2 &= \left|f(z) - P_n^*(z) - \lambda P_n(z)\right| . \left|\overline{f(z) - P_n^*(z)} - \lambda \overline{P_n(z)}\right| = \\
&= \left|f(z) - P_n^*(z)\right|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\left\{P_n(z)\left[\overline{f(z) - P_n^*(z)}\right]\right\} + \lambda^2 \left|P_n(z)\right|^2 \le \\
&\le E_n^2 - 2\lambda c + \lambda \frac{c}{M^2} M^2 = E_n^2 - \lambda c < E_n^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer, $z \in \Re \setminus E_\delta$ ise o zaman (2.6) ve (2.5) e göre

$$\begin{aligned}
\left|f(z) - Q_n(z)\right| &\le \left|f(z) - P_n^*(z)\right| + \lambda \left|P_n(z) \le\right| \\
&\le E_n^{'} + \frac{h}{2M} M = E_n - \frac{h}{2} < E_n .
\end{aligned}$$

olur. Buna göre tüm $z \in \Re$ için

$$\left|f(z) - Q_n(z)\right| < E_n = \max_{z \in \Re} \left|f(z) - P_n^*(z)\right|,$$

elde edilir. Bu ise $P_n^*(z)$ polinomunun tanımına çelişki teşkil eder.

Yeterlilik: $P_n^*(z)$, (2.2) şekilli ve (2.3) koşulunu sağlayan bir polinom olsun. $P_n^*(z)$ polinomunun $f(z)$ fonksiyonuna en iyi yaklaştığını ispatlayalım. Gerçekten eğer $Q_n(z)$ (2.2) şeklinde herhangi bir polinom ve z_0

$$\operatorname{Re}\left\{\left[Q_n(z_0) - P_n^*(z_0)\right]\left[\overline{f(z_0) - P_n^*(z_0)}\right]\right\} \le 0$$

eşitsizliğini sağlayan E kümesinden olan bir eleman ise (Burada $P_n(z)$ rolünü $Q_n(z) - P_n^*(z)$ polinomu oynayacaktır) bu noktada

$$\begin{aligned}|f(z_0)-Q_n(z_0)|^2 &= \left|f(z_0)-P_n^*(z_0)-\left[Q_n(z_0)-P_n^*(z_0)\right]\right|^2\\ &= \left|f(z_0)-P_n^*(z_0)\right|^2-2\operatorname{Re}\left\{\left[Q_n(z_0)-P_n^*(z_0)\right]\left[\overline{f(z_0)-P_n^*(z_0)}\right]\right\}\\ &+\left|Q_n(z_0)-P_n^*(z_0)\right|^2 \geq \max_{z\in\Re}\left|f(z)-Q_n(z)\right|^2,\end{aligned}$$

olacaktır. Bu ise $P_n^*(z)$ polinomunun $f(z)$ fonksiyonunun en iyi yaklaşımı olduğunu gösterir. Böylece Teorem 2.1 ispatlanmış olur.

Teorem 2.1 in uygulamaları:

Örnek 1. $|z|\leq 1$ birim dairede verilen $f(z)=z^n$ fonksiyonu için $n-1$. dereceden Chebyshev çok terimliler içerisinden en iyi yaklaşımı $P_{n-1}^*(z)=0$ polinomudur.

Gerçekten bu durumda E kümesi $E=\{z:|z|=1\}$ olacaktır. İstenilen çok terimli $n-1$. dereceden $P_{n-1}(z)$ çok terimlisi için

$$P_{n-1}(z)\left[\overline{f(z)-P_{n-1}^*(z)}\right]=P_{n-1}(z).\overline{z^n} \tag{2.7}$$

çarpımı öyle bir özelliğe sahiptir ki E birim dairesindeki z noktası ile pozitif yönde döndüğünde $\overline{z^n}$ teriminin argümanı ise $2.(n-1)\pi$ değerinden çok olmayacak şekilde artacaktır (çünkü E nin içerisinde $P_{n-1}(z)$ in $n-1$ den fazla kökü yoktur). Böylece (2.7) çarpımının argümanı en azından 2π kadar azalacaktır. Buradan, süreklilikten dolayı (2.7) çarpımının Reel kısmı en azından bir $z_0\in E$ noktasında pozitif olmayacaktır (Bu (2.7) çarpımının argümanının $\pi+2k\pi$, $k=0,1,-1...$ olduğunu ya da z_0 noktalarında ya da çarpımın sıfıra eşit olacağı noktalarda yer alacaktır.).

Örnek 2. (S.Y. Alper). $|z|\leq 1$ birim dairede verilmiş

$$f(z)=\frac{1}{z-a}, \quad |a|>1$$

fonksiyonu için n. dereceden bir $P_n^*(z)$ çok terimlisi ve γ_n sayısı seçelim. Öyle ki

$$\frac{1}{z-a} - P_n^*(z) = \frac{1-(z-a)P_n^*(z)}{z-a} = \gamma_n \frac{(1-\bar{a}z)z^n}{z-a}\ , \qquad (2.8)$$

eşitliği sağlanmış olsun ve böyle kurulmuş $P_n^*(z)$ çok terimlinin $\frac{1}{z-a}$ fonksiyonunun en iyi yaklaşımı olan çok terimli olduğunu ispat edelim. Aynı zamanda *n.* dereceden istenilen $P_n\,(z)$ çok terimlisi için

$$\min_{z\in E} \operatorname{Re}\left\{ P_n(z)\left[\overline{\frac{1}{z-a} - P_n^*(z)}\right]\right\} = \min_{z\in E} \operatorname{Re}\left\{ P_n(z)\left[\overline{\gamma_n \frac{(1-\bar{a}z)z^n}{z-a}}\right]\right\} \le 0\,, \qquad (2.9)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim. Burada, E $|z| \le 1$ noktalar kümesidir ve $\frac{1}{z-a} - P_n^*(z)$ modülce $|z| \le 1$ kümesinde en büyük değerini alır.

$\frac{1-\bar{a}z}{z-a}$ fonksiyonu $|z| < 1$ birim çemberini ve onun $|z| = 1$ sınırını kendilerine yansıttığı için (2.8) ifadesi kendi modülünün γ_n ye eşit olan değerini $|z| = 1$ de alır. Burada E kümesinin rolünü yine $|z| = 1$ birim çemberi üstlenir. Birim E çemberi pozitif yönde döndüğünde $\overline{\frac{(1-\bar{a}z)z^n}{z-a}}$ terimin argümanı $2(n+1)\pi$ kadar azalacaktır. Çünkü $(1-\bar{a}z)z^n$ çarpımının tüm $n+1$ kökleri birim çemberin içinde, $z-a$ farkının kökü ise dışında olur. $P_n(z)$ çok terimlinin argümanın ise $2n\pi$ den büyük olmadığını dikkate alırsak (2.9) daki küme parantezi içerisinde olan ifadenin argümanının o zaman an azından 2π kadar azaldoğı sonucuna varırız. Bundan sonra 1. örnekteki gibi düşünürsek (2.9) eşitsizliğinin geçerli olduğunu görürüz.

$z \to a$ limitine geçerken (2.8) eşitliğinin her tarafını $z-a$ ile çarptıktan sonra $\gamma_n = \left[a^n(1-|a|^2\right]^{-1}$ elde ettiğimizden $\frac{1}{z-a}$ fonksiyonunun en iyi düzgün yaklaşım değerinin

$$E_n\left(\frac{1}{z-a}\right) = \min_{P_n} \max_{|z|\le 1} \left|\frac{1}{z-a} - P_n\,(z)\right| = |\gamma_n| = \frac{1}{|a|^n(|a|^2-1)}\ . \qquad (2.10)$$

olduğunu elde ederiz.

Örnek 3. Teorem 1.2 (P.L. Chebyshev)'nin Teorem1.1' den kolayca elde edilebileceğini gösterelim.

Gereklilik: Chebyshev teoreminin ispatında kullanılan işaretleri kullanarak [a,b] aralığında en azından $n+2$ farklı e noktalarının x_k noktalarından oluşan bir sistemde mevcut olduğunu gösterelim.

Bu noktalarda işaretlerin sırayla değişme şartı

$$r_n(x_1) = -r_n(x_2) = ... = (-1)^{n+1} r_n(x_{n+2})$$

sağlanır.

Gerçekten, eğer işaretlerin değişimi e-noktalarının (yani E de olan noktaların) maksimal sayısı $m+1$' e eşit olması durumunda (burada $m+1 < n+2$) $P_m(x)$ $m \geq 1$ için (1.13) formülü ile tanımlanarak ve $m = 0$ için $P_0(x) = 1$ veya -1 kabul ederek n den büyük olmayan dereceden, bir çok terimli elde edilebilir ki tüm $x \in E$ noktalarında $f(x) - P_n^*(x)$ farkının işareti alınırdı ve buna göre

$$\min_{x \in E} \operatorname{Re}\left\{P_m(x)\left[\overline{f(x) - P_n^*(x)}\right]\right\} = \min_{x \in E}\left\{P_m(x)\left[f(x) - P_n^*(x)\right]\right\} > 0 \ ,$$

sağlanırdı. Böylece çelişki elde edilir.

Yeterlilik: $P_n^*(x)$ çok terimlisi öyle olsun ki $f(x) - P_n^*(x)$ farkı [a,b] aralığında modülce en büyük değerini alsın. Bu fark $x_k \in [a,b]$ noktalarında $n+2$ tane noktada sırasıyla işaret değiştirsin. İstenilen n. dereceden $P_n(x) \neq 0$ çok terimli [a,b] aralığında $n+1$'den büyük olmayan x_k noktalarında sırasıyla işaret değiştiğini dikkate alırsak,

$$\min_{x \in E} \operatorname{Re}\left\{P_n(x)\left[\overline{f(x) - P_n^*(x)}\right]\right\} \leq \min_{k}\left\{P_k(x_k)\left[f(x_k) - P_n^*(x_k)\right]\right\} \leq 0$$

elde edilir. Buradan, $P_n^*(x)$ ın $f(x)$ fonksiyonunun en iyi düzgün yaklaşımı olan çok terimli olduğu görülür. Bununla 1.2 Chebyshev teoremi ispatlanmış olur.

Eğer, Teorem 2.3 ve bundan çıkan sonuç kullanılırsa, benzer şekilde Kolmogorov teoreminden de 1.2 Chebyshev teoremi çıkartılabilir.

Gösterelim ki, Teorem 2.1'in (Kolmogorov Teoremi) yeterliliğinin ispatına benzer muhakemeyle Teorem 1.8'in (Valle-Poisson Teoreminin) benzeri ispatlanabilir.

Teorem 2.2: $f(z)$ fonksiyonu $\leftarrow$ kümesinde sürekli kompleks değerli fonksiyon olsun. (2.6) şekilli bir $Q_n(z)$ ve herhangi $\mathrm{P}_n(z)$ polinomları için $\mathrm{E} \subset \leftarrow$ alt kümesinde

$$\min_{z \in \mathrm{E}} \operatorname{Re}\left\{\mathrm{P}_n(z)\left[\overline{f(z) - Q_n(z)}\right]\right\} \leq 0 \tag{2.11}$$

koşulu sağlanıyorsa, $f(z)$ fonksiyonunun $\leftarrow$ kümesinde n. dereceli polinomlarla en iyi yaklaşımı E_n için

$$\mathrm{E}_n = \min_{\mathrm{P}_n} \underset{z \in m}{maks} \left| f(z) - \mathrm{P}_n(z) \right| \geq \min_{z \in \mathrm{E}} \left| f(z) - Q_n(z) \right| \tag{2.12}$$

değerlendirmesi doğrudur.

İspat : $\mathrm{E} \subset \leftarrow$ olsun.

$$\operatorname{Re}\left[\mathrm{P}_n^*(z_0) - Q_n(z_0)\right]\left[\overline{f(z) - Q_n(z_0)}\right] \leq 0$$

koşulunu sağlayan $z_0 \in \mathrm{E}$ noktasını alalım. Burada, $\mathrm{P}_n^*(z)$ polinomu $f(z)$ fonksiyonunun $\leftarrow$ kümesinde en iyi yaklaşım polinomudur.

$$\mathrm{E}_n = \min_{\mathrm{P}_n} \underset{z \in m}{maks} \left| f(z) - \mathrm{P}_n(z) \right| \geq \left| f(z_0) - \mathrm{P}_n^*(z_0) \right|$$

olacağından,

$$\mathrm{E}_n^2 \geq \left| f(z_0) - \mathrm{P}_n^*(z_0) \right|^2 = \left| f(z_0) - Q_n(z_0) - \left[\mathrm{P}_n^*(z_0) - Q_n(z_0)\right] \right|^2 =$$

$$= \left| f(z_0) - Q_n(z_0) \right|^2 - 2\operatorname{Re}\left\{\left[\mathrm{P}_n^*(z_0) - Q_n(z_0)\right]\left[\overline{f(z_0) - Q_n(z_0)}\right]\right\} + \left| \mathrm{P}_n^*(z_0) - Q_n(z_0) \right|^2 \geq$$

$$\geq \left| f(z_0) - Q_n(z_0) \right|^2 + \left| \mathrm{P}_n^*(z_0) - Q_n(z_0) \right|^2 \geq \left| f(z_0) - Q_n(z_0) \right|^2$$

elde edilir.

Buna göre,

$$\mathrm{E}_n \geq \left| f(z_0) - Q_n(z_0) \right|$$

dir. Buradan, istenen

$$\mathrm{E}_n \geq \min_{z \in \mathrm{E}} \left| f(z) - Q_n(z) \right|$$

eşitsizliği çıkar.

Bununla ispat tamamdır.

Çalışmanın başında sorulan 2. ve 3. soruya aşağıda ispatsız vereceğimiz teoremler cevap verir.

Bu teoremlerde $\leftarrow \subset \xi$ kümesi kapalı ve sınırlı kümedir (yani kompakt kümedir).

Tanım 2.2: $f(z)$ $\leftarrow$' de tanımlı kompleks değerli fonksiyon olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonu $\leftarrow$ kümesinde sürekli $\{\varphi_k(z)\}_0^n$, n=0,1,2,…. sisteminin polinomu değildir.

Eğer,

1) $f(z)$ fonksiyonunun $\mathrm{E}_0 \subset \leftarrow$ kümesi üzere

$$\mathrm{P}_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(z)$$

şekilli polinomlar yardımıyla en iyi düzgün yaklaşımı, $\leftarrow$ kümesi üzere en iyi düzgün yaklaşıma eşitse,

2) E_0'ın herhangi $\mathrm{E}_0' \subset \mathrm{E}$ özalt kümesinde $f(z)$'nin en iyi düzgün yaklaşımı E_0'daki en iyi düzgün yaklaşımdan küçükse,

$\mathrm{E}_0 = \mathrm{E}_0(n)$ kümesine f(z) fonksiyonunun ***n*. dereceden karakteristik kümesi** denir.

Not : $\leftarrow \subset \xi$ kümesinde sürekli herhangi $f(z)$ fonksiyonu için en azından bir tane karakteristik kümenin var olması, aşağıdaki teoremlerin ispatı zamanı görülecektir.

Teorem 2.3 (Karakteristik Kümenin Varlığı Üzerine Valle-Poisson Teoremi)**:** $n \in \leq$ sayısı ve en az $n+2$ noktadan oluşan $\leftarrow \subset \xi$ kümesi verilsin. $\leftarrow$ kümesinde $n+1$ sayıda sürekli fonksiyonlar sistemi $\{\varphi_k(z)\}_0^n$ olsun.

Eğer, $\leftarrow$ kümesinde sürekli $f(z)$ fonksiyonu

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \varphi_k(z)$$

şekilli derecesi n'yi aşmayan polinomlardan farklı bir fonksiyonsa,

1) En az bir tane n dereceli $\mathrm{E}_0 = \mathrm{E}_0(n)$ karakteristik küme vardır;

2) Eğer, $\{\varphi_k(z)\}_0^n$ sistemi Chebyshev sistemi ise her n dereceli E_0 karakteristik küme

3) $n+2 \le m \le 2n+3$ (2.13)

koşullarını sağlayan $m = m(\mathrm{E}_0)$ tane noktadan oluşur.

Eğer, $\{\varphi_k(z)\}_0^n$ Chebyshev sistemi değilse, E_0 karakteristik kümesinin eleman sayısı m

$$1 \le m \le 2n+3 \tag{2.13$'$}$$

koşulunu sağlar.

İspat : Teoremi, önemli bildiğimiz $\{\varphi_k(z)\}_0^n$ Chebyshev sistemi için ispatlayacağız.

Teoremin ispatı için ispatsız vereceğimiz aşağıdaki teoremden yararlanacağız.

Teorem 2.4 (Konveks Kümelerin Kesişimi Üzerine Helli Teoremi) **:** $m \in \le$ ve L_m m boyutlu reel lineer normlu uzay olsun. K, L_m'de en az m+1 tane konveks kapalı küme bulunduran kümeler ailesi olsun. Eğer, K'da kesişimleri sınırlı olan en az bir tane $\Omega_i \in \mathrm{K}$, i=1,2,…,n sistemi var ve K'nın her m+1 tane kümesinin en az bir ortak noktası varsa, bu kümelerin tamamına ait olan bir nokta var.

Teorem 2.3'ün ispatına geçmeden önce şunu belirtelim:

α_i ve β_i reel sayılar olmak üzere,

$$\mathrm{P}_n(z) = \mathrm{P}_n(z;\varphi) = \sum_{k=0}^{n} (\alpha_k + i\beta_k)\varphi_k(z) \tag{2.14}$$

şekilli polinomlar

$$\mathrm{P}_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \varphi_k(z) + \sum_{k=0}^{n} \beta_k \psi_k(z) \ , \ \ \psi_k(z) = i\varphi_k(z) \tag{2.14$'$}$$

biçiminde gösterilebilir.

O halde, (2.14) şekilli bütün mümkün polinomlar kümesine

$$\|\mathrm{P}_n\| = maks\{|\mathrm{P}_n(z)| : z \in \leftarrow \ \}$$

normu ile $m = 2n + 2$ boyutlu reel lineer normlu uzay olarak bakabiliriz. Bu uzay $\varphi_0(z),...,\varphi_n(z),\psi_0(z),...,\psi_n(z)$ fonksiyonlar sisteminin gerdiği uzay (yani, $span\{\varphi_o,...,\varphi_n,\psi_0,...,\psi_n\}$)'dir.

Şimdi teoremin ispatına geçelim.

Teoremin ispatını olmayana ergi yöntemiyle yapacağız.

Teorem 2.3'ün bütün varsayımları sağlanıyor olsun. $f(z)$ $\leftarrow$'de sürekli, Teorem 2.3'ün bütün varsayımlarını sağlayan fonksiyon olsun. $2n + 3$'den fazla sayıda eleman bulundurmayan hiçbir $\{z_1, z_2,..., z_p\} \subset \leftarrow$ kümesi $f(z)$'nin karakteristik kümesi değildir.

Her $z_1,..., z_p \in \leftarrow$ için

$$\mathrm{E}_n^0(f; z_1,..., z_p) = \inf_{\mathrm{P}_n} maks\{|f(z_j) - \mathrm{P}_n(z_j)| : j = \overline{1, p}\};$$

$$\sup\{\mathrm{E}_n^0(f; z_1,..., z_p) : z_j \in \leftarrow, j = \overline{1, p}\} \tag{2.15}$$

alalım.

$p \leq 2n + 3$ olduğundan, varsayım gereğince

$$\mathrm{E}_n^0(f; z_1,..., z_p) < \mathrm{E}_n(f) = \min_{\mathrm{P}_n} maks\{|f(z) - \mathrm{P}_n(z)| : z \in \leftarrow\} \tag{2.16}$$

olacaktır.

Öte yandan, $\mathrm{E}_n^0(f; z_1,..., z_p)$ fonksiyonları $\leftarrow^p$ kümesinde sürekli olacağından, bir $(z_1^*,..., z_p^*) \in \leftarrow^p$ noktasında en büyük değerini alacaktır. Buna göre,

$$\mathrm{E}_{n,j}^*(f) \leq \mathrm{E}_{n,j+1}^*(f) \text{ , j=1,2,…,}2n\text{+2 ,}$$

$$\mathrm{E}_{n,2n+3}^*(f) = \mathrm{E}_n^0(f, z_1^*,..., z_{2n+3}^*) < \mathrm{E}_n(f) \tag{2.17}$$

olacaktır.

Herhangi $\xi \in \leftarrow$ noktasında $f(\xi)$'den en fazla $\mathrm{E}_{n,2n+3}^*$ kadar sapan $\mathrm{P}_n(z;\varphi)$ polinomların kümesi $\Omega(\xi)$ olsun. Yani,

$$\Omega(\xi) = \{\mathrm{P}_n(z;\varphi) : |f(\xi) - \mathrm{P}_n(\xi;\varphi)| \leq \mathrm{E}_{n,2n+3}^*\} \tag{2.18}$$

alalım.

