T.C
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE AİT YÜKSEK MERTEBEDEN KESTİRİMLER VE ONLARIN UYGULAMALARI

Ötüken SENGER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

MART–2006
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Ötüken SENGER'in yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Lineer Schrödinger Denklemi İçin Sınır Değer Probleminin Çözümüne Ait Yüksek Mertebeden Kestirimler ve Onların Uygulamaları" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy …………………….. ile kabul edilmiştir.

…../…../2006

		Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan	**:**	Prof. Dr. Gabil YAGUBOV	……………….
Üye	**:**	Doç. Dr. Mevlüt KARABULUT	……………….
Üye	**:**	Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFAYEV	……………….

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun …./…./2006 gün ve …./…… sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Yunus GICIK
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada Lineer Schrödinger denklemi için I. ve II. tip sınır değer problemleri ve onların nümerik çözümü ele alınmıştır. Tezde incelenen sınır değer problemlerinin Fourier metodu ile incelenmesi açısından bu çalışma daha önce yapılan çalışmalardan farklıdır. Schrödinger denklemi için sınır değer problemleri çoğunlukla Galorkin metodu ile incelenmiştir. Tezde göz önüne alınan sınır değer problemlerinde katsayılar yalnız x değişkenine bağımlı olduğunda Fourier metodunu uygulamak işlem kolaylığı açısından çok önemlidir. İnceleme metodunun farklı olması nedeniyle araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar, önceki yazarların çalışmalarındaki sonuçlarla çoğunlukla örtüşmez.

Tez çalışmamda en büyük emeği geçen, yoğun çalışmalarından bana zaman ayırarak derin bilgilerinden faydalanma fırsatı veren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum, değerli bilim adamı, Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUBOV'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında ve tezin hazırlanması sürecinde yine katkılarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFAYEV, Sayın Doç.Dr. Mevlüt KARABULUT ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Gülçin BİLGİCİ'ye de teşekkürlerimi sunarım.

Kars–2006 Ötüken SENGER

İÇİNDEKİLER

ÖZET

LİNEER SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜNE AİT YÜKSEK MERTEBEDEN KESTİRİMLER VE ONLARIN UYGULAMALARI

Ötüken SENGER

Bu tezde Lineer Schrödinger denklemi için sınır değer problemleri ele alındı. Bu çalışmanın 3.1. bölümünde I. ve II. tip sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliği Fourier Metodu ile ispatlandı. Bu metodun yardımıyla sınır değer problemlerinin çözümü için yüksek mertebeden türevleri değerlendiren kestirimler elde edildi. Tezin 3.2. bölümünde göz önüne alınan sınır değer problemlerinin çözümüne, Sonlu Farklar Metodu uygulandı. Elde edilen kestirimler kullanılarak karşılık gelen fark şemalarının hatası için yakınsama hızını içeren kestirimler elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Schrödinger Denklemi, Sınır Değer Problemi, Fourier Metodu, Sonlu Farklar Metodu, Yakınsama Hızı.

ABSTRACT

HIGHER ORDER DEDUCTIONS AT THE SOLUTION OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS OF LINEAR SCHRODINGER'S EQUATION AND THEIR APPLICATIONS

Ötüken SENGER

In this thesis, the boundary value problems are studied for Linear Schrödinger's equation. In Section 3.1, the existence and uniqueness of the solution of the 1^{st} and 2^{nd} kind of boundary value problems are proved with Fourier Method. With the help of this method, deductions, which evaluate higher order derivatives for the solution of the boundary value problems, were obtained. In Section 3.2. of the thesis, Finite Difference Method was applied to the solution of the boundary value problems. Using the deductions obtained some other deductions that include convergence rate for the errors in corresponding difference set were obtained.

Key words: Schrödinger Equation, Boundary Value Problem, Fourier Method, Finite Difference Method, Convergence Velocity.

SİMGELER DİZİNİ

$\forall$	Herhangi
$\overset{0}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$i = \sqrt{-1}$	Sanal birim
$\ell > 0$	Verilen sayı
$T > 0$	Verilen sayı
$\tau > 0$	t değişkenine göre adım
$h > 0$	x değişkenine göre adım
$\delta_{\bar{t}}\phi_{jk} = (\phi_{jk} - \phi_{jk-1})/\tau$	t’ye göre sol fark
$\delta_{\bar{x}}\phi_{jk} = (\phi_{jk} - \phi_{j-1k})/h$	x’e göre sol fark
$\delta_{x}\phi_{jk} = (\phi_{j+1k} - \phi_{jk})/h$	x’e göre sağ fark
$\delta_{x\bar{x}}\phi_{jk} = (\phi_{j+1k} - 2\phi_{jk} + \phi_{j-1k})/h^2$	x’e göre II. mertebeden fark

1.GİRİŞ

Schrödinger denklemi için sınır değer problemleri kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş tekniğin ve fiziğin çeşitli alanlarında ortaya çıkar [1]. Bu nedenle Schrödinger denklemi için sınır değer problemlerinin teorik açıdan incelenmesi ve nümerik çözümü gerek teorik açıdan ve gerekse pratik açıdan çok önem taşır.

Schrödinger denklemi için sınır değer problemleri daha önce farklı yazarlar tarafından incelenmiş ve bu problemlerin iyi konulmasına ait çeşitli sonuçlar elde edilmiştir [2–12]. Bu yazarlar tarafından incelenen sınır değer problemlerinde denklemin katsayısı ya sabit ya da sürekli ve sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olmuştur. Pratikte rastlanan sınır değer problemlerinin çoğunda denklemin katsayıları ölçülebilir, sınırlı fonksiyonlar olur. Bu takdirde önceden bulunan sonuçlar pratikte rastlanan kuantum mekanik süreçlerini öğrenmek için yeterli olmaz.

Schrödinger denkleminin katsayılarının ölçülebilir, sınırlı fonksiyonlar veya sınırlı olmayan fonksiyonlar olması halinde sınır değer problemleri İskenderov A.D., Yagubov G.Y. ve onların öğrencilerince öğrenilmiş ve Schrödinger denklemi için çeşitli sınır değer problemlerinin iyi konulmasına yani çözümün varlığına, tekliğine ve kararlılığına ait sonuçlar elde edilmiştir [5, 6, 10, 11]. Bu sonuçların elde edilmesinde söz konusu yazarlar öncelikle Galorkin metodunu ve kısmen de Fourier metodunu kullanmışlardır.

Bildiğimiz gibi denklemin katsayıları değişkenlerine ayrılabilir fonksiyonlar olduğu takdirde Fourier metodu uygulama açısından çok önem taşır. Matematiksel fiziğin denklemleri için sınır değer problemleri daha önce Fourier metodu ile denklemin katsayıları ya sabit ya da sürekli ve sürekli türevlenebilir fonksiyonlar olması halinde [2, 14–16]. ve bu gibi çalışmalarda incelenmiştir.

Schrödinger denklemi için sınır değer problemlerinin denklemin katsayısının ölçülebilir, sınırlı olması halinde Fourier metodu ile çok az incelenmesini göz önüne alarak bu tezde Schrödinger denklemi için I. ve II. sınır değer problemlerinin Fourier metodu ile incelenmesinin hem teorik hem de pratik anlamı vardır.

Bu tez çalışmasında yukarıda söylenildiği gibi Lineer Schrödinger denklemi için I. ve II. tip sınır değer problemleri ve onların nümerik çözümü ele alınmıştır. Tez çalışmasının önemli bölümlerinden biri materyal ve yöntem bölümüdür ki bu da iki alt bölümden oluşmuştur. Birinci alt bölümde Lineer Schrödinger denklemi için sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümü Fourier metodu ile incelenmiş ve çeşitli fonksiyonel uzaylarda genelleştirilmiş çözümün varlığına, tekliğine ve verilenlere göre kararlılığına ait sonuçlar elde edilmiştir. Bunun yanı sıra Fourier metodunu kullanarak sınır değer problemlerinin çözümlerinin yüksek mertebeden türevleri için de önemli uygulamaya sahip kestirimler ispatlanmıştır. İkinci alt bölümde göz önüne alınan sınır değer problemlerinin nümerik çözümü incelenmiş, bu amaçla sonlu farklar metodu uygulanmıştır. Birinci alt bölümde elde edilen kestirimlerden yararlanarak sonlu farklar metodunun yakınsamasını ve yakınsama hızını ifade eden kestirimler yani sınır değer problemlerine karşılık gelen fark şemalarının hatasını ifade eden kestirimler elde edilmiştir.

2.KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1: $L_2(0,\ell)$ Hilbert uzayı olup, elemanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi verilir:

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,\ell)} = \int_0^\ell u(x)\overline{v}(x)dx \, ,$$

$$\|u\|_{L_2(0,\ell)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,\ell)}} \, .$$

Tanım 2.2: $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup, elemanları Ω bölgesinde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi verilir:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)dxdt \, ,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}} \, .$$

Tanım 2.3: $L_\infty(0,\ell)$ Banach uzayı olup, elemanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L_\infty(0,\ell)} = \operatorname{vrai}\max_{x\in(0,\ell)} |u(x)| \, .$$

Tanım 2.4: $W_2^1(0,\ell)$ Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve x'e göre I. mertebeden genelleşmiş türevi $L_2(0,\ell)$ yani Lebezgue uzayından olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u, v\rangle_{W_2^1(0,\ell)} = \int_0^\ell \left[u(x)\overline{v}(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{d\overline{v}(x)}{dx} \right] dx ,$$

$$\|u\|_{W_2^1(0,\ell)} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{W_2^1(0,\ell)}} \; .$$

burada $\overline{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$'in kompleks eşleniğidir.

$\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayı $W_2^1(0,\ell)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları 0 ve ℓ noktalarında 0'a eşit olur.

Tanım 2.5: $W_2^2(0,\ell)$ Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve x'e göre II. mertebeden genelleşmiş türevleri $L_2(0,\ell)$'den olan fonksiyonlar uzayıdır. Aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u, v\rangle_{W_2^2(0,\ell)} = \int_0^\ell \left[u(x)\overline{v}(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{d\overline{v}(x)}{dx} + \frac{d^2u(x)}{dx^2}\frac{d^2\overline{v}(x)}{dx^2} \right] dx ,$$

$$\|u\|_{W_2^2(0,\ell)} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{W_2^2(0,\ell)}} \; .$$

$\overset{0}{W}{}_2^2(0,\ell)$ ise $W_2^2(0,\ell)$'in alt uzayı olup, elemanlarının kendisi 0 ve ℓ noktalarında 0'a eşit olur.

Tanım 2.6: $W_2^3(0,\ell)$ Hilbert uzayı olup, aynı zamanda Sobolev uzayıdır. Elemanları $(0,\ell)$ aralığında tanımlanan $u = u(x)$ fonksiyonlarıdır ki;

$u, \frac{du}{dx}, \frac{d^2u}{dx^2}, \frac{d^3u}{dx^3} \in L_2(0,\ell)$'dir. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u, v\rangle_{W_2^3(0,\ell)} = \int_0^\ell \sum_{j=0}^{3} \frac{d^j u(x)}{dx^j}\frac{d^j \overline{v}(x)}{dx^j} dx ,$$

$$\|u\|_{W_2^3(0,\ell)} = \sqrt{\langle u, v\rangle_{W_2^3(0,\ell)}} \; .$$

Tanım 2.7: $W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayı Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların t'ye göre I. mertebeden genelleşmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ Lebezgue uzayından olan fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, v\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\bar{v}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial t}\right] dxdt\,,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}\ .$$

Tanım 2.8: $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların x'e göre I. mertebeden genelleşmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$'den olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, v\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\bar{v}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial x}\right] dxdt\,,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}\ .$$

$\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında 0'a eşit olur.

Tanım 2.9: $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobolev uzayıdır. Elemanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle $\psi(x,t)$ fonksiyonlarıdır ki; $\psi, \frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \frac{\partial\psi}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlar. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, \phi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\frac{\bar{\phi}(x,t)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \bar{\phi}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial t}\right] dxdt\,,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}}\ .$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Lemma 2.1:(Bramble-Hilbert Lemması, Samarskiy A.A., 1987). Farz edelim ki; D bölgesi E_n Euclid uzayının $d > 0$ çapına sahip açık, konveks sınırlı bölgesi olsun. Bunun yanı sıra $g(u)$ $W_2^m(D)$ $(0 < m = \overline{m} + \lambda$, $\overline{m}$- negatif olmayan tam sayı, $0 < \lambda \leq 1)$ lineer ve sınırlı fonksiyoneldir, yani;

$$|g(u)| \leq C\left(\sum_{j=0}^{\overline{m}} d^{2j}|u|_{j,D}^2 + d^{2m}|u|_{m,D}^2\right)^{1/2}$$ şartı sağlanıyor. Eğer $g(u)$ $\overline{m}$'nci dereceden polinomda sıfıra eşit ise, bu takdirde;

$$|g(u)| \leq C \cdot \overline{C} \cdot d^m \cdot |u|_{m,D}$$ olacak şekilde $\overline{C} > 0$ sayısı vardır. Burada $|u|_{m,D}$ $W_2^m(D)$'de yarım normdur.

Lemma 2.2:(Gronwall Lemması, Vasilyev F.P., 1981). Farz edelim ki; φ_j, $j = \overline{0,N}$ sayıları $0 \leq \varphi_0 \leq a$, $0 \leq \varphi_{j+1} \leq a + b\sum_{m=0}^{j}\varphi_m$, $j = \overline{0, N-1}$ şartlarını sağlasın. Bu takdirde aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$0 \leq \varphi_j \leq a(1+b)^j, \quad j = \overline{0,N} .$$

3.MATERYAL VE YÖNTEM

3.1.Lineer Schrödinger Denklemi İçin Sınır Değer Problemlerinin Fourier Metodu İle Çözümü ve Yüksek Mertebeden Türevler İçin Kestirimler

Bu bölümde Lineer Schrödinger denklemi için sınır değer problemleri ele alınmıştır. Önce göz önüne alınan problemlerin çözümünün varlığının ve tekliğinin ispatlanması için Fourier metodu uygulanmıştır. Sonra bu metodun yardımıyla sınır değer problemlerinin çözümünün yüksek mertebeden türevleri için de kestirimler elde edilmiştir.

3.1.1.Lineer Schrödinger Denklemi İçin I. ve II. Tip Sınır Değer Problemlerinin Konulması

ℓ ve T verilen pozitif sayılar olmak üzere; $x \in [0,\ell]$, $t \in [0,T]$, $\Omega_t = (0,\ell)x(0,t)$, $\Omega = \Omega_T$ olduğunu kabul edelim. $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunun

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi = f(x,t) \ , \ (x,t) \in \Omega \, , \qquad (3.1.1.1)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x) \, , \ x \in (0,\ell) \, , \qquad (3.1.1.2)$$

$$\psi(0,t) = \psi(\ell,t) = 0 \ , \ t \in (0,T) \, , \qquad (3.1.1.3)$$

şartlarından bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $i^2 = -1$, $a_0 > 0$ verilen sayı, $a(x)$ ölçülebilir sınırlı fonksiyon olup,

$$0 \le a(x) \le \mu_0 \ , \ \overset{0}{\forall} x \in (0,\ell) \ , \ \mu_0 = \text{sabit} > 0 \, , \qquad (3.1.1.4)$$

şartını sağlar; $\varphi(x)$, $f(x,t)$ verilen fonksiyonlar olup, aşağıdaki şartları sağlıyor olsunlar:

$$\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell) \, , \ f \in W_2^{0,1}(\Omega) \, . \qquad (3.1.1.5)$$

(3.1.1.1) – (3.1.1.3) şartlarından $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunun bulunması problemi Lineer Schrödinger denklemi için I. tip sınır değer problemidir.

Tanım 3.1.1.1:(3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin çözümü olarak $\eta(x,T)=0$ şartını sağlayan $\forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left(-i\psi \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial t} - a_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \overline{\eta}}{\partial x} - a(x)\psi\overline{\eta} \right) dxdt =$$

$$= \int_\Omega f(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt + i\int_0^\ell \varphi(x)\overline{\eta}(x,0)dx \tag{3.1.1.6}$$

İntegral özdeşliğini sağlayan ve $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayından olan $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonu anlaşılır. Burada $\overline{\eta}=\overline{\eta}(x,t)$ fonksiyonu $\eta=\eta(x,t)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir. Bu tanım anlamında (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin çözümüne onun genelleştirilmiş çözümü diyeceğiz. Şimdi $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.1.1),(3.1.1.2) ve

$$\frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(\ell,t)}{\partial x} = 0 \quad , \quad t \in (0,T) \tag{3.1.1.7}$$

şartlarından bulunması problemini göz önüne alalım. Bu probleme Lineer Schrödinger denklemi için II. tip sınır değer problemi denir. Bu problemde $a(x)$, $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları aşağıdaki şartları sağlar:

$$0<\mu_1 \le a(x) \le \mu_2 \quad , \quad \forall x \in \overset{0}{(0,\ell)}, \tag{3.1.1.8}$$

$$\varphi \in W_2^1(0,\ell) \quad , \quad f \in W_2^{0,1}(\Omega), \tag{3.1.1.9}$$

burada $\mu_1>0$, $\mu_2>0$ verilen sayılardır.

Tanım 3.1.1.2:(3.1.1.1),(3.1.1.2),(3.1.1.7) sınır değer probleminin çözümü olarak $\eta(x,T)=0$ şartını sağlayan $\forall \eta=\eta(x,t) \in W_2^{1,1}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left(-i\psi \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial t} - a_0 \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \overline{\eta}}{\partial x} - a(x)\psi\overline{\eta} \right) dxdt =$$

$$= \int_\Omega f(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt + i\int_0^\ell \varphi(x)\overline{\eta}(x,0)dx \tag{3.1.1.10}$$

integral özdeşliğini sağlayan $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayından olan $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonu anlaşılır.

3.1.2.Sınır Değer Problemlerinin Fourier Metodu İle Çözümü

Bildiğimiz gibi Fourier metodu kısmi türevli diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerini çözmek için kullanılabilir. Bu metot matematiksel fiziğin çeşitli denklemleri için olan sınır değer problemlerinin çözümünde farklı yazarlar tarafından uygulanmıştır. Özellikle kısmi türevli diferansiyel denklemin katsayıları değişkenlerine ayrılabilir olması halinde veya katsayıların ancak uzay değişkeninden bağımlı olması halinde bu metot çok önem taşır. Schrödinger denklemi için sınır değer problemlerinin çözümünde Fourier metodu çok az kullanılmıştır. Bu metot önce [2] çalışmasında Schrödinger denkleminin katsayıları sürekli veya sürekli türevlenebilir olduğu takdirde uygun sınır değer problemlerinin çözümüne uygulanmıştır. Schrödinger denkleminin katsayıları ölçülebilir, sınırlı fonksiyonlar olması halinde bu denklemin genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı ve tekliğinin ispatında Fourier metodunun çok az uygulandığını göz önüne alarak bu alt bölümde Schrödinger denklemi için sınır değer problemlerinin çözümüne Fourier metodunun uygulanmasını ele alacağız.

Önce (3.1.1.1)-(3.1.1.3) sınır değer problemini ele alalım. (3.1.1.1) denkleminden gözüktüğü gibi onun katsayıları t değişkeninden bağımlı olmadığından göz önüne alınan problemin çözümüne kolaylıkla Fourier metodunu uygulayabiliriz. Bu amaçla önce:

$$£X = -a_0 \frac{d^2X}{dx^2} + a(x)X \tag{3.1.2.1}$$

gösterimini yapalım ve aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$£X(x) = \lambda X(x)\ ,\ x \in (0,\ell) \tag{3.1.2.2}$$

$$X(0) = X(\ell) = 0\,, \tag{3.1.2.3}$$

burada $\lambda = \text{sabit}$ 'dir. Bu problem özdeğer problemidir ve [14, 15] çalışmalarında geniş biçimde incelenmiştir. Diyelim ki; $\lambda = \lambda_k$ ve $U_k = U_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$ £ operatörünün sırasıyla özdeğerleri ve öz fonksiyonları olsunlar. [14] çalışmasından bildiğimiz gibi £ operatörünün özdeğerleri reeldir ve negatif değildir. Bu özdeğerleri onların değerlerinin artışı biçiminde dizebiliriz:

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots , \qquad (3.1.2.4)$$

yani $k \to \infty$ için $\lambda_k \to +\infty$. λ_k'lara karşılık gelen $U_k = U_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$ özfonksiyonları da reeldir ve $L_2(0,\ell)$'de ortogonaldırlar. Farz edelim ki bu özfonksiyonlar $L_2(0,\ell)$'de ortanormal olsunlar, yani;

$$\left(U_k, U_m\right)_{L_2(0,\ell)} = \int_0^\ell U_k(x)U_m(x)dx = \delta_k^m \qquad (3.1.2.5)$$

olsun. Burada;

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1 & k = m \\ 0 & k \ne m \end{cases} , \quad k,m = 1,2,\ldots \qquad (3.1.2.6)$$

Kroneker sabitleridir. Bunların yanı sıra £ operatörünün özfonksiyonları aşağıdaki anlamda da ortogonaldırlar.

$$\left[U_k, U_m\right] = £(U_k, U_m) = \int_0^\ell \left(a_0 \frac{dU_k}{dx}\frac{dU_m}{dx} + a(x)U_k U_m \right) dx =$$

$$= \lambda_k \delta_k^m \quad , \quad k,m = 1,2,\ldots \qquad (3.1.2.7)$$

yani özfonksiyonlar $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayında da ortogonaldırlar. Burada $[.,.]$ ile $W_2^{0,1}(0,\ell)$'de iç çarpım gösterilmiştir. £ operatörünün katsayıları ölçülebilir, sınırlı olduğundan Puankare – Fridrihs [15] eşitsizliğini kullanarak (3.1.2.7) iç çarpımıyla tanımlanan normun $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayında tanımlanan

$$\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)} = \left(\int_0^\ell \left(|\varphi(x)|^2 + \left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|^2 \right) dx \right)^{1/2} \qquad (3.1.2.8)$$

normuna denk olduğunu kolaylıkla elde edebiliriz.

Fourier metoduna göre $\forall t \in [0,T]$ için (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin çözümünü;

$$\psi(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(t)U_k(x) , \qquad (3.1.2.9)$$

serisi biçiminde arayalım. Burada $U_k = U_k(x)$ fonksiyonları (3.1.2.2), (3.1.2.3) özdeğer probleminin çözümleri olup £ operatörünün özfonksiyonlarıdır. $\theta_k = \theta_k(t)$ fonksiyonları ise;

$$\theta_k = \theta_k(t) = (\psi(.,t), U_k)_{L_2(0,\ell)} = \int_0^\ell \psi(x,t)U_k(x)dx \qquad (3.1.2.10)$$

formülü ile tanımlanır. Bu takdirde (3.1.1.2) şartını ve (3.1.2.9) formülünü kullanırsak;

$$\theta_k(0) = \int_0^\ell \psi(x,0)U_k(x)dx = \int_0^\ell \varphi(x)U_k(x)dx = \varphi_k \ , \ k = 1,2,\ldots \qquad (3.1.2.11)$$

şartını kullanabiliriz. Burada φ_k 'lar $\varphi(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır.

Şimdi $\theta_k(t)$, $k = 1,2,\ldots$ fonksiyonlarının sağladığı diferansiyel denklemleri bulalım. Bu amaçla (3.1.1.1) denklemini $U_k(x)$ fonksiyonu ile çarpıp $(0,\ell)$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_0^\ell i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}U_k(x)dx = i\frac{\partial}{\partial t}(\psi(.,t), U_k)_{L_2(0,\ell)} =$$

$$= (£\psi(.,t), U_k)_{L_2(0,\ell)} + (f(.,t), U_k)_{L_2(0,\ell)} =$$

$$= (\psi(.,t), £U_k)_{L_2(0,\ell)} + (f(.,t), U_k)_{L_2(0,\ell)} =$$

$$= \lambda_k(\psi, U_k)_{L_2(0,\ell)} + (f(.,t), U_k)_{L_2(0,\ell)} \ .$$

Buradan ve (3.1.2.10), (3.1.2.11) formüllerinden kolaylıkla aşağıdaki Cauchy problemini elde ediyoruz:

$$i\frac{d\theta_k(t)}{dt} - \lambda_k\theta_k(t) = f_k(t) \ , \ t \in [0,T] \ , \qquad (3.1.2.12)$$

$$\theta_k(0) = \varphi_k \ , \ k = 1,2,\ldots \ . \qquad (3.1.2.13)$$

Burada $f_k(t) = \int_0^\ell f(x,t)U_k(x)dx$, $k = 1,2,\ldots$ $f(x,t)$ fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır. φ_k ise (3.1.2.11) formülü ile tanımlanır. (3.1.2.12)-(3.1.2.13) Cauchy probleminin çözümü için parametrenin değişimi metodunun yardımıyla bir sonraki formülü elde ederiz:

$$\theta_k(t) = \varphi_k e^{-i\lambda_k t} - i\int_0^t f_k(\tau)e^{-i\lambda_k(t-\tau)}d\tau \ , \ k = 1,2,\ldots \ . \qquad (3.1.2.14)$$

Bu formülü kullanarak (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin çözümü için arayacağımız $\psi(x,t)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\psi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\varphi_k e^{-i\lambda_k t}-i\int_0^t f_k(\tau)e^{-i\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right)U_k(x) \tag{3.1.2.15}$$

Şimdi bu fonksiyonun gerçekten (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin tanım 3.1.1.1 anlamında çözümü olduğunu gösterelim.

Teorem 3.1.2.1: Farz edelim ki: $a(x)$, $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları (3.1.1.4), (3.1.1.5) şartlarını sağlamış olsun. Bu takdirde (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayından olan bir tek çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)}\le C_1\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,\ell)}+\|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right), \tag{3.1.2.16}$$

burada $C_1>0$ sayısı φ ve f ’den bağımsızdır.

İspat: Teoremi ispatlamak için önce (3.1.2.15) serisinin sonlu kısmını

$$\psi^N=\psi^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N}\theta_k(t)U_k(x) \tag{3.1.2.17}$$

ile gösterelim ve bu sonlu kısım için $\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,\ell)$ uzayında (3.1.2.7) biçiminde olan iç çarpımı yazalım:

$$\left[\psi^N,\psi^N\right]=\sum_{k=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left(\varphi_k e^{-i\lambda_k t}-i\int_0^t f_k(\tau)e^{-i\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right)x$$

$$x\left(\bar{\varphi}_m e^{i\lambda_m t}+i\int_0^t \bar{f}_m(\tau)e^{i\lambda_m(t-\tau)}d\tau\right)\left[U_k,U_m\right]=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\lambda_k\left|\varphi_k e^{-i\lambda_k t}-i\int_0^t f_k(\tau)e^{-i\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right|^2. \tag{3.1.2.18}$$

Teoremin şartına göre $f\in W_2^{0,1}(\Omega)$ ’dir. Bu nedenle $f_k(t)$ fonksiyonunun t ’ye göre I. mertebeden genelleşmiş türevinin var olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz, yani $f_k\in W_2^1(0,T)$ ’dir. Bu takdirde (3.1.2.18) eşitliğinin sağ tarafında yer alan modül arasındaki ikinci terimde kısmi integrasyon formülünü kullanabiliriz ve kolaylıkla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$i\lambda_k \int_0^t f_k(\tau) e^{-i\lambda_k (t-\tau)} d\tau = -f_k(0)\left(e^{-i\lambda_k t} - 1\right) -$$

$$-\int_0^t f_k{}'(\tau)\left(e^{-\lambda_k (t-\tau)} - 1\right) d\tau \ , \quad k = 1,2,\ldots \tag{3.1.2.19}$$

Bu eşitliği kullanarak (3.1.2.18)'den

$$\left[\psi^N, \psi^N\right] = \sum_{k=1}^{N} \left(\lambda_k |\varphi_k|^2 + \varphi_k e^{-i\lambda_k t} \left(\bar{f}_k(0)(e^{i\lambda_k t} - 1) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int_0^t \bar{f}_k{}'(\tau)(e^{i\lambda_k (t-\tau)} - 1) d\tau \right)\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \left(\left(\bar{\varphi}_k e^{i\lambda_k t} + i \int_0^t \bar{f}_k(\tau) e^{i\lambda_k (t-\tau)} d\tau) \right) x \right.$$

$$\left. x \left(f_k(0)(e^{-i\lambda_k t} - 1\right) + \int_0^t f_k{}'(\tau)(e^{-i\lambda_k (t-\tau)} - 1) d\tau \right)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği kullanarak

$$\left[\psi^N, \psi^N\right] \le \sum_{k=1}^{N} \left\{ \lambda_k |\varphi_k|^2 + 4|\varphi_k|^2 + 2|f_k(0)|^2 + \right.$$

$$\left. + 2\left(\int_0^t |f_k(\tau)| d\tau \right)^2 + 2\left(\int_0^t |f_k{}'(\tau)| d\tau \right)^2 \right\} \tag{3.1.2.20}$$

eşitsizliğini kolaylıkla elde edebiliriz.

Diyelim ki; $h = h(t) \in W_2^1(0,T)$ herhangi bir fonksiyon olsun [15] çalışmasında $\forall t \in [0,T]$ ve $\forall \varepsilon_1 \in (0,T]$ için

$$|h(t)|^2 \le \frac{2}{\varepsilon_1} \|h\|^2_{L_2(0,T)} + 2\varepsilon_1 \|h'\|^2_{L_2(0,T)} \tag{3.1.2.21}$$

eşitsizliği ispatlanmıştır. Şimdi bu eşitsizliği $f_k(t)$ fonksiyonu için kullanalım. Gerçekten üstte söylenildiği gibi $f_k \in W_2^1(0,T)$'dir. Bu nedenle $f_k(t)$ fonksiyonu $[0,T]$ kapalı aralığında gömme teoremine göre [13–15] sürekli fonksiyondur. Bu takdirde (3.1.2.21)'de $h(t)$'nin yerine $f_k(t)$ fonksiyonunu alabiliriz. Buna göre $t = 0$ hali için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|f_k(0)\right|^2 \le C_2\left(\int_0^T \left|f_k(t)\right|^2 dt + \int_0^T \left|f_k{}'(t)\right|^2 dt\right), \tag{3.1.2.22}$$

burada $C_2 > 0$ sayısı k'dan bağımsızdır. Bu eşitsizliği (3.1.2.20)'de dikkate alırsak, basit işlemler sonucu aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\left[\psi^N, \psi^N\right] \le C_3\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\lambda_k\left|\varphi_k\right|^2 + \left|\varphi_k\right|^2\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N}\left(\int_0^T \left|f_k(t)\right|^2 dt + \int_0^T \left|f_k{}'(t)\right|^2 dt\right)\right), \tag{3.1.2.23}$$

$\forall t \in [0, T]$. Burada $C_3 > 0$ sayısı N'den bağımsızdır. Bu eşitsizliğin elde edilmesine benzer olarak aşağıdaki eşitsizliği de elde ediyoruz:

$$\left[\psi^N - \psi^M, \psi^N - \psi^N\right] \le C_4\left(\sum_{k=M+1}^{N}\left(\lambda_k\left|\varphi_k\right|^2 + \left|\varphi_k\right|^2\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=M+1}^{N}\left(\int_0^T \left|f_k(t)\right|^2 dt + \int_0^T \left|f_k{}'(t)\right|^2 dt\right)\right), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.1.2.24}$$

Burada $1 \le M < N$ ve $C_4 > 0$ sayısı M ve N'den bağımsız sayıdır.(3.1.2.7) biçiminde verilen iç çarpım ile tanımlanan norm (3.1.2.8) biçiminde olan norma denk olduğundan (3.1.2.23) ve(3.1.2.24) eşitsizliklerinin yardımıyla $\forall t \in [0, T]$ için aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)} \le C_5\left\{\sum_{k=1}^{N}\left(\left|\varphi_k\right|^2 + \lambda_k\left|\varphi_k\right|^2\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{N}\left(\int_0^T \left|f_k(t)\right|^2 dt + \int_0^T \left|f_k{}'(t)\right|^2 dt\right)\right\} \tag{3.1.2.25}$$

$$\left\|\psi^N(.,t) - \psi^M(.,t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)} \le C_6\left\{\sum_{k=M+1}^{N}\left(\left|\varphi_k\right|^2 + \lambda_k\left|\varphi_k\right|^2\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=M+1}^{N}\left(\int_0^T \left|f_k(t)\right|^2 dt + \int_0^T \left|f_k{}'(t)\right|^2 dt\right)\right\}. \tag{3.1.2.26}$$

Burada $1 \le M < N$ ve $C_5 > 0$, $C_6 > 0$ sayıları M ve N'den bağımsızdır. [15] çalışmasından bildiğimiz Parseval – Sterlov eşitliğine göre aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|^2=\|\varphi\|^2_{L_2(0,\ell)} \;, \tag{3.1.2.27}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T|f_k(t)|^2dt=\|f\|^2_{L_2(\Omega)} \;, \tag{3.1.2.28}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^T|f_k'(t)|^2dt=\left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \;. \tag{3.1.2.29}$$

Teoremin şartına göre $\varphi(x)$ fonksiyonu $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayının elemanıdır. Bu takdirde $\varphi(x)$ fonksiyonunun £ operatörünün özfonksiyonlarına göre açılımı olan:

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(\varphi,U_k)_{L_2(0,\ell)}\;U_k(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_k U_k(x)$$

Fourier serisi $\varphi(x)$ fonksiyonuna $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ normunda yakınsar [15] .Bu takdirde $\forall\varphi\in\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|\varphi_k|^2\le C_7\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)} \tag{3.1.2.30}$$

eşitsizliğini yazabiliriz.(3.1.2.27) – (3.1.2.30)’dan ve (3.1.2.26) eşitsizliğinden (3.1.2.15) serisinin her bir $t\in[0,T]$ için $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayında yakınsadığını elde ediyoruz. Yani $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonu her bir $t\in[0,T]$ için $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayının elemanıdır. Bunun yanı sıra $\psi(x,t)$ fonksiyonunun $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının da elemanı olduğunu kolaylıkla elde edebiliriz. Bunu elde etmek için (3.1.2.25) eşitsizliğinin her iki tarafını $[0,T]$ üzerinden integralleyip, $N\to\infty$ için limite geçmek yeterlidir.

Şimdi $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.1.6) integral özdeşliğini sağladığını gösterelim. $\psi^N=\psi^N(x,t)$ sonlu toplamının $\eta(x,T)=0$ şartını sağlayan $\forall\eta\in\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ için aşağıdaki integral özdeşliğini sağlaması açıktır:

$$\int_\Omega\left(-i\psi^N\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial t}-a_0\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\frac{\partial\overline{\eta}}{\partial x}-a(x)\psi^N\overline{\eta}\right)dxdt=$$

$$=\int_\Omega f(x,t)\overline{\eta}(x,t)+i\int_0^\ell\varphi^N(x)\overline{\eta}(x,0)dx \;. \tag{3.1.2.31}$$

Burada:

$$\varphi^N(x)=\sum_{k=1}^{N}\varphi_k U_k(x)\text{'dır.} \tag{3.1.2.32}$$

Bu integral özdeşliğinde $N\to\infty$ için limite geçersek ve $\psi^N(x,t)$ dizisinin $\psi(x,t)$'ye, $\varphi^N(x)$ dizisinin $\varphi(x)$'e yakınsadığını dikkate alırsak, kolaylıkla $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.1.6) integral özdeşliğini sağlamasını elde ederiz. Böylece (3.1.2.9) serisinin toplamı olan $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin tanım 3.1.1.1 anlamında çözümünün olduğunu kolaylıkla ispatlamış oluyoruz. Bunun yanı sıra (3.1.2.27) – (3.1.2.30) bağıntılarını kullanarak (3.1.2.25) eşitsizliğinin her iki tarafını $[0,T]$ üzerinden integralleyip, $N\to\infty$ için limite geçersek, (3.1.2.16) kestiriminin geçerli olduğunu da elde ederiz.

Şimdi (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin var olan çözümünün bir tek olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla (3.1.2.16) kestirimini direkt olarak kullanabiliriz. Gerçekten diyelim ki; $\psi(x,t)$ ve $\phi(x,t)$ fonksiyonları (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin iki farklı çözümü olsun ve $\vartheta(x,t)=\psi(x,t)-\phi(x,t)$ ile bu iki çözümün farkını gösterelim. Bu takdirde $\vartheta(x,t)$ fonksiyonu aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olacaktır:

$$i\frac{\partial\vartheta}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}-a(x)\,\vartheta=0\ ,\ (x,t)\in\Omega\ , \tag{3.1.2.33}$$

$$\vartheta(x,0)=0\ ,\ x\in(0,\ell)\ , \tag{3.1.2.34}$$

$$\vartheta(0,t)=\vartheta(\ell,t)=0\ ,\ t\in(0,T)\ . \tag{3.1.2.35}$$

Gözüktüğü gibi bu sınır değer problemi (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer problemi ile aynı biçimde olan problemdir. Aralarındaki tek fark (3.1.2.33) – (3.1.2.35) probleminde denklemin sağ tarafının ve başlangıç fonksiyonunun sıfıra eşit olmasıdır. İspat ettiğimize göre (3.1.1.1) – (3.1.1.3) probleminin çözümü için (3.1.2.16) eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikte ψ'nin yerine ϑ ve φ, f'nin yerine 0 alırsak:

$\|\vartheta\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)}\le 0$ olur. Diğer yandan $\|\vartheta\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)}\ge 0$ olur. Bu iki eşitsizlikten $\|\vartheta\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(\Omega)}=0$ eşitliğini elde ederiz. Buradan ise; $\|\psi-\phi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)}=0$ olur, yani $\psi(x,t)=\phi(x,t)\quad \overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega$ elde edilir. Bu ise olamaz. Çünkü varsayımımıza göre

$\psi(x,t) \neq \phi(x,t)$'dir. Çelişki elde ettiğimizden (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu ispatlamış oluyoruz. Teorem 3.1.2.1 ispatlandı.

Şimdi farz edelim ki $\varphi = \varphi(x), f(x,t)$ fonksiyonları

$$\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^{2}(0,\ell) \ , \ f \in W_2^{0,1}(\Omega) \tag{3.1.2.36}$$

şartını sağlamış olsun. Bu takdirde $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayından olan genelleştirilmiş çözümün $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan hemen – hemen her yerde çözüm olduğunu gösterebiliriz.

Teorem 3.1.2.2: Farz edelim ki $a(x)$, $f(x,t)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonları sırasıyla (3.1.1.5),(3.1.2.36) şartlarını sağlasın. Bu takdirde (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin bir tek olan $\psi(x,t)$ çözümü $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının elemanı olur ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \leq C_8\left(\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,\ell)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right). \tag{3.1.2.37}$$

burada $C_8 > 0$ sayısı φ ve f 'den bağımsızdır.

İspat: $\varphi(x)$ fonksiyonu (3.1.2.36) şartını sağladığından ve $\|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,\ell)} \leq \|\varphi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,\ell)}$ olduğundan teorem 3.1.2.1'in şartlarının sağlandığını görüyoruz. Bu takdirde (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek çözümünün var olduğunu söyleyebiliriz. Bu çözümün teoremin şartları altında $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının elemanı olduğunu gösterelim. Bu amaçla (3.1.2.9) formülü ile bulunan $\psi(x,t)$ fonksiyonunun $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ ve $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ genelleştirilmiş türevlerinin $L_2(\Omega)$ uzayına ait olmasını göstermek yeterlidir. Bu nedenle önce

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-i\lambda_k e^{-i\lambda_k t}\varphi_k - i f_k(t) - \lambda_k \int_0^t f_k(\tau) e^{-i\lambda_k (t-\tau)} d\tau\right) U_k(x) \tag{3.1.2.38}$$

serisinin $L_2(\Omega)$ uzayında yakınsadığını ispatlayalım. Gözüktüğü gibi (3.1.2.38) serisi (3.1.2.9) veya (3.1.2.15) serisinin t'ye göre diferansiyellenmesinden elde edilen seridir.

(3.1.2.38) serisinin sonlu $\frac{\partial \psi^N}{\partial t}$ kısmını alalım ve aşağıdaki iç çarpıma bakalım:

$$\forall t \in [0,T] \text{ için } \left(\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}, \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right)_{L_2(0,\ell)} = \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,\ell)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left| -i\lambda_k \varphi_k e^{-i\lambda_k t} - i f_k(t) - \lambda_k \int_0^t f_k(\tau) e^{-i\lambda_k (t-\tau)} d\tau \right|^2 \tag{3.1.2.39}$$

Kısmi integrasyon formülünü kullanırsak:

$$\int_0^t f_k(\tau) e^{-i\lambda_k (t-\tau)} d\tau = \frac{i}{\lambda_k} \left(f_k(0)\left(e^{-i\lambda_k t} - 1\right) + \int_0^t f_k{}'(\tau)\left(e^{-i\lambda_k (t-\tau)} - 1\right) d\tau \right) \tag{3.1.2.40}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği (3.1.2.39)'da dikkate alalım. Bu takdirde

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,\ell)} = \sum_{k=1}^{N} \left| -i\lambda_k \varphi_k e^{-i\lambda_k t} - i f_k(0) e^{-i\lambda_k t} - i \int_0^t f_k{}'(\tau) e^{-i\lambda_k (t-\tau)} d\tau \right|^2 \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{N} \left(\lambda_k |\varphi_k| + |f_k(0)| + \int_0^t |f_k{}'(\tau)| d\tau \right)^2,$$

$\forall t \in [0,T]$ eşitsizliğinin geçerli olduğunu kolaylıkla elde ederiz. Buradan (3.1.2.22) eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu ispatlayabiliriz.

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le C_9 \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k |\varphi_k|^2 + \sum_{k=1}^{N} \int_0^T |f_k(t)|^2 dt + \sum_{k=1}^{N} \int_0^T |f_k{}'(t)|^2 dt \right), \tag{3.1.2.41}$$

$\forall t \in [0,T]$.

Şimdi:

$$£\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \theta_k(t) £U_k \tag{3.1.2.42}$$

serisinin $L_2(\Omega)$'da yakınsak olduğunu göstererek bu serinin sonlu toplamını aşağıdaki gibi yazalım:

$$(£\psi)_N = £\psi^N = \sum_{k=1}^{N} \left[\varphi_k e^{-i\lambda_k t} - i \int_0^t e^{-i\lambda_k (t-\tau)} f_k(\tau) d\tau \right] £U_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \left[\lambda_k \varphi_k e^{-i\lambda_k t} - i \int_0^t e^{-i\lambda_k (t-\tau)} f_k(\tau) d\tau \right] U_k(x)$$

Burada (3.1.2.40) formülünü ve (3.1.2.22) eşitsizliğini kullanırsak, kolaylıkla

$$\left\| £\psi^N(.,t) \right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le C_{10} \left(\sum_{k=1}^{N} \lambda_k^{\,2} |\varphi_k|^2 + \sum_{k=1}^{N} \int_0^T |f_k(t)|^2 dt + \sum_{k=1}^{N} \int_0^T |f_k{}'(t)|^2 dt \right) \quad (3.1.2.43)$$

$\forall t \in [0, T]$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $C_{10} > 0$ sayısı N'den bağımsızdır. Bu eşitsizliğin ve (3.1.2.41) eşitsizliğinin elde edilmesine benzer olarak aşağıdaki eşitsizlikleri de ispatlayabiliriz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} - \frac{\partial \psi^M(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,\ell)} \le C_{11} \left(\sum_{k=M+1}^{N} \lambda_k^{\,2} |\varphi_k|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=M+1}^{N} \int_0^T |f_k(t)|^2 dt + \sum_{k=M+1}^{N} \int_0^T |f_k{}'(t)|^2 dt \right), \quad (3.1.2.44)$$

$$\left\| £\psi^N(.,t) - £\psi^M(.,t) \right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le C_{12} \left(\sum_{k=M+1}^{N} \lambda_k^{\,2} |\varphi_k|^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=M+1}^{N} \int_0^T |f_k(t)|^2 dt + \sum_{k=M+1}^{N} \int_0^T |f_k{}'(t)|^2 dt \right) \quad , \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.1.2.45)$$

Burada $C_{11} > 0$, $C_{12} > 0$ sayıları N ve M'den bağımsızdır, $1 \le M < n$'dir. [14] çalışmasında sayfa 262'de olan teorem 17.1'den biliyoruz ki £ operatörünün özfonksiyonları olan $U_k = U_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$ fonksiyonları $\overset{0}{W}{}_2^2(0,\ell)$ uzayına ait olur ve bu fonksiyonlar için aşağıdaki ortogonallık şartı da sağlanır:

$$(£U_k, £U_m)_{L_2(0,\ell)} = \{U_k, U_m\} =$$

$$= \int_0^\ell £U_k(x) £U_m(x) dx = \lambda_k^{\,2} \delta_k^{\,m} \quad , \quad k, m = 1,2,\ldots \quad (3.1.2.46)$$

Şarta göre $\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,\ell)$'dir. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\varphi_k = (\varphi, U_k)_{L_2(0,\ell)} = \frac{1}{\lambda_k} (\varphi, £U_k)_{L_2(0,\ell)} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k} (£\varphi, U_k)_{L_2(0,\ell)} \quad , \quad k = 1,2,\ldots \quad (3.1.2.47)$$

Bu eşitliği dikkate alarak

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\varphi_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left| (£\varphi, U_k)_{L_2(0,\ell)} \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_0^{\ell} \left(a_0 \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} - a(x)\varphi(x) \right) U_k(x)dx \right|^2 =$$

$$= \|£\varphi\|^2_{L_2(0,\ell)} \ . \tag{3.1.2.48}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan $a(x)$ üzerine konan şartları dikkate alırsak, aşağıdaki eşitsizliği ispatlamış oluruz.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\varphi_k|^2 \le C_{13} \|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,\ell)} \tag{3.1.2.49}$$

Burada $C_{13} > 0$ sayısı φ'den bağımsızdır. (3.1.2.28), (3.1.2.29) ve (3.1.2.49) bağıntılarından kolaylıkla

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\varphi_k|^2 \ , \ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T |f_k(t)|^2 dt \ , \ \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^T |f_k'(t)|^2 dt$$

serilerinin yakınsadığını elde ediyoruz. Buna göre (3.1.2.44) ve (3.1.2.45) eşitsizliklerini kullanarak $\frac{\partial \psi^N}{\partial t}$, $£\psi^N$ dizilerinin $N \to \infty$ için sırasıyla $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, $£\psi$ fonksiyonlarına $L_2(\Omega)$'da yakınsadığını elde ederiz. Diğer yandan $N \to \infty$ için (3.1.2.41) ve (3.1.2.43) eşitsizliklerinin her iki tarafında limite geçersek ve elde edilen eşitsizlikleri $[0,T]$ aralığı üzerinden integralleyip toplarsak, aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\|£\psi\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \le C_{14} \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,\ell)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right) . \tag{3.1.2.50}$$

Burada $C_{14} > 0$ sayısı φ ve f'den bağımsızdır. Burada [14] çalışmasındaki $\forall u \in W_2^2(0,\ell)$ için sağlanan

$$\|u\|_{W_2^2(0,\ell)} \le C_{15} \|£u\|_{L_2(0,\ell)} + C_{16} \|u\|_{L_2(0,\ell)} \tag{3.1.2.51}$$

eşitsizliğini kullanırsak, kolaylıkla aşağıdaki kestirimi ispatlamış oluruz:

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le C_{16} \left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,\ell)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right) . \tag{3.1.2.52}$$

Burada $C_{16} > 0$ sayısı φ ve f ’den bağımsızdır. Böylece (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin çözümünün $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının elemanı olduğu elde edilir, yani $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonu (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan çözümüdür ve bu çözüm için (3.1.2.52) kestirimi geçerlidir. (3.1.2.52) kestiriminden direkt olarak (3.1.2.37) kestirimi elde edilir. Teorem 3.1.2.2 ispatlandı.

Şimdi Schrödinger denklemi için II. tip sınır değer problemini, yani (3.1.1.1), (3.1.1.2), (3.1.1.7) sınır değer problemini ele alalım. (3.1.1.1) – (3.1.1.3) sınır değer problemi için elde edilen sonuçları göz önüne alınan II. tip sınır değer problemi için de elde edebiliriz.

Teorem 3.1.2.3: Farz edelim ki; $a(x)$, $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları (3.1.1.8), (3.1.1.9) şartlarını sağlasın. Bu takdirde (3.1.1.1), (3.1.1.2), (3.1.1.7) sınır değer probleminin $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayından olan bir tek çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} \le C_{17}\left(\|\varphi\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right), \tag{3.1.2.53}$$

burada $C_{17} > 0$ sayısı φ ve f ’den bağımsızdır.

Söylemek gerekir ki, bu teoremin ispatı teorem 3.1.2.1’in ispatı ile aynıdır. Aralarındaki fark (3.1.2.9) serisinde yer alan $U_k = U_k(x), k = 1,2,\ldots$ fonksiyonlarının şimdiki halde aşağıdaki özdeğer probleminin özfonksiyonları olmasıdır.

$$£X(x) = \lambda X(x)\ ,\quad x \in (0,\ell) \tag{3.1.2.54}$$

$$X'(0) = X'(\ell) = 0\ , \tag{3.1.2.55}$$

burada özdeğerler olan $\lambda = \lambda_k$ ’lar

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \lambda_{k+1} < \cdots \tag{3.1.2.56}$$

biçiminde dizilebilir. Bunun yanı sıra $U_k = U_k(x), k = 1,2,\ldots$ reel özfonksiyonları için (3.1.2.5) ve (3.1.2.6) gibi ortogonallik şartları da sağlanıyor. Özdeğerlerin ve özfonksiyonların bu türlü özelliklerini kullanarak teorem 3.1.2.1 ispatında yapılan işlemleri yapıp kolaylıkla bu teoremi de ispatlayabiliriz.

Diyelim ki; $\varphi = \varphi(x)$ fonksiyonu

$$\varphi \in W_2^2(0,\ell) \ , \ \frac{d\varphi(0)}{dx} = \frac{d\varphi(\ell)}{dx} = 0 \tag{3.1.2.57}$$

şartlarını sağlasın. Bu şartı ve $a(x)$, $f(x,t)$ için sırasıyla (3.1.1.8), (3.1.1.9) şartlarını kullanarak aşağıdaki hükmü de ispatlayabiliriz:

Teorem 3.1.2.4: Farz edelim ki; $a(x)$, $f(x,t)$ ve $\varphi(x)$ fonksiyonları sırasıyla (3.1.1.8), (3.1.1.9) ve (3.1.2.57) şartlarını sağlasın. Bu takdirde (3.1.1.1), (3.1.1.2), (3.1.1.7) sınır değer probleminin bir tek olan $\psi(x,t)$ çözümü $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının elemanıdır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le C_{18}\left(\|\varphi\|_{W_2^2(0,\ell)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right), \tag{3.1.2.58}$$

burada $C_{18} > 0$ sayısı φ ve f ’den bağımsızdır. Bu teoremin ispatı teorem 3.1.2.2’nin ispatına benzer şekilde gerçekleştirilir.

3.1.3.Yüksek Mertebeden Türevler İçin Kestirimler

Bu alt bölümde Schrödinger denklemi için sınır değer problemlerinde verilenlerin düzgünlüğünü artırarak onların çözümlerinin de düzgünlüğünün artışını elde edeceğiz. Bu amaçla yine önce I. tip sınır değer problemini, yani (3.1.1.1)–(3.1.1.3) problemini ele alalım. (3.1.1.4), (3.1.2.36) şartlarının yanı sıra

$$\left|\frac{da(x)}{dx}\right| \le \mu_3 \ , \ \overset{0}{\forall} x \in (0,\ell) \ , \tag{3.1.3.1}$$

$$\varphi \in W_2^3(0,\ell) \, , \ \varphi(0) = \varphi(\ell) = \pounds\varphi(0) = \pounds\varphi(\ell) = 0 \, , \tag{3.1.3.2}$$

$$f \, , \ \frac{\partial f}{\partial x} \in W_2^{0,1}(\Omega) \ , \ f(0,0) = f(\ell,0) = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial f(\ell,t)}{\partial t} = 0 \ , \ t \in (0,T) \tag{3.1.3.3}$$

şartlarının sağlandığını farz edelim:

Teorem 3.1.3.1: Farz edelim ki; $a(x)$, $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları için (3.1.1.4), (3.1.2.36), (3.1.3.1)–(3.1.3.3) şartları sağlanmış olsun. Bu takdirde (3.1.1.1)–(3.1.1.3) sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq C_{19}\left(\|\varphi\|_{W_2^3(0,\ell)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right), \qquad (3.1.3.4)$$

burada $C_{19} > 0$ sayısı φ ve f ’den bağımsızdır.

İspat: Bu teoremin ispatını önce olduğu gibi Fourier metodunun yardımıyla gerçekleştireceğiz. Teoremin şartları altında teorem 3.1.2.2’nin şartlarının sağlandığını görüyoruz. Bu nedenle (3.1.2.37) kestiriminin geçerli olduğu açıktır.

Buna göre de teoremi ispatlamak için $\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}$ ve $\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}$ türevlerini kestirmek yeterlidir. Bu amaçla önce $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayında her bir $t\in[0,T]$ için aşağıdaki iç çarpımı göz önüne alalım:

$$\left[\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t},\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right] = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left|\theta_k'(t)\right|^2 . \qquad (3.1.3.5)$$

Burada $\theta_k'(t)$ fonksiyonu aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$\theta_k'(t) = -i\lambda_k\varphi_k e^{-i\lambda_k t} - if_k(\tau) - \lambda_k\int_0^t f_k(\tau)e^{-i\lambda_k(t-\tau)}d\tau \quad , \quad k=1,2,\ldots$$

Kısmi integrasyon formülünü kullanarak bu eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\theta_k'(t) = -i\lambda_k\varphi_k e^{-i\lambda_k t} - if_k(0)e^{-i\lambda_k t} - i\int_0^t f_k'(\tau)e^{-i\lambda_k(t-\tau)}d\tau \quad , \quad k=1,2,\ldots \qquad (3.1.3.6)$$

(3.1.2.47) formülünü kullanırsak;

$$\lambda_k\varphi_k = \int_0^\ell \pounds\varphi(x)U_k(x)dx \quad , \quad k=1,2,\ldots \qquad (3.1.3.7)$$

eşitliğini elde ederiz. Bunu (3.1.3.6)’da dikkate alırsak $\theta_k'(t)$ için olan formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\theta_k'(t) = -i\int_0^\ell \pounds\varphi(x)U_k(x)dx e^{-i\lambda_k t} - if_k(0)e^{-i\lambda_k t} -$$

$$-i\int_0^t f_k'(t)e^{-i\lambda_k(t-\tau)}d\tau \quad , \quad k=1,2,\ldots \ , \ \forall t\in[0,T] \ .$$

Bu eşitliği (3.1.3.5)'de dikkate alalım. Bu takdirde kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\left[\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t},\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right] \le 3\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left|\int_0^{\ell}£\varphi(x)U_k(x)dx\right|^2 +$$

$$+3\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left|f_k(0)\right|^2 + 3\tau\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\int_0^t\left|f_k{}'(t)\right|^2 d\tau \quad , \quad \forall t\in[0,T] .$$

Burada (3.1.3.2), (3.1.3.3) şartlarını ve [15] çalışmasından bildiğimiz Parseval–Steklov eşitsizliğinin $W_2^1(0,\ell)$ uzayı için olan biçimini kullanırsak, aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğu elde edilir:

$$\left[\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t},\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right] \le C_{20}\left(\left\|£\varphi\right\|^2_{W_2^1(0,\ell)} + \left\|f(.,0)\right\|^2_{W_2^1(0,\ell)} +\right.$$

$$\left.+\int_0^t\left\|\frac{\partial f(.,\tau)}{\partial\tau}\right\|^2_{W_2^1(0,\ell)} d\tau\right) , \quad \forall t\in[0,T] . \tag{3.1.3.8}$$

£ operatörü için olan formülden yararlanırsak aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$£\,\varphi(x) = -a_0\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + a(x)\varphi(x) , \tag{3.1.3.9}$$

$$\frac{d}{dx}(£\,\varphi) = -a_0\frac{d^3\varphi(x)}{dx^3} + a(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{da(x)}{dx}\varphi(x) . \tag{3.1.3.10}$$

Bunları ve $a(x)$ üzerine olan şartları dikkate alarak aşağıdaki eşitsizlikleri kolaylıkla elde edebiliriz:

$$\left\|£\,\varphi\right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le C_{21}\left\|\varphi\right\|^2_{W_2^2(0,\ell)} , \tag{3.1.3.11}$$

$$\left\|\frac{d}{dx}(£\,\varphi)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le C_{22}\left\|\varphi\right\|^2_{W_2^3(0,\ell)} , \tag{3.1.3.12}$$

burada $C_{21} > 0$, $C_{22} > 0$ sayıları φ'den bağımsızdır. Bu eşitsizliklerden direkt olarak

$$\left\|£\,\varphi\right\|^2_{W_2^1(0,\ell)} \le C_{23}\left\|\varphi\right\|^2_{W_2^3(0,\ell)} \tag{3.1.3.13}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Şarta göre $f\in W_2^{0,1}(\Omega)$ ve $\frac{\partial f}{\partial x}\in W_2^{0,1}(\Omega)$'dir. Bu nedenle kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlikleri (3.1.3.3) şartlarının yardımıyla yazabiliriz:

$$\|f(x,0)\|^2_{L_2(0,\ell)} \le C_{24}\left(\|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right) \tag{3.1.3.14}$$

$$\left\|\frac{\partial f(x,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le C_{25}\left(\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\right), \tag{3.1.3.15}$$

Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplarsak:

$$\|f(.,0)\|^2_{W_2^1(0,\ell)} \le C_{26}\left(\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{3.1.3.16}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği ve (3.1.3.13) eşitsizliğini (3.1.3.8) eşitsizliğinde dikkate alalım. Bu takdirde orada kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left[\frac{\partial \psi(.,t)}{\partial t}, \frac{\partial \psi(.,t)}{\partial t}\right] \le C_{27}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^3(0,\ell)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{3.1.3.17}$$

$\forall t \in [0,T]$, burada $C_{27} > 0$ sayısı φ, f ve t'den bağımsızdır. Bu eşitsizlikte $[.,.]$ iç çarpımının formülünü ve $\forall t \in [0,T]$ için

$$\left[\frac{\partial \psi(.,t)}{\partial t}, \frac{\partial \psi(.,t)}{\partial t}\right] \ge \mu_0 \left\|\frac{\partial^2 \psi(.,t)}{\partial x \partial t}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}$$

eşitsizliğini uygularsak, aşağıdaki kestirimin geçerli olduğu elde edilir:

$$\left\|\frac{\partial^2 \psi(.,t)}{\partial x \partial t}\right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le C_{28}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^3(0,\ell)} + \|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{3.1.3.18}$$

$\forall t \in [0,T]$. Burada $C_{28} > 0$ sayısı φ, f ve t'den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial^3 \psi}{\partial x^3}$ türevini kestirelim. Bu amaçla aşağıdaki iç çarpımı göz önüne alalım:

$$[£\psi(.,t), £\psi(.,t)] = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \theta_k(t)\overline{\theta_m}(t)[£U_k, £U_m] = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 |\theta_k(t)|^2, \qquad t \in [0,T]$$

Burada $\theta_k(t)$ için olan formülü kullanalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$[£\psi(.,t), £\psi(.,t)] = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k |\lambda_k \theta_k(t)|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left| \lambda_k \varphi_k e^{-i\lambda_k t} - i\lambda_k \int_0^t f_k(\tau) e^{-i\lambda_k (t-\tau)} d\tau \right|^2$$

Burada (3.1.2.40) eşitsizliğini ve (3.1.3.7) formülünü kullanırsak, kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$[£\psi(.,t),£\psi(.,t)] \le 3\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\left|\int_0^{\ell}£\varphi(x)U_k(x)dx\right|^2 +$$

$$+6\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k|f_k(0)|^2+6T\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\int_0^t|f_k{}'(\tau)|^2 d\tau\ ,\ \ \forall t\in[0,T]\ . \qquad (3.1.3.19)$$

Önce olduğu gibi burada da $W_2^1(0,\ell)$ uzayı için Parseval–Steklov eşitsizliğini uygularsak $\forall t\in[0,T]$ için aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$[£\psi(.,t),£\psi(.,t)] \le C_{29}\left(\|£\varphi\|^2_{W_2^1(0,\ell)}+\|f(.,0)\|^2_{W_2^1(0,\ell)}+\int_0^t\left\|\frac{\partial f(.,\tau)}{\partial\tau}\right\|^2_{W_2^1(0,\ell)}d\tau\right),$$

burada $C_{29}>0$ sayısı φ, f ve t'den bağımsızdır. Bu eşitsizliğin sağ tarafında (3.1.3.13) ve (3.1.3.16) eşitsizliklerini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$[£\psi(.,t),£\psi(.,t)] \le C_{30}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^3(0,\ell)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \qquad (3.1.3.20)$$

$\forall t\in[0,T]$. Burada $C_{30}>0$ sayısı φ, f ve t'den bağımsızdır. £ için olan formülü ve $a(x)\ge 0$ olduğunu kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$[£\psi(.,t),£\psi(.,t)] = \int_0^{\ell}\left\{a_o\left|\frac{\partial}{\partial x}(£\psi(x,t))\right|^2+a(x)|£\psi(x,t)|^2\right\}dx \ge$$

$$\ge a_0\int_0^{\ell}\left|-a_0\frac{\partial^3\psi(x,t)}{\partial x^3}+a(x)\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}+\frac{da(x)}{dx}\psi(x,t)\right|^2 dx$$

Eğer $A_0=A_0(x,t)=-a_0\dfrac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^3}$, $B_0=B_0(x,t)=a(x)\dfrac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}+\dfrac{da(x)}{dx}\psi(x,t)$ olarak kullanırsak sonuncu eşitsizlikten

$$[£\psi(.,t),£\psi(.,t)] \ge a_0\int_0^{\ell}\left(|A_0|^2+A_0\overline{B_0}+\overline{A_0}B_0+|B_0|^2\right)dx\ ,\ \ t\in[0,T]\ .$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Buradan da kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$a_0\int_0^{\ell}|A_0(x,t)|^2dx \le [£\psi(.,t),£\psi(.,t)]+2a_0\int_0^{\ell}|A_0(x,t)||B_0(x,t)|dx\ ,\ t\in[0,T]\ .$$

Bu eşitsizlikte ε - Cauchy eşitsizliğini uygulayalım. Bu takdirde

$$a_0\int_0^{\ell}|A_0(x,t)|^2dx \le [£\psi(.,t),£\psi(.,t)]+\varepsilon a_0\int_0^{\ell}|A_0(x,t)|^2dx+\frac{a_0}{\varepsilon}\int_0^{\ell}|B_0(x,t)|^2dx$$

elde edilir. Burada $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$ alırsak

$$a_0\int_0^{\ell}|A_0(x,t)|^2dx \le 2[£\psi(.,t),£\psi(.,t)]+4a_0\int_0^{\ell}|B_0(x,t)|^2dx$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu elde edilir. Burada $A_0(x,t)$, $B_0(x,t)$ için olan formülleri $a(x)$ için olan şartları, (3.1.3.20) kestirimini kullanırsak, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$a_0^{\,3}\int_0^{\ell}\left|\frac{\partial^3\psi(x,t)}{\partial x^3}\right|^2dx \le 2C_{30}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^3(0,\ell)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right)+$$

$$+8a_0\mu_0^{\,2}\left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}+8a_0\mu_3^{\,2}\|\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,\ell)}$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafını $a_0^{\,3}$'e bölüp $[0,T]$ üzerinden integralleyip ve (3.1.2.37) kestirimini kullanırsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \le C_{31}\left(\|\varphi\|^2_{W_2^3(0,\ell)}+\|f\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}+\left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right), \qquad (3.1.3.21)$$

burada $C_{31}>0$ sayısı φ, f 'den bağımsızdır. (3.1.3.18) kestiriminin her iki tarafını $[0,T]$ üzerinden integralleyip elde edilen eşitsizliği (3.1.2.37) ve (3.1.3.21) ile taraf tarafa toplarsak, (3.1.3.4) kestiriminin geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem 3.1.3.1 ispatlandı.

Şimdi (3.1.1.1), (3.1.1.2), (3.1.1.7) sınır değer probleminin çözümü için teorem 3.1.3.1'in aynısını gösterelim. Farz edelim ki; $a(x)$ fonksiyonu (3.1.1.8) şartının yanı sıra (3.1.3.1) şartını sağlasın. $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları ise

$$\varphi\in W_2^3(0,\ell)\ ,\ \frac{d\varphi(0)}{dx}=\frac{d\varphi(\ell)}{dx}=0 \qquad (3.1.3.22)$$

$$f\in W_2^{0,1}(\Omega)\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}\in W_2^{0,1}(\Omega) \qquad (3.1.3.23)$$

şartlarını sağlasın.

Teorem 3.1.3.2: Farz edelim ki; $a(x)$, $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları için (3.1.1.8), (3.1.3.1), (3.1.3.22), (3.1.3.23) şartları sağlansın. Bu takdirde (3.1.1.1), (3.1.1.2), (3.1.1.7) sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial f}\right\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le C_{32}\left(\|\varphi\|_{W_2^3(0,\ell)} + \|f\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial x}\right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \qquad (3.1.3.24)$$

burada $C_{32} > 0$ sayısı φ, f 'den bağımsızdır.

Bu teoremin ispatı teorem 3.1.3.1'in ispatı ile benzerdir. Sadece bu teoremin ispatında $\psi(x,t)$ fonksiyonu için olan Fourier serisinde yer alan $U_k = U_k(x)$, $k = 1,2,\ldots$ fonksiyonları (3.1.2.54), (3.1.2.55) özdeğer probleminin özfonksiyonları olarak kullanılır.

3.2. Lineer Schrödinger Denklemi İçin Sınır Değer Problemlerinin Sonlu Farklar Metodu İle Çözümü

Bu bölümde önce ele alınan sınır değer problemleri için sonlu farklar metodunun yakınsaması ile ilgili sorular incelenmiştir. Önceki bölümde yüksek mertebeden türevler için elde edilen kestirimler sınır değer problemlerine karşılık gelen fark şemalarının hatası için kestirimlerin elde edilmesine uygulanmıştır. Sonuçta sonlu farklar metodu için yakınsama hızı elde edilmiştir. Bu türlü sonuçlar farklı konulmada [10, 11, 17] çalışmalarından elde edilmiştir.

3.2.1. Sınır Değer Problemleri İçin Fark Şeması

Bu alt bölümde önce ele alınan problemlere sonlu farklar metodunu uygulamaktan dolayı aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - a(x)\psi = f(x,t)\ ,\ (x,t)\in\Omega \qquad (3.2.1.1)$$

$$\psi(x,0)=\varphi(x)\ ,\ x\in(0,\ell)\ , \tag{3.2.1.2}$$

$$\psi(0,t)=\psi(\ell,t)=0\ ,\ t\in(0,T), \tag{3.2.1.3}$$

burada $i^2=-1$, $a_0>0$, $\ell>0$, $T>0$ verilen sayılardır, $a(x)$, $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları ise (3.1.1.4), (3.1.3.1)–(3.1.3.3) şartlarını sağlar.

(3.2.1.1)–(3.2.1.3) sınır değer probleminin nümerik çözümü için sonlu farklar metodunu kullanalım. Bu amaçla önce Ω bölgesini

$$\omega_{h\tau}\equiv\{(x_j,t_k):\quad x_j=jh-\frac{h}{2}\quad,\quad j=\overline{1,M-1}\quad,\quad h=\frac{\ell}{M-1}\quad,\quad t_k=k\tau\quad,$$

$$k=\overline{0,N}\ ,\tau=\frac{T}{N}\}$$ ağı ile değişelim. (3.2.1.1) denkleminin içerdiği türevlere karşılık gelen sonlu farkları ise

$$\delta_{\bar t}\phi_{jk}=\frac{(\phi_{jk}-\phi_{jk-1})}{\tau}\quad,\quad \delta_{\bar x}\phi_{jk}=\frac{(\phi_{jk}-\phi_{j-1k})}{h}\ ,$$

$$\delta_{x}\phi_{jk}=\frac{(\phi_{j+1k}-\phi_{jk})}{h}\quad,\quad \delta_{x\bar x}\phi_{jk}=\frac{(\phi_{j+1k}-2\phi_{jk}+\phi_{j-1k})}{h^2}$$ biçiminde gösterilen

(3.2.1.1)–(3.2.1.3) sınır değer probleminin sonlu farklı aynısını aşağıdaki fark şeması biçiminde yazabiliriz:

$$i\delta_{\bar t}\phi_{jk}+a_0\delta_{x\bar x}\phi_{jk}-a^j\phi_{jk}=f_{jk}\ ,\ j=\overline{1,M-1}\ ,\ k=\overline{1,N} \tag{3.2.1.4}$$

$$\phi_{j0}=\varphi_j\ ,\ j=\overline{0,M}\ , \tag{3.2.1.5}$$

$$\phi_{0k}=\phi_{Mk}=0\ ,\ k=\overline{1,N}\ , \tag{3.2.1.6}$$

burada a^j, φ_j , f_{jk} ağ fonksiyonları olup aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$a^j=\frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a(x)dx\ ,\ \ j=\overline{1,M-1}\ , \tag{3.2.1.7}$$

$$\varphi_j=\frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\varphi(x)dx\ ,\ j=\overline{1,M-1}\ ,\ \ \varphi_0=\varphi_M=0\ , \tag{3.2.1.8}$$

$$f_{jk}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}f(x,t)dxdt\ ,\ j=\overline{1,M-1}\ ,\ k=\overline{1,N}\ , \tag{3.2.1.9}$$

Üstte Schrödinger denklemi için I. tip sınır değer probleminin sonlu farklı aynısını gösterdik. Şimdi II. tip sınır değer problemi için, yani (3.2.1.1), (3.2.1.2) şartlarından ve

$$\frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(\ell,t)}{\partial x} = 0 \ , \ t \in (0,T) \tag{3.2.1.10}$$

şartından $\psi(x,t)$ fonksiyonunun bulunması problemi için sonlu farklar metodunu uygulayalım. Eğer (3.2.1.10) şartlarının sonlu farklı aynısını

$$\delta_{\bar{x}}\phi_{1k} = \delta_{\bar{x}}\phi_{Mk} = 0 \ , \ k = \overline{1,N} \tag{3.2.1.11}$$

gibi gösterirsek, II. tip sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasını (3.2.1.4), (3.2.1.5), (3.2.1.11) şartlarından ϕ_{jk} ağ fonksiyonunun bulunmasına ait olan fark şeması biçiminde elde ederiz. Burada a^j ve f_{jk} ağ fonksiyonları sırasıyla (3.2.1.7) ve (3.2.1.9) formülleri ile tanımlanır. φ_j ağ fonksiyonu ise aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\varphi_j = \frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}} \varphi(x)dx \ , \ j = \overline{1,M-1} \ , \ \varphi_0 = \varphi_1 \ , \ \varphi_M = \varphi_{M-1} \ , \tag{3.2.1.12}$$

3.2.2.Fark Şemasının Çözümü İçin Kararlılık Kestirimi

Şimdi önce (3.2.1.4)–(3.2.1.6) fark şeması için kararlılık kestirimi elde edelim

Teorem 3.2.2.1: Farz edelim ki; $a(x)$, $\varphi(x)$, $f(x,t)$ fonksiyonları (3.1.1.4), (3.1.3.1)–(3.1.3.3) şartlarını sağlasın ve a^j, φ_j , f_{jk} ağ fonksiyonları (3.2.1.7)–(3.2.1.9) formülleri ile tanımlansın. Bu takdirde (3.2.1.4)–(3.2.1.6) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le C_1\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right) \ , \ \forall m \in \{1,2,\ldots N\} \ , \tag{3.2.2.1}$$

burada $C_1 > 0$ sayısı m, τ ve h'dan bağımsızdır.

İspat: Gözüktüğü gibi her bir $t = t_k$ için (3.2.1.4)–(3.2.1.6) fark şeması aşağıdaki toplam özdeşliğine denktir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}\overline{\eta}_{jk} - h\sum_{j=1}^{M} a_0\delta_{\bar{x}}\phi_{jk}\cdot\delta_{\bar{x}}\overline{\eta}_{jk} -$$

$$-h\sum_{j=1}^{M-1} a^j\phi_{jk}\overline{\eta}_{jk} = h\sum_{j=1}^{M-1} f_{jk}\overline{\eta}_{jk}\ ,\ \ k=\overline{1,N}\ , \tag{3.2.2.2}$$

burada $\overline{\eta}_{jk}$ ağ fonksiyonu η_{jk} fonksiyonunun kompleks eşleniğidir ve η_{jk} ise $\eta_{ok} = \eta_{Mk} = 0$, $k = \overline{1,N}$ şartlarını sağlayan $\omega_{\tau h}$'da tanımlanan herhangi ağ fonksiyonudur. Bu toplam özdeşliğinde $\overline{\eta}_{jk}$'nın yerine $\tau\overline{\phi}_{jk}$ ağ fonksiyonunu alıp elde edilen eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarmış olursak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\tau\left(\delta_{\bar{\tau}}\phi_{jk}\cdot\overline{\phi}_{jk} + \delta_{\bar{t}}\overline{\phi}_{jk}\cdot\phi_{jk}\right) = 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1} I_m\left(f_{jk}\overline{\phi}_{jk}\right)\ ,\ k=\overline{1,N}\ , \tag{3.2.2.3}$$

Burada

$$\tau\left(\delta_{\bar{t}}\phi_{jk}\cdot\overline{\phi}_{jk} + \delta_{\bar{t}}\overline{\phi}_{jk}\cdot\phi_{jk}\right) = \left|\phi_{jk}\right|^2 - \left|\phi_{jk-1}\right|^2 + \left|\phi_{jk} - \phi_{jk-1}\right|^2 \tag{3.2.2.4}$$

eşitliğini kullanırsak, kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\phi_{jk}\right|^2 - \left|\phi_{jk-1}\right|^2\right) \le 2\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\phi_{jk}\right|$$

Bu eşitsizliğin her iki tarafını N üzerinden 1'den m'e kadar ($m \le N$) toplamış olursak ve (3.2.1.5) şartını kullanırsak, $\forall m \in \{1,2,\ldots N\}$ için

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + 2\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\phi_{jk}\right| \tag{3.2.2.5}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde edebiliriz. Bu eşitsizliğin sağ tarafında olan m'nci terimi ayıralım ve ε-Cauchy eşitsizliğini kullanalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + \varepsilon\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 + \frac{\tau}{\varepsilon}h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}\right|^2 +$$

$$+2\tau h\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\phi_{jk}\right|\ ,\ \forall m \in \{1,2,\ldots,N\}.$$

Burada $\varepsilon = \dfrac{1}{2\tau}$ alırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le 2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + 4T\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}\right|^2 +$$

$$+4\tau h\sum_{k=1}^{M-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|\left|\phi_{jk}\right| \ , \ \forall m \in \{1,2,\ldots,N\} \ .$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki 3. terime Cauchy–Bunyakowski eşitsizliğini uygularsak

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le 2\tau h\sum_{m=0}^{m-1}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jk}\right|^2 + 2h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 +$$

$$+(2+4T)\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğe Gronwall Lemmasının diskret aynısını [18] uygularsak, kolaylıkla aşağıdaki kestirimin geçerli olduğu elde edilir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le C_1\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right) \ , \ \forall m \in \{1,2,\ldots,N\} \ ,$$

burada $C_1 > 0$ sayısı m, τ ve h'dan bağımsızdır. Teorem 3.2.2.1 ispatlandı. Şimdi (3.2.1.4), (3.2.1.5), (3.2.1.11) fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimini gösterelim.

Teorem 3.2.2.2: Farz edelim ki; $a(x)$, $\varphi(x), f(x,t)$ fonksiyonları (3.1.1.8), (3.1.3.1), (3.1.3.22), (3.1.3.23) şartlarını sağlasın ve a^j, φ_j , f_{jk} ağ fonksiyonları ise (3.2.1.7), (3.2.1.9), (3.2.1.12) formülleri ile tanımlansın. Bu takdirde (3.2.1.4), (3.2.1.5), (3.2.1.11) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\phi_{jm}\right|^2 \le C_2\left(h\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_j\right|^2 +\right.$$

$$\left.+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}\right|^2\right) \ , \ \forall m \in \{1,2,\ldots,N\} \qquad (3.2.2.6)$$

burada $C_2 > 0$ sayısı m, τ ve h'dan bağımsızdır. Bu teoremin ispatı teorem 3.2.2.1'in ispatı ile aynıdır.

3.2.3.Fark Şemasının Hatası İçin Kestirim

Bu alt bölümde fark şemalarının hatası için kestirimler elde edeceğiz. Bu amaçla önce (3.2.1.4)–(3.2.1.6) fark şemasını ele alacağız.

Diyelim ki; $\psi(x,t)$ (3.2.1.1)–(3.2.1.3) sınır değer probleminin çözümü olsun. ψ_{jk} ağ fonksiyonu ise $\psi(x,t)$ fonksiyonuna karşılık gelen ve aşağıdaki gibi tanımlanan ağ fonksiyonu olsun:

$$[\psi(x,t)] = \{\psi_{jk}\} \ , \ \psi_{jk} = \frac{1}{h}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \psi(x, t_k)\,dx \ ,$$

$$j = \overline{1, M-1} \ , \ k = \overline{1, N} \ , \ \psi_{j0} = \varphi_j \, , \ j = \overline{0, M} \, , \ \varphi_0 = \varphi_M = 0 \, ,$$

$$\psi_{0k} = \psi_{Mk} = 0 \, , k = \overline{1, N} \ . \qquad (3.2.3.1)$$

$$[Z] = \{Z_{jk}\} = \{\phi_{jk} - \psi_{jk}\} = \{\phi_{jk}\} - \{\psi_{jk}\}$$

ile (3.2.1.4)–(3.2.1.6) fark şemasının hatasını gösterelim. Açıktır ki, Z_{jk} ağ fonksiyonu aşağıdaki sistemi sağlar:

$$i\delta_{\bar{t}} Z_{jk} + a_0 \delta_{x\bar{x}} Z_{jk} - a^J Z_{jk} = F_{jk} \, , \ j = \overline{1, M-1} \ , \ k = \overline{1, N} \ , \qquad (3.2.3.2)$$

$$Z_{j0} = 0 \ , \ j = \overline{0, M} \ , \qquad (3.2.3.3)$$

$$Z_{0k} = Z_{Mk} = 0 \ , \ k = \overline{1, N} \qquad (3.2.3.4)$$

burada F_{jk} ağ fonksiyonu aşağıdaki formül ile tanımlanır:

$$F_{jk} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left(i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x, \psi) \right) dx dt -$$

$$- i\delta_{\bar{t}} \psi_{jk} - a_0 \delta_{x\bar{x}} \psi_{jk} + a^j \psi_{jk} \ , \ j = \overline{1, M-1} \, , \ k = \overline{1, N} \qquad (3.2.3.5)$$

Teorem 3.2.3.1: Farz edelim ki; teorem 3.2.2.1 şartları sağlansın ve τ, h adımları $C_3 \le \frac{\tau}{h^2} \le C_4$, şartlarını sağlasın. Burada $C_3 > 0$, $C_4 > 0$ sayıları τ ve h'dan bağımsızdır. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 \le C_5(\tau+h)\ ,\ \forall m\in\{1,2,\ldots,N\}\ , \qquad (3.2.3.6)$$

burada $C_5 > 0$ sayısı τ ve h 'dan bağımsızdır.

İspat:(3.2.3.2)–(3.2.3.4) sisteminin her bir $t = t_k$ için aşağıdaki toplam özdeşliğine denk olması açıktır:

$$h\sum_{j=1}^{M-1} i\delta_{\bar t} Z_{jk}\overline{\eta}_{jk} - a_0 h\sum_{j=1}^{M}\delta_{\bar x} Z_{jk}\delta_{\bar x}\overline{\eta}_{jk} -$$

$$-h\sum_{j=1}^{M-1} a^j Z_{jk}\overline{\eta}_{jk} = h\sum_{j=1}^{M-1} F_{jk}\overline{\eta}_{jk}\ ,\ k=\overline{1,N}\ , \qquad (3.2.3.7)$$

burada η_{jk} herhangi ağ fonksiyonu olup $\eta_{0k} = \eta_{Mk} = 0$, $k=\overline{1,N}$ şartlarını sağlar.

Bu özdeşlikte $\overline{\eta}_{jk}$ 'nın yerine $\tau\overline{Z}_{jk}$ alıp oradan kolaylıkla teorem 3.2.2.1'in ispatında olduğu gibi aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 \le C_6\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2\ ,\ \forall m\in\{1,2,\ldots N\}\ , \qquad (3.2.3.8)$$

Burada $C_6 > 0$ sayısı, τ ve h 'dan bağımsızdır. Şimdi F_{jk} ağ fonksiyonunu aşağıdaki gibi gösterelim:

$$F_{jk} = F_{jk}^{\,1} + F_{jk}^{\,2} + F_{jk}^{\,3}\ ,\ \ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N}\quad , \qquad (3.2.3.9)$$

burada

$$F_{jk}^{\,1} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt - i\delta_{\bar t}\psi_{jk}\ , \qquad (3.2.3.10)$$

$$F_{jk}^{\,2} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdt - a_0\delta_{x\bar x}\psi_{jk}\ \ , \qquad (3.2.3.11)$$

$$F_{jk}^{\,3} = -\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)\psi(x,t)dxdt + a^j\psi_{jk}\ \ ,\ \ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N} \qquad (3.2.3.12)$$

Şimdi bu terimlerin her birini kestirelim. ψ_{jk} için olan (3.2.3.1) formülünü kullanırsak, $F_{jk}^{\,1}$ için aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$F_{jk}^{\,1} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdt - i\delta_{\bar t}\psi_{jk} =$$

$$= \frac{i}{\tau h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left(\psi(x, t_k) - \psi(x, t_{k-1}) \right) dx -$$

$$- \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \psi(x, t_k) dx - \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \psi(x, t_{k-1}) dx \right] = 0 \,,\; j = \overline{1, M-1} \,,$$

$$k = \overline{1, N} \tag{3.2.3.13}$$

F_{jk}^{3} terimini kestirmek için (3.2.3.12) formülünü kullanarak onu aşağıdaki gibi yazalım:

$$F_{jk}^{3} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left(a^j - a(x) \right) \psi_{jk} \, dx dt +$$

$$+ \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} a(x) \left(\psi_{jk} - \psi(x, t) \right) dx dt \;,\; j = \overline{1, M-1} \,,\; k = \overline{1, N} \tag{3.2.3.14}$$

Burada a^j için olan formülü göz önüne alırsak, F_{jk}^{3} terimini aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\left| F_{jk}^{3} \right| \leq \frac{\mu_0}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| \psi_{jk} - \psi(x, t) \right| dx dt \;,\; j = \overline{1, M-1} \,,\; k = \overline{1, N} \tag{3.2.3.15}$$

Şimdi $\psi_{jk} - \psi(x, t)$ farkını değerlendirelim. Bu amaçla ψ_{jk} için olan (3.2.3.1) formülünü kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\psi_{jk} - \psi(x, t) = \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left(\psi(\xi, t_k) - \psi(\xi, t) + \psi(\xi, t) - \psi(x, t) \right) d\xi =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left[\int_{t}^{t_k} \frac{\partial \psi(\xi, \theta)}{\partial \theta} d\theta + \int_{x}^{\xi} \frac{\partial \psi(\eta, t)}{\partial \eta} d\eta \right] d\xi \;,$$

$$j = \overline{1, M-1} \,,\; k = \overline{1, N} \tag{3.2.3.16}$$

Bu eşitsizliği (3.2.3.15)'in sağ tarafında kullanalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizliği kolaylıkla elde edebiliriz:

$$\left| F_{jk}^{3} \right| \leq \frac{\mu_0}{\tau h^2} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left[\int_{t}^{t_k} \left| \frac{\partial \psi(t, \theta)}{\partial \theta} \right| d\theta + \int_{x}^{T} \left| \frac{\partial \psi(\eta, t)}{\partial \eta} \right| d\eta \right] d\xi dx dt \,,$$

$$j = \overline{1, M-1} \,,\; k = \overline{1, N} \,.$$

Burada Cauchy–Bunyakovski eşitsizliğini uygularsak:

$$\left|F_{jk}^{\;2}\right| \le 2\mu_0 \frac{\tau}{h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\right|^2 dxdt +$$

$$+2\mu_0 \frac{h}{\tau}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\right|^2 dxdt \;\;,\;\; j=\overline{1,M-1},\; k=\overline{1,N}\;, \qquad (3.2.3.17)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Şimdi $F_{jk}^{\;2}$ terimini kestirelim. Bu amaçla $j=\overline{2,M-2},\; k=\overline{1,N}$ için $F_{jk}^{\;2}$ terimini onun formülünü kullanarak aşağıdaki gibi yazalım:

$$F_{jk}^{\;2} = \frac{1}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdt - a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk} =$$

$$= \frac{a_0}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdt - \frac{a_0}{h^3}\left[\int\limits_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2}\psi(x,t_k)dx -\right.$$

$$\left. -2\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t_k)dx + \int\limits_{x_{j-1}-h/2}^{x_{j-1}+h/2}\psi(x,t_k)dx\right] =$$

$$= \frac{a_0}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdt - \frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2}\psi(x,t)dxdt -\right.$$

$$\left. -2\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t)dxdt + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{j-1}-h/2}^{x_{j-1}+h/2}\psi(x,t)dxdt\right] -$$

$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\int\limits_{t}^{t_k}\int\limits_{x}^{x+h}\frac{\partial^2\psi(\xi,\theta)}{\partial\xi\partial\theta}d\xi d\theta - \int\limits_{t}^{t_k}\int\limits_{x-h}^{x}\frac{\partial^2\psi(\xi,\theta)}{\partial\xi\partial\theta}d\xi d\theta\right)dxt\right] =$$

$$= F_{jk}^{\;21} - F_{jk}^{\;22} \;\;,\;\; j=\overline{2,M-2},\; k=\overline{1,N}\;, \qquad (3.2.3.18)$$

burada

$$F_{jk}^{\;21} = \frac{a_0}{\tau h}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt - \frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2}\psi(x,t)dxdt -\right.$$

$$\left. -2\int\limits_{t_{k+1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t)dxdt + \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{j-1}-h/2}^{x_{j-1}+h/2}\psi(x,t)dxdt\right],\; j=\overline{2,M-2},\; k=\overline{1,N} \;\; (3.2.3.19)$$

$$F_{jk}^{22} = \frac{a_0}{\tau h^3} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \int_{t}^{t_k} \int_{x}^{x+h} \left(\frac{\partial^2 \psi(\xi,\theta)}{\partial\xi\partial\theta} - \frac{\partial^2 \psi(\xi - h,\theta)}{\partial\xi\partial\theta} \right) d\xi d\theta dx dt$$

$$j = \overline{2, M-2},\ k = \overline{1, N}\ , \qquad (3.2.3.20)$$

Sonuncu formülü kullandığımızda

$$\left|F_{jk}^{22}\right|^2 \le \frac{2a_0^2 \tau}{h^3} \left[\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \psi(x-h,t)}{\partial x \partial t} \right|^2 \right.$$

$$\left. + \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \left| \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \theta(x-h,t)}{\partial x \partial t} \right|^2 dx dt \right] ,\ j = \overline{2, M-2},\ k = \overline{1, N} \qquad (3.2.3.21)$$

eşitsizliğini kolaylıkla elde edebiliriz.

Şimdi F_{jk}^{21} terimini kestirelim. (3.2.3.19) formülünü kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{jk}^{21} = \frac{a_0}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \psi(x_j + h/2, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x_j - h/2, t)}{\partial x} \right) - \right.$$

$$- \frac{1}{h^3} \left[\int_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2} \psi(x,t) dx - 2 \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x,t) dx + \right.$$

$$\left. \left. + \int_{x_{j-1}-h/2}^{x_{j-1}+h/2} \psi(x,t) dx \right] \right\} dt\ ,\ j = \overline{2, M-2},\ k = \overline{1, N} \qquad (3.2.3.22)$$

Aşağıdaki gibi bir gösterimi yazalım:

$$P_t(\psi) = \frac{1}{h} \left(\frac{\partial \psi(x_j + h/2, t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi(x_j - h/2, t)}{\partial x} \right) -$$

$$- \frac{1}{h^3} \left[\int_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2} \psi(x,t) dx - 2 \int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x,t) dx + \right.$$

$$\left. + \int_{x_{j-1}-h/2}^{x_{j-1}+h/2} \psi(x,t) dx \right] ,\ \overset{0}{\forall} t \in [0, T] \qquad (3.2.3.23)$$

Bu gösterim ψ'ye göre her bir $t \in [0, T]$ için bir fonksiyoneldir. Bu gösterimde x_j'yi x ile x'i ise ξ ile değişelim ve $\xi = x - sh$ değişken dönüşümünü kullanalım. Bu takdirde $P_t(\psi)$ fonksiyoneli aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$P_t(\tilde{\psi}) = \frac{1}{h^2}\left[\left(\frac{\partial\tilde{\psi}(0.5,t)}{\partial s} - \frac{\partial\tilde{\psi}(-0.5,t)}{\partial s}\right) - \right.$$

$$\left. - \int_{0.5}^{1.5}\tilde{\psi}(s,t)ds + 2\int_{-0.5}^{0,5}\tilde{\psi}(s,t)ds - \int_{-1,5}^{-0,5}\tilde{\psi}(s,t)ds\right]. \qquad (3.2.3.24)$$

Burada $\tilde{\psi}(s,t) = \psi(x+sh,t)$'dır. Formülden gözüktüğü gibi $P_t(\tilde{\psi})$ fonksiyoneli $\tilde{\psi}$'ya göre lineerdir. Bunun yanı sıra $P_t(\tilde{\psi})$ fonksiyoneli t tespit edildiğinde $W_2^3(-0.s,0.s)$ uzayında sınırlıdır. Gerçekten $\forall t \in \overset{0}{[0,T]}$ için $\psi(x,t)$ fonksiyonu (3.1.3.4) kestirimine göre $W_2^3(x_j - h/2, x_j + h/2)$ uzayından olur. Bu nedenle $\forall t \in \overset{0}{[0,T]}$ için $\tilde{\psi}(s,t)$ fonksiyonu da $W_2^3(-0.5,0.5)$ uzayından olacaktır. (3.2.3.24) formülünü kullanırsak

$$|P_t(\tilde{\psi})| \le C_7 h^{-2}\|\tilde{\psi}\|_{W_2^3(-0.5,0.5)} \quad , \quad \forall t \in \overset{0}{[0,T]} \qquad (3.2.3.25)$$

eşitsizliğini kolaylıkla elde edebiliriz. Burada $C_7 > 0$ sayısı τ ve h'dan bağımsızdır. Bu eşitsizliğin yanı sıra $P_t(\tilde{\psi})$ fonksiyonelinin $\tilde{\psi} = as^2 + bs + c$ polinomu için sıfıra dönüştüğünü gösterelim. Gerçekten $\tilde{\psi} = as^2 + bs + c$ polinomunu (3.2.3.24) formülünde yerine yazarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$P_t(\tilde{\psi}) = \frac{1}{h^2}\left[(2a(0,5)+b) - (2a(-0,5)+b)\right] -$$

$$-\left[\left(\frac{a(1,5)^3}{3} + \frac{b(1,5)^2}{2} + c(1,5)\right) - \left(\frac{a(0,5)^3}{3} + \frac{b(0,5)^2}{2} + c(0,5)\right)\right] +$$

$$+2\left[\left(\frac{a(0,5)^3}{3} + \frac{b(0,5)^2}{2} + c(0,5)\right) - \left(\frac{a(-0,5)^3}{3} + \frac{b(-0,5)^2}{2} + c(-0,5)\right)\right] -$$

$$-\left[\left(\frac{a(-0,5)^3}{3} + \frac{b(-0,5)^2}{2} + c(-0,5)\right) - \left(\frac{a(-1,5)^3}{3} + \frac{b(-1,5)^2}{2} + c(-1,5)\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(2a - 16(0,5)^3 a\right) = \frac{1}{h^2}(2a - 2a) = 0 \;, \;\; \forall t \in \overset{0}{[0,T]} \,. \qquad (3.2.3.26)$$

Böylece $P_t(\tilde{\psi})$ fonksiyoneli için t tespit edildiğinde[19, 20] çalışmalarından bildiğimiz Bramble–Hilbert lemmasının şartlarının sağlandığını görüyoruz. Bu nedenle bu lemmanın hükmünü ve (3.2.3.25) eşitsizliğini kullanarak $\forall t \in [t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1,N}$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|P_t(\tilde{\psi})| \le C_8 h^{-2} \left\| \frac{\partial^3 \tilde{\psi}(.,t)}{\partial s^3} \right\|_{L_2(-0.5,0.5)} , \quad \forall t \in [t_{k-1}, t_k] , \; k = \overline{1,N} \qquad (3.2.3.27)$$

burada $C_8 > 0$ sayısı τ ve h 'dan bağımsızdır. Bu eşitsizlikte eski değişkenlere geri dönersek, (3.2.3.22), (3.2.3.23) eşitliklerinin yardımıyla

$$|F_{jk}^{21}| \le C_8 a_0 h^{1/2} \tau^{-1/2} \left(\int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| \frac{\partial^3 \psi(x,t)}{\partial x^3} \right|^2 dxdt \right)^{1/2} ,$$

$$j = \overline{2, M-2} , \; k = \overline{1,N} \quad . \qquad (3.2.3.28)$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Şimdi $j = 1$ için F_{jk}^{2} terimini kestirelim. Bu amaçla F_{jk}^{2} için olan formülü kullanırsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{1k}^{2} = \frac{a_0}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1 - h/2}^{x_1 + h/2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dxdt - a_0 \delta_{x\bar{x}} \psi_{1k} =$$

$$= \frac{a_0}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_1 - h/2}^{x_1 + h/2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dxdt - \frac{a_0}{h^2} \left[\frac{1}{h} \int_{x_2 - h/2}^{x_2 + h/2} \psi(x, t_k) dx - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{h} \int_{x_1 - h/2}^{x_1 + h/2} \psi(x, t_k) dx - \psi_{0k} \right] , \; k = \overline{1,N}$$

Burada tanıma göre $\psi_{0k} = 0$, $k = \overline{1,N}$ 'dir. Bu nedenle ψ_{0k} 'nın yerine $\psi(x_1 - h/2, t_k) = 0$, $k = \overline{1,N}$ alalım. Bu takdirde F_{1k}^{2} için formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$F_{1k}^{2} = \frac{a_0}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \frac{\partial \psi(x_1 + h/2, t)}{\partial x} - \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_2 - h/2}^{x_2 + h/2} \psi(x,t) dx - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{x_1 - h/2}^{x_1 + h/2} \psi(x,t) dx \right] \right\} - \frac{a_0}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left\{ \frac{\partial \psi(x_1 - h/2, t)}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{h^2} \left[\int_{x_1 - h/2}^{x_1 + h/2} \psi(x,t) dx - \int_{x_1 - h/2}^{x_1 + h/2} \psi(x_1 - h/2, t) dx \right] \right\} dt -$$

$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}(\psi(x,t_k)-\psi(x,t))dx-\right.$$

$$\left.-2\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}(\psi(x,t_k)-\psi(x,t))dx+\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}(\psi(x_1-h/2,t_k)-\psi(x_1-h/2,t))dx\right\}dt=$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{\frac{\partial\psi(x_1+h/2,t}{\partial x}-\frac{1}{h^2}\left[\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\psi(x,t)dx-\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\psi(x,t)dx\right]\right\}dt-$$

$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{t}^{t_k}\left[\int_{x}^{x+h}\frac{\partial^2\psi(\xi,\theta)}{\partial\xi\partial\theta}d\xi-\int_{x_1-h/2}^{x}\frac{\partial^2\psi(\xi,\theta)}{\partial\xi\partial\theta}d\xi\right]d\theta dxdt+$$

$$+\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_1-h/2}^{x}\int_{x_1-h/2}^{\xi}\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdt=$$

$$=F_{1k}^{\ 21}+F_{1k}^{\ 22}+F_{1k}^{\ 23}\ ,\ k=\overline{1,N}\ , \tag{3.2.3.29}$$

burada

$$F_{1k}^{\ 21}=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{\frac{\partial\psi(x_1+h/2,t)}{\partial x}-\frac{1}{h^2}\left[\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\psi(x,t)dx-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\psi(x,t)dx\right]\right\}dt\ ,\ k=\overline{1,N}\ , \tag{3.2.3.30}$$

$$F_{1k}^{\ 22}=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{t}^{t_k}\left[\int_{x}^{x+h}\frac{\partial^2\psi(\xi,\theta)}{\partial\xi\partial\theta}d\xi-\right.$$

$$\left.-\int_{x_1-h/2}^{x}\frac{\partial^2\psi(\xi,\theta)}{\partial\xi\partial\theta}d\xi\right]d\theta dxdt\ ,\ k=\overline{1,N}\ , \tag{3.2.3.31}$$

$$F_{1k}^{\ 23}=\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x_1-h/2}^{x}\int_{x_1-h/2}^{\xi}\frac{\partial^2\psi(\eta,t)}{\partial\eta^2}d\eta d\xi dxdt\ ,\ k=\overline{1,N}\text{'dır.} \tag{3.2.3.32}$$

Şimdi önce $F_{1k}^{\ 22}$ ve $F_{1k}^{\ 23}$ terimlerini kestirelim. Bu terimler için olan (3.2.3.31) ve (3.2.3.32) formüllerini ve Cauchy–Bunyakowski eşitsizliğini kullanırsak, kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlikleri elde edebiliriz:

$$\left|F_{1k}^{\ 22}\right|^2\le 8a_0^{\ 2}\frac{\tau}{h^3}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}\right|^2dxdt+\right.$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_{1+h/2}}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt\Bigg], \; k=\overline{1,N} \;, \qquad (3.2.3.33)$$

$$\left|F_{1k}^{23}\right|^2 \le \frac{a_0^{\,2}}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\,, \; k=\overline{1,N} \;, \qquad (3.2.3.34)$$

Sonuncu eşitsizlikte $\overset{0}{\forall} t\in[0,T]$ için

$$\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 \le C_9\left(\left\|\frac{\partial^2\psi(.,t)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}+\left\|\frac{\partial^3\psi(.,t)}{\partial x^3}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\right) \qquad (3.2.3.35)$$

eşitsizliğinden kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\left|F_{1k}^{23}\right|^2 \le C_{10}\frac{a_0^{\,2}}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\left\|\frac{\partial^2\psi(.,t)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}+\left\|\frac{\partial^3\psi(.,t)}{\partial x^3}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\right)dt \;,\; k=\overline{1,N} \qquad (3.2.3.36)$$

burada $C_{10}>0$ sayısı τ ve h'dan bağımsızdır.

Şimdi F_{1k}^{21} terimini kestirelim. Bu amaçla F_{1k}^{21} terimini aşağıdaki gibi yazalım:

$$F_{1k}^{21}=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}P_t^{\,0}(\psi)dt \;, \qquad (3.2.3.37)$$

burada

$$P_t^{\,0}(\psi)=\frac{\partial\psi(x_1+h/2,t)}{\partial x}-\frac{1}{h^2}\Bigg[\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\psi(x,t)dx -$$

$$-\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\psi(x,t)dx \;,\; t\in[t_{k-1},t_k]\,. \qquad (3.2.3.38)$$

(3.2.3.28) eşitsizliğinin elde edilmesine benzer olarak $P_t^{\,0}(\psi)$ fonksiyoneli için Bramble–Hilbert lemmasını uygulayarak aşağıdaki eşitsizliği ispatlayabiliriz:

$$\left|P_t^{\,0}(\psi)\right|\le C_{11}h^{1/2}\left\|\frac{\partial^3\psi(.,t)}{\partial x^3}\right\|_{L_2(x_1-h/2,x_1+h/2)} \;,\; \overset{0}{\forall} t\in[t_{k-1},t_k]\,,\; k=\overline{1,N} \quad (3.2.3.39)$$

Bunu (3.2.3.37)'de dikkate alırsak, oradan

$$\left|F_{1k}^{21}\right|\le C_{11}\frac{a_0h^{1/2}}{\tau^{1/2}}\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\|\frac{\partial^3\psi(.,t)}{\partial x^3}\right\|^2_{L_2(x_1-h/2,x_1+h/2)}dt\right)^{1/2}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan da

$$\left|F_{1k}^{21}\right|^2 \le C_{12}\frac{h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^3\psi(x,t)}{\partial x^3}\right|^2 dxdt\ , \quad k=\overline{1,N}\ , \qquad (3.2.3.40)$$

burada $C_{12}>0$ sayısı τ ve h'dan bağımsızdır. (3.2.3.33), (3.2.3.36) ve (3.2.3.40) eşitsizliklerini kullanarak $F_{1k}^{\ 2}$ terimi için (3.2.3.29)'dan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{1k}^{\ 2}\right|^2 \le C_{13}\frac{\tau}{h^3}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt\right]+$$

$$+C_{14}\tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\left\|\frac{\partial^2\psi(.,t)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}+\left\|\frac{\partial^3\psi(.,t)}{\partial x^3}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\right)dt+$$

$$+C_{15}\frac{h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right|^2 dxdt\ ,\ k=\overline{1,N}\ , \qquad (3.2.3.41)$$

burada $C_{13}>0$, $C_{14}>0$, $C_{15}>0$ sayıları τ ve h'dan bağımsızdır.

Aynı biçimde $F_{M-1K}^{\ 2}$ terimi için de aşağıdaki eşitsizliği ispatlayabiliriz:

$$\left|F_{M-1K}^{\ 2}\right|^2 \le C_{16}\frac{\tau}{h^3}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M1}+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{M-2}-h/2}^{x_{M-2}+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\right|^2 dxdt\right]+$$

$$C_{17}\tau^{-1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\left\|\frac{\partial^2\psi(.,t)}{\partial x^2}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}+\left\|\frac{\partial^3\psi(.,t)}{\partial x^3}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\right)dt+$$

$$+C_{18}\frac{h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2}\left|\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}\right|^2 dxdt\ ,\ k=\overline{1,N}\ , \qquad (3.2.3.42)$$

burada $C_{16}>0$, $C_{17}>0$, $C_{18}>0$ sayıları τ ve h'dan bağımsızdır.

Böylece τ ve h adımları için uyum şartını, (3.2.3.21), (3.2.3.28), (3.2.3.41), (3.2.3.42) eşitsizliklerini ve (3.1.3.4) kestirimini kullanarak $F_{jk}^{\ 2}$ terimi için aşağıdaki eşitsizliği ispatlamış oluyoruz:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{\ 2}\right|^2 \le C_{19}(\tau+h) \qquad (3.2.3.43)$$

burada $C_{19}>0$ sayısı τ ve h'dan bağımsızdır.

(3.2.3.17) eşitsizliğini ve (3.1.3.4) kestirimini kullanarak F_{jk}^{3} terimi için aşağıdaki bağıntıyı elde ediyoruz:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{3}\right|^{3} \le C_{20}(\tau^2 + h^2) \qquad (3.2.3.44)$$

burada $C_{20} > 0$ sayısı τ ve h'dan bağımsızdır.

$F_{jk}^{1} = 0$ olduğunu ve (3.2.3.43), (3.2.3.44) eşitsizliklerini dikkate alarak (3.2.3.9) eşitliğinin ve (3.2.3.8) kestiriminin yardımıyla aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^{2} \le C_{21}(\tau + h)\,, \ (\forall m \in \{1,2,\ldots N\}$$

burada $C_{21} > 0$ sayısı τ ve h'dan bağımsızdır.Burada C_{21}'i C_5'le gösterirsek, teoremin ispatlanmış olduğunu elde ederiz.Teorem 3.2.3.1 ispatlandı.

Bu teoremde yer alan (3.2.3.6) kestirimi fark şemasının hatasının τ ve h'a göre birinci dereceden $\tau \to 0$ ve $h \to 0$ için sıfıra yaklaşıyor. Bu ise hatanın yakınsama hızını ifade ediyor.

Şimdi (3.2.1.4), (3.2.1.5) ve (3.2.1.11) fark şemasının hatasını kestirelim. Bu amaçla (3.2.3.2), (3.2.3.3) şartlarından ve

$$\delta_{\bar{x}} Z_{1k} = \delta_{\bar{x}} Z_{Mk} = 0\ ,\ k = \overline{1,N} \qquad (3.2.3.45)$$

şartlarından Z_{jk} ağ fonksiyonunun bulunması problemini göz önüne alalım. Gözüktüğü gibi (3.2.3.2), (3.2.3.3), (3.2.3.45) sistemi (3.2.1.4), (3.2.1.5), (3.2.1.11) fark şemasının hatasını gösteren sistemdir. $Z_{jk} = \phi_{jk} - \psi_{jk}$ formülü ile tanımlanır ve burada ϕ_{jk} ağ fonksiyonu (3.2.1.4), (3.2.1.5), (3.2.1.11) fark şemasının çözümü, ψ_{jk} ise (3.2.1.1), (3.2.1.2), (3.2.1.10) sınır değer probleminin çözümü olan $\psi(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki gibi tanımlanan ortalamasıdır:

$$[\psi(x,t)] = \{\psi_{jk}\} \quad , \quad \psi_{jk} = \frac{1}{h}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t_k)dx \quad , \quad j = \overline{1,M-1}\ ,\ K = \overline{1,N}$$

$$\psi_{j0} = \varphi_j \quad , \quad j = \overline{0,M} \quad , \quad \varphi_0 = \varphi_1 \quad , \quad \varphi_M = \varphi_{M-1}$$

$$\delta_{\bar{x}}\psi_{1k} = \delta_{\bar{x}}\psi_{Mk} = 0\ ,\ k = \overline{1,N} \qquad (3.2.3.46)$$

Teorem 3.2.3.2: Farz edelim ki; teorem 3.2.2.2'nin şartları sağlansın ve τ, h adımları ise teorem 3.2.3.1'in şartlarını sağlasın. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 \le C_{22}(\tau^2 + h^2) \quad , \quad \forall m \in \{1,2,\ldots N\} \qquad (3.2.3.47)$$

burada $C_{22} > 0$ sayısı τ ve h'dan bağımsızdır. Z_{jk} (3.2.3.2), (3.2.3.3), (3.2.3.45) sisteminin çözümüdür.

İspat: Bu teoremin ispatını kısa biçimde yapacağız. Çünkü işlemlerin bazıları teorem 3.2.3.1'de olduğu gibidir. Farklı işlemleri özellikle vurgulayacağız.
Teorem 3.2.3.1 ispatında olduğu gibi $\forall m \in \{1,2,\ldots N\}$için

$$h\sum_{j=1}^{M-1}\left|Z_{jm}\right|^2 \le C_{23}\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2 , \qquad (3.2.3.48)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $C_{23} > 0$ sayısı τ ve h'dan bağımsızdır.

Şimdi F_{jk} ağ fonksiyonunu yine de

$$F_{jk} = F_{jk}^{\,1} + F_{jk}^{\,2} + F_{jk}^{\,3} \;,\; j = \overline{1, M-1} \;,\; K = \overline{1, N} \qquad (3.2.3.49)$$

biçiminde gösterelim, burada $F_{jk}^{\,1}, F_{jk}^{\,2}$ ve $F_{jk}^{\,3}$ terimleri sırasıyla (3.2.3.10), (3.2.3.11) ve (3.2.3.12) formülleri ile tanımlanır. Teorem 3.2.3.1'de olduğu gibi $F_{jk}^{\,1}$ ve $F_{jk}^{\,3}$ ağ fonksiyonları için aşağıdaki bağıntıları elde edebiliriz:

$$F_{jk}^{\,1} = 0 \;,\; j = \overline{1, M-1} \;,\; K = \overline{1, N} \;, \qquad (3.2.3.50)$$

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{\,3}\right|^2 \le C_{24}(\tau^2 + h^2) \;, \qquad (3.2.3.51)$$

burada $C_{24} > 0$ sayısı τ ve h'dan bağımsızdır.

Şimdi $F_{jk}^{\,2}$ terimini kestirelim.(3.2.3.11) formülünü ve (3.2.3.46)'yı kullanırsak $F_{jk}^{\,2}$ için olan formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$F_{jk}^{\,2} = \frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2}\psi(x,t)dxdt - \right.$$

$$-2\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t)dxdt+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{j-1}-h/2}^{x_{j-1}+h/2}\psi(x,t)dxdt\Bigg]-$$

$$-\frac{a_0}{\tau h^3}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\int_t^{t_k}\int_x^{x+h}\frac{\partial^2\psi(\xi,\theta)}{\partial\xi\partial\theta}d\xi d\theta-\int_t^{t_k}\int_{x-h}^{x}\frac{\partial^2\psi(\xi,\theta)}{\partial\xi\partial\theta}d\xi d\theta\right)dxdt\right]=$$

$$=F_{jk}^{21}-F_{jk}^{22}\ ,\ j=\overline{2,M-2}\ ,\ k=\overline{1,N}\ , \qquad (3.2.3.52)$$

burada F_{jk}^{21} ve F_{jk}^{22} sırasıyla (3.2.3.19) ve (3.2.3.20) formülleri ile tanımlanmaktadır. Yine teorem 3.2.3.1'in ispatında uygulanan işlemleri yaparsak F_{jk}^{2} için

$$\left|F_{jk}^{2}\right|^2\leq\frac{4a_0^{2}\tau}{h^3}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_{j+1}-h/2}^{x_{j+1}+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\psi(x-h,t)}{\partial x\partial t}\right|^2dxdt+\right.$$

$$\left.+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}-\frac{\partial^2\psi(x-h,t)}{\partial x\partial t}\right|^2dxdt\right]+$$

$$+C_{25}\frac{h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial^3\psi(x,t)}{\partial x^3}\right|^2dxdt\ ,\ j=\overline{2,M-2}\ ,\ k=\overline{1,N}\ , \qquad (3.2.3.53)$$

burada $C_{25}>0$ sayısı τ ve h'dan bağımsızdır.

Şimdi $j=1$ için F_{jk}^{2} terimini kestirelim. Bu amaçla F_{1k}^{2} terimini aşağıdaki gibi yazalım:

$$F_{1k}^{2}=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}dxdt-a_0\delta_{x\bar{x}}\psi_{1k}=$$

$$=\frac{a_0}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\frac{\partial\psi(x_1+h/2,t)}{\partial x}-\frac{\partial\psi(x_1-h/2,t)}{\partial x}\right]dx-$$

$$-\frac{a_0}{h^2}\left[\frac{1}{h}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\psi(x,t_k)dx-\frac{2}{h}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\psi(x,t_k)dx+\psi_{0k}\right]$$

Burada $\dfrac{\partial\psi(x_1-h/2,t)}{\partial x}=\dfrac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}=0$ olduğunu ve $\psi_{1k}=\psi_{0k}$, $k=\overline{1,N}$ şartlarını kullanırsak F_{1k}^{2} terimi için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$F_{1k}{}^{2}=-\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}(\psi(x,t_k)-\psi(x,t))dx-\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}(\psi(x,t_k)-\psi(x,t))dx\right]dt+$$

$$+\frac{a_0}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{\frac{1}{h}\frac{\partial\psi(x_1+h/2,t)}{\partial x}-\frac{1}{h^3}\left[\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\psi(x,t)dx-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\psi(x,t)dx\right]\right\}dt=F_{1k}{}^{21}+F_{1k}{}^{22}\ ,\ \ k=\overline{1,N} \qquad (3.2.3.54)$$

burada

$$F_{1k}{}^{21}=\frac{a_0}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left\{\frac{1}{h}\frac{\partial\psi(x_1+h/2,t)}{\partial x}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{h^3}\left[\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\psi(x,t)dx-\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\psi(x,t)dx\right]\right\}dt\ ,\ \ k=\overline{1,N}, \qquad (3.2.3.55)$$

$$F_{1k}{}^{22}=-\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}(\psi(x,t_k)-\psi(x,t))dx-\right.$$

$$\left.-\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}(\psi(x,t_k)-\psi(x,t))dx\right]dt\ ,\ \ k=\overline{1,N} \qquad (3.2.3.56)$$

Sonuncu eşitlikten aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$F_{1k}{}^{22}=-\frac{a_0}{\tau h^3}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x}^{x+h}\int_{t}^{t_k}\frac{\partial^2\psi(\xi,\theta)}{\partial\xi\partial\theta}d\theta d\xi dxdt\ ,\ \ k=\overline{1,N}$$

Buradan da

$$\left|F_{1k}{}^{22}\right|^2\le\frac{2a_0{}^2\tau}{h^3}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}\right|^2dxdt+\right.$$

$$\left.+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}\right|^2dxdt\right],\ \ k=\overline{1,N}, \qquad (3.2.3.57)$$

$F_{1k}{}^{21}$ terimini teorem 3.2.3.1'de olduğu gibi kestirirsek

$$\left|F_{1k}{}^{21}\right|^2\le C_{26}\frac{h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^3\psi(x,t)}{\partial x^3}\right|^2dxdt\ ,\ \ k=\overline{1,N} \qquad (3.2.3.58)$$

eşitsizliğini elde edebiliriz.

Böylece (3.2.3.57) ve (3.2.3.58) eşitsizliklerinin yardımıyla (3.2.3.54) eşitliğinden aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde edebiliriz:

$$\left|F_{1k}^{\ 2}\right|^2 \le C_{27}\frac{\tau}{h^3}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt +\right.$$

$$\left.\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt\right]+$$

$$+C_{28}\frac{h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^3\psi(x,t)}{\partial x^3}\right|^2 dxdt\ ,\quad k=\overline{1,N}, \qquad (3.2.3.59)$$

burada $C_{27}>0$, $C_{28}>0$ sayıları τ ve h'dan bağımsızdır. Aynı şekilde $F_{M-1k}^{\ 2}$ için aşağıdaki eşitsizliği ispatlayabiliriz:

$$\left|F_{M-1k}^{\ 2}\right|^2 \le C_{29}\frac{\tau}{h^3}\left[\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt +\right.$$

$$\left.+\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt\right]+$$

$$+C_{30}\frac{h}{\tau}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^3\psi(x,t)}{\partial x\partial t}\right|^2 dxdt\ ,\quad k=\overline{1,N} \qquad (3.2.3.60)$$

(3.2.3.53), (3.2.3.59), (3.2.3.60) eşitsizliklerini, τ ve h adımları için uyum şartını ve (3.1.3.24) kestirimini kullanarak $F_{jk}^{\ 2}$ için aşağıdaki kestirimi ispatlamış oluyoruz:

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{\ 2}\right|^2 \le C_{31}(\tau^2+h^2), \qquad (3.2.3.61)$$

Böylece $F_{jk}^{\ 1}=0$ olduğunu ve (3.2.3.51), (3.2.3.61) eşitsizliklerini dikkate alarak, (3.2.3.49) eşitliğinin yardımıyla aşağıdaki

$$\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}\right|^2 \le C_{32}(\tau^2+h^2)$$

eşitsizliği ispatlanmış oluyor. Bu eşitsizliği (3.2.3.48) kestiriminde kullanırsak teoremin hükmünün geçerli olduğu ispatlanır. Teorem 3.2.3.2 ispatlandı.

Bu teoremden ve teorem 3.2.3.1'den gözüktüğü gibi II. tip sınır değer probleminin fark şemasının hatası, I. tip sınır değer probleminin fark şemasının hatasından daha hızla $\tau \to 0$, $h \to 0$ için sıfıra yaklaşıyor.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 3.1. bölümünde Lineer Schrödinger denklemi için I. ve II. tip sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümlerinin varlık ve bir tekliğine ait olan hükümler Fourier metodunun yardımıyla elde edilmiş ve yüksek mertebeden türevler için kestirimler ispatlanmıştır.

Tezin 3.2. bölümünde göz önüne alınan sınır değer problemlerine sonlu farklar metodu uygulanmış ve farklar şemasının çözümü için kararlılık kestirimi, hatası için ise yakınsama hızını gösteren kestirimler elde edilmiştir.

5.TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Tezde incelenen sınır değer problemlerinin Fourier metodu ile incelenmesi açısından bu çalışma önceki çalışmalardan farklıdır. Belirtmek gerekir ki, Schrödinger denklemi için bu türlü çalışmalar İskenderov A.D, Yagubov G.Y ve onların öğrencileri tarafından yapılmıştır. Bu yazarlar tarafından Schrödinger denklemi için sınır değer problemleri çoğunlukla Galorkin metodu ile incelenmiştir. Tezde göz önüne alınan sınır değer problemlerinde katsayılar yalnız x değişkenine bağımlı olduğunda Fourier metodunu uygulamak kolaylık ve işlemlerin basitliği açısından önem taşır. Fourier metodu yüksek mertebeden türevler için kestirimler elde edilmesinde de çok kolaylık sağlar. İnceleme metodunun farklı olması nedeniyle araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar, önceki yazarların çalışmalarındaki sonuçlarla çoğunlukla örtüşmez.

6.KAYNAKLAR

1. Landau, L.D., Lipschitz, E.M., Kuantum Mekaniği, Cilt 3, Sayfa 702, Moskova, 1963, (Rusça).
2. Briş, N.İ., Valeşkeviç, İ.N., Genel Sınır Değerli Durgun Olmayan Denklemler İçin Fourier Metodu // Diferansiyel Denklemler, C. I, No 3, Sayfa 393–399, Moskova, 1965, (Rusