T.C
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN SCHRODİNGER DENKLEMİ İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN İYİ KONULMASI VE ONUN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Ömür DEVECİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

ARALIK-2006
KARS

Prof. Dr. Gabil YAGUBOV danışmanlığında Arş.Gör. Ömür DEVECİ nin Y. Lisans tezi olarak hazırladığı Lineer Olmayan Schrodinger Denklemi İçin Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması ve Onun Nümerik Çözümü adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında ……………………………… ile kabul edilmiştir.

..../…./…….

	Adı Soyadı	İmza
Başkan	: Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	…………………………
Üye	: Prof. Dr. Gabil YAGUBOV	…………………………
Üye	: Prof. Dr. Hasan MEMEDOV	……………………….
Üye	: Doç.dr.Refig ABDULLAHYEV	..……………………...

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun …../…../…… Gün ve …………../…………. Sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Vahit ALİŞOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda benden değerli katkı ve yardımlarını esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Gabil YAGUBOV , Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA ve Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Dekan Yardımcısı Doç. Dr. Mevlüt KARABUT hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam esnasında ve tezin hazırlanması sürecinde değerli fikirlerinden yararlandığım kıymetli arkadaşlarım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim elemanları Arş. Gör. Erhan DENİZ ve Uzm. İ. Murat YAZAR a teşekkürlerimi borç bilirim.

Kars-2006 Arş. Gör. Ömür DEVECİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde, lineer olmayan Schrodinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alındı. Bu çalışmanın 3.1. Bölümünde problemin çözümünün varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlandı ve fonksiyonun gradiyenti için formül elde edildi. Gradiyent için olan formülü kullanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlandı. 3.2. Bölümünde göz önüne alınan optimal kontrol problemine sonlu farklar metodu uygulandı. Sonlu farklı yaklaşımların fonksiyonele göre yakınsaklığı ispatlandı.

2006, 47 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Schrodinger denklemi, Optimal kontrol, Lions fonksiyoneli, Sonlu farklar, Fonksiyonele göre yakınsama.

ABSTRACT

In this thesis, we study optimal control problem with Lions functional for nonlinear Schrodinger equation. In the chapter 3.1 of this thesis it proved that the results belonging to the existence and uniqueness of the solution of this problem and obtanied Formula for the gradiyent of this function. It is also proved necessary condition in the shape of variation inequality fort he solution of optimal control problem by using the fomula obtanied for gradient. In the chapter 3.2 of this thesis the finite difference method has been applied the considered optimal control problem. The convergence of finite differences method has been proved with respect to the functional.

2006, 47 Pages

Keywords: Schrodinger equation, Optimal control, Lions Functional, The finite differences, The convergence with respect to the functional.

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
$\overset{\circ}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$i = \sqrt{-1}$	Sanal birim
$\ell > 0$	Verilen sayı
$T > 0$	Verilen sayı
$\delta_{\bar{t}}\phi_{jk} = \left(\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right)/\,\tau$	t ye göre sol fark
$\delta_{\bar{x}}\phi_{jk} = \left(\phi_{jk} - \phi_{j-1k}\right)/\,h$	x e göre sol fark
$\delta_{x}\phi_{jk} = \left(\phi_{j+1k} - \phi_{jk}\right)/\,h$	x e göre sağ fark
$\delta_{x\bar{x}}\phi_{jk} = \left(\phi_{j+1k} - 2\phi_{jk} + \phi_{j-1k}\right)/\,h^2$	x e göre 2.mertebeden fark

1.GİRİŞ

Schrodinger denklemi ile ifade edilen kuantum mekanik sistemleri için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıkar[1-3]. Bu nedenle böyle problemlerin incelenmesi, gerek teorik gerekse pratik anlamda öneme sahiptir. Schrodinger denklemi için optimal kontrol problemleri ilk önce farklı çalışmalarda ele alınmıştır [4-14]. Bu çalışmalardan Butkovsky A.G. , Samoylenko Y.I. , İskenderov A.D. ve Yagubov G.Y. nin çalışmalarını önemle dikkate almak gerekir. İskenderov A.D. ve Yagubov G.Y. nin çalışmalarında hem lineer hem lineer olmayan Schrodinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol teorisi oluşturulmuş ve geliştirilmiştir. Bu amaçla lineer olmayan Schrodinger denklemi için konulmuş optimal kontrol problemi incelenmiştir. Burada incelenen problem konulma açısından önce incelenen problemlerden farklıdır. Bu problemde amaç fonksiyoneli olarak Lions tipli fonksiyonel kullanılmıştır. Lions tipli fonsiyoneller ilk kez Fransız matematikçi Lions tarafından sunulmuştur [15]. Bu tipli fonsiyoneller katsayıyla kontrol edilen sistemler için kontrol problemlerinde ilk kez İskenderov'un çalışmalarında sunulmuştur ve analiz edilmiştir [16]. Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemleri Schrodinger denklemi için önceden farklı konulmada İskenderov ve Mahmudov'un çalışmalarında incelenmiş ve problemin iyi konulmasına ve çözüm için gerek şartlara ait sonuçlar elde edilmiştir [8,9]. Bu çalışmalarda göz önüne alınan problemlerin nümerik çözümüne ait sonuçlarda var olmaktadır.

Bu tez çalışmasında üstte denildiği gibi lineer olmayan Schrodinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Göz önüne alınan problem için önce problemin iyi konulmasına ait olan sorular cevaplandırılmıştır, yani optimal kontrolün varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlanmıştır. Sonra problemde kullanılan amaç fonksiyonelinin diferensiyellenebilmesi incelenmiş ve onun gradiyenti için formül elde edilmiştir. Graditent için olan formülü kullanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanmıştır.

Optimal kontrol problemleri için incelenen sorulardan biri onların nümerik çözüm sorusudur. Optimal kontrol problemlerini çözmek için şimdiye kadar farklı metotlar kullanılmıştır. Bu metotlardan birisi sonlu farklar metodudur. Sonlu farklar metodunun temelinde ünlü Rus matematikçi Tikonov A.N. Samarski A.A. ve diğerlerinin oluşturduğu ve geliştirdiği farklar şeması teorisi bulunmaktadır. Optimal kontrol problemlerinin çözümüne sonlu farklar metodu uygulanırken önce kontrol olunan sistem ifade edilen diferensiyel denklem fark şemasına dönüştürülür ve elde edilen fark şeması için kararlılık ve şemanın hatası soruları incelenir. Bu soruların incelenmesinde farklar şeması teorisiyle ilgili bilgiler önemli rol oynar. Göz önüne alınan fark şeması için elde edilen sonuçlar optimal kontrol probleminin sonlu farklar metoduyla çözümünde kullanılır.

Bu tez çalışmasının materyal ve yöntem bölümünün 2. kısmı Schrodinger denklemi için kontrol problemine sonlu farklar metodunun uygulanmasına yönelik olmuştur. Bu kısımda göz önüne alınan optimal kontrol probleminin fark yaklaşımları elde edilmiştir. Önce fark şemasının kararlılığını ifade eden kestirim ispatlanmıştır. Bu kestirimi kullanarak farklar şemasının hatası incelenmiştir. İnceleme sonucunda şemanın hatası için kestirim elde edilmiştir. Elde edilen iki kestirimi kullanarak fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı gösterilmiştir. Önce bunun için sürekli fonksiyonel ile diskrit fonksiyonelin değerlerleri arasındaki fark kestirilmiş ve bu değerlendirmede fark şeması için elde edilen kestirim önemeli rol oynamıştır. Fonksiyoneller arasındaki farktan ve fark şemasının hatası olan kestirimden faydalanarak fonksiyonele göre yakınsaklık sonuç olarak elde edilmiştir. Söylemek gerekir ki Schrodinger denklemi için optimal kontrol probleminin nümerik çözümüyle ilgili olan sorular ve sonlu farklar metodunun yakınsaklığı önce [17,10,11,12,14] çalışmalarında incelenmiştir.

2.KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1: $L_2(0,\ell)$ Hilbert uzayı olup elamanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi verilir:

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,\ell)} = \int_0^\ell u(x)\bar{v}(x)dx\,,$$

$$\|u\|_{L_2(0,\ell)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,\ell)}}\,.$$

Tanım 2.2: $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elamanları Ω bölgesinde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi verilir:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt\,,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)}\sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}\,.$$

Tanım 2.3: $L_\infty(0,\ell)$ Banach uzayı olup elemanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L_\infty(0,\ell)} = vrai\max_{x\in(0,\ell)}|u(x)|\,.$$

Tanım 2.4: $C^0([0,T],B)$ Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\in[0,t]}\|u(t)\|_B\,.$$

Tanım 2.5: $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobelev uzayıdır, elemanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle $\psi(x,t)$ fonksiyonlarıdır ki, ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlar. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle\psi,\phi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{\bar{\phi}(x,t)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\bar{\phi}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\bar{\phi}(x,t)}{\partial t} \right] dxdt\,,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle\psi,\psi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}}\,.$$

Tanım 2.6: $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Tanım 2.7: Diyelim ki B herhangi Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $o(u,\gamma) = \{v : v \in B, \|v-u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h\rangle_B + o\langle h,u\rangle$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elamanı varsa, bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferensiyellenebilir denir.

Tanım 2.8: Eğer B Banach uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c \in B^*$, $\lim_{k\to\infty}\langle c,u_k\rangle = \langle c,u\rangle$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 2.9: U, B Banach uzayının bir kümesi olsun. Eğer $\forall\{u_k\}\in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu taktirde U kümesine B de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.10: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u\in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\}\in U$ dizisi için $\underline{\lim}_{k\to\infty} J(u_k)\geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Tanım 2.11: Diyelim ki U, B Banach uzayının alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_* = \{u\in U : J(u)=J_* = \inf_U J(u)\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu taktirde $\forall u_*\in U_*$ ve $\forall u\in U$ için $\left\langle J'(u_*), u-u_*\right\rangle \geq 0$ şartı sağlanır.

Teorem 2.12: U, B Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan yarı sürekli olsun. Bu taktirde $J_* = \inf_U J(u) > -\infty$, $U_* = \{u\in U : J(u)=J_*\}\neq$ zayıf kompakttır ve U dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar.

Teorem 2.13 (Goebel): Kabul edelim ki, $\widetilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\widetilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha<0$, $\beta\geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu taktir de $\widetilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle G alt kümesi vardır ki $\forall w\in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha\|v-w\|_{\widetilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_{\alpha}(v)$ fonksiyoneli en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır.

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1.Lineer olmayan Schrodinger Denklemi için Lions fonksiyonelli Optimal Kontrol probleminin İyi Konulması ve Çözüm için Gerek Şartlar

Bu bölümde lineer olmayan Schrodinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin çözümü için önce varlık ve teklik teoremleri ispatlanır. Göz önüne alınan problemde fonksiyonelin diferensiyellenebilmesi incelenir ve fonksiyonelin gradiyenti için aşikar formül elde edilir. Bu formül kullanılarak varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanmıştır. Benzer meseleler [5,6,8,12,14,16] çalışmalarında incelenmiştir.

3.1.1.Problemin Konulması

ℓ ve T verilen pozitif sayılar olmak üzere $x \in [0,\ell]$, $t \in [0,T]$ $\Omega_t = (0,\ell)\times(0,t)$, $\Omega = \Omega_T$ olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım:

$$J_\alpha(v) = \int_\Omega |\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)|^2 \, dxdt + \alpha \|v - w\|^2_{L_2(0,\ell)} \qquad (3.1.1.1)$$

fonksiyonelinin

$$V = \left\{ v = v(x) : v \in L_2(0,\ell), 0 < b_0 \le v(x) \le b_1, \overset{\circ}{\forall} x \in (0,\ell) \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} - v(x)\psi_k + a_1 |\psi_k|^2 \psi_k = f_k(x,t), \; k = 1,2, \; (x,t) \in \Omega, \qquad (3.1.1.2)$$

$$\psi_k(x,0) = \varphi_k, \; k = 1,2, \; x \in (0,\ell), \qquad (3.1.1.3)$$

$$\psi_1(0,t) = \psi_1(\ell,t) = 0, \; t \in (0,T), \qquad (3.1.1.4)$$

$$\frac{\partial \psi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(\ell,t)}{\partial x} = 0, \; t \in (0,T) \qquad (3.1.1.5)$$

şartları altında minumumunu bulmak gerekir. Burada; $i=\sqrt{-1}$, $\alpha \geq 0$, $b_0>0$, $b_1>0$, $a_0>0$, $-\infty < a_1 < +\infty$ verilen sayılar, $w \in L_2(0,\ell)$ verilen eleman, $\varphi_1, \varphi_2, f_1, f_2$ fonksiyonları

$$\varphi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,\ell) \quad \varphi_2 \in W_2^2(0,\ell) \quad \frac{d\varphi_2(0)}{dx} = \frac{d\varphi_2(\ell)}{dx} = 0, \tag{3.1.1.6}$$

$$f_k \in W_2^{0,1}(\Omega), \quad k=1,2 \tag{3.1.1.7}$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlardır. $\forall v \in V$ için $(3.1.1.2)-(3.1.1.4)$ şartlarından $\psi_1 = \psi_1(x,t) \equiv \psi_1(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması Schrodinger denklemi içim 1.tip sınır değer problemi, $(3.1.1.2)$, $(3.1.1.3)$ ve $(3.1.1.5)$ şartlarından $\psi_2 = \psi_2(x,t) \equiv \psi_2(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi ise Schrodinger denklemi için 2. tip sınır değer problemidir.

Tanım 3.1.1.1: $\forall v \in V$ için $(3.1.1.2)-(3.1.1.4)$ sınır değer probleminin çözümü olarak $\psi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $\psi_2 \in W_2^{2,1}(\Omega)$ olan ve $\forall (x,t) \in \overset{\circ}{\Omega}$ için $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ şartlarını sağlayan $\psi_1 = \psi_1(x,t) \equiv \psi_1(x,t;v), \psi_2 = \psi_2(x,t) \equiv \psi_2(x,t;v)$ fonksiyonlar anlaşılır. [14] çalışmasındaki sonuçları kullanarak $\forall v \in V$ için $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ sınır değer probleminin bir çözüme sahip olduğu ve bu çözüm için aşağıdaki kestirimlerini geçerli olduğu elde edilir:

$$\|\psi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_1\left(\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,\ell)} + \|f_1\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right), \tag{3.1.1.8}$$

$$\|\psi_2\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_2\left(\|\varphi_2\|_{W_2^{2}(0,\ell)} + \|f_2\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{3.1.1.9}$$

burada $c_1>0$, $c_2>0$ sayılardır.

3.1.2.Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

$(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol problemini göz önüne alalım. Bu problem için gerekli olan çözümün varlığı ve tekliği sorularını inceleyelim. Önce $\alpha>0$ için $(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol probleminin bir tek çözümünün var olmasını ispatlayalım.

Teorem 3.1.2.1: $L_2(0,\ell)$ uzayında her yerde yoğun olan öyle bir G alt kümesi vardır ki, $\forall w \in G$ ve $\alpha > 0$ için $(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat: Önce $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım. Fonksiyonelin tanımına göre $J_0(v)$ fonksiyoneli aşağıdaki gibidir:

$$J_0(v) = \int_\Omega |\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)|^2 \, dxdt \qquad (3.1.2.1)$$

$\Delta v \in L_2(0,\ell)$ artışı $v + \Delta v \in V$ olacak şekilde herhangi v elamanına verilen bir artış olsun. Bu taktirde $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ sınır değer probleminin çözümü olan $\psi_k = \psi_k(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v)$, $k = 1,2$ fonksiyonları

$$\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v+\Delta v) - \psi_k(x,t;v),$$

artışına sahip olur. Burada $\psi_k(x,t;v+\Delta v)$, $k = 1,2$ $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ sınır değer probleminin $v + \Delta v \in V$ elemanına uygun çözümdür.

$(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ şartlarından $\Delta\psi_k = \psi_k(x,t)$, $k = 1,2$ fonksiyonlarının

$$i\frac{\partial \Delta\psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta\psi_k}{\partial x^2} - (v(x) + \Delta v(x))\Delta\psi_k +$$
$$+ a_1\left(|\psi_{k\Delta}|^2 + |\psi_k|^2\right)\Delta\psi_k + a_1\psi_{k\Delta}\psi_k\Delta\overline{\psi}_k =$$
$$= \Delta v(x)\psi_k, \ k = 1,2 \ , \ (x,t) \in \Omega, \qquad (3.1.2.2)$$

$$\Delta\psi_k(x,0) = 0, \ k = 1,2 \ , \ x \in (0,\ell), \qquad (3.1.2.3)$$

$$\Delta\psi_1(0,t) = \Delta\psi_1(\ell,t) = 0 \ , \ t \in (0,T), \qquad (3.1.2.4)$$

$$\frac{\partial \Delta\psi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \Delta\psi_2(\ell,t)}{\partial x} = 0 \ , \ t \in (0,T), \qquad (3.1.2.5)$$

sınır değer probleminin çözümünün olduğunu elde ederiz. Burada $\psi_{k\Delta} = \psi_{k\Delta}(x,t) \equiv \psi_k(x,t,v+\Delta v)$ dir.

Şimdi $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,t)$, $k = 1,2$ fonksiyonlarını kestirelim. Bunun için $(3.1.2.2)$ denklerinin her iki tarafını $\Delta\overline{\psi}_k(x,t)$, $k = 1,2$ fonksiyonlarına çarpıp Ω_t üzerinden integralleyelim. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}\Delta\overline{\psi}_k-a_0\left|\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial x}\right|^2-\left(v(x)+\Delta v(x)\right)\left|\Delta\overline{\psi}_k\right|^2+\right.$$

$$\left.+\,a_1\left(\left|\psi_{k\Delta}\right|^2+\left|\psi_k\right|^2\right)\left|\Delta\psi_k\right|^2+a_1\psi_{k\Delta}\psi_k\left(\Delta\overline{\psi}_k\right)^2\right]dxdt=$$

$$=\int_{\Omega_t}\Delta v(x)\psi_k\Delta\overline{\psi}_k\,dxdt,$$

$\forall t\in[0,T],\ k=1,2$. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\left\|\Delta\psi_k(.,t)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}=2|a_1|\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}\left[a_1\psi_{k\Delta}\psi_k\left(\Delta\overline{\psi}_k\right)^2\right]dxdt+$$

$$+\,2\int_{\Omega}\operatorname{Im}\left[\Delta v(x)\psi_k\Delta\overline{\psi}_k\right],\ \forall t\in[0,T],\ k=1,2.$$

Bu eşitliğin sağ tarafını değerlendirirsek,

$$\left\|\Delta\psi_k(.,t)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\le 2\int_{\Omega_t}\left|\psi_k\right|\left|\psi_{k\Delta}\right|\left|\Delta\psi_k\right|^2dxdt+$$

$$+\,2\int_{\Omega_t}\left|\Delta v\right|\left|\psi_k\right|\left|\Delta\psi_k\right|dxdt,\ k=1,2,\ \forall t\in[0,T] \qquad (3.1.2.6)$$

$\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_\infty\left([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(0,\ell)\right)$, $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı ise $L_\infty\left([0,T],W_2^1(0,\ell)\right)$ uzayına sürekli gömdüğünden

$$\left\|\psi_1\right\|_{L_\infty\left([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(0,\ell)\right)}\le c_3\left\|\psi_1\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}, \qquad (3.1.2.7)$$

$$\left\|\psi_2\right\|_{L_\infty\left([0,T],W_2^1(0,\ell)\right)}\le c_4\left\|\psi_2\right\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \qquad (3.1.2.8)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $c_3>0$, $c_4>0$ sayıları ψ_1 ve ψ_2 den bağımsızdır. Bu eşitsizliklerin yardımıyla $(3.1.1.8)$ ve $(3.1.1.9)$ eşitsizliklerinden aşağıdaki kestirimleri elde ederiz:

$$\left\|\psi_1\right\|_{L_\infty\left([0,T],\overset{\circ}{W}{}_2^{1}(0,\ell)\right)}\le c_5\left(\left\|\varphi_1\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2}(0,\ell)}+\left\|f_1\right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right), \qquad (3.1.2.9)$$

$$\left\|\psi_2\right\|_{L_\infty\left([0,T],W_2^1(0,\ell)\right)}\le c_6\left(\left\|\psi_2\right\|_{W_2^1(0,\ell)}+\left\|f_2\right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \qquad (3.1.2.10)$$

burada $c_5 > 0$, $c_6 > 0$ sayılardır. Bu kestirimler herhangi $v \in V$ için geçerli olduğunu $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)$, $W_2^1(0,\ell)$ uzayları $L_\infty(0,\ell)$ uzayına gömdüğünden aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\|\psi_k\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_7, \quad \|\psi_{k\Delta}\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_8, \quad k = 1,2 \tag{3.1.2.11}$$

burada $c_7 > 0$, $c_8 > 0$ sayılardır.

Bu eşitsizlikleri $(3.1.2.6)$ da kullanırsak,

$$\|\Delta\psi_k(.,t)\|_{L_2(0,\ell)}^2 \le c_9 \int_0^t \|\Delta\psi_k(.,\tau)\|_{L_2(0,\ell)}^2 d\tau + \int_0^T \|\Delta v \psi_k\|_{L_2(0,\ell)}^2 d\tau,$$

$$k = 1,2 \quad t \in [0,T]$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada Gronwall lemmasını uygularsak aşağıdaki kestirim elde edilir:

$$\|\Delta\psi_k(.,t)\|_{L_2(0,\ell)}^2 \le c_{10}\|\Delta v \psi_k\|_{L_2(\Omega)}^2 \le c_{11}\|\Delta v\|_{L_\infty(0,\ell)}^2, \; \forall t \in [0,T], \; k = 1,2 \tag{3.1.2.12}$$

burada $c_{10} > 0$, $c_{11} > 0$ sayıları Δv dan bağımsızdır.

Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin artışını hesaplayalım. $(3.1.2.1)$ formülünü kullanırsak $\forall v \in V$ için aşağıdaki formülü kolaylıkla elde ederiz:

$$\Delta J_0(v) = J_0(v + \Delta v) - J_0(v) =$$

$$= 2\int_\Omega \mathrm{Re}\left[(\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t))\left(\Delta\overline{\psi}_1(x,t) - \Delta\overline{\psi}(x,t)\right)\right] dxdt +$$

$$+ \|\Delta\psi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\Delta\psi_2\|_{L_2\Omega}^2 - 2\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1(x,t)\Delta\overline{\psi}_2(x,t)\right) dxdt. \tag{3.1.2.13}$$

Burada Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayıp $(3.1.1.8)-(3.1.1.9)$ kestirimlerini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|\Delta J_0(v)\| \le c_{12}\left(\|\Delta\psi_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\Delta\psi_2\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\Delta\psi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|_{L_2(\Omega)}\right). \tag{3.1.2.14}$$

Burada $c_{12} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Bu eşitliğin sağ tarafında $(3.1.2.12)$ kestirimini kullanırsak fonksiyonelin $v \in V$ elemanı üzerinde artışı için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|\Delta J_0(v)| \le c_4\left(\|\Delta v\|_{L_\infty(0,\ell)} + \|\Delta v\|_{L_\infty(0,\ell)}^2\right). \tag{3.1.2.15}$$

Burada $c_4 > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. $(3.1.2.15)$ eşitsizliğinden $\|\Delta v\|_{L_\infty(0,\ell)} \to 0$ için $\Delta J_0(v) \to 0$ olur. Dolayısıyla $J_0(v)$ fonksiyoneli v noktasında süreklidir. v noktası V kümesinin herhangi elemanı olduğundan $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu ispat edilir. Buradan da $\forall v \in V$ için $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli olduğu ispatlanmış olur. Tanıma göre V kümesi $L_2(0,\ell)$ uzayında kapalı ve sınırlı kümedir. $L_2(0,\ell)$ uzayı ise Hilbert uzayı olduğunda düzgün konveks uzaydır [18].

$$I(v) = J_0(v), \;\; \widetilde{X} = L_2(0,T), \;\; U = V$$

almış olursak kuramsal temeller bölümündeki teorem2.13 ün şartlarının sağlandığını görürüz. Bu taktirde teorem2.13 ün hükmünü kullanmış olursak $L_2(0,\ell)$ uzayında her yerde yoğun olan G alt kümesi bulunur ki, $\forall w \in G$ için $\alpha > 0$ olduğu taktirde $(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol problemi bir tek çözüme sahip olur. Teoerem ispatlandı.

Şimdi $(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol probleminin en azından bir çözüme sahip olmasını ($\alpha \geq 0$ için) gösterelim.

Teorem 3.1.2.2: Kabul edelim ki $\varphi_k(x)$, $f_k(x,t)$, $k = 1,2$ fonksiyonları $(3.1.1.6)$, $(3.1.1.7)$ şartlarını sağlamış olsun. Bu taktirde $(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol problemi $\alpha \geq 0$ için en azından bir çözüme sahiptir.

İspat: Herhangi $\{v^m\} \in V$ mininmalleştirici dizisini ele alalım.

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = J_{\alpha^*} = \inf_{v\in V} J_\alpha(v). \qquad (3.1.2.16)$$

Her bir $v^m \in V$, $m = 1,2,...$ için $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ sınır değer probleminin çözümünü

$$\psi_k^m = \psi_k^m(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v^m), \; k = 1,2$$

gibi gösterelim. Bu taktirde $(3.1.1.8)-(3.1.1.9)$ kestirimlerinden aşağıdaki kestirimleri elde ederiz:

$$\left\|\psi_1^m\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_5\left(\left\|\varphi_1\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2}(0,\ell)} + \left\|f_1\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}\right) = c_{13},$$

$(3.1.2.17)$

$$\left\|\psi_1\right\|_{W_0^{2,1}(\Omega)} \le c_6\left(\left\|\varphi_2\right\|_{W_2^{2}(0,\ell)} + \left\|f_2\right\|_{W_2^{2,0}(\Omega)}\right) = c_{14} \qquad (3.1.2.18)$$

$m=1,2,...$ Burada c_{13}, $c_{14}>0$ sabitleri m den bağımsızdır. V kümesi $L_\infty(0,\ell)$ uzayında sınırlı küme olduğundan $\{v^m\}\in V$ dizisinden bu uzayda $v\in L_\infty(0,\ell)$ elemanına $(*)-$zayıf yakınsayan $\{v^{m_p}\}$ alt dizisi seçilebilir. Bu alt diziyi kolaylık için $\{v^m\}$ ile gösterelim. Bu taktirde

$$m\to\infty \text{ için } v^m \to v,\ L_\infty(0,\ell) \text{ de } (*) \text{ zayıf.} \qquad (3.1.2.19)$$

V kümesi $L_\infty(0,\ell)$ uzayında kapalı sınırlı ve konveks kümedir. Bu taktirde Kolmogorov and Fomin (1989)' dan bildiğimiz ilgili teoreme göre V kümesi $L_\infty(0,\ell)$ da $(*)$- zayıf kapalı küme olur. Yani $v\in V$ dir. Buna göre de $(3.1.2.19)$ şartından aşağıdaki limit bağıntısını elde ederiz:

$$\int_0^\ell v^m(x)q(x)dx \to \int_0^\ell v(x)q(x)dx,\ m\to\infty,\ \forall q\in L_1(0,\ell). \qquad (3.1.2.20)$$

$(3.1.2.17)-(3.1.2.18)$ kestirimlerinden $\{\psi_k^m\}$, $k=1,2$ dizilerinin sırasıyla $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega), W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarının normlarında m ye göre düzgün sınırlı olduğu elde edilir. Bu taktirde $\{\psi_k^m\}$, $k=1,2$ dizilerinden $\psi_k\in W_2^{2,1}(\Omega)$ elemanlarına zayıf yakınsayan alt dizilerini seçmek mümkündür. Kolaylık için bu yakınsayan alt dizileri yinede $\{\psi_k^m\}$, $k=1,2$ ile gösterelim. Böyle olduğu taktirde aşağıdaki limit bağıntılarını elde ederiz: $m\to\infty$ için

$$\psi_k^m \to \psi_k \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da,} \qquad (3.1.2.21)$$

$$\frac{\partial\psi_k^m}{\partial t} \to \frac{\partial\psi_k}{\partial t} \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da,} \qquad (3.1.2.22)$$

$$\frac{\partial\psi_k^m}{\partial x} \to \frac{\partial\psi_k}{\partial x} \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da,} \qquad (3.1.2.23)$$

$$\frac{\partial^2\psi_k^m}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2} \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da,} \qquad (3.1.2.24)$$

limit bağıntıları geçerlidir.

$\{\psi_1^m\}$, $\{\psi_2^m\}$ dizilerinin elemanları $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ sınır değer probleminin sırasıyla $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ ve $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarına ait çözümü olduğundan her bir $m=1,2...$ için aşağıdaki integral özdeşliklerini elde ederiz:

$$\int_\Omega \left[i\frac{\partial \psi_k^m}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k^m}{\partial x^2} - v(x)\psi_k^m + a_1 \left|\psi_k^m\right|^2 \psi_k^m \right] \overline{\eta}_k dxdt =$$

$$= \int_\Omega f_k \overline{\eta}_k (x,t) dxdt, \quad k=1,2, \quad m=1,2... \tag{3.1.2.25}$$

$\forall \eta_k = \eta_k(x,t) \in L_2(\Omega)$. Bundan başka aşağıdaki şartlarda sağlanır:

$$\psi_k^m(x,0) = \varphi_k(x), \quad \overset{\circ}{\forall} x \in (0,\ell), \quad k=1,2 \tag{3.1.2.26}$$

$$\psi_1^m(0,t) = \psi_1^m(\ell,t) = 0, \quad \frac{\partial \psi_2^m(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2^m(\ell,t)}{\partial x} = 0 \quad \overset{\circ}{\forall} t \in (0,T) \tag{3.1.2.27}$$

$(3.1.2.21)-(3.1.2.24)$ limit bağıntılarını kullanırsak, $\forall \eta_k \in L_2(\Omega)$, $k=1,2$ için

$$\int_\Omega \left[i\frac{\partial \psi_k^m}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k^m}{\partial x^2} \right] \overline{\eta}_k dxdt \to$$

$$\to \int_\Omega \left[i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \right] \overline{\eta}_k dxdt \quad k=1,2 \tag{3.1.2.28}$$

limit bağıntıları elde edilir. Şimdi aşağıdaki limit bağıntılarının geçerli olduğunu ispatlayalım: $m \to \infty$ için

$$\int_\Omega v^m(t) \psi_k^m(x,t) \overline{\eta}_k(x,t) dxdt \to$$

$$\to \int_\Omega v(t) \psi_k(x,t) \overline{\eta}_k(x,t) dxdt, \quad k=1,2. \tag{3.1.2.29}$$

$$\int_\Omega a_1 \left|\psi_k^m\right|^2 \psi_k^m \overline{\eta}_k dxdt \to$$

$$\to \int_\Omega a_1 \left|\psi_k\right|^2 \psi_k \overline{\eta}_k dxdt, \quad k=1,2. \tag{3.1.2.30}$$

Kolaylıkla aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\int_\Omega v^m \psi_k^m \overline{\eta}_k dxdt = \int_\Omega \left(v^m - v\right) \psi_k \eta_k dxdt +$$

$$+\int_{\Omega} v^m\left(\psi_k^m-\psi_k\right)\overline{\eta}_k dxdt+\int_{\Omega} v\psi_k \overline{\eta}_k dxdt\,,\ \ k=1,2 \tag{3.1.2.31}$$

$\psi_1 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $\psi_2 \in W_2^{2,1}(\Omega)$, $\eta_k \in L_2(\Omega)$, $k=1,2$ şartları sağlandığından $\psi_k \overline{\eta}_k \in L_1(\Omega)$ olur. Bu taktirde $(3.1.2.20)$ limit bağıntısını kullanırsak $m \to \infty$ için

$$\int_{\Omega} \left(v^m - v\right)\psi_k \overline{\eta}_k dxdt \to 0\,,\ \ k=1,2 \tag{3.1.2.32}$$

bağıntısını elde ederiz.

Şimdi $(3.1.2.30)$ eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terimi kestirelim. Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini kullanıp $v^m \in V$ olduğunu göz önüne alırsak:

$$\left|\int_{\Omega} v^m\left(\psi_k^m-\psi_k\right)\overline{\eta}_k dxdt\right| \le c_{15}\left\|\psi_k^m-\psi_k\right\|_{L_2(\Omega)},\ \ k=1,2 \tag{3.1.2.33}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{15}>0$ sabiti m den bağımsızdır. $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayları $L_2(\Omega)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$\psi_k^m \to \psi_k \text{ kuvvetli } L_2(\Omega) \text{ da} \tag{3.1.2.34}$$

limit bağıntısını kolaylıkla elde ederiz. Bu limit bağıntısını göz önüne alıp $(3.1.2.33)$ eşitsizliğinin her iki tarafında limite geçersek aşağıdaki limit bağıntısının geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\int_{\Omega} v^m\left(\psi_k^m-\psi_k\right)\overline{\eta}_k dxdt \to 0\,,\ \ k=1,2\,. \tag{3.1.2.35}$$

$(3.1.2.32)$ ve $(3.1.2.35)$ limit bağıntılarını kullanıp $(3.1.2.31)$ eşitliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ içim limite geçersek $(3.1.2.29)$ limit bağıntısının geçerli olduğunu elde ederiz.

Şimdi $(3.1.2.30)$ bağıntısının geçerli olduğunu elde edelim. $(3.1.2.34)$ bağıntısına göre $\{\psi_k^m\}$, $k=1,2$ dizileri $\psi_k(x,t)$, $k=1,2$ fonksiyonlarına kuvvetli yakınsar. Bu taktirde $\{\psi_k^m\}$, $k=1,2$ dizileri $\Omega-$da hemen hemen her yerde yakınsar. Diğer yandan

$$\int_{\Omega} \left|\left|\psi_k^m(x,t)\right|^2 \psi_k^m(x,t)\right|^2 dxdt \le \left\|\psi_k^m\right\|_{L_6(\Omega)}^3 \tag{3.1.2.36}$$

eşitsizliği geçerlidir. $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega) \subset L_\infty\left([0,T], \overset{\circ}{W}{}_2^{1}(0,\ell)\right)$. $W_2^{2,1}(\Omega) \subset L_\infty([0,T], W_2^1(0,\ell))$ bağıntılarını ve $(3.1.2.17)$, $(3.1.2.18)$ kestirimlerini kullanırsak $(3.1.2.36)$ dan

$$\int_\Omega \left| \left|\psi_k^m(x,t)\right|^2 \psi_k^m(x,t) \right| dxdt \le c_{16}, \quad k = 1,2 \tag{3.1.2.37}$$

$m = 1,2...$ eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{16} > 0$ sayısı m den bağımsızdır. Bu eşitsizlikler gösterirler ki, $\left|\psi_k^m\right|^2 \psi_k^m \in L_2(\Omega)$ dır. [19] çalışmasında ki lemma 6.1 .in hükmünün kullanırsak,

$$\left|\psi_k^m\right|^2 \psi_k \to \left|\psi_k\right|^2 \psi_k \quad k = 1,2 \quad L_2(\Omega) - da \text{ zayıf} \tag{3.1.2.38}$$

limit bağıntıları elde ederiz. Bunu kullanırsak $(3.1.2.30)$ un geçerli olduğu ispatlanır. η_k fonksiyonları $L_2(\Omega)$ dan olan herhangi fonksiyonlar olduğundan $\psi_k(x,t) \in \Omega$ için $(3.1.1.2)$ denklemini sağladığını görürüz.

Şimdi $\psi_k(x,t)$, $k = 1,2$ fonksiyonlarının $(3.1.1.3)$ şartını sağladığını ispatlayalım. Gömme teoremlerine göre $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayları $L_2(0,\ell)$ uzayına kompakt gömülürler. Bu nedenle $m \to \infty$ için

$$\psi_k^m(x,0) \to \psi_k(x,0), \quad k = 1,2, \quad L_2(0,\ell) \text{ de kuvvetli} \tag{3.1.2.39}$$

limit bağıntısı geçerlidir. Diğer taraftan aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$\int_0^\ell \left|\psi_k(x,0) - \varphi_k(x)\right|^2 dx \le 2\int_0^\ell \left|\psi_k^m(x,0) - \psi_k(x,0)\right|^2 dx +$$

$$2\int_0^\ell \left|\psi_k^m(x,0) - \varphi_k(x)\right|^2 dx, \quad k = 1,2 \tag{3.1.2.40}$$

$(3.1.2.26)$ şartı ve $(3.1.2.39)$ limit bağıntısını kullanarak $(3.1.2.40)$ her iki tarafında limite geçip

$$\int_0^\ell \left|\psi_k(x,0) - \varphi_k(x)\right|^2 dx = 0, \quad k = 1,2$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada kolaylıkla $\psi_k(x,t)$, $k = 1,2$ fonksiyonlarının $(3.1.1.3)$ başlangıç şartını sağladığı elde edilir.

Şimdi $\psi_k(x,t),\ k=1,2$ fonksiyonlarının $(3.1.1.4)-(3.1.1.5)$ sınır şartlarını sağladığını ispatlayalım. $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(0,T)$ uzayına kompakt gömülür. Yani $m\to\infty$ için

$$\psi_1^m(0,t)\to\psi_1(0,t),\ L_2(0,T) \text{ de kuvvetli,} \qquad (3.1.2.41)$$

$$\psi_1^m(\ell,t)\to\psi_1(\ell,t),\ L_2(0,T) \text{ de kuvvetli} \qquad (3.1.2.42)$$

limit bağıntıları geçerlidir. Bu taktirde $(3.1.2.27)$ şartlarının birincisini kullanırsak üstteki $(3.1.2.41)-(3.1.2.42)$ limit bağıntılarımdan ve

$$\int_0^T |\psi_1(0,t)|^2\,dt \le 2\int_0^T \left|\psi_1^m(0,t)-\psi_1(0,t)\right|^2 dt + 2\int_0^T \left|\psi_1^m(0,t)\right|^2 dt\,, \qquad (3.1.2.43)$$

$$\int_0^T |\psi_1(\ell,t)|^2\,dt \le 2\int_0^T \left|\psi_1^m(\ell,t)-\psi_1(\ell,t)\right|^2 dt + 2\int_0^T \left|\psi_1^m(\ell,t)\right|^2 dt \qquad (3.1.2.44)$$

eşitsizliklerinden bir sonraki eşitlikleri elde ediyoruz:

$$\int_0^T |\psi_1(0,t)|^2\,dt = 0\,,\quad \int_0^T |\psi_1(\ell,t)|^2\,dt = 0\,.$$

Bu eşitlikler $\psi_1(x,t)$ fonksiyonunun $x=0,\ x=\ell$ noktalarında $\overset{\circ}{\forall} t\in(0,T)$ için sınır şartlarının sağlandığı ispatlanmış olur.

Şimdi $\psi_2(x,t)$ fonksiyonunun $(3.1.1.5)$ sınır şatlarını sağladığını gösterelim: $\psi_2^m\in W_2^{2,1}(\Omega)$ olduğundan gömme teoremine göre aşağıdaki limit bağıntılarının geçerli olduğu kolaylıkla elde edilir: $m\to\infty$ için

$$\frac{\partial\psi_2^m(0,t)}{\partial x}\to\frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x},\ L_2(0,T) \text{ de zayıf,} \qquad (3.1.2.45)$$

$$\frac{\partial\psi_2^m(\ell,t)}{\partial x}\to\frac{\partial\psi_2(\ell,t)}{\partial x},\ L_2(0,T) \text{ de zayıf} \qquad (3.1.2.46)$$

dir. Bu taktirde $(3.1.2.27)$ deki ikinci şartı kullanırsak $\forall\eta\in L_2(0,T)$ için

$$\left|\int_0^T \frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt\right| \le \left|\int_0^T\left(\frac{\partial\psi_2^m(0,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x}\right)\overline{\eta}(t)dt\right| + \left|\int_0^T \frac{\partial\psi_2^m(0,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt\right|$$

$$(3.1.2.47)$$

$$\left|\int_0^T \frac{\partial \psi_2(\ell,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt\right| \leq \left|\int_0^T \left(\frac{\partial \psi_2^m(\ell,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2(\ell,t)}{\partial x}\right)\overline{\eta}(t)dt\right| + \left|\int_0^T \frac{\partial \psi_2^m(\ell,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt\right| \tag{3.1.2.48}$$

eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\int_0^T \frac{\partial \psi_2(0,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt = 0 \quad , \qquad \int_0^T \frac{\partial \psi_2(\ell,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt = 0 .$$

Bu şartlar $\forall \eta \in L_2(0,T)$ için sağlandığından, buradan kolaylıkla $\psi_2(x,t)$ fonksiyonunun $x=0$, $x=\ell$ noktalarında 2. tip sınır şartlarını sağladığı görülür. Böylece $\{\psi_k^m\}$, $k=1,2$ fonksiyonlar dizilerinin limit fonksiyonları olan $\psi_k = \psi_k(x,t)$, $k=1,2$ fonksiyonları $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ sınır değer probleminin $\{v^m\} \in V$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v=v(x)\in V$ ye karşılık gelen çözümüdür ve bu çözümler sırasıyla $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarına ait olan hemen hemen her yerde çözümleridir. Yani

$$\psi_k = \psi_k(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v), \quad k=1,2 .$$

Bilindiği gibi $L_2(\Omega)$, $L_2(0,\ell)$ uzaylarının normları alttan zayıf, yarı sürekli fonksiyonellerdir. Bu takdirde $\{v^m\} \in V$ dizisinin $v \in V$ elemanına $(*)$-zayıf yakınsadığında, $\{\psi_k^m\}$, $k=1,2$ dizilerinin ψ_k, $k=1,2$ fonksiyonlarına $L_2(\Omega)$ uzayında kuvvetli yakınsamasını, aynı zamanda zayıf yakınsamasını göz önüne alarak $\alpha \geq 0$ için aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$J_{\alpha^*} \leq J_\alpha(v) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) = J_{\alpha^*} .$$

Bu bağıntıdan $J_{\alpha^*} = J_\alpha(v)$ olduğu ispatlanır. Yani $v \in V$ elemanı $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin minimum noktasıdır. Böylece $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol probleminin en azından bir çözüme sahip olması ispatlanmış olur. Teorem ispatlandı.

3.1.3.Fonksiyonelin Diferensiyellenebilmesi

Bu kısımda $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol problemi için amaç fonksiyonelinin diferensiyellenebilmesi incelenir ve onun gradiyenti için formül ispatlanır. Kabul edelim ki; $\phi_k = \phi_k(x,t)$, $k=1,2$ fonksiyonları aşağıdaki eşlenik problem denilen sınır değer probleminin çözümü olsun:

$$i\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} - v(x)\phi_k + a_1\left(2|\psi_k|^2\phi_k + \psi_k^2\overline{\phi}_k\right) = 2(-1)^k\left(\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)\right),$$
$$(x,t)\in\Omega \qquad (3.1.3.1)$$

$$\phi_k(x,T)=0,\quad k=1,2,\quad x\in(0,\ell), \qquad (3.1.3.2)$$

$$\phi_1(0,t)=\phi_1(\ell,t)=0,\qquad t\in(0,T), \qquad (3.1.3.3)$$

$$\frac{\partial \phi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2(\ell,t)}{\partial x} = 0,\quad t\in(0,T), \qquad (3.1.3.4)$$

burada $\psi_k = \psi_k(x,t), k=1,2$ $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ sınır değer probleminin $v\in V$ ye karşılık gelen çözümüdür.

Tanım 3.1.3.1: $(3.1.3.1)-(3.1.3.4)$ eşlenik sınır değer probleminin çözümü denilirken $C^0([0.T], L_2(0,\ell))$ uzayına ait olan $\frac{\partial \eta_{12}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \eta_{12}(\ell,t)}{\partial x} = 0$ şartlarını sağlayan $\forall \eta_{11}\in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $\forall \eta_{12}\in W_2^{2,1}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \phi_k\left[-i\frac{\partial \overline{\eta}_{1k}}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\overline{\eta}_{1k}}{\partial x^2} - a(x)\overline{\eta}_{1k} + a_1|\psi_k|^2\overline{\eta}_{1k}\right]dxdt + \int_\Omega a_1(\psi_k)^2\overline{\phi}_k\overline{\eta}_{1k}dxdt =$$

$$= (-1)^k 2\int_\Omega\left(\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)\right)\overline{\eta}_{1k}(x,t)dxdt + i\int_0^\ell \phi_k(x,0)\overline{\eta}_{1k}(x,0)dx \qquad (3.1.3.5)$$

integral özdeşliğini sağlayan $\phi_k = \phi_k(x,t)$, $k=1,2$ fonksiyonları anlaşılmaktadır. [14] çalışmasındaki sonuçlardan faydalanarak $(3.1.3.1)-(3.1.3.4)$ sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve bir tekliğine ait olan hükmü elde edebiliriz. Bundan başka bu sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu da söyleyebiliriz: $\forall t\in[0,T]$ için

$$\|\phi_k(.,t)\|_{L_2(0,\ell)} \le c_{17}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2(\Omega)},\quad k=1,2 \qquad (3.1.3.6)$$

dır. Burada $c_{17}>0$ sayısı t den bağımsızdır.

Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$H\left(x,\psi_1(x,.),\psi_2(x,.),v(x),\bar{\phi}_1(x,.),\bar{\phi}_2(x,.)\right)$$

$$=\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t)+\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)dt\,v(x)-\alpha(v(x)-w(x))^2 \tag{3.1.3.7}$$

Bu fonksiyona $(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol problemi için Hamilton-Pontryagin fonksiyonu denir.

Teorem 3.1.3.2: Kabul edelim ki teorem 3.1.2.2 nin şartları sağlanmış olsun. Bu taktirde $(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol probleminin amaç fonksiyoneli olan $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesinde Frechet anlamında diferensiyellenebilir ve onun gradiyenti için

$$J'_\alpha(v)=-\frac{\partial H}{\partial v} \tag{3.1.3.8}$$

formülü geçerlidir. Burada $H=H\left(t,\psi_1,\psi_2,v,\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2\right)$ fonksiyonu $(3.1.3.7)$ formülü ile tanımlanır.

İspat: $\forall v\in V$ elemanını alalım ve bu eleman üzerinde $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışını hesaplayalım. $(3.1.1.1)$ ve $(3.1.2.8)$ formüllerini kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$\Delta J_\alpha(v)=J_\alpha(v+\Delta v)-J_\alpha(v)=$$

$$=2\int_\Omega \mathrm{Re}\left[(\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t))\left(\Delta\bar{\psi}_1(x,t)-\Delta\bar{\psi}_2(x,t)\right)\right]dxdt+$$

$$+2\alpha\int_0^\ell (v(x)-w(x))\Delta v(x)dx+\left\|\Delta\psi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\Delta\psi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$-2\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1(x,t)\Delta\bar{\psi}_2(x,t)dxdt+\alpha\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\right). \tag{3.1.3.9}$$

Burada $\Delta\psi_k=\Delta\psi_k(x,t)$, $k=1,2$ fonksiyonları $(3.1.2.3)-(3.1.2.5)$ sınır değer probleminin çözümüdür. Teoremin şartına göre teorem 3.1.2.2 nin şartları sağlanıyor. Bu nedenle $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ sınır değer probleminin çözümü olan

$\psi_1(x,t)$ ve $\psi_2(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla $\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ ve $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarının elemanlarıdır ve problemin hemen hemen her yerde çözümüdür. Buna göre de $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,t) = \psi_k(x,t;v+\Delta v) - \psi_k(x,t;v)$ $k=1,2$ fonksiyonları için aşağıdaki integral özdeşlikleri yazabilir:

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial \Delta\psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta\psi_k}{\partial x^2} - (v+\Delta v)\Delta\psi_k \right)\overline{\eta}_k dxdt +$$
$$+\int_\Omega a_1 \left[|\psi_{k\Delta}|^2 + |\psi_k|^2 \right]\Delta\psi_k \overline{\eta}_k dxdt + \int_\Omega a_1 \psi_k \psi_{k\Delta} \left(\Delta\overline{\psi}_k\right)\overline{\eta}_k dxdt =$$
$$= \int_\Omega \Delta v \psi_k \overline{\eta}_k dxdt, \qquad (3.1.3.10)$$

$\forall \eta_k = \eta_k(x,t) \in L_2(\Omega)$, $k=1,2$. $\phi_k \in C^0([0,T], L_2(0,\ell))$ olduğundan bu integral özdeşliğinde $\overline{\eta}_k = \overline{\phi}_k$ alalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial \Delta\psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta\psi_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi_k - (v+\Delta v)\Delta\psi_k \right)\overline{\phi}_k(x,t) dxdt +$$
$$\int_\Omega a_1 \left[|\psi_{k\Delta}|^2 + |\psi_k|^2 \right]\Delta\psi_k \overline{\phi}_k dxdt + \int_\Omega a_1 \psi_k \psi_{k\Delta} \Delta\overline{\psi}_k \overline{\phi}_k dxdt =$$
$$= \int_\Omega \Delta v(x)\psi_k(x,t)\overline{\phi}_k(x,t) dxdt. \qquad (3.1.3.11)$$

Bu eşitliğin kompleks eşleniğini yazmış olursak

$$\int_\Omega \left(-i\frac{\partial \Delta\overline{\psi}_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta\overline{\psi}_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\overline{\psi}_k - (v+\Delta v)\Delta\overline{\psi}_k \right)\phi_k(x,t) dxdt +$$
$$+\int_\Omega a_1 \left[|\psi_k|^2 + |\psi_k|^2 \right]\Delta\overline{\psi}_k \phi_k dxdt + \int_\Omega a_1 \overline{\psi}_k \overline{\psi}_{k\Delta} \Delta\psi_k \phi_k dxdt =$$
$$= \int_\Omega \Delta v(x)\psi_k(x,t)\overline{\phi}_k(x,t) dxdt \qquad (3.1.3.12)$$

elde edilir.

Şimdi $(3.1.3.5)$ integral özdeşliğinde $\overline{\eta}_{1k} = \Delta\overline{\psi}_k$, $k=1,2$ alalım ve $\Delta\overline{\psi}_k(x,0)=0$ şartını kullanalım. Bu taktirde $(3.1.3.5)$ özdeşliğinden aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_\Omega \phi_k \left(-i\frac{\partial \Delta \overline{\psi}_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta \overline{\psi}}{\partial x^2} - v(x)\Delta \overline{\psi}_k \int_\Omega 2a_1 |\psi_k|^2 \Delta \overline{\psi}_k \right) dxdt +$$

$$+\int_\Omega a_1 (\psi_k)^2 \overline{\phi}_k \Delta \overline{\psi}_k dxdt = (-1)^k 2\int_\Omega (\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t))\Delta \overline{\psi}_k dxdt. \qquad (3.1.3.13)$$

Aynı şekilde bu eşitliğin kompleks eşleniğini yazarsak

$$\int_\Omega \overline{\phi}_k \left(-i\frac{\partial \Delta \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta \psi_k}{\partial x^2} - v(x)\Delta \psi_k + \int_\Omega 2a_1 |\psi_k|^2 \Delta \psi_k \right) dxdt +$$

$$+\int_\Omega a_1 (\overline{\psi}_k)^2 \phi_k \Delta \psi_k dxdt = (-1)^k 2\int_\Omega \left(\overline{\psi}_1(x,t) - \overline{\psi}_2(x,t)\right)\Delta \psi_k (x,t) dxdt$$

$$(3.1.3.14)$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi $(3.1.3.11)$eşitliğinden $(3.1.3.14)$eşitliğini ve $(3.1.3.12)$eşitliğinden $(3.1.3.11)$eşitliğini taraf tarafa çıkarmış olursak ve dönüşümler yaparsak kolaylıkla aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu elde edilir:

$$2\int_\Omega \mathrm{Re}\left[(\psi_1 - \psi_2)\left(\Delta\overline{\psi}_1 - \Delta\overline{\psi}_2\right)\right] dxdt =$$

$$= -\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\psi_1 \overline{\phi}_1 \psi_2 \overline{\phi}_2\right)\Delta v(x) dxdt - \int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta \psi_1 \overline{\phi}_1 + \Delta \psi_2 \overline{\phi}_2\right)\Delta v(x) dxdt +$$

$$+\int_\Omega \mathrm{Re}\left[a_1\left(|\psi_{1\Delta}|^2 \Delta \psi_1 \overline{\phi}_1 - |\psi_1|^2 \Delta \psi_1 \overline{\phi}_1\right)\right] dxdt +$$

$$+\int_\Omega \mathrm{Re}\left[a_1\left(|\psi_{2\Delta}|^2 \Delta \psi_2 \overline{\phi}_2 - |\psi_2|^2 \Delta \psi_2 \overline{\phi}_2\right)\right] dxdt +$$

$$+\int_\Omega \mathrm{Re}\left[a_1 \psi_{1\Delta} \psi_1 \Delta \overline{\psi}_1 \overline{\phi}_1 - \psi_1^2 \Delta \overline{\psi} \overline{\phi}_1\right] dxdt +$$

$$+\int_\Omega \mathrm{Re}\left[a_1 \psi_{2\Delta} \psi_2 \Delta \overline{\psi}_2 \overline{\phi}_2 - \psi_2^2 \Delta \overline{\psi}_2 \overline{\phi}_2\right] dxdt. \qquad (3.1.3.15)$$

Bu eşitliği $(3.1.3.9)$formülünden dikkate alırsak fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_0^\ell \left[-\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\overline{\phi}_1(x,t) + \psi(x,t)\overline{\phi}_2(x,t)\right) dt + 2\alpha\left(v(x) - w(x)\right) \right] \Delta v(x) dx + R$$

$$(3.1.3.16)$$

burada R kalanı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$R=\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}+\alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,\ell)}-2\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1\Delta\overline{\psi}_2\right)dxdt-$$
$$-\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1\overline{\phi}_1+\Delta\psi_2\overline{\phi}_2\right)\Delta v(x)dxdt+a_1\int_\Omega \mathrm{Re}\left[|\psi_{1\Delta}|^2\Delta\psi_1\overline{\phi}_1-|\psi_1|^2\Delta\psi_1\overline{\phi}_1\right]dxdt+$$
$$a_1\int_\Omega \mathrm{Re}\left[|\psi_{2\Delta}|^2\Delta\psi_2\overline{\phi}_2-|\psi_2|^2\Delta\psi_2\overline{\phi}_2\right]dxdt++a_1\int_\Omega \mathrm{Re}\left[\psi_{1\Delta}\psi_1\Delta\overline{\psi}_1\overline{\phi}_1-\psi_1{}^2\Delta\overline{\psi}_1\overline{\phi}_1\right]dxdt+$$
$$+a_1\int_\Omega \mathrm{Re}\left[\psi_{2\Delta}\psi_2\Delta\overline{\psi}_2\overline{\phi}_2-\psi_2{}^2\Delta\overline{\psi}_2\overline{\phi}_2\right]dxdt\,. \qquad (3.1.3.17)$$

Şimdi önce R kalanını kestirelim. Bu eşitliğin sağ tarafında $t-$ ye göre kısmi integrasyon formülünü kullanalım. Bu taktirde $\Delta\psi_k(x,0)=0$ olduğunu kullanırsak

$$\int_\Omega a_0\frac{\partial}{\partial\tau}\left|\frac{\partial\Delta\psi_k(x,\tau)}{\partial x}\right|^2dxd\tau+\int_{\Omega_t}\left(v(x)+\Delta v(x)\right)\frac{\partial}{\partial\tau}|\Delta\psi_k|^2dxd\tau=$$
$$=\int_0^\ell a_1\left(|\psi_{k\Delta}(x,t)|^2+|\psi_k(x,t)|^2\right)|\Delta\psi_k(x,\tau)|^2dxd\tau-$$
$$-\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(|\psi_{k\Delta}|^2+|\psi_k|^2\right)|\Delta\psi_k(x,\tau)|dxd\tau+$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^\ell a_1\left[\psi_{k\Delta}(x,t)\psi_k(x,t)(\Delta\psi_k(x,t))^2-\overline{\psi}_{k\Delta}(x,t)\overline{\psi}_k(x,t)(\Delta\psi_k(x,t))^2\right]dx-$$
$$-\frac{1}{2}\int_{\Omega_t}a_1\left[\frac{\partial}{\partial t}(\psi_{k\Delta}\psi_k)\left(\Delta\overline{\psi}_k(x,\tau)\right)^2-\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\overline{\psi}_{k\Delta}\overline{\psi}_k\right)\left(\Delta\psi_k(x,\tau)\right)^2\right]dxd\tau-$$
$$-2\int_0^\ell \mathrm{Re}\left(\Delta v(x)\psi_k(x,t)\Delta\overline{\psi}_k(x,t)\right)dx+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\Delta v(x)\psi_k\right)\Delta\overline{\psi}_k(x,\tau)dxd\tau\,,$$
$$k=1,2\,,\quad t\in[0,T]. \qquad (3.1.3.18)$$

Burada $\Delta\psi_k(x,0)=0$, v, $v+\Delta v\in V$ olduğunu göz önüne alırsak basit dönüşümlerden sonra aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$a_0\left\|\frac{\partial\Delta\psi_k(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\le 2|a_1|\int_0^\ell\left[|\psi_{k\Delta}(x,t)|^2+|\psi_k(x,t)|^2\right]|\Delta\psi_k(x,t)|^2dx+$$
$$|a_1|\int_{\Omega_t}\left[\left|\frac{\partial\psi_{k\Delta}(x,\tau)}{\partial\tau}\right||\psi_k(x,\tau)|+\left|\frac{\partial\psi_k(x,\tau)}{\partial\tau}\right||\psi_{k\Delta}(x,\tau)|\right]|\Delta\psi_k(x,\tau)|dxd\tau+$$

$$2|a_1|\int_{\Omega_t}\left[\left|\frac{\partial \psi_{k\Delta}(x,\tau)}{\partial \tau}\right|\left|\psi_{k\Delta}(x,\tau)\right|+\left|\frac{\partial \psi_k(x,\tau)}{\partial \tau}\right|\left|\psi_k(x,\tau)\right|\right]\left|\Delta\psi_k(x,\tau)\right|^2 dxd\tau +$$

$$2\int_0^{\ell}|\Delta v(x)|\left|\psi_k(x,t)\right|\left|\Delta\psi_k(x,t)\right|dx+2\int_{\Omega_t}|\Delta v(x)|\left|\frac{\partial \psi_k(x,\tau)}{\partial \tau}\right|\left|\Delta\psi_k(x,\tau)\right|dxd\tau ,$$

$$\forall t\in[0,T],\ \ k=1,2 . \qquad (3.1.3.19)$$

Burada $\psi_1,\psi_{1\Delta}\in \overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $\psi_2,\psi_{2\Delta}\in W_2^{2,1}(\Omega)$ olduğunu ve

$$\left\|\psi_1\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}\le c_{18},\ \left\|\psi_{1\Delta}\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}\le c_{18},$$

$$\left\|\psi_2\right\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}\le c_{19},\ \left\|\psi_{2\Delta}\right\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}\le c_{19} \qquad (3.1.3.20)$$

eşisizliklerini, aynı zamanda $(3.1.2.11)$ eşitsizliklerini kullanırsak $(3.1.3.19)$ eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$a_0\left\|\frac{\partial\Delta\psi_k(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,\ell)}^2\le c_{20}\left\|\Delta\psi_k(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}^2+c_{21}\ vrai\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}\left|\Delta\psi_k(x,\tau)\right|^2 + +c_{22}\left\|\Delta v\right\|_{L_\infty(0,\ell)}^2,$$

$$\forall t\in[0,T],\ \ k=1,2 .$$

Burada $c_{20}>0, c_{21}>0, c_{22}>0$ sayıları Δv den bağımsızdır. Bu eşitsizlikte $(3.1.2.12)$ kestirimini kullanırsak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$a_0\left\|\frac{\partial\Delta\psi_k(.,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,\ell)}^2\le c_{23}\left\|\Delta v\right\|_{L_\infty(0,\ell)}^2+c_{21}\ vrai\max_{(x,\tau)\in\Omega_t}\left|\Delta\psi_k(x,\tau)\right|^2,$$

$$\forall t\in[0,T],\ \ k=1,2 . \qquad (3.1.3.21)$$

Burada $c_{23}>0$ sayısı Δv den bağımsızdır.[19,20] çalışmasından bildiğimiz eşitliğe göre $\forall t\in[0,T]$ için

$$\left\|\Delta\psi_1(.,t)\right\|_{L_\infty(0,\ell)}\le\beta\left\|\frac{\partial\Delta\psi_1(.,t)}{\partial x}\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta\psi_1(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}^{\frac{1}{2}}, \qquad (3.1.3.22)$$

$$\left\|\Delta\psi_2(.,t)\right\|_{L_\infty(0,\ell)}\le\beta_0\left\|\frac{\partial\Delta\psi_2(.,t)}{\partial x}\right\|^{\frac{1}{2}}\left\|\Delta\psi_2(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}^{\frac{1}{2}}+\beta_1\left\|\Delta\psi_2(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}$$

$$(3.1.3.23)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu eşitsizliklerin, $(3.1.2.12)$ kestiriminin ve $\varepsilon-$Cauchy eşitsizliğinin yardımıyla $(3.1.3.22)$ eşitsizliğinden $\forall t\in[0,T]$ için

$$\left\|\frac{\partial\Delta\psi_k(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\le c_{24}\|\Delta v\|^2_{L_\infty(0,\ell)} \qquad (3.1.3.24)$$

kestiriminin geçerli olduğu elde edilir. Bunu $(3.1.2.12)$ ile toplarsak $\forall t\in[0,T]$ için

$$\|\Delta\psi_k(.,t)\|_{W_2^1(0,\ell)}\le c_{25}\|\Delta v\|^2_{L_\infty(0,\ell)} \qquad (3.1.3.25)$$

kestirimlerin doğru olduğunu ispatlamış oluyoruz. Burada $c_{25}>0$ sayısı Δv den bağımsızdır.

Böylece $(3.1.3.19)$ kestirimini, $(3.1.2.11)$, $(3.1.3.20)$ eşitsizliklerini ve R için olan ifadeyi kullanırsak

$$R=o\left(\|\Delta v\|_{L_\infty(0,\ell)}\right) \qquad (3.1.3.26)$$

bağıntısı elde edilir.

3.1.4.Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Varyasyon Eşitsizliği Şeklinde Gerek Şart

Bu kısımda bakılan $(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanacaktır.

Teorem 3.1.4.1: Kabul edelim ki teorem 3.1.3.2 in şartları sağlanmış olsun. Farz edelim ki $v^*\in V$ kontrolü $(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ probleminin çözümü olsun. Bu taktirde $\forall v\in V$ için

$$J_\alpha(v)=\int_0^\ell\left[\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi^*(x,t)\overline{\phi}_1^*(x,t)+\psi_2^*(x,t)\overline{\phi}_2^*(x,t)\right)dt-2\alpha\left(v^*(x)-w(x)\right)\right]\cdot$$

$$.\left[v(x)-v^*(x)\right]dx\le 0 \qquad (3.1.4.1)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\psi_k^*(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v^*)$, $\phi_k^*(x,t) \equiv \phi_k(x,t;v^*)$, k=1,2 sırasıyla $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ ve $(3.1.3.1)-(3.1.3.4)$ sınır değer probleminin çözümleridir.

İspat: V kümesinin tanımından gözüktüğü gibi bu küme konveks kümedir. Diğer yandan $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesinde teorem 3.1.3.2 ye göre Frechet anlamında diferensiyellenebilir fonksiyonellerdir ve onun gradyenti için

$$J_\alpha^{'} = -\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1 + \psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)dt + 2\alpha(v(x)-w(x)) \qquad (3.1.4.2)$$

formülü geçerlidir. Önce $J_\alpha^{'}(v)$ gradiyentinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla $J_\alpha^{'}(v)$ gradiyentinin $\forall v \in V$ için artışını hesaplayalım. $(3.1.4.2)$ formülünü kullanmış olursak fonksiyonelin gradiyentinin v elamanı üzerinde artışı için bir sonraki formülü elde ederiz:

$$\Delta J_\alpha^{'}(v) = J_\alpha^{'}(v+\Delta v) - J_\alpha^{'}(v) =$$

$$= -\int_0^T \mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_1(x,t)\Delta\bar{\phi}_1(x,t) + \Delta\psi_1(x,t)\Delta\bar{\phi}_2(x,t) + \right.$$

$$\left. + \Delta\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) + \psi_2(x,t)\Delta\bar{\phi}_2(x,t) + \Delta\psi_2(x,t)\Delta\bar{\phi}(x,t)\right)dt +$$

$$+ 2\alpha\Delta v(x) \qquad (3.1.4.3)$$

burada $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,t),\ \ k=1,2$ fonksiyonları $(3.1.2.2)-(3.1.2.5)$ sınır değer probleminin çözümü, $\Delta\phi_k = \Delta\phi_k(x,t) \equiv \phi_k(x,t;v+\Delta v) - \phi_k(x,t;v),\ \ k=1,2$ fonksiyonları aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$i\frac{\partial\Delta\phi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\phi_k}{\partial x^2} - (v+\Delta v)\Delta\phi_k +$$

$$+ a_1\left(2|\psi_{k\Delta}|^2\phi_{k\Delta} + \psi_{k\Delta}^2\bar{\phi}_{k\Delta}\right) - a_1\left(2|\psi_k|^2\phi_k + \psi_k^2\bar{\phi}_k\right) =$$

$$= \Delta v\phi_k(x,t;v) + 2(-1)^k[\Delta\psi_1(x,t) - \Delta\psi_2(x,t)] \qquad (3.1.4.4)$$

$$\Delta\phi_k(x.T)=0 \qquad\qquad k=1,2 \qquad (3.1.4.5)$$

$$\Delta\phi_1(0,t)=\Delta\phi_1(\ell,t)=0\,,\ \ t\in(0,T) \qquad (3.1.4.6)$$

$$\frac{\partial\Delta\phi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\Delta\phi_2(\ell,t)}{\partial x}=0\,,\ \ t\in(0,T). \qquad (3.1.4.7)$$

Kolaylıkla denilebilir ki, $(3.1.4.4)-(3.1.4.7)$ sınır değer problemi $(3.1.3.1)-(3.1.3.4)$ sınır değer problemi gibi $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ sınır değer problemi ile aynı tiplidir. Buna göre aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|\Delta\phi_k(.,t)\|_{L_2(0,\ell)}\le c_{26}\left(\|\Delta\psi_1\|_{L_2(\Omega)}+\|\Delta\psi_2\|_{L_2(\Omega)}+\|\Delta v\|_{L_\infty(0,\ell)}\right) \qquad (3.1.4.8)$$

$\forall t\in[0,T],\ k=1,2$. Burada $c_{26}>0$ sabiti Δv ve $\Delta\psi_k,\ k=1,2$ den bağımsızdır. Bu taktirde $(3.1.3.19)$, kestirimini dikkate alırsak, $(3.1.4.8)$ eşitsizliğinde aşağıdaki kestirirmi elde ederiz:

$$\|\Delta\phi_k(.,t)\|_{L_2(0,\ell)}\le c_{27}\|\Delta v\|_{L_\infty(0,\ell)}. \qquad (3.1.4.9)$$

Burada $c_{27}>0$ sabiti Δv den bağımsızdır.

Şimdi $\Delta J'_\alpha(v)$ artışını kestirelim. $(3.1.4.3)$ formülünde Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|\Delta J'_\alpha(v)\|_{L_1(0,T)}\le\|\Delta\psi_1\|_{L_2(\Omega)}\|\phi_1\|_{L_2(\Omega)}+\|\Delta\phi_1\|_{L_2(\Omega)}\|\psi_1\|_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\|\Delta\psi_2\|_{L_2(\Omega)}\|\phi_2\|_{L_2(\Omega)}+\|\Delta\phi_2\|_{L_2(\Omega)}\|\psi_2\|_{L_2(\Omega)}+$$

$$\|\Delta\psi_1\|_{L_2(\Omega)}\|\Delta\phi_1\|_{L_2(\Omega)}+\|\Delta\psi_2\|_{L_2(\Omega)}\|\Delta\phi_2\|_{L_2(\Omega)}+2\alpha\sqrt{\ell}\|\Delta v\|_{L_2(0,\ell)}$$

burada $(3.1.1.8),(3.1.1.9),(3.1.3.19)$ ve $(3.1.4.9)$ kestirimlerini kullanıp $\Delta v\in L_\infty(0,\ell)$ olduğunu dikkate alırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|\Delta J'_\alpha(v)\|_{L_2(0,\ell)}\le c_{28}\|\Delta v\|_{L_\infty(0,\ell)} \qquad (3.1.4.10)$$

burada c_{28} sayısı Δv den bağımsızdır. Bu eşitlikten $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin gradiyentinin $\forall v\in V$ elemanı üzerinde sürekli olduğu görülür. Buradan $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde Frechet anlamında sürekli diferensiyellenebilir fonksiyonel olduğu ispatlanmış olur. Böylece [21], sayfa 28 deki teoreminin şartlarının sağlandığını gördük. Bu taktirde söz konusu teoreme göre $v^*\in V$ çözümü için

$$\left\langle J_{\alpha}'(v^*), v - v^* \right\rangle_{L_\infty(0,\ell)} \geq 0\,, \quad \forall v \in V$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu elde edilir. Burada $J_{\alpha}'(v)$ fonksiyonelinin gradiyenti için formülü dikkate alırsak elde edilen bağıntıyı (-1) ile çarparsak teoremin hükmünün geçerli olduğu ispatlanmış olur.

3.2.Lineer Olmayan Schrodinger Denklemi için Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü

Bu bölümde sonlu farklar yöntemi, 3.1. bölümde incelenen lineer olmayan Schrodinger denklemi için kontrol probleminin çözümüne uygulanır. Bu amaçla önce göz önüne alınan optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısı yazılır. Elde edilen fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi ispatlanır. Bu kestirimi kullanarak fark şemasının hatası için kestirim elde edilir. Kararlılık ve hata için olan kestirimlerin yardımıyla sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaması ispatlanır. Schrodinger denklemi için optimal kontrol probleminin sonlu farklar metoduyla çözümüne ait farklı konulmada önce [9,10,11,12,14] çalışmaları incelenmiştir.

3.2.1.Optimal Kontrol Probleminin Sonlu Fark Yaklaşımı

Aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım:

$$J(v) = \int_{\Omega} \left|\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)\right|^2 dxdt \tag{3.2.1.1}$$

fonksiyonelinin

$$V = \left\{ v = v(x) : v \in L_2(0,\ell), 0 < b_0 \leq v(x) \leq b_1, \overset{\circ}{\forall} v \in (0,\ell) \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} - v(x)\psi_k + a_1 |\psi_k|^2 \psi_k = 0\,, \quad k = 1,2\,, (x,t) \in \Omega, \tag{3.2.1.2}$$

$$\psi_k(x,0) = \varphi_k(x), \quad k = 1,2\,, \quad x \in (0,\ell), \tag{3.2.1.3}$$

$$\psi_1(0,t) = \psi_1(\ell,t) = 0\,, \quad t \in (0,T), \tag{3.2.1.4}$$

$$\frac{\partial \psi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(\ell,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3.2.1.5}$$

şartları altında minumunu bulmak gerekir. Burada $i=\sqrt{-1}$, $a_0, b_0, b_1, a_1 > 0$, $\ell > 0$, $T > 0$ verilen sayılar $\varphi_k(x)$, $f_k(x,t)$, $k=1,2$ fonksiyonları 3.1. bölümdeki $(3.1.1.6)$, $(3.1.2.11)-(3.1.2.13)$ şartlarını sağlayan fonksiyonlardır.

3.1. bölümden gözüktüğü gibi $(3.2.1.1)-(3.2.1.5)$ problemi $(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol probleminin $\alpha = 0$ haline karşılık gelen özel halidir. Teorem 3.1.2.2 den elde ediyoruz ki $(3.2.1.1)-(3.2.1.5)$ optimal kontrol probleminin kabul olunmuş şartlar altında en azından bir çözümü vardır. Yani;

$$V_* \equiv \left\{ v^*; v^* \in V, J(v^*) = J_* = \inf_{v \in V} J(v) \right\} \neq \emptyset.$$

Şimdi $(3.2.1.1)-(3.2.1.5)$ optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısını yazalım. Bu amaçla önce Ω bölgesini aşağıdaki ağlar dizisine dönüştürelim:

$$\{(x,t_k)_n\}, \quad n = 1,2,\ldots, \quad x_j = jh - h/2, \quad j = \overline{1, M_n - 1}, \quad t_k = k\tau$$

$$k = \overline{1, N_n}, \quad h = h_n = \ell/(M_n - 1), \quad \tau = \tau_n = T/N_n$$

$$M = M_n, \quad N = N_n, \quad \delta_{\bar t}\phi_{jk} = (\phi_{jk} - \phi_{jk-1})/\tau$$

$$\delta_{\bar x}\phi_{jk} = (\phi_{jk} - \phi_{j-1k})/h, \quad \delta_x \phi_{jk} = (\phi_{j+1k} - \phi_{jk})/h,$$

$$\delta_{x\bar x}\phi_{jk} = (\phi_{j+1k} - 2\phi_{jk} + \phi_{j-1k})/h^2$$

işaret edelim. Her bir $n \geq 1$ doğal sayısı için

$$I_n([v]_n) = \tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| \phi_{jk}^1 - \phi_{jk}^2 \right|^2 \tag{3.2.1.6}$$

fonksiyonunun

$$V \equiv \left\{ [v]_n : [v]_n = (v_1, v_2, \ldots v_{M-1}), 0 < b_0 \leq v_j \leq b_1, j = \overline{1, M-1} \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\delta_{\bar t}\phi_{jk}^p + a_0 \delta_{x\bar x}\phi_{jk}^p - v_j \phi_{jk}^p + a_1 \left| \phi_{jk}^p \right|^2 \phi_{jk}^p = 0, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1, N} \tag{3.2.1.7}$$

$$\phi_{j0}^p = \varphi_j^p, \quad j = \overline{0, M}, \quad p = 1,2 \tag{3.2.1.8}$$

$$\phi_{0k}^1 = \phi_{Mk}^1 = 0, \quad k = \overline{1, N} \tag{3.2.1.9}$$

$$\delta_{\bar{x}}\phi_{1k}^2 = \delta_{\bar{x}}\phi_{Mk}^2 = 0, \quad k = \overline{1,N} \tag{3.2.1.10}$$

şartları altında minimumu bulunması problemini göz önüne alalım. Burada φ_j^p, f_{jk}^p, $p = 1,2$ fonksiyonları ağ fonksiyonları olup aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\varphi_j^p = \frac{1}{h}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \varphi_p(x)dx, \quad p = 1,2 \quad j = \overline{1, M-1}, \tag{3.2.1.11}$$

$$\varphi_0^1 = \varphi_M^1 = 0, \quad \varphi_0^2 = \varphi_1^2, \quad \varphi_M^2 = \varphi_{M-1}^2. \tag{3.2.1.12}$$

Gözüktüğü gibi $(3.2.1.6)-(3.2.1.10)$ problemi de optimal kontrol problemi olup $(3.2.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol probleminin diskrit aynısıdır. Her bir $[v]_n \in V_n$ için $(3.2.1.7)-(3.2.1.10)$ şartlarından ϕ_{jk}^p, $p = 1,2$ ağ fonksiyonlarının bulunması problemi $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasıdır. Önce bu fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimini elde edelim. [14] çalışmasındaki sonuçları kullanarak ϕ_{jk}^p $p = 1,2$ fonksiyonları için aşağıdaki teoremi ispatlamak mümkündür.

Teorem 3.2.1.1: Her bir $[v]_n \in V_n$ için $(3.2.1.7)-(3.2.1.10)$ fark şemasının çözümü aşağıdaki kestirimi sağlar:

$$h\sum_{j=p}^{M-p+1}\left|\delta_{\bar{x}}\phi_{jm}\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}^p\right|^2 \le c_{29}\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j^p\right|^2 + h\sum_{j=p}^{M-p+1}\left|\delta_{\bar{x}}\varphi_j^p\right|^2 + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^4\right)$$

$$m = \{1,2,\ldots N\}, \quad p = 1,2 \tag{3.2.1.13}$$

burada $c_{29} > 0$ sayısı τ, h ve m den bağımsızdır.

3.2.2.Fark Şemasının Hatası için Kestirim

Şimdi bu kısımda $(3.2.1.7)-(3.2.1.10)$ fark şemasının hatasını kestirelim.bu amaçla önce $v \in V$ için $(3.1.1.2)-(3.1.1.5)$ sınır değer probleminin çözümünün ortalamasını aşağıdaki biçimde tanımlayalım:

$$[\psi_p(x,t;v)]_n = \{\psi_{jk}^p\},$$

$$\psi_{jk}^{p}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_k-1}^{tk}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t)dxdt,\ \ j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N},\ \psi_{j0}^{p}=\varphi_j^{p},$$

$$j=\overline{0,M},\ \ p=1,2,\ \psi_{0k}^{'}=\psi_{Mk}=0,\ \ \psi_{0k}^{2}=\psi_{1k}^{2},\ \ \psi_{Mk}^{2}=\psi_{M-1k}^{2},$$

$$k=\overline{1,2}. \tag{3.2.2.1}$$

Bundan başka V kümesi üzerinde Q_n operatörünü tanımlayalım:

$$\mathrm{Q}_n:V\to V_n,\ \mathrm{Q}_n(v)=(w_1,w_2,...,w_{m-1}),$$

$$w_j=\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}v(x)dx,\ \ j=\overline{1,M-1}. \tag{3.2.2.2}$$

$\lfloor z^p\rfloor_n=\{z_{jk}^p\}=\{\phi_{jk}^p\}-\{\psi_{jk}^p\}$ gibi gösterelim,

aşikardır ki, $\{z_{jk}^p\}$, $p=1,2$ ağ fonksiyonları aşağıdaki sistemin çözümüdür.

$$i\delta_{\bar{t}}z_{jk}^p+a_0\delta_{x\bar{x}}z_{jk}^p-v_jz_{jk}^p=F_{jk}^p+a_1|\psi_j^p|\psi_k^p-a_1|\phi_k^p|^2\phi_{jk}^p,$$

$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N} \tag{3.2.2.3}$$

$$z_{j0}^p=0,\ \ j=\overline{0,M},\ \ p=1,2, \tag{3.2.2.4}$$

$$z_{0k}^1=z_{Mk}^1=0,\ \ k=\overline{1,N}, \tag{3.2.2.5}$$

$$\delta_{\bar{x}}z_k^2=\delta_{\bar{x}}z_{Mk}^2=0,\ \ k=\overline{1,N}, \tag{3.2.2.6}$$

burada

$$F_{jk}^p=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[i\frac{\partial\psi_p}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2}-v(x)\psi_p+a_1|\psi_p(x,t)|^2\psi_p(x,t)\right]dxdt-$$

$$-i\delta_{\bar{x}}\psi_{jk}^p-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}^p+v_j\psi_{jk}^p-a_1|\psi_{jk}^p|^2\psi_{jk}^p,$$

$$j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N}. \tag{3.2.2.7}$$

Teorem 3.2.2.1: Farz edelim ki $c_{17}\le\tau/h\le c_{18}$, $\tau\le\left[8|a_1|\max\limits_{\substack{1\le j\le M-1\\1\le k\le N}}\left(|\phi_{jk}^p|^2+|\varphi_{jk}^p|^2\right)\right]^{-1}$

şartları sağlanmış olsun, burada $c_{17}, c_{18} > 0$ sayıları τ ve h dan bağımsızdır. Bu taktirde $(3.2.2.3)-(3.2.2.6)$ sisteminin çözümü için, yani şemasının hatası aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|z_{jm}^{p}\right|^{2} \le c_{30}\left(\beta_{\tau h} + h\sum_{j=1}^{M-1}\left|v_j - w_j\right|^{2}\right), \quad p=1,2, \quad \forall m \in \{1,2,...N\} \tag{3.2.2.8}$$

burada $c_{30} > 0$, h, t ve m den bağımsızdır. $\beta_{\tau h} > 0$, $\tau \to 0$, $h \to 0$ için $\beta_{\tau h} \to 0$ dır.

İspat: $(3.2.2.3)-(3.2.2.6)$ sistemini, τ için teoremin şartlarını ve $(3.1.1.8)$, $(3.1.1.9)$, $(3.2.1.13)$ kestirimleri kullanarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|z_{jm}^{p}\right|^{2} \le c_{31}\left(\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p}\right|^{2}\right), \quad p=1,2 \tag{3.2.2.9}$$

$\forall m \in \{1,2,...N\}$ burada $c_{31} > 0$ sayısı h, τ ve m den bağımsızdır.

Şimdi $(3.2.2.9)$ un sağ tarafını kestirelim. F_{jk}^{p}, $p=1,2$ ağ fonksiyonları için formülleri kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı kolaylıkla yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p} = F_{jk}^{p1} + F_{jk}^{p2} + F_{jk}^{p3} + F_{jk}^{p4}, \ p=1,2 \tag{3.2.2.10}$$

burada

$$F_{jk}^{p1} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial \psi_p}{\partial t}dxdt - i\delta_{\bar{t}}\psi_{jk}^{p}, \tag{3.2.2.11}$$

$$F_{jk}^{p2} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0\frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2}dxdt - a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}^{p}, \tag{3.2.2.12}$$

$$F_{jk}^{p3} = -\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v(x)\psi_p(x,t)dxdt + v_j\psi_{jk}^{p} \tag{3.2.2.13}$$

$$F_{jk}^{p4} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_1\left|\psi_p(x,t)\right|^2\psi_p(x,t)dxdt - a_1\left|\psi_{jk}^{p}\right|^{2}\psi_{jk}^{p},$$

$$j=\overline{1,M-1}, \ k=\overline{1,N}, \quad p=1,2 \tag{3.2.2.14}$$

$(3.2.2.1)$ formülüne göre $(3.2.2.11)$ den F_{jk}^{p}, $p=1,2$, $i=\overline{1,M-1}$, $\overline{2,N}$ için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$F_{jk}^{p1}=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi_p}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau^2 h}\left\{\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t)dxdt-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t)dxdt\right\}=$$

$$=\frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi_p}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau^2 h}\left\{\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial\psi_p(x,\theta)}{\partial\theta}d\theta dxdt=\right.$$

$$=\frac{i}{\tau^2 h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\int\limits_{-\tau}^{0}\left[\frac{\partial\psi_p(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi_p(x,t+\theta)}{\partial t}\right]d\theta\right)dxdt$$

Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğini uygulamış olursak buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^{p1}\right|^2\le\frac{1}{\tau^2 h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int\limits_{-\tau}^{0}\left|\frac{\partial\psi_p(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi_p(x,t+\theta)}{\partial t}\right|^2 d\theta dxdt$$

$$j=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{2,N},\quad p=1,2 \qquad (3.2.2.15)$$

F_{j1}^{p1} için olan formülü kullanırsak onu aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$F_{j1}^{p1}=\frac{i}{\tau h}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi_p(x,t)}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau}\left(\psi_{j1}^p-\psi_{j0}^p\right)=$$

$$=\frac{i}{\tau h}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi_p(x,t)}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau h}\left[\frac{1}{\tau}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t)dxdt-\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t_0)dx\right]=$$

$$=\frac{i}{\tau h}\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi_p(x,t)}{\partial t}dxdt-\frac{i}{\tau^2 h}\left[\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int\limits_{t_0}^{t}\frac{\partial\psi_p(x,\theta)}{\partial\theta}\partial\theta\right]dxdt.$$

Buradan da;

$$\left|F_{j1}^{p1}\right|^2\le\frac{4}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p}{\partial t}\right|^2 dxdt,\quad j=\overline{1,M-1},\quad p=1,2 \qquad (3.2.2.16)$$

F_{jk}^{p2} için olan formülü kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$F_{jk}^{p2}=\frac{a_0}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial^2\psi_p}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{\tau h^3}\left\{\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int\limits_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2}\psi_p(x,t)dx-\right.\right.$$

$$-2\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t)dx+\int_{x_{j-1}-h/2}^{x_{j-1}+h/2}\psi_p(x,t)dx\Bigg]dt\Bigg\}=$$

$$=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_x^{x+h}\int_{\xi-h}^{\xi}\left[\frac{\partial^2\psi_p(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_p(\eta,t)}{\partial\eta^2}\right]d\eta d\xi dxdt=$$

$$=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_x^{x+h}\int_{-h}^{0}\left[\frac{\partial^2\psi_p(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_p(\eta+\xi,t)}{\partial\xi^2}\right]d\eta d\xi dxdt=$$

$$=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_0^{h}\int_{-h}^{0}\left[\frac{\partial^2\psi_p(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_p(x+\eta+\xi,t)}{\partial x^2}\right]d\eta d\xi dxdt$$

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini kullanırsak sonuncu eşitlikten aşağıdaki eşitsizliği kolaylıkla elde edebiliriz:

$$\left|F_{jk}^{p2}\right|^2\le\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_0^{h}\int_{-h}^{0}\left[\frac{\partial^2\psi_p(x,t)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi_p(x+\eta+\xi,t)}{\partial x^2}\right]d\eta d\xi dxdt$$

$$j=\overline{2,M-2},\quad k=\overline{1,N},\quad p=1,2. \qquad (3.2.2.17)$$

Şimdi F_{1k}^{p2}, $k=\overline{1,N}$, $p=1,2$ terimini kestirelim. Bu ağ fonksiyonunun $p=1$ için formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{1k}^{12}=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial^2\psi_1(x,t)}{\partial x^2}dxdt-\frac{a_0}{h^2}\left[\psi_{2k}^1-2\psi_{1k}^1+\psi_{0k}^1\right]=$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\frac{\partial\psi_1(x_1+h/2,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1(x_1-h/2,t)}{\partial x}\right)dt-$$

$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\left\{\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_x^{x+h}\frac{\partial\psi_1(\xi,t)}{\partial\xi}d\xi dx-\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\frac{\partial\psi_1(\xi,t)}{\partial\xi}d\xi dx\right]dt\right\}=$$

$$=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_x^{x+h}\int_{\xi}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi_1(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdt-$$

$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_1-h/2}^{x}\int_{x_1-h/2}^{\xi}\frac{\partial^2\psi_1(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdt$$

buradan da Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{1k}^{12}\right|^2 \le \frac{9a_0^2}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi_1(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\,,\quad k=\overline{1,N} \qquad (3.2.2.18)$$

$p=2$ için F_{1k}^{p2} olan formülden aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$F_{1k}^{22} = \frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi_2(x,t)}{\partial x^2}dxdt - \frac{a_0}{h^2}\left[\psi_{2k}^2 - 2\psi_{1k}^2 + \psi_{0k}^2\right] =$$

$$\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\partial\psi_2(x_1+h/2,t)}{\partial x^2}dt - \frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial\psi_2(\xi,t)}{\partial\xi}d\xi dxdt\right] =$$

$$= \frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x}^{x+h}\int_{\xi}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi_2(\eta,t)}{\partial\eta}d\eta d\xi dxdt\,.$$

Buradan

$$\left|F_{1k}^{22}\right|^2 \le \frac{4a_0^2}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi_2(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\,,\quad k=\overline{1,N} \qquad (3.2.2.19)$$

elde ederiz.

$(3.2.2.18)$ ve $(3.2.2.19)$ eşitsizliklerini aynı şekilde F_{M-1k}^{12} ve F_{M-1k}^{22} için kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{M-1k}^{22}\right|^2 \le \frac{9a_0^2}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi_1(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt \qquad (3.2.2.20)$$

$$\left|F_{M-1k}^{22}\right|^2 \le \frac{4a_0^2}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi_2(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\,. \qquad (3.2.2.21)$$

Şimdi F_{jk}^{p3}, $j=\overline{1,M-1}$, $k=\overline{1,N}$, $p=1{,}2$ terimlerini kestirelim. $(3.2.2.13)$ formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p3} = v_j\psi_{jk}^p - \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}v(x)\psi_p(x,t)dxdt =$$

$$= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_{jk}^p(v_i - v(x))dxdt +$$

$$+\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}v(x)\left(\psi_{jk}^p - \psi_p(x,t)\right)dxdt \qquad (3.2.2.22)$$

ψ_{jk}^{p} için formüle göre aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\psi_{jk}^{p}\right| = \left|\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi_p(x,t)dxdt\right| \le vrai\max_{(x,t)\in\Omega}\left|\psi_p(x,t)\right| =$$

$$= \left\|\psi_p\right\|_{L_\infty(\Omega)} \le \left\|\psi_p\right\|_{L_\infty\left(0,T;W_2^1(0,\ell)\right)},\quad p=1,2. \qquad (3.2.2.23)$$

Kolaylıkla $\psi_p(x,t)$, $p=1,2$ fonksiyonları için aşağıdaki eşitsizlikler elde edilir:

$$\left\|\psi_1(.,t)\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)} \le c_{32}\left(\left\|\varphi_1\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,\ell)} + \left\|f\right\|_{\overset{\circ}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)}\right), \qquad (3.2.2.24)$$

$$\left\|\psi_2(.,t)\right\|_{W_2^1(0,\ell)} \le c_{33}\left(\left\|\varphi_1\right\|_{W_2^1(0,\ell)} + \left\|f\right\|_{W_2^{1,0}(\Omega)}\right) \qquad (3.2.2.25)$$

$\forall t\in[0,T]$. Burada $c_{32}, c_{33} > 0$ belirli sayılardır ve t den bağımsızdır. Bu kestirimleri ve $(3.2.2.23)$ eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\left|\psi_{jk}^{1}\right| \le c_{34} \qquad (3.2.2.26)$$

$$\left|\psi_{jk}^{2}\right| \le c_{34} \qquad (3.2.2.27)$$

$\forall j\in\{1,2,...M-1\}$, $\forall k\in\{1,2,...\}$ burada $c_{24} > 0$ sayısı j ve k dan bağımsızdır. $(3.2.2.22)$ den aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\left|F_{jk}^{p3}\right| \le \frac{b_1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_{jk}^{p} - \psi_p(x,t)\right|dxdt + c_{34}\left|v_j - w_j\right|,$$

$$j=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{1,N},\quad p=1,2. \qquad (3.2.2.28)$$

Şimdi $\psi_{jk}^{p} - \psi_p(x,t)$ farkını ele alalım. ψ_{jk}^{p} için olan formülü kullanırsak bu farkı aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\psi_{jk}^{p} - \psi_p(x,t) = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j-h/2}\left(\psi_p(\xi,\theta) - \psi_p(x,t)\right)d\xi d\theta =$$

$$= \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\int_x^\xi \frac{\partial\psi_p(\eta,\theta)}{\partial\eta}d\eta + \int_t^\theta \frac{\partial\psi_p(x,\sigma)}{\partial\sigma}\right]d\sigma d\theta \qquad (3.2.2.29)$$

bu ifadeyi $(3.2.2.28)$ de kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^{p3}\right|^2 \le \frac{2b_1^2 h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p}{\partial x}\right|^2 dxdt + \frac{3b_1^2\tau}{h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p}{\partial t}\right|^2 dxdt +$$

$$+3c_{34}^2\left|v_j-w_j\right|,$$

$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2 \qquad (3.2.2.30)$$

Şimdi F_{jk}^{p4}, $j=\overline{1,M-1}$, $k=\overline{1,N}$, $p=1,2$ terimlerini kestirelim. F_{jk}^{p4} için olan formülü kullanırsak, aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p4}=\frac{a_1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left[\left|\psi_p(x,t)\right|^2\psi_p(x,t)-\left|\psi_{jk}^p\right|^2\psi_{jk}^p\right]dxdt,$$

$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2 \qquad (3.2.2.31)$$

aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu açıktır:

$$\left|\psi_p(x,t)\right|^2\psi_p(x,t)-\left|\psi_{jk}^p\right|^2\psi_{jk}^p=$$

$$=\left(\left|\psi_{jk}^p\right|^2+\left|\psi_p(x,t)\right|^2\right)\left(\psi_p(x,t)-\psi_{jk}^p\right)+\psi_{jk}^p\psi_p(x,t)\left(\psi_p(x,t)-\psi_{jk}^p\right)$$

bu eşitliği kullanırsak F_{jk}^{p4} için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^{p4}\right|\le\frac{3a_1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\left|\psi_{jk}^p\right|^2+\left|\psi_p(x,t)\right|^2\right)\left|\psi_{jk}^p-\psi_p(x,t)\right|dxdt,$$

$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2$$

burada $(3.1.2.11)$ in birinci eşitliğini ve $(3.2.2.26)$, $(3.2.2.27)$ eşitsizliklerini kullanırsak

$$\left|F_{jk}^{p4}\right|\le\frac{c_{35}}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_p(x,t)-\psi_{jk}^p\right|dxdt$$

$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2 \qquad (3.2.2.32)$$

burada $(3.2.2.29)$ u kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^{p4}\right|^2\le\frac{2c_{35}h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p}{\partial x}\right|dxdt+\frac{2c_{35}\tau}{h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi_p}{\partial x}\right|^2dxdt,$$

$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=1,2 \qquad (3.2.2.33)$$

Fubini teoremini [22] kullanırsak, $(3.2.2.15)$ den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$h\tau\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2\le\frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi_p(x,t)}{\partial t}-\frac{\partial\psi_p(x,t+\theta)}{\partial t}\right|^2dxdt\right)d\theta,\quad p=1,2. \qquad (3.2.2.34)$$

Herhangi $\varepsilon > 0$ alalım. $L_2(\Omega)$ uzayında tanımlanmış fonksiyonunun sürekliliği teoremine göre $|\theta| < \tau < \delta$ iken

$$\left\| \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi(x,t+\theta)}{\partial t} \right\|_{L_2(\Omega)} < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır. Buna göre böyle τ lar için $(3.2.2.34)$ den aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz.

$$\tau h \sum_{k=2}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{jk}^{p1} \right|^2 \le w_\tau^0 \qquad (3.2.2.35)$$

burada $w_\tau^0 > 0$, $\tau \to 0$ için $w_\tau^0 \to 0$. $(3.2.2.16)$ eşitsizliğine göre

$$\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{j1}^{p1} \right|^2 \le \int_0^\tau \left\| \frac{\partial \psi_p(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,\ell)}^2 dt$$

eşitsizliğini elde ediyoruz. İntegral mutlak sürekliliğine göre sonuncu eşitsizlikten

$$\tau h \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{j1}^{p1} \right|^2 \le w_\tau^1 , \quad p = 1,2 . \qquad (3.2.2.36)$$

Burada $w_\tau^1 > 0$, $\tau \to 0$ için $w_\tau^1 \to 0$. Böylece $(3.2.2.35)-(3.2.2.36)$ eşitsizliklerinden

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| F_{jk}^{p1} \right|^2 \le w_\tau^0 + w_\tau^1 = \widetilde{w}_\tau^0 , \quad p = 1,2 \qquad (3.2.2.37)$$

$(3.2.2.35)$ eşitsizliğinin elde edilmesiyle aynı olarak $(3.2.2.17)$ den aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ediyoruz:

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=2}^{M-1} \left| F_{jk}^{p1} \right|^2 \le w_h^2 , \quad p = 1,2 \qquad (3.2.2.38)$$

burada $w_h^2 > 0$ ve $h \to 0$ için $w_h^2 \to 0$. $(3.2.2.18)-(3.2.2.21)$ eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \left| F_{j1}^{p1} \right|^2 \le 9 a_0{}^2 \int_0^h \left\| \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,T)}^2 dx \qquad (3.2.2.39)$$

$$\tau h \sum_{k=1}^{N} \left| F_{M-1k}^{p1} \right|^2 \le 9 a_0{}^2 \int_{\ell-h}^{\ell} \left\| \frac{\partial^2 \psi_p}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,T)}^2 dx \qquad (3.2.2.40)$$

buradan ve integralin mutlak sürekliliğinden bu eşitsizliklerinin sağ taraflarının $h \to 0$ için sıfıra yaklaştığını elde ederiz. Yani;

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\left|F_{j1}^{p1}\right|^2 \le + \tau h\sum_{k=1}^{M-1}\left|F_{M-1k}^{p1}\right|^2 \le w_h^3\,,\quad p=1,2 \qquad (3.2.2.41)$$

buradan $w_h^3 > 0$ ve $h \to 0$ için $w_h^3 \to 0$ dır. Bu taktirde $(3.2.2.38)$ den ve $(3.2.2.41)$ den

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \widetilde{w}_h^0\,,\quad p=1,2 \qquad (3.2.2.42)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $\widetilde{w}_h^0 = w_h^2 + w_h^3$. $(3.2.2.30)$ eşitsizliğinden $(3.1.2.17)-(3.1.2.18)$ kestirimlerinin yardımıyla bir sonraki eşitsizliği elde ederiz:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p3}\right|^2 \le c_{36}\left(\tau^2 + h^2 + \left\|Q_n(v)-[v]_4\right\|\right),\qquad p=1,2\,. \qquad (3.2.2.43)$$

burada $c_{36} > 0$ sayısı τ ve h den bağımsızdır.

Nihayet $(3.2.2.33)$ eşitsizliğinden $(3.1.2.17)-(3.1.2.18)$ kestirimlerinin ve $Q_n(v)$ operatörü için olan formülü yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p4}\right|^2 \le c_{38}\left(\tau^2 + h^2\right)\quad p=1,2\,,\ \forall m\in\{1,2,...N\} \qquad (3.2.2.44)$$

burada $c_{38} > 0$ sayısı τ ve h den bağımsızdır. Böylece $(3.2.2.37)$ ve $(3.2.2.42)-(3.2.2.44)$ eşitsizliklerinin yardımıyla $(3.2.2.9)$ ve $(3.2.2.10)$ dan aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}^{p}\right|^2 \le c_{27}\left(\widetilde{w}_\tau^0 + \widetilde{w}_h^0 + \tau^2 + h^2 + \left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|^2\right),$$

$$p=1,2\,,\ \forall m\in\{1,2,...N\} \qquad (3.2.2.45)$$

burada $c_{27} > 0$ sayısı τ ve h den bağımsızdır. Bu eşitsizlikten

$$\beta_{\tau h} = \widetilde{w}_\tau^0 + \widetilde{w}_h^0 + \tau^2 + h^2 \text{ ve } \left\|Q_n(v)-[v]_n\right\| = \left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|w_j - v_j\right|^2\right)^{1/2}$$

şeklinde kabul edersek teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem ispatlandı.

3.2.3.Fark Yaklaşımlarının Fonksiyonele Göre Yakınsaklığı

Bu kısımda fark şemasının hatası olan kestirimi kullanarak sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığını inceleyelim.

Teorem 3.2.3.1: Farz edelim ki teorem 3.2.2.1 in şartları sağlanmış olsun. Bu taktirde $\forall v \in V$ ve $\forall [v]_n \in V_n$ için

$$\left|J(v) - I_n([v]_n)\right| \le c_{39}\left(\sqrt{\widetilde{\beta}_{\tau,h}} + \left\|Q_n(v) - [v]_n\right\|\right) \qquad (3.2.3.1)$$

burada $c_{39} > 0$ olup τ ve h dan bağımsızdır ve $\widetilde{\beta}_{\tau h} > 0$, $\tau \to 0$, $h \to 0$ için $\widetilde{\beta}_{\tau h} \to 0$ dır.

İspat: $J(v) - I_n([v]_n)$ farkını göz önüne alalım. $(3.2.1.1)$ ve $(3.2.1.6)$ formüllerini kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$J(v) - I_n([v]n) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\left|\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)\right| + \left|\phi_{jk}^1 - \phi_{jk}^2\right|\right) +$$
$$+ \left(\left|\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)\right| - \left|\phi_{jk}^1 - \phi_{jk}^2\right|\right) dxdt,$$

Cauchy – Bunyakovski eşitliğini ve $(3.1.1.8)$, $(3.1.1.9)$, $(3.2.1.13)$ kestirimlerini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabilirliz:

$$\left|J(v) - I_n([v]_n)\right| \le c_{40}\left[\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_1(x,t) - \phi_{jk}^1\right|^2 dxdt\right)^{1/2} + \right.$$
$$\left. + \left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_2(x,t) - \phi_{jk}^2\right|^2 dxdt\right)^{1/2}\right] = c_{40}\left[J_1 + J_2\right] \qquad (3.2.3.2)$$

J_1 için olan formülü kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde elde ederiz:

$$(J_1)^2 = \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{M-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_1(x,t) - \psi_{jk}^1 + \psi_{jk}^1 - \phi_{jk}^1\right| \le$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi_1(x,t)-\psi_{jk}^1\right|^2 dxdt +$$

$$+2\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\psi_{jk}^1-\phi_{jk}^1\right|^2 = J_{11}+J_{12}\,. \qquad (3.2.3.3)$$

Önce J_{11} $-$i kestirelim. $(3.2.2.29)$ formülünü kullanırsak,

$$J_{11} \leq 4\tau^2\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + 4h^2\left\|\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 \qquad (3.2.3.4)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

$(3.2.2.8)$ kestirimini $p=1$ için kullanırsak

$$J_{12} \leq 2c_{30}\left(\beta_{\tau h} + \left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|^2\right) \qquad (3.2.3.5)$$

eşitsizliği ispatlanır.

Böylece $(3.2.3.4)$ ve $(3.2.3.5)$ kestirimlerini yardımıyla

$$(J_{11})^2 \leq c_{41}\left(\beta_{\tau h} + \left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|^2\right) \qquad (3.2.3.6)$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_{41}>0$ sayısı τ ve h den bağımsızdır. Aynı şekilde $(J_2)^2$ için aşağıdaki eşitsizlik ispatlanır:

$$(J_2)^2 \leq c_{42}\left(\beta_{\tau h} + \left\|Q_n(v)-[v]_n\right\|^2\right). \qquad (3.2.3.7)$$

Böylece $(3.2.3.6)$ ve $(3.2.3.7)$ eşitsizliklerini kullanırsak $(3.2.3.2)$ den teoremin hükmü ispatlanmış olur.

Şimdi fonksiyonele yakınsaklık teoreminin ispatlamadan önce yardımcı Lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.2.3.2: Farz edelim ki 3.2.3.1. in şartları sağlanmış olsun. Bunu yanı sıra diyelim ki Q_n operatörü $(3.2.2.2)$ formülüyle tanımlanmış olsun. Bu taktirde $Q_n(v)\in V_n$ ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\left|J(v)-I_n(Q_n(v))\right| \leq c_{39}\sqrt{\widetilde{\beta}_{\tau h}}\,.$$

İspat: Farz edelim ki $v \in V$ herhangi bir mümkün kontroldür. Q_n operatörünün tanımına göre

$$Q_n(v) = (w_1, w_2, ..., w_{M-1})$$

$$w_j = \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h72} v(x)dx, \quad j = \overline{1, M-1} \text{ dir.}$$

Bu formülü kullanırsak, aşağıdakileri yazabiliriz.

$$w_j = \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} v(x)dx \geq \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} b_0 = b_0, \quad j = \overline{1, M-1}$$

$$w_j = \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} v(x)dx \leq \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} b_1 = b_1, \quad j = \overline{1, M-1}.$$

Bu eşitsizliklerden, $b_0 \leq w_j \leq b_1, \quad j = \overline{1, M-1}$ elde edilir.

Buradan V_n kümesinin tanımına göre $Q_n(v) \in V_n$ elde edilir. Bu takdirde $[v]_n \in V_n$ diskrit kontrolünü alıp teorem 3.2.3.1 i ispatlamış olursak lemmanın hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Lemma ispatlandı.

Farz edelim ki P_n operatörü aşağıdaki formül ile tanımlıdır.

$$P_n([v]_n) = \tilde{v}(x).$$

$(3.2.3.8)$

Burada $\tilde{v}(v) = v_j, \quad x_j - h/2 \leq x \leq x_j + h/2, \quad j = \overline{1, M-1}$ dir.

Lemma 3.2.3.3: Farz edelim ki, teorem 3.2.3.1 in şartları sağlanmış olsun. Bunun yanı sıra P_n operatörü $(3.2.3.8)$ formülü ile tanımlansın. Bu taktirde $P_n([v]_n) \in V$ ve aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$|J(P_n([v]_n)) - I_n([v]_n)| \leq c_{39} \sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}}.$$

İspat: Farz edelim ki, $[v]_n \in V$ herhangi diskrit kontrol olsun. P_n operatörü $(3.2.3.8)$ formülünü tanımladığından V_n kümesinin tanımına göre aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\tilde{v}(x) = P_n([v]_n) = v_j \geq b_0, \quad x_j - h/2 \leq x \leq x_j + h/2, \quad j = \overline{1, M-1},$$

$$\tilde{v}(x) = P_n([v]_n) = v_j \geq b_1, \quad x_j - h/2 \leq x \leq x_j + h/2, \quad j = \overline{1, M-1}.$$

Buradan ve V kümesinin tanımından $P_n([v]_n) \in V$ olduğunu elde ediyoruz. Buna göre $v \in V$ kontrolünün yerine $\tilde{v}(t) = P_n([v]_n) \in V$ kontrolünü alıp 3.2.3.1 teoremini ispatlamış olursak

$$|J(P_n([v]_n)) - I_n([v]_n)| \leq c_{39}\left(\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}} + \|Q_n(P_n([v]_n)) - [v]_n\|\right) \tag{3.2.3.9}$$

eşitsizliğini elde ediyoruz.

Şimdi $\|Q_n(P_n([v]_n)) - [v]_n\|$ normunu kestirelim.

$$\|Q_n(P_n([v]_n)) - [v]_n\|^2 =$$

$$= h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\tilde{v}(x)dx - v_j\right|^2 = h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}v_j dx - v_j\right|^2 =$$

$$= h\sum_{j=1}^{M-1}|v_j - v_j|^2 = 0.$$

Buradan ve $(3.2.3.9)$ dan lemmanın hükmünün geçerli olduğunu elde ediyoruz. Lemma ispatlandı.

Nihayet sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı için hükmü ispatlayalım.

Teorem 3.2.3.4: Farz edelim ki lemma 3.2.3.2 ve lemma 3.2.3.3 ün şartları sağlanmış olsun. Bunun yanı sıra farz edelim ki $v^* \in V$, $[v]_n^* \in V_n$ sırasıyla $(3.2.1.1)-(3.2.1.5)$ ve $(3.2.1.6)-(3.2.1.10)$ problemlerinin çözümleri olsun. Yani,

$$J_* = \inf_{v \in V} J(v) = J(v^*), \quad I_{n^*} = \inf_{[v]_n \in V} I_n([v]_n) = I_n([v]_n^*)$$

bu taktirde $(3.2.1.6)-(3.2.1.10)$ fark problemleri dizisi $(3.2.1.1)-(3.2.1.5)$ problemin yaklaşımıdır. Yani $\lim_{n \to \infty} I_{n^*} = J_*$ ve aşağıdaki kestirim geçerlidir.

$$|I_{n^*} - J_*| \leq c_{38}\sqrt{\tilde{\beta}_{\tau h}} \tag{3.2.3.10}$$

İspat: İspat için [21] çalışmasındaki metodolojiyi kullanalım. Teoremin şartına göre $v^* \in V$ kontrolü $(3.2.1.1)-(3.2.1.5)$ probleminin çözümüdür. Lemma 3.2.3.2 in şartı sağlandığında $Q_n(v^*) \in V_n$ ve $\left| I_n(Q_n(v^*)) - J(v^*) \right| \le c_{39}\sqrt{\widetilde{\beta}_{\tau h}}$, $n = 1,2,...$ dir. Bu taktirde bu eşitsizlikten

$$I_{n^*} \le I_n(Q_n(v^*)) \le J(v^*) + c_{39}\sqrt{\widetilde{\beta}_{\tau h}} = J_* + c_{39}\sqrt{\widetilde{\beta}_{\tau h}}, \quad n = 1,2,...$$

Eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$I_{n^*} - J_* \le c_{39}\sqrt{\widetilde{\beta}_{\tau h}}, \quad n = 1,2,... \qquad (3.2.3.11)$$

Teoremin şartına göre $[v]_n^* \in V_n$ $(3.2.1.6)-(3.2.1.10)$ probleminin çözümüdür. Lemma 3.2.3.3 e göre $P_n([v]_n^*) \in V$ olur ve aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left| J(P_n([v]_n^*)) - I_n([v]_n^*) \right| \le c_{39}\sqrt{\widetilde{\beta}_{\tau h}}, \quad n = 1,2,...$$

Buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$J_* \le J(P_n([v]_n^*)) \le I_n([v]_n^*) + c_{39}\sqrt{\widetilde{\beta}_{\tau h}} = I_{n^*} + c_{39}\sqrt{\widetilde{\beta}_{\tau h}}, \quad n = 1,2,...$$

Buna göre sonuncu eşitsizlikten

$$I_{n^*} - J_* \ge -c_{39}\sqrt{\widetilde{\beta}_{\tau h}}, \quad n = 1,2,... \qquad (3.2.3.12)$$

Eşitsizliğinin geçerli olduğu elde edilir. $(3.2.3.11)$ ve $(3.2.3.12)$ den $(3.2.3.10)$ un geçerli olduğunu elde ederiz. $\tau = \tau_n$, $h = h_n$ işaretlerine göre $\lim_{n\to\infty}\tau_n = \lim_{n\to\infty} h_n = 0$.

$\widetilde{\beta}_{\tau h}$ formülü göz önüne alınarak $(3.2.3.10)$ da $n \to \infty$ için limite geçerek teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ediyoruz. Teorem ispatlandı.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 3.1. bölümünde $(3.1.1.1)-(3.1.1.5)$ optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği için teoremler, fonksiyonelin gradiyenti için aşikar formül, optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanmıştır.

Tezin 3.2. bölümünde göz önüne alınan optimal kontrol problemine farklar metodu uygulanmış elde edilen fark şeması için kararlılık ve hata kestirimleri, fonksiyonele göre yakınsaklık ispatlanmıştır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezde incelenen optimal kontrol problemi konulması açısından önceki çalışmalardan farklıdır. Belirtmek gerekir ki, Lineer Schrodinger denklemi için bu türlü çalışmalar İskenderov A.D. ve Mahmudov N.M. tarından yapılmıştır. Bu tez çalışmasında ise Lineer olmayan Schrodinger denklemi için optimal kontrol problemi incelenmiştir. Bu farklılıklar problemin konulmasında ve incelenmesinde değişiklikler oluşturmaktadır. Problemin konulmasının farklı olması nedeniyle araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar önceki yazarların çalışmalarındaki sonuçlarlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

6. KAYNAKLAR

1. Butkovski A.G. , Samoylenko Y.I. Kuantum Mekanik Süreçlerin Kontrolü. *M. Nauka*-1984-s. 256 (Rusça).
2. Landau L.D, Lifshitz E.M. Kuantum Mekaniği Cilt 3-M-1963-s. 702 (Rusça).
3. Vorontsov M.A., Şmalqauzen V.I. Adaptiv Optiğin Prensipleri. *Moskova, Nauka,* 1984.
4. Dın Nıo Hao-Kuantum Objektlerinin Optimal Kontrolü // Otomatik ve Telemekanik. 1986, No 2, s. 1420 (Rusça).
5. İskenderov A.D., Yagubov G. Ya. Kuantum Mekanik Potansiyelin Bulunması Ters Problemin Çözümü İçin Varsyasyon Yöntemi // DAN SSSR, 1988, c.303, No:5, s. 1044-1048 (Rusça).
6. İskenderov A.D., Yagubov G. Ya. Lineer Olmayan Kuantum Mekanik Sistemlerin Optimal Kontrolü // Otomatik ve Telemakanik. 1989, no:12-s. 27-38 (Rusça).
7. İskenderov A.D. Durgun Olmayan Schrodinger Denkleminde Potansiyelin Bulunması // Matematik Modellemenin ve Optimal Kontrolün Problemleri-*Bakü*, 2001-s. 6-36 (Rusça).
8. İskenderov A.D. , Mahmudov N.M. Kuantum Mekanik Sistemler İçin Lions Kriterli Optimal Kontrol // *AMEA* nın Haberleri Fizik Teknik Matematik Bilimleri Serisi-1995, c.16, No:5-6-30-35 (Rusça).
9. Mahmudov N.M. Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü. *Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri*-1997-c. 7. s. 392 (Rusça).
10. Razgulin A.V. Lineer Olmayan Schrodinger Denklemi İçin Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları. *Moskova Devlet Üniversitesi nin Haberleri*. Seri 15. (nümerik Analiz ve Sibernetik) 1998 No:2 s. 28-33 (Rusça).
11. Silla N. Schrodinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü. Doktora Tezi. *Bakü*. 1991, s. 165 (Rusça).
12. Yagubov G.Ya. , Musayeva M.A. , Lineer Olmayan Schrodinger Denklemi İçin Bir İnvers Probleminin Varyasyon Konulmasının Farklar Metoduyla

Çözümü.*Azerbaycan Bilimler Akademisini Haberleri*. Seri: Fizik-Teknik ve Matematik Bilimleri. 1995, Cilt: 16, No:1-2, S.46-51 (Rusça).

13. Yagubov G.Ya. , Musayeva M.A. Lineer Olmayan Schrodinger Denklemi İçin İdentifikasyon Problemi Hakkında // Diferansiyel Denklemler-1997, c.33, No: 12 s.1691-1698 (Rusça).
14. Yagubov G.Ya. , Kuazi Lineer Schrodinger Denkleminin Katsayı İle Optimal Kontrol.Bilimler Doktoru Tezi. *Kiyev*. 1994, s. 318 (Rusça).
15. Lions J.L. Optimal Control Of Systems Governed By Partıal Dıfferntıal Equatıons. Sprınger- *Verlog Berlin Heidelberg New York*-1971-s. 400.
16. İskenderov A.D. Matematiksel Fiziğin Çok Boyutlu Ters Problemlerinin Varyasyon Konumları Hakkında DAN SSSR-1984-c.274-No:3-s. 531-533 (Rusça).
17. Potapov M.M. , Razgulin A.V. , Şameeva T.Y. Schrodinger Tipli Optimal Kontrol Probleminin Yaklaşımı ve Regülarizyonu. *Moskova Devlet Üniversitesi nin Haberleri*. Seri 15 (Nümerik Analiz ve Sibernetik) 1987. No: 1-s. 8-13 (Rusça).
18. Iyosida K. Functional Analysis-*M. : Mir*, 1967-s. 624 (Rusça).
19. Ladijenskaya O.A. Parabolik Tip Lineer ve Kuazilineer Denklemler. *Moskova*, *Nauka*, 1976
20. Ladijenskaya O.A. Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri-*M: Nauka*, 1973 (Rusça).
21. Vasilyev F.P. Extremal Problemlerin Çözüm Metotları.-*M:Nauka*. 1981-s. 400 (Rusça).
22. Mikhaylov Kısmi Türevli Diferensiyel Denklemler.-*Moskova, Nauka*,1983
23. Gobel M. On Existence Of Optimal Control // *Math. Nacr*-1979, Vol. 53-s. 67-73.
24. Kolmogorov A.N. , Fomin S.V. Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları. *M. Nauka*. 1989-s. 624 (Rusça).
25. Samarskiy A.A. , Andreev V.B. Eliptik Denklem İçin Fark Metotları. *M. Nauka*. 1976 (Rusça).

26. Samarskiy A.A. , Lazarov R.D. , Makarov V.L. Genelleşmiş Çözümlü Diferansiyel Denklemler İçin Fark Şemaları. *M. Vısşaya Şkola* 1987, s. 296 (Rusça).

27. Tikonov A.N. Arsenin V.Ya. III-Posed Problemlerin Çözüm Metodları. *Moskova-Nauka*. 1979,s.288 (Rusça).

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Kars ilinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kars'ta tamamladı. 1998 yılında kazandığı Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 1999 yılında Atatürk Üniversitesi Matematik Bölümün'e yatay geçiş yaptı ve 2002 yılında mezun oldu. 2003 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı.2004 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.

Halen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.