$\Omega(\xi)$ kümesinin boş olmadığı, kapalı ve konveks olduğu kolaylıkla gösterilir. Ayrıca, (2.15)'den $\Omega(\xi_i), \xi_i \in \leftarrow$, i=1,2,…,2n+3 kümelerinin kesişimi en azından

$$maks\left\{\left|f(\xi_j)-\mathrm{P}_n^0(\xi_j)\right| : j=1,....,2n+3\right\}=\mathrm{E}_n^0(f;\xi_1,.....,\xi_{2n+3})$$

koşulunu sağlayan $\mathrm{P}_n^0(z)$ polinomunu bulundurduğu görülür. $\mathrm{P}_n^0(z)$'in varlığı Borel teoreminden görülür.

(2.14)- (2.14′) şekilli polinomların reel 2n+2 boyutlu lineer uzayında $\Omega(\xi)$ konveks kümesine Helli teoremini uygulayacağız. Bunun için, kesişimi sınırlı olan en azından bir tane sonlu $\Omega(\xi)$ sisteminin var olduğunu gösterelim.

$\leftarrow$'den farklı herhangi $\xi_1^0,...,\xi_{n+1}^0$ noktaları alalım.

$$\Omega^0=\Omega(\xi_1^0)\cap\Omega(\xi_2^0)\cap...\cap\Omega(\xi_{n+1}^0)$$

olsun. Ω^0 kümesinin sınırlı olduğunu gösterelim.

Her $\mathrm{P}_n(z;\varphi)\in\Omega^0$ için, (2.18)'den

$$\left|\mathrm{P}_n(\xi_j^0;\varphi)\right|\le\left|\mathrm{P}_n(\xi_j^0;\varphi)-f(\xi_j^0)\right|+\left|f(\xi_j^0)\right|<\mathrm{E}_n(f)+\|f\|$$

elde edilir. Buradan, Ω^0'ın sınırlı olduğu görülür.

Buna göre, Helli teoremi gereğince $\Omega(\xi)$, $\xi\in\leftarrow$ kümelerinin hepsine ait olan ve

$$\left|f(\xi)-\mathrm{P}_n^*(\xi;\varphi)\right|\le\mathrm{E}_{n,2n+3}^*<\mathrm{E}_n(f)$$

koşulunu sağlayan en azından bir tane $\mathrm{P}_n^*(z;\varphi)$ vardır. Bu ise bir çelişkidir.

Bu çelişki 2n+3'ten fazla eleman bulundurmayan karakteristik kümenin varlığını ispatlar.

Örnek 4 : $\leftarrow=\{z\in\xi\ :\ |z|\le 1\ \}$ olsun. $f(z)=z^4$ fonksiyonuna $\leftarrow$'de 3. dereceden $\mathrm{P}_3(z)$ cebirsel polinomlarıyla yaklaşım zamanı karakteristik küme 8 elemanlı $\mathrm{E}_0=\left\{e^{\frac{\pi}{4}ki} : k=0,1,...,7\right\}$ kümesi olabilir. Ayrıca, $f(z)=z^4$ fonksiyonu için $\leftarrow$ ve $\mathrm{E}_0\subset\leftarrow$ kümelerinde 3. dereceden en iyi yaklaşan polinom $\mathrm{P}_3^*(z)=0$'dır.

Öyle ki,

$$\inf_{P_3(z)} maks\left\{ \left| z^4 - P_3(z) \right| : z \in \leftarrow \ \right\} =$$

$$= \underset{z}{maks} \left| z^4 - P_3^*(z) \right| = maks \left\{ \left| \left(e^{\frac{\pi}{4} ik} \right)^4 - P_3^* \left(e^{\frac{\pi}{4} ik} \right) \right|, k = 0,1,...,7 \right\} = 1$$

dir.

Doğrudan da

$$\left| f(z) - P_3^*(3) \right| < 1$$

koşulunu sağlayan bir 3. dereceden $P_n^*(z) \neq 0$ polinomlar olsaydı

$$\underset{k}{maks} \left| \left(e^{\frac{\pi}{4} ik} \right)^4 - P_3^* \left(e^{\frac{\pi}{4} i} \right) \right| = \underset{k}{maks} \left| (-1)^k - P_3^* \left(e^{\frac{\pi}{4} i} \right) \right| < 1$$

olacaktı. Buna göre,

$$T_3^*(t) = \operatorname{Re} P_3^*\left(e^{it}\right) \neq 0$$

trigonometrik polinomu

$$\operatorname{sgn} T_3^* \left(\frac{\pi}{4} k \right) = (-1)^k, \qquad k = 0,1,...,7$$

koşullarını sağlar. O halde, trigonometrik polinomun sıfırlarının sayısı hakkında teoreme göre 3. dereceli $T_3^*(t)$ polinomunun $[0,2\pi)$ aralığında en azından yedi tane kökü vardır. Bu ise $T_3^*(t) = \operatorname{Re} P_3^*\left(e^{it}\right) \neq 0$ ile çelişir. Dolayısıyla, $\leftarrow$ dairesinde $f(z) = z^4$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan 3. dereceden polinom sıfır polinomudur.

3. KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ SÜREKLİ FONKSİYONLARA KISITLI ARALIKTA GENELLEŞTİRİLMİŞ POLİNOMLARLA EN İYİ DÜZGÜN YAKLAŞIM

Çalışmanın bu kısmında aşağıdaki gibi formüle edilebilen kısıtlamalı durumunda reel değişkenli ile benzeyen, kompleks değişkenli sürekli fonksiyonların kısıtlı aralıkta en iyi düzgün yaklaşımı problemini göz önüne alındı. $C(Q)$, bir kompakt Q kümesi üzerinde tanımlanan kompleks değişkenli sürekli fonksiyon uzay, $\mathrm{P} \subset C(Q)$ sonlu boyutlu alt uzay ve $\Omega = \{\Omega_t | t \in Q\}$ ξ'de kapalı kümeler ve boş olmayan konveks bir sistem olsun. Verilen bir $f \in C(Q)$ fonksiyon kümesi için,

$$E(f) = \inf_{P \in P_\Omega} \|f - p\|,$$

iken,

$$P_\Omega = \{p \in P : p(t) \in \Omega, \forall t \in Q\}.$$

Burada $\| \ \|$ düzgün normu temsil eder.

Yukarıdaki problemde infimum şartı $p^* \in P_\Omega$ elemanlarının özelliklerini dikkatle incelemek içindir. Kabul edilir ki, bu problem kısıtlayıcı bir genel sınıf için oldukça zordur.

3.1 TEMEL TANIMLAR, NOTASYONLAR VE GERÇEKLER

Q, ξ kompleks düzlemde en azından n+1 tane nokta içeren bir kompakt küme olsun. Q üzerinde tanımlanan bütün kompleks değişkenli sürekli fonksiyonların $\|f\| = \underset{t \in Q}{maks} |f(t)|$ normu ile Banach Uzayını $C(Q)$ ile gösterelim. $M(f)$ kümesi;

$$M(f) = \{t \in Q : |f(t)| = \|f\|\}$$

olsun.

Bir $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ tabanı ile bir n-boyutlu $\mathrm{P} \subset C(Q)$ alt uzayını göz önüne alalım. $p \in P$ elemanları $c_v \in \xi$, $v = 1,2,...,n$ iken $p = \sum_{v=1}^{n} c_v . \varphi_v$ şeklindedir. Biz onları $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ sistemine göre genelleştirilmiş polinomlar olarak veya kısaca tam polinomlar olarak adlandıracağız. $p \in P$ kümesi için,

$$Z(p) = \{t \in Q | p(t) = 0\}$$

dir.

Tanım 3.1.1: Bir n- boyutlu $\mathrm{P} \subset C(Q)$ alt uzayı verilsin. $P \setminus \{0\}$ kümesinin en fazla n-1 tane sıfıra sahip elemanlarından oluşan uzaya Haar Uzayı denir.

$u \in C(Q)$ ve $r \in C(Q)$ sabit fonksiyonlar olsun, ayrıca tüm $t \in Q$ için $r(t) > 0$ olduğunu kabul edelim. Her $t \in Q$ noktası için aşağıdakiler gösterilir:

$$\Omega_t = \{z \in \xi : |z - u(t)| \leq r(t)\}$$

$$\operatorname{int} \Omega_t = \{z \in \xi : |z - u(t)| < r(t)\}$$

$$\partial \Omega_t = \{z \in \xi : |z - u(t)| = r(t)\}$$

Hipotez 3.1.1 : Bu çalışma süresince, bazı $p_0 \in P$ için $p_0(t) \in \operatorname{int} \Omega$ durumunun tüm $t \in Q$ için geçerli olduğu kabul edilecektir.

Bütün $p \in P$ kümesi için,

$$B(p) = \{t \in Q | p(t) \in \partial \Omega_t\}.$$

u, r, p fonksiyonlarının sürekliliğinden $B(p)$ kompakttır. $B \subset Q, P_{\phi,\Omega} = P, P_{Q,\Omega} = P_\Omega$ iken $P_{B,\Omega} = \{p \in P | p(t \in \Omega, \forall t \in B)\}$ notasyonunu ele alalım. Bir kapalı B kümesi için P'de $P_{B,\Omega}$ kümesi kapalı iken, her $B \subset Q$ kümesi için $P_{B,\Omega}$ kümesinin konveks olduğuna dikkat edelim. $B' \subset B$ kapsaması açıkça $P_{B,\Omega} \subset P_{B',\Omega}$' yı ifade eder.

$A \subset Q, B \subset Q$ ve $A \neq \eta$ iken $\leftarrow$, (A;B) sıralı ikililer kümesi olsun. $A' \subset A$ ve $B' \subset B$ ise $(A';B') \subset (A;B)$ yazarız. O zaman $(A';B') \subset (A;B)$ kapsaması tam olarak adlandırılır, eğer $A' \subset A$ ve $B' \subset B$ kapsamalarından en azından biri tam ise $f \in C(Q)$ ve $(A;B) \in \leftarrow$ ikili kümesi için,

$$E_A\left(f;P_{B,\Omega}\right) = \inf_{p \in P_{B,\Omega}} \sup_{t \in A} \left|f(t) - p(t)\right|$$

dır.

Açıkça, $A = B = Q$ için,

$$E_Q\left(f;P_{Q,\Omega}\right) = E_Q\left(f;P_{\Omega}\right) = E(f)$$

dir.

Her $(A;B) \in \leftarrow$ ikilisi için özellikle $E_A\left(f;P_{B,\Omega}\right) \leq E(f)$ için sonuçlanan $E_{A'}\left(f;P_{B',\Omega}\right) \leq E_A\left(f;P_{B,\Omega}\right)$ eşitsizliği $(A';B') \subset (A;B)$ kapsamasını ifade ettiği kolaylıkla görülür.

Tanım 3.1.2 : $q \in P_{B,\Omega}$ bir polinom,

$$\sup_{t \in A} \left|f(t) - q(t)\right| = E_A\left(f;P_{B,\Omega}\right)$$

eşitliğini sağlayan $P_{B,\Omega}$'den A üzerinde f için ‘’en iyi kısıtlı aralıklar yaklaşımı’’ olarak adlandırılır.

$\left\|f - p^*\right\| = E(f)$’yi sağlayan P_Ω’den Q üzerinde f için en iyi kısıtlı aralıklar yaklaşımı veya $p^* \in P_\Omega$ polinomu, P_Ω’den f’e kısaca en iyi kısıtlı aralıklar yaklaşımı olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.1 : Eğer A ve B, $Q(A \neq \eta)$’nun kompakt alt kümeleri ise o zaman her $f \in \mathrm{C}(Q)$ fonksiyonu için $P_{B,\Omega}$’den A üzerinde f ’e bir en iyi kısıtlı aralıklar yaklaşımı vardır.

Sonuç 3.1.1 : Her $f \in C(Q)$ fonksiyonu için P_Ω’den f’e en iyi yaklaşım vardır.

Teorem 3.1.2 (Lineer Eşitsizlik Üzerine) : U, ξ^n 'in bir kompakt alt kümesi olsun. O zaman ξ^n 'in orijini *U*'nun konveks kabuğuna ait değilse bütün $u \in U$ için öyle $R(z,u) > 0$ 'da bir $z \in \xi^n$ noktası vardır.

Burada $(,)$ ξ'de skaler çarpımdır.

Teorem 3.1.3 (Caratheodory): *A*, *n*-boyutlu kompleks uzayın bir alt kümesi olsun. *A*'nın konveks kabuğunun her noktası, *A*'nın 2*n*+1 elemanlarının bir konveks lineer kombinasyonu formunda ifade edilebilir.

Tanım 3.1.3: $f \in C(Q)$ olsun. $E_A(f; P_{B,\Omega}) = E(f)$ şartını sağlayan P_Ω ile ilgili olarak bir f fonksiyonu için $(A;B) \in \leftarrow$ sıralı ikililerine kabul edilebilir çift (admissible pair (a.p)) denir.

Tanım 3.1.4: $E_A(f; P_{B,\Omega}) < E_{A_0}(f; P_{B_0})$ eşitsizliğini sağlayan $(A;B) \subset (A_0;B_0)$ için, P_Ω ile ilgili olarak bir f fonksiyonu için $(A_0;B_0)$ sıralı ikilisine minimal kabul edilebilir çift (minimal admissible pair (m.a.p)) denir.

Sonuç 3.1.2 : Q''nun sonlu alt kümeleri *A* ve *B*'de bir f fonksiyonu için her $(A;B)$ kabul edilebilir çifti (a.p), f için en azından bir minimal kabul edilebilir çift (m.a.p) içerir.

Teorem 3.1.4 : $(A_0;B_0) \in \leftarrow$, P_Ω ile ilgili $f \in C(Q)$ için bir minimal kabul edilebilir çift (m.a.p) olsun ve $p^* \in P_\Omega$, P_Ω'da f'e en iyi bir yaklaşım olsun. O zaman, aynı zamanda aşağıdaki kapsamalar geçerlidir:

$$A_0 \subset M(f - p^*), \quad B_0 \subset B(p^*).$$

Teorem 3.1.5 : Her $f \in C(Q)$ fonksiyonu için P_Ω ile ilgili f için aşağıdaki gibi en azından bir $(A_0;B_0)$ minimal kabul edilebilir çift (m.a.p) vardır

$$|A_0 \cup B_0| \leq 2n+1 .$$

Teorem 3.1.6 : P bir Haar uzayı ve $f \in C_a(Q) \backslash P_\Omega$ olsun. O zaman, P_Ω ile ilgili f fonksiyonu için her $(A_0; B_0)$ minimal kabul edilebilir çifti (m.a.p) aşağıdaki durumu sağlar

$$|A_0 \cup B_0| \geq n+1.$$

Tanım 3.1.5 : P_Ω'da f 'e en iyi bir yaklaşımın $p^* \in P_\Omega$ olduğunda, aşağıdaki iki durumdan en azından ikisi sağlanırsa bir $f \in C(Q)$ fonksiyonu kabul edilebilir olarak adlandırılır.

1) $f(t) \in \Omega_t, \quad \forall t \in Q$

2) $M(f - p^*) \cap B(p^*) = \eta$

Bütün kabul edilebilir fonksiyonlar kümesi $C_a(Q)$ ile gösterilir.

3.2 EN İYİ YAKLAŞIM KARAKTERİSTİĞİ

$f \in C(Q)$, $p^* \in P_\Omega$ olsun. Küme,

$$\sigma_1(t) = f(t) - p^*(t), \quad t \in M(f - p^*)$$
$$\sigma_2(t) = u(t) - p^*(t), \quad t \in B(p^*).$$

dir.

Teorem 3.2.1 (Kolmogorov Şekilli Karakteristik) : Bir $p^* \in P_\Omega$ polinomu, P_Ω'dan bir $f \in \mathrm{C}(Q)$ fonksiyonu için bir en iyi yaklaşım olması için gerek ve yeter şart her $p \in P$ için aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olmasıdır.

$$\min\left\{\min_{t \in M(f-p^*)} \mathrm{Re}\left(p(t)\overline{\sigma_1(t)}\right), \min_{t \in B(p^*)} \mathrm{Re}\left(p(t)\overline{\sigma_2(t)}\right)\right\} \leq 0 \qquad (3.2.1)$$

İspat : $\Rightarrow$ f, P_Ω'de olduğu durumda tüm $t \in Q$ için $\sigma_1(t) = f(t) - p^*(t)$, elde edilir ve böylece (3.2.1) doğrudur. $f \in C(Q) \setminus P_\Omega$ olsun. Tersini kabul edelim. Farzedelim ki bazı $q \in P_\Omega$ polinomu için (3.2.1) geçerli değildir, yani aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\operatorname{Re}\left(q(t)\overline{\sigma_1(t)}\right) > 0, \quad t \in M\left(f - p^*\right) \tag{3.2.2}$$
$$\operatorname{Re}\left(q(t)\overline{\sigma_2(t)}\right) > 0, \quad t \in B\left(p^*\right)$$

Teorem 3.1.5' den dolayı f için öyle bir minimal kabul edilebilir çift vardır ki $|A_0 \cup B_0| \le 2n+1$'dir. Ayrıca Teorem 3.1.4'den dolayı $A_0 \subset M\left(f - p^*\right), B_0 \subset B\left(p^*\right)$ kapsamaları elde edilir, (3.2.2) eşitsizlikleri ile beraber süresince,

$$\operatorname{Re}\left(q(t)\overline{\sigma_1(t)}\right) > 0, \quad t \in A_0 \tag{3.2.3}$$
$$\operatorname{Re}\left(q(t)\overline{\sigma_2(t)}\right) > 0, \quad t \in B_0$$

Sonlu A_0 ve B_0 kümelerinin her ikisi hesaba katılırsa, λ_0 sabiti elde edilir.

$$\lambda_0 = \min\left\{\min_{t e A_0} \frac{2\operatorname{Re}\left(q(t)\overline{\sigma_1(t)}\right)}{|q(t)|^2}, \min_{t \in B_0} \frac{2\operatorname{Re}\left(q(t)\overline{\sigma_2(t)}\right)}{|q(t)|^2}\right\}$$

(3.2.3)'den dolayı $\lambda_0 > 0$ olduğuna dikkat edelim. Buradan sabit bir $\lambda \in (0, \lambda_0)$ ve keyfi bir $t \in B_0$ noktası için,

$$\left|u(t) - p^*(t) - \lambda q(t)\right|^2 = \left|u(t) - p^*(t)\right|^2 - 2\lambda \operatorname{Re}\left(q(t)\overline{\sigma_2(t)}\right) + \lambda^2 |q(t)|^2 =$$
$$= r^2(t) + \lambda |q(t)|^2 \left(\lambda - \frac{2\operatorname{Re}\left(q(t)\overline{\sigma_2(t)}\right)}{|q(t)|^2}\right) < r^2(t)$$

elde edilir.

Bundan dolayı $p^* + \lambda q \in P_{B_0,\Omega}$'dır. Her $t \in A_0$ noktası ve aynı $\lambda \in (0, \lambda_0)$ noktası için aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğu benzer bir yolla gösterilebilir.

$$\left|f(t) - p^*(t) - \lambda q(t)\right|^2 < \left|f(t) - p^*(t)\right|^2 = \left\|f - p^*\right\|^2 = E^2(f)$$

Sonunda, minimal kabul edilebilir (A_0, B_0) çifti için mümkün olmayan

$$E_{A_0}\left(f; P_{B_0,\Omega}\right) \le \max_{t \in A_0} \left|f(t) - p^*(t) - \lambda q(t)\right| < E(f)$$

bulunur.

$\Leftarrow$: Her $p \in P$ polinomu için (3.2.1) durumunun geçerli olduğunu farzedelim.

Keyfi bir $q \in P_\Omega$ polinomu tespit edelim ve keyfi $\lambda \in (0,1)$ için p_0 Hipotez 3.1.1'deki polinom olduğunda, $q_\lambda = (1-\lambda)q + \lambda p_0$'ı belirleyelim. O zaman açıkça tüm $t \in Q$ noktaları için (özellikle, $t \in B(p^*)$ için) $q_\lambda \in \operatorname{int}\Omega_t$ kapsaması elde edilir, burada mutlak eşitsizlik $|u(t) - q_\lambda(t)| < r(t) = |u(t) - p^*(t)|, t \in B(p^*), \lambda \in (0,1)$ geçerlidir, en önemli basit dönüştürmelerden sonra tüm $t \in B(p^*)$ ve $\lambda \in (0,1)$ için,

$$\operatorname{Re}\left((q_\lambda(t) - p^*(t))\overline{\sigma_2(t)}\right) > 0$$

dır.

Fakat, o zaman (3.2.1)'den dolayı $q_\lambda - p^*$ polinomu için öyle bir $t_\lambda \in M(f - p^*)$ noktası vardır ki,

$$\operatorname{Re}\left((q_\lambda(t_\lambda) - p^*(t_\lambda))\overline{\sigma_1(t_\lambda)}\right) \le 0$$

dır.

Bundan sonra devam edilirse, aşağıdaki eşitsizlikler zinciri elde edilir:

$$\begin{aligned}\|f - p^*\|^2 &= |f(t_\lambda) - p^*(t_\lambda)|^2 = \operatorname{Re}\left(f(t_\lambda - p^*(t_\lambda))\overline{\sigma_1(t)}\right) \le \operatorname{Re}\left((f(t_\lambda) - q_\lambda(t_\lambda))\overline{\sigma_1(t_\lambda)}\right) \le \\ &\le |f(t_\lambda) - q_\lambda(t_\lambda)| . |f(t_\lambda) - p^*(t_\lambda)| \le \|f - q_\lambda\| . \|f - p^*\|\end{aligned}$$

Böylece her $\lambda \in (0,1)$ için,

$$\|f - p^*\| \le \|f - q_\lambda\|$$

elde edilir.

$\lambda \to +0$ iken son eşitsizlikte limite geçersek,

$$\|f - p^*\| \le \|f - q\|$$

(tüm $q \in P_\Omega$ için) elde edilir.

Böylece p^* , P_Ω'den f için en iyi bir yaklaşımdır.

Her $f \in C(Q)$ fonksiyonu ve $p^* \in P_\Omega$ için aşağıdaki kümeleri göz önüne alalım:

$$♥ = \left\{b(t) = \left(\overline{\varphi_1(t)}, \dots, \overline{\varphi_n(t)}\right)\sigma_1(t) \middle| t \in M(f - p^*)\right\} \cup \left\{c(t) = \left(\overline{\varphi_1(t)}, \dots, \overline{\varphi_n(t)}\right)\sigma_2(t) \middle| t \in B(p^*)\right\}$$

Q'da $B(p^*)$ ve $M(f-p^*)$ kümelerinin kompaktlığından dolayı ξ^n'de ♥ kümesinin kompakt olduğuna dikkat edelim.

Teorem 3.2.2 (''Konveks Kabukta Sıfır'' Karakteristiği) : ξ^n uzayının orijininin ♥ konveks kabuğuna ait olması için gerek ve yeter şart $f \in C(Q) \setminus P_\Omega$ fonksiyonu için bir $p^* \in P_\Omega$ polinomunun en iyi bir yaklaşım olmasıdır.

Teorem 3.2.3: Bir $p^* \in P_\Omega$ polinomunun P_Ω'da $f \in C(Q) \setminus P_\Omega$ e en iyi bir yaklaşım olması için gerek ve yeter şart (4.17) şartını sağlayan her $p \in P$ polinomu için öyle $A_0 = \{t_1, t_2, ..., t_k\} \subset M(f-p^*), B_0 = \{t'_1, t'_2, ..., t'_m\} \subset B(p^*)$ $(k \geq 1, k+m \leq 2n+1)$ kümeleri ve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, \lambda'_1, \lambda'_2, ..., \lambda'_m$ pozitif sabitlerinin var olmasıdır.

$$\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell p(t_\ell) \overline{\sigma_1(t_\ell)} + \sum_{s=1}^{m} \lambda'_s p(t'_s) \overline{\sigma_2(t'_s)} = 0 \tag{3.2.4}$$

İspat : $\Rightarrow$ p^* , P_Ω'de f'e en iyi bir yaklaşım olsun. Teorem 3.2.2'ye göre bir ♥ konveks kabuğu ξ^n uzayının orijinine aittir. Caratheodory teoreminden dolayı öyle k vektörler $b(t_\ell) \in$ ♥, $t_\ell \in M(f-p^*), (\ell = 1,2,....,k)$, m vektörler $c(t'_s) \in$ ♥, $t'_s \in B(p^*), (s = 1,2,....m)$ ve $\lambda_\ell (\ell = 1,2,...,k), \lambda'_s (s = 1,2,...,m)$ pozitif sayılar bulanabilir ki,

$$\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell + \sum_{s=1}^{m} \lambda'_s = 1$$

$$\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell b(t_\ell) + \sum_{s=1}^{m} \lambda'_s c(t'_s) = 0 \tag{3.2.5}$$

$$k + m \leq 2n+1$$

dir.

(3.2.4)'yi elde etmek için (3.2.5) eşitliğinin ikincisini keyfi bir $t = (c_1, c_2, ..., c_n) \in \xi^n$ vektörü ve $p = \sum_{v=1}^{n} c_v \varphi_v$ kümesi ile çarpalım. Gerçekten, Hipotez 3.1.1'den p_0 polinomu için aşağıdaki durumun geçerli olduğuna dikkat edelim:

$$\mathrm{Re}\left(\left(p_0(t_s')-p^*(t_s')\right)\overline{\sigma_2(t_s')}\right)>0, \quad s=1,2,...,m$$

O zaman,

$$\sum_{s=1}^{m}\lambda_{s'}\,\mathrm{Re}\left(\left(p_0(t_s')-p^*(t_s')\right)\sigma_2(t_s')\right)>0,$$

veya

$$\sum_{s=1}^{m}\lambda_s'\left(p_0(t_s')-p^*(t_s')\right)\overline{\sigma_2(t_s')}\neq 0$$

dır.

$\Leftarrow$: Bazı $\{t_1,t_2,...,t_k\}\subset M\left(f-p^*\right),\{t_1',t_2',...,t_m'\}\subset B\left(p^*\right)$ kümeleri ve $\lambda_\ell\,(\ell=1,2,...,k)$, $\lambda_s'(s=1,2,...,m)$ pozitif sabitleri ve keyfi $p\in P$ için (3.2.4)'nin geçerli olduğunu farz edelim. Bu hemen aşağıdaki eşitliği gerektirir

$$\sum_{\ell=1}^{s}\mathrm{Re}\left(p(t_\ell)\overline{\sigma_1(t_\ell)}\right)+\sum_{s+1}^{m}\lambda_s'\,\mathrm{Re}\left(p(t_s')\overline{\sigma_2(t_s')}\right)=0$$

Böylece $\mathrm{Re}\left(p(t_\ell)\overline{\sigma_1(t_\ell)}\right)$ $(\ell=1,2,...,k)$ ve $\mathrm{Re}\left(p(t_s')\overline{\sigma_2(t_s')}\right)$ $(s=1,2,...,m)$ sayılarından en az biri pozitif değildir. O zaman (3.2.1) şartının geçerli olduğu açıktır ve Teorem 3.2.1 den p^*, P_Ω'de *f'* e en iyi bir yaklaşımdır.

Sonuç 3.2.1 : Teorem 3.2.3 şartları altında,

$$\left|A_0\cup B_0\right|\leq 2n+1-\left|A_0\cap B_0\right|$$

dır.

Sonuç 3.2.2 : *P* bir Haar uzayı ve $f\in \mathrm{C}(Q)\backslash P_\Omega$ ise, Teorem 3.2.3'deki A_0 ve B_0 kümeleri ek olarak

$$\left|A_0\cup B_0\right|\geq n+1$$

şartını da sağlar.

Gerçekten, Teorem 3.2.3'deki A_0, B_0 kümeleri için $\left(A_0;B_0\right)$ sıralı ikilileri sonlu kümelerin bir ''kabul edilebilir çifti'' olduğu kolaylıkla gösterilir. Sonuç

3.1.2'den dolayı f için $(A_0';B_0')$ minimal kabul edilebilir çiftlerden en azından birini içerir. Teorem 3.1.6' ı hesaba katılırsa ,

$$|A_0 \cup B_0| \geq |A_0' \cup B_0'| \geq n+1$$

elde edilir.

Sonuç 3.2.3 : Bu çalışmadaki tüm sonuçlar aşağıdaki gibi tanımlanabilen bazı Ω kısıtlamaların zayıf sistemi için geçerli kalır. *X*, Q'nun açık alt kümesi olsun. O zaman,

$$\Omega_t = \begin{cases} \{z \in C : |z - u(t) \leq r(t), t \in Q / X|\} \\ C, t \in X \end{cases}$$

dır. Ayrıca *u* ve *r* fonksiyonları Q\X üzerinde süreklidir. Ayrıca *r* fonksiyonu Q\X üzerinde pozitiftir.

O zaman $X = Q$ alarak (kısıtlama yok) sınırsız yaklaşım için en iyi yaklaşımın karakteristiğini aşağıdaki teoremlerle verelim.

Teorem 3.2.3 : Bir $p^* \in P$ polinomunun $f \in \mathrm{C}(Q)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşım olması için gerek ve yeter şart her $p \in P$ için aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olmasıdır

$$\min_{t \in M(f-p^*)} \mathrm{Re}\left(p(t)\overline{\sigma_1(t)}\right) \leq 0 .$$

Teorem 3.2.4 : Bir $p^* \in P$ polinomunun *P*'de $f \in \mathrm{C}(Q) \backslash P$ fonksiyonuna en iyi bir yaklaşım olması için gerek ve yeter şart her $p \in P$ için aşağıdaki eşitliği sağlayan öyle $A_0 = \{t_1, t_2, ..., t_k\} \subset M(f - p^*)$ $(1 \leq k \leq 2n+1)$ kümeleri ve $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ pozitif sabitleri var olmasıdır

$$\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \, p(t_\ell)\overline{\sigma_1(t_\ell)} = 0 .$$

3.3 EN İYİ YAKLAŞIMIN TEKLİĞİ VE KUVVETLİ TEKLİĞİ

Bu kısım boyunca *P'* yi bir Haar uzayı olarak alacağız.

Teorem 3.3.1 (Teklik Teoremi) : Her $f \in C_a(Q)$ fonksiyonu P_Ω'da tek bir en iyi yaklaşıma sahiptir.

İspat : Eğer $f \in P_\Omega$ ise, teoremin ifadesi açıktır. $f \in C_a(Q) \backslash P_\Omega$ olsun. f 'in P_Ω'de en iyi iki yaklaşımının p_1 ve p_2 olduğunu farz edelim. O zaman p_1 ve p_2 bilindiği için $p^* = \frac{1}{2}(p_1 + p_2) \in P_\Omega$ polinomuda f için en iyi bir yaklaşımdır. Uygun teknikleri kullanarak aşağıdaki kapsamalar elde edilir:

$$M(f - p^*) \subset M(f - p_1) \cap M(f - p_2) \subset Z(p_1 - p_2) \qquad (3.3.1)$$
$$B(p^*) \subset B(p_1) \cap B(p_2) \subset Z(p_1 - p_2)$$

Şimdi *f* fonksiyonu için bir keyfi $(A_0; B_0)$ minimal kabul edilebilir çifti göz önüne alalım. Teorem 3.1.4 ve 3.1.6'dan dolayı

$$A_0 \subset M(f - p^*),\ B_0 \subset B(p^*) \qquad (3.2.2)$$

ve

$$|A_0 \cup B_0| \geq n + 1 \qquad (3.3.3)$$

vardır.

(3.3.1) ve (3.2.2) kapsamaları ile beraber (3.3.3) eşitsizliğinden aşağıdaki tahmin yapılır

$$|Z(p_1 - p_2)| \geq |M(f - p^*) \cup B(p^*)| \geq |A_0 \cup B_0| \geq n + 1$$

Tanım 3.1.1'den dolayı $p_1 = p_2$ olur. Böylece ispat tamamdır.

$f \in \mathrm{C}(Q) \backslash C_a(Q)$ fonksiyonları için Teorem 3.1.1'in genelde doğru olmadığını gösterelim:

Örnek : $Q=[0,1], u(t)=0, r(t)=\frac{1}{2}, \phi_1(t)=1, \phi_2(t)=t, f(t)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2t}, t\in[0,1]$ olsun. Her $p\in P_\Omega$, t=1 için,

$$\left|\operatorname{Re} p(1)\right| \le \left|p(1)\right| = \left|p(1)-u(1)\right| \le r(1) = \frac{1}{2}$$

olduğuna dikkat edelim. Bunu kullanarak,

$$E(f)=\inf_{p\in P_\Omega}\max_{t\in[0,1]}\left|f(t)-p(t)\right| \ge \inf_{p\in P_\Omega}\left|f(1)-\operatorname{Re} p(1)\right| \ge \frac{3}{2}$$

elde edelir.

Fonksiyonlar için $p_1=\phi_1\in P_\Omega, p_2=\frac{1}{2}\phi_2\in P_\Omega$ iken

$$\left\|f-p_1\right\|=\left\|f-p_2\right\|=\frac{3}{2}$$

elde edilir.

Bundan dolayı $E(f)=\frac{3}{2}$ ve f, P_Ω'da p_1 ve p_2 iki en iyi yaklaşımına sahiptir. Ayrıca $p_1\ne p_2$'dir.

Teorem 3.3.2 (Kuvvetli Teklik Teoremi) : $p^*\in P_\Omega$, P_Ω'dan bir $f\in C_a(Q)$ fonksiyonu için en iyi yaklaşım olsun. O zaman,

$$\left\|f-p\right\|^2 \ge \left\|f-p^*\right\|^2+\gamma\left\|p^*-p\right\|^2 \tag{3.3.4}$$

eşitsizliğini sağlayan $\gamma=\gamma(f)>0$ sabiti vardır.

İspat : Eğer $f\in P_\Omega$ ise o zaman (3.3.4) eşitsizliği $\gamma\le 1$ için anlamsızdır. $f\in C_a(Q)\backslash P_\Omega$ olsun. O zaman Teorem 3.2.3 ve Sonuç 3.2.2'den dolayı öyle $A_0=\{t_1,t_2,...,t_k\}\subset M(f-p^*)$, $B_0=\{t_1',t_2',...,t_m'\}\subset B(p^*)$ $\left(\left|A_0\cup B_0\right|\ge n+1\right)$ kümeleri ve $\lambda_\ell(\ell=1,2,...,k)$, $\lambda_s'(s=1,2,...,m)$ pozitif sabitleri vardır ki her $p\in P$ polinomu için (3.2.4) geçerlidir. Aksi kabul edilmediği sürece

$$\sum_{\ell=1}^{k}\lambda_\ell=1 \tag{3.3.5}$$

olduğu kabul edilebilir.

Her $p \in P$ kümesi için

$$\Lambda_2(p) := \left(\sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell |p(t_\ell)|^2 + \sum_{s=1}^{m} \lambda_s |p(t'_s)|^2 \right)^{1/2}$$

dir.

$\Lambda_2(\cdot)$'nin P üzerinde bir norm olduğunu incelemek kolaydır. Bundan dolayı, öyle bir $\gamma > 0$ sabiti vardır ki aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\Lambda_2^2(p) \geq \gamma\left(\|p\|^2\right) \tag{3.3.6}$$

(3.2.4), (3.3.5) ve (3.3.6)'yı göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned}
\|f - p\|^2 &\geq \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell |f(t_\ell) - p(t_\ell)|^2 + \sum_{s=1}^{m} \lambda'_s |u(t'_s) - p(t'_s)|^2 - \sum_{s=1}^{m} \lambda'_s r^2(t'_s) = \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \left|f(t_\ell) - p^*(t_\ell)\right|^2 + 2\sum_{\ell+1}^{k} \lambda_\ell \operatorname{Re}\left(\left(p^*(t_\ell) - p(t_\ell)\right)\overline{\sigma_1(t_\ell)}\right) + \\
&+ \sum_{\ell=1}^{k} \lambda_\ell \left|p^*(t_\ell) - p(t_\ell)\right|^2 + \sum_{s=1}^{m} \lambda'_s \left|u(t'_s) - p^*(t'_s)\right|^2 + \\
&+ 2\sum_{s=1}^{m} \lambda'_s \operatorname{Re}\left(\left(p^*(t'_s) - p(t'_s)\right)\overline{\sigma_2(t'_s)}\right) + \sum_{s=1}^{m} \lambda'_s \left|p^*(t'_s) - p(t'_s)\right|^2 - \\
&- \sum_{s=1}^{m} \lambda'_s \left|u(t'_s) - p^*(t'_s)\right|^2 = \|f - p\|^2 + \Lambda_2^2\left(p^* - p\right) \geq \left\|f - p^*\right\|^2 + \gamma\left\|p^* - p\right\|^2
\end{aligned}$$

elde edilir.

4. EN İYİ DÜZGÜN YAKLAŞIM POLİNOMLARIN DAVRANIŞLARI

K tümleyeni bağlantılı olmak üzere sonsuz noktadan oluşan ξ'nin kompakt bir kümesi olsun. K nın K^0 iç noktaları kümesinde analitik olan fonksiyonların kümesini $A(K)$ ile göstereceğiz. $K = U = \{z : |z| \leq 1\}$ kapalı birim disk olduğunda , $A(K)$ klasik disk cebiri $\widetilde{A}$ dır. Π_n, Z'de derecesi n' yi aşmayan polinomların bir kümesi olsun, bu durumda

$$E_n = \inf \|f - P_n(f)\|_K$$

Π_n ' de f' nin en iyi düzgün yakınsamasında olan hatadır. Tek en iyi yaklaşımı (diğer bir ifadeyle, $\|f - P_n\|$ değerini minimize eden tek $P_n \in \Pi_n$ polinomu) $P_n(f,z)$ ile gösterilir. Burada ve bundan sonraki kısımda $\|.\| = \|.\|_K$ her zaman supremum normunu ifade edecektir.

Mergelyan'ın temel bir sonucundan $\forall f \in A(K)$ için $n \to \infty$ iken $E_n(f) \to 0$ dır. Dahası K üzerinde daha zayıf şartlar altında $\{E_n(f)\}_0^\infty$ nin sıfıra yaklaşması için gerek ve yeter şart f' nin K üzerinde analitik olmasıdır. Burada temel olarak normalleştirilmiş hatanın davranışıyla ilgilenilir.

$$Q_n(f,z) = \big(f(z) - P_n(f,z)\big) / E_n(f), \tag{4.1}$$

Verilen bir n için $E_n(f) = 0$ oluyorsa, diğer bir ifadeyle f derecesi n'yi aşmayan bir polinom ise, bu durumda $Q_n(f,z) \equiv 0$ olarak alınır. Açıkça, $z \in K$ ve $\{Q_n(f)\}_0^\infty$ için $|Q_n(f,z)| \leq 1$, K^0 üzerinde normal bir sınıf teşkil eder. Sıfır kapasiteli bir kümedeki olası noktalar hariç ∂K sınır bölgesi üzerindeki her nokta, n. dereceden en iyi polinom yaklaşımının ekstremum noktalarından oluşan

$$H_n(f) = \{z \in K : |Q_n(f,z)| = 1\} \tag{4.2}$$

kümesinin bir limit noktasıdır.

Böylece, K 'nın sınırında $Q_n(f,z)$ ' nin küçük olması beklenemez (büyük n ler için), fakat kompakt kümelerde K nın K^0 iç bölgesinde $P_n(f,z)$ ile verilen yaklaşım , K nın üzerinde olan yaklaşımdan daha iyi olabilir ki bu da K nın iç bölgesinde $\{Q_n(f)\}_0^\infty$ 'nın sıfıra yakınsadığı anlamına gelir. Bununla beraber, bu çok istisnai bir durumdur ve bu çalışmanın amaçlarından biri de $Q_n(f,z)$ hata fonksiyonlarının ve $H_n(f)$ ekstremal kümelerinin olası limit davranışını tanımlamaktır.

Genel kompakt kümeler üzerinde en iyi yaklaşımın davranışını araştırmaya olan ilginin ötesinde bu çalışmada birkaç durum daha var. Bunlardan ilki K nın üzerinde mümkün olabileceklerden daha iyi yaklaşımlar olmak üzere (bkz. teorem 4.2 ve 4.4) "en iyiden daha iyi" yaklaşımları kurmaktır.

Eğer, $f \in C^k[-1,1]$ parçalı analitik ise, bu durumda

$$\|f - P_n\|_{[-1,1]} \le c_n^{-k-1}$$

olacak şekilde $P_n \in \Pi_n$ n=1,2,.. polinomları olduğunu ve f 'in [-1,1] ' in analitik olduğunu her noktada

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |f(x) - P_n(x)|^{1/n} < 1 \tag{4.3}$$

olduğunu doğruladık. Ayrıca, f analitik olmak üzere [-1,1] ' in kompakt altkümelerinde (4.3) düzgün olarak sağlanır. (f'in singüler olduğu bir noktanın komşuluğunda (4.3) eşitsizliği mümkün değildir). (4.3)' ün sol tarafı için en iyi üst sınır belirlenir.

İkinci durum, özel bir durumda eğer, w U üzerinde pozitif olan $\overline{U}$ kapalı birim disk üzerinde herhangi sürekli ağırlık fonksiyonu ise (aksi takdirde w ∂U sınırı üzerinde sıfır değeri alabilir), ve $P_{n,w}(f) \in \Pi_n$

$$\|w.(f - P_{n,w}(f))\|_{\overline{U}} = \inf_{P_n \in \Pi_n} \|w.(f - P_n)\|_{\overline{U}} = E_n(f)_w$$

yukardaki eşitliği sağlıyorsa bu durumda $f \in A(\overline{U})$ için ∂U üzerindeki her nokta, aşağıdaki kümenin bir limit noktasıdır.

$$H_n(f)_w = \{z \in \overline{U} : w(z)|f(z) - P_{n,w}(f,z)| = E_n(f)_w\}.$$

Eğer, örneğin, $H_n(f)_w$ (n+2) tane noktadan oluşuyorsa (en azından bu kadar çok noktayı içermelidir) bu durumda (tamsayıların bir alt dizisi için) $\|w(z)f(z) - P_{n,w}(f,z)\|$ 'nin tüm ekstremumları ∂U ' nun yakınında olur. Bu w 'nın analitik değil de, sürekli olmasının kabul edilmesi gerçeği açısından biraz şaşırtıcıdır. Bu olay için ikna edici açıklamalardan biri en iyi yaklaşımın K üzerindense K^0 da daha iyi yaklaşımı olabilir. Bununla beraber, aşağıda göreceğiz ki, hata $w \equiv 1$ için bile durum bu değildir (teorem 4.1 ve 4.5).

Diğer durum, Kadec' in bir aralık üzerinde reel polinom yaklaşımlarında kümelerin maksimal değişiminin dağılımını ele alan önemli sonucudur. Bu sonucu makul bir şekilde genelleştirirsek, eğer, $H_n(f)$ (bkz. (4.2)) n+2 tane noktadan oluşuyorsa , bu durumda doğal sayıların bazı $\{n_k\}$ alt dizileri için, $H_{n_k}(f)$ kümeleri K nın denge dağılımlarına (limitte) benzer dağıtılmıştır. Bununla beraber, $\{H_n(f)\}_0^\infty$ dizisinin bu limit dağılımına sahip olması gerekmez, bu da diğer muhtemel limit dağılımları sorusuna yol açar (teorem 4.6).

Son olarak, son durum, bazı güncel çalışmalarda gözlemlenen ve vurgulanan $Q_n(f, \partial K)$ eğrisinin görüntüsünün "çembere benzerlik" özelliğinden kaynaklanıyor. Bir başka ifadeyle, bazı özel durumlarda gözlenmiştir ki, $K = \overline{U}$ için $\{Q_n(f, e^{it}) : 0 \le t \le 2\pi\}$ eğrisi n+1 sayıda dönüyor ve bir çembere benziyor. Bu sonuçlara göre bu "çembere benzerlik" özelliği çok istisnaidir, yani, bir çok fonksiyon için bu olay gerçekleşmez (teorem 4.1 ve 4.5).

Temel Sonuçlar

Tekrar hatırlatırsak K burada her zaman bağlantılı tümleyeni olan sonsuz kompakt bir küme olarak alınacaktır. K^0 K nın içini ve $A(K)$ da $f \in C(K)$ ve K^0 da analitik olan kompleks değerli fonksiyonların kümesini belirtecektir. Son olarak, $P_n(f, z) \in \Pi_n$ en iyi yaklaşım polinomları olmak üzere f ' in n. polinom yaklaşımının "normalleştirilmiş hatası" olarak aşağıdaki ifade alınır

$$Q_n(f, z) = \left(f(z) - P_n(f, z)\right) / E_n(f), \quad z \in K. \tag{4.4}$$

Genel olarak sonuç K nın hiçbir noktasında $\{Q_n(f, z)\}_0^\infty$ dizisinin sıfıra yakınsamadığını ifade eder.

Teorem 4.1 : $f \in A(K)$ olmak üzere

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \min_{z\in K} \frac{|f(z)-P_n(f,z)|}{E_n(f)} < 1$$

yukardaki limiti sağlayan fonksiyonların S kümesi $A(K)$' da ilk kategoridendir.

Bu teoremden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1 : $z \in K$ için

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{|f(z)-P_{n_k}(f,z)|}{E_{n_k}(f)} = 1$$

yukarıdaki limit düzgün yakınsamak üzere bir $f \in A(K)$ fonksiyonu ve doğal sayıların bir $\{n_k\}$ altdizisi vardır.

Teorem 4.1 ve sonuç 4.1 aşağıdaki sürpriz sayılabilecek bir gerçeğe işaret eder; birçok $f \in A(K)$ fonksiyonu (kategori anlamında), $n = n_1, n_2, ...$ için $f(z) - P_n(f,z)$' nin K' da hiçbir sıfırı olmayacak şekilde bir $\{n_k\}$ dizisi vardır. Dikkat edersek bu ifade reel bir aralık üzerinde reel değerli bir fonksiyona en iyi yaklaşım için, hatanın her bir n=0,1,2,… için en az n+1 tane sıfıra sahip olması gerektiğini ifade eden, Chebyshev' in dengeli salınım teoremi ile çelişmez. Aslında , bir K aralığı üzerinde reel değerli fonksiyonların sınıfı $A(K)$' nın sadece ilk kategoriden bir alt kümesidir.

Sonuç 4.1 ' in gösterdiği gibi, genel olarak en iyi yaklaşımlar K^0 üzerinde, K nın üzerinde olan yaklaşımdan daha iyi bir yaklaşım vermezler. Bunun için "en iyiye yakın" yaklaşımlar için ne denilebilir?

Aşağıdaki üç sonuç bu yöndedir.

Teorem 4.2 : Kabul edelim ki K nın tümleyeni K nın içi kümesinde olduğu gibi bağlantılı ve $f \in A(K)$ olsun, bu durumda K^0 ' ın kompakt altkümelerinde

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|f-P_n\|}{E_n(f)} \leq 2 \tag{4.5}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{f(z)-P_n(z)}{E_n(f)} = 0 \tag{4.6}$$

yukarıdaki limitler düzgün yakınsayacak şekilde $P_n \in \Pi_n, n = 1,2,...$ polinomları vardır.

Bu sonucun K^0' ın bağlantılı olmadığı zaman da geçerli olunduğunu bilinmiyor. Bununla beraber, ilerideki sonuçlar gösterecek ki, (4.5) 'deki 2 sabiti bunun için en iyi olasılıktır.

Teorem 4.3 : K nın içinin boş olmadığını kabul edelim. Bu durumda bir $f \in A(K)$ fonksiyonu vardır, öyle ki, eğer $P_n \in \Pi_n, n = 1,2,...$ polinomları

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(z) - P_n(z)}{E_n(f)} = 0 \tag{4.7}$$

limiti kompakt altkümelerinde düzgün yakınsama özelliğine sahip ise, bu durumda

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\|f - P_n\|_K}{E_n(f)} \geq 2 \tag{4.8}$$

dir.

İspat gösteriyor ki, $A(K)$' daki bir çok fonksiyon için (ilk kategoriden olanlar hariç) eğer, (4.7) en azından K^0 'ın bir noktasında bazı $P_n \in \Pi_n, n = 1,2,...$ polinomları için sağlanıyorsa bu durumda (4.8) sağlanır.

Eğer, K nın analitik bir sınırı var ise bu durumda (4.6) yakınsaması geometrik yakınsama ile yer değiştirebilir.

Teorem 4.4 : Kabul edelim ki, K basit kapalı analitik bir eğri ile sınırlıdır. Bu durumda, bir c sabiti vardır, öyle ki, her $f \in A(K)$ için $\|f - P_n\|_K \leq c.E_n(f)$ eşitsizliğini sağlayan ve $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{|f(z) - P_n(z)|}{E_n(f)} \right)^{1/n} < 1$ limiti K^0 'ın kompakt altkümelerinde düzgün yakınsamak üzere, $P_n \in \Pi_n, n = 1,2,...$ polinomları vardır.

Bu sonuçlar Mergelyan'ın yakınsama teoreminin en son halinin bir iyileştirmesi olan aşağıdaki ifadeye işaret eder; Eğer, K bağlantılı bir tümleyene sahip ve $f \in A(K)$ ise bu durumda $P_n \in \Pi_n, n = 1,2,...$ polinomları vardır, öyle ki, $n \to \infty$ iken $\|f - P_n\|_K \to 0$ dır ve $\overline{\lim_{n\to\infty}} (|f(z) - P_n(z)|)^{1/n} < 1$ limiti K^0 'ın kompakt altkümelerinde düzgün yakınsar. Buradan, ne zaman geometrik yakınsamaya izin verilirse bu durumda tam olarak sonuca ulaşılabileceği kanısına varılabilir.

$\{Q_n(f,z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin K^0 üzerinde normal bir sınıf oluşturacağından bahsedilmişti ve dolayısıyla, $\{Q_n(f,z)\}_{n=0}^{\infty}$' dan yakınsak bir altdizi seçilebilir. Teorem 4.1 genel olarak gösteriyorki, özdeş olarak sıfır fonksiyonu olmayan bir fonksiyona yakınsayan böyle bir yakınsak altdizi vardır. Bu şu soruyu akla getiriyor; $\{Q_n(f,z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinden hangi olası limitler elde edilebilinir? f bir polinom olmadığı zaman $\{Q_n(f,z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin hiçbir altdizisinin K üzerinde düzgün yakınsamayacağı kolaylıkla görülebilir. Aslında, eğer, $\lim_{k\to\infty} Q_{n_k}(f,z) = g(z)$ düzgün yakınsıyorsa bu durumda $g \in A(K)$ dır ve bazı polinomlar için $\|g - P_0\|_K < 1$ dir. Fakat bu,

$$\left\| f - (P_{n_k}(f) + E_{n_k}(f)P_0) \right\|_K < E_{n_k}(f)$$

olduğu anlamına gelir ve aynı zamanda $n_k > derP_0$ için $P_{n_k}(f) + E_{n_k}(f)P_0 \in \Pi_{n_k}$ olduğu anlamına gelir ki, bu Π_{n_k}' da $E_{n_k}(f)$' den daha iyi bir yaklaşım elde edilebileceği gerçeği ile çelişir. Böylece, bir $z_0 \in \partial K$ noktasının küçük bir komşuluğu hariç en fazla ümit edebileceğimiz şey düzgün yakınsamadır. z_0 noktasının K^0' ın bir izole noktası olmayacağı da açıktır. Dolayısıyla, gösterildi ki, $\|g\|_K < 1$ olmak üzere, her $g \in A(K)$ $\{Q_n(f,z)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir altdizisinin limiti olduğu takdirde bu anlamda $A(K)$' daki bir çok f fonksiyonu evrenseldir (çünkü $\forall n$ için $\|Q_n(f)\|_K = 1$ dir, ve diğer limit fonksiyonları bu değere ulaşamaz)

Sonucu ifade etmek için

$$U_\rho(z_0) := \{z : |z - z_0| < \rho\}$$

z_0 merkezli ρ yarıçaplı açık bir disk olsun.

Teorem 4.5 : S_1 kümesi, $f \in A(K)$' nın aşağıdaki şartı sağlayan kümesi olsun; eğer, $g \in A(K)$, $\|g\|_K < 1$, $z_0 \in \partial K$ K nın izole olmayan bir noktası ve ε, ρ keyfi pozitif sayılar ise bu durumda bir n sayısı vardır, öyle ki, $z \in K / U_\rho(z_0)$ ise

$$\left(\frac{|f(z)-P_n(f,z)|}{E_n(f)}-g(z)\right)<\varepsilon$$

dir. Bu durumda S_1 rezidel bir kümedir ve $A(K)$ ' daki tümleyeni ilk kategoridendir.

Sonuç 4.2 : Eğer, $g\in A(K)$, $\|g\|_K<1$ keyfi ve $z_0\in\partial K$ K nın izole olmayan bir noktası ise bu durumda $\forall z\in K$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(z)-P_n(f,z)}{E_n(f)}=g(z)$$

olmak üzere, doğal sayıların bir altdizisi olduğu takdirde bu özellikleri sağlayan bir $f\in A(K)$ fonksiyonu vardır ve z_0 noktasını içermeyen K nın herhangi bir kapalı altkümesinde bu yakınsama düzgündür.

5. KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ SÜREKLİ FONKSİYONLAR UZAYINDA EN İYİ DÜZGÜN KISITLI ARALIK YAKLAŞIMI

$\|f\| = \max_{t\in Q}|f(t)|, \quad \forall f \in C(Q)$ düzgün normu ile ifade edilen bir kompakt Q Hausdorff uzayında bütün kompleks değişkenli sürekli fonksiyonların Banach uzayı $C(Q)$ olsun.

Önceki çalışmalar reel değişkenli sürekli fonksiyon uzayında en iyi kısıtlı aralık yaklaşımı üzerineydi. G. S. Smirnov ve R.G. Smirnov , bir kompleks değişkenli sürekli fonksiyon uzayında en iyi kısıtlı aralıklar yaklaşım problemini açıkladı ve formülüze etti. Durum aşağıdaki gibidir. P, $C(Q)$’nun sonlu boyutlu alt uzayı olsun ve $\Omega = \{\Omega_t : t \in Q\}$, ξ kompleks düzleminde boş olmayan konveks kapalı kümeler sistemi olsun. Küme,

$$P_\Omega = \{p \in P : p(t) \in \Omega_t, \forall t \in Q\}$$

dır.

P_Ω’da $f \in C(Q)$’ya en iyi bir yaklaşım olarak adlandırılan bir $p^* \in P$ elemanını bulmak için

$$\|f - p^*\| = \inf_{p\in P_\Omega}\|f - p\|$$

problemi göz önüne alınır.

G. S. Smirnov ve R.G. Smirnov’ un çalışmalarında kısıtlamaların bir genel sınıfı için bu problemi çözmek oldukça zordur. Bununla beraber, Ω, her $t \in Q$ için $r(t) > 0$ yarıçaplı ve $u(t)$ merkezli kapalı diskler sistemi olarak kabul edilir, yani $u, r \in C(Q)$’da,

$$\Omega_t = \{z \in \xi: \ |z - u(t)| \le r(t) \ \}, \ \forall t \in Q$$

dir. Bunun üzerine, yazarlar en iyi kısıtlama aralıklar yaklaşımının varlık, karakteristik, teklik ve kuvvetli tekliği üzerine sonuçlar verdiler. Son zamanlarda, bu sonuçlar G. S. Smirnov ve R.G. Smirnov tarafından Ω genel kısıtlama sistemine genişletildi öyle ki buradaki her Ω_t, kapalı, ‘’düzgün’’ sınırlı ve içi boştan farklı kesin konveks bir kümedir.

Bu kısımda, aynı problem daha fazla kısıtlamalar sınıfı için ele alındı. Daha kesin bir ifadeyle, $\forall t \in Q$ için Ω_t sadece içi boş olmayan kümeler için alındı. Ayrıca, $t \in Q$ için Ω_t'nin sürekli dönüşümlere sahip olması gerekir. Bununla beraber her kapalı konveks alt küme, konveks bir fonksiyonun bir seviye kümesi olarak ifade edilebilir. Aslında, herhangi $t \in Q$ için, ξ üzerinde bir $F(\cdot,t)$ reel konveks fonksiyonu vardır öyleki,

$$\partial\Omega_t = \{z \in \xi:\ F(z,t) = 0\ \} \quad \forall t \in Q, \tag{5.1}$$

$$\operatorname{int}\Omega_t = \{z \in \xi:\ F(z,t) < 0\ \} \quad \forall t \in Q, \tag{5.2}$$

dir. Burada $\partial\Omega$ ve $\operatorname{int}\Omega_t$ sırasıyla Ω_t'nin sınır ve iç noktalarını belirtiyor. Böylece, kabul edilebilir ki Ω için gereken süreklilik, $F(\cdot,\cdot)$ fonksiyonunun $\xi \times Q$ çarpım uzayında sürekli olmasıdır. Bu durumda kuvvetli teklik, teklik ve karakteristik üzerinde G. S. Smirnov ve R.G. Smirnov ' un çalışmalarına benzer fakat daha genel sonuçlar elde edildi.

G. S. Smirnov ve R.G. Smirnov' un kısıtlamasıyla karşılaştırıldığında, bu çalışmadaki kısıtlamanın daha genel olduğunu açıktır. Çünkü; $\forall t \in Q$ için Ω_t kapalı konveks kümesinin sadece içinin boştan farklı olması gerekir ki buda aslında, sınırsızlık olarak kabul edilebilir.

6. ARAŞTIRMA BULGULARI

Çalışmada Kolmogorov-tipli karakterizasyon öğrenilmiş, en iyi düzgün yaklaşımın tekliği ve kuvvetli tekliği üzerine teoremler verilmiş ve ispatlanmıştır. En iyi düzgün yaklaşım polinomlarının davranışları üzerine bilgiler verilir.

Ayrıca, tez çalışmasında en iyi düzgün yaklaşım üzerine klasik çalışmalardan farklı olarak en iyi düzgün kısıtlı aralık yaklaşımı incelenmiş ve bunların uygulamaları verilmiştir.

7. SONUÇ

Tez çalışmasında en iyi düzgün yaklaşım üzerine klasik teoremler kompleks düzleme taşınmıştır. Ayrıca, klasik çalışmalardan farklı olarak en iyi düzgün kısıtlı aralık yaklaşımı öğrenilmiştir. En iyi düzgün yaklaşımın tekliği ve kuvvetli tekliği incelenmiştir.

KAYNAKLAR

1. M. A. Krasnosel'skii, G. M. Vainikko, P. P. Zabreizo, Ya. B. B. Rutitskii, V. Ya. Stetsenko, Approximate solution of operator equations, *Wolters-Noordhoff Publishing Gronıngen*, 1972
2. Heinrich Begehı, Xing Li, Approximate solution of periodic Riemann boundary value problem for analitic functions, *J. Of Computational and Appl. Math*. 134 (2001) 85-93
3. N. Mustafayev, Düzgün eğri boyunca tanımlı singüler integraller için formül ve bunların singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümüne uygulanması, *Doktora Tezi*, Bakü, 1991 (Rusça)
4. V.K. Dzyadyk, ''Introduction to the Theory of Uniform Approximation of Functions by Polynomials,'' *Nauka*, *Moscow*, 1977. [in Russian]
5. G.S. Smirnov, R.G. Smirnov, Best Uniform Approximation of Complex-Valued Functions by Generalized Polynomials Having Restricted Ranges, *J. Approx. Theory* 100 (1999) 284-303
6. G.S. Smirnov, R.G. Smirnov, Best uniform restricted range approximation of complex-valued functions, *C.R. Math. Acad. Sci. Canada* 19 (2) (1997) 58-63.
7. G.S. Smirnov, R.G. Smirnov, Best uniform approximation of complex-valued functions by generalized polynomials having restricted range, *J. Approx. Theory* 100 (1999) 284-303.
8. G.S. Smirnov, R.G. Smirnov, Kolmogorov-type theory of best restricted approximation, *Eastern J. Approx*. 6 (3) (2000) 309-329.
9. G.S. Smirnov, R.G. Smirnov, Best restricted approximation of complex-valued functions II, *C.R. Seances Acad. Sci. Ser. I, Mathematique* 330 (12) (2000) 1059- 1064.
10. G.S. Smirnov, R.G. Smirnov, Theory of best restricted range approximation revisited: A characterization theorem, Dziadyk Conference Proceedings, *Proceedings of the Institute of Mathematics of NAS of Ukraine*, Vol. 31, 2000, pp. 436-445.
11. A. Kroo and E.B. Saff , The density of extreme points in complex polynomial approximation, *Proc. Amer. Math. Soc*. 103 (1988), 203-209.

12. A. Kroo, D. Schmidt, A Haar-type theory of best uniform approximation with constraints, *Acta Math. Hungar*. 58 (1991) 351-374.

13. B.L. Chalmers, G.D. Taylor, Uniform approximation with constrains, Jahresber. *Deutsch. Math. Verein*. 81 (1978,1979) 49-86.

14. Chong Li, On best uniform restricted range approximation in complex-valued continuous function spaces, *J. Approx. Theory* 120 (2003), 71-84

15. E. B. Saff and V. Totik, Behavıor of Polynomials of Best Uniform Approximation, *Transactions of the American Mathematical Socıety*, 316 (1989) 567-593

16. E. W. Cheney, "Introduction to Approximation Theory," Springer-Verlag, *New York*, 1993.

17. G.D. Taylor, On approximation by polynomials having restricted ranges, *I, SIAM J. Numer. Anal.*5 (1968) 258-268.

18. G.D. Taylor, Approximation by functions having restricted ranges, III, *J. Math.Anal. Appl*. 27 (1969) 241-248.

19. H.P. Blatt, E. B. Saff, and V. Totik, The distribution of extreme points in best complex polynomial approximation, *Constr. Approx*. 5 (1989), 357-370.

20. L.G. Shnirelman, On uniform approximations, *Izv. Acad. Nauk SSSR, Ser. Mat*. 2 (1938), 53-60. [in Russian]

21. J.L. Walsh, Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain, 5th ed., *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ*., vol. 20, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1969.

22. L.N. TRefethen, Near-circularity of the error curve in complex Chebyshev approximation, *J. Approx. Theory* 31 (1981), 344-367.

23. R.A. DeVore and G.G. Lorentz, ''Constructive Approximation,'' *Springer-Verlag, New York*, 1993.

24. S.J. Al'per, Asymptotic values of best approximation of analytic functions in a complex domain, *Uspekhi Mat. Nauk* 14 (1959), 131-134.

25. V.K. Ivanov, On uniform approximations of continuous functions, *Mat. Sb*. 28 (1951), 685-706. [in Russian]

26. W. Rudin, Real and complex analysis, 2nd ed., *McGraw-Hill, New York*, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Kars ilinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kars'ta tamamladı. 2000 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2004 yılında mezun oldu. 2004 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.2005 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı.

Halen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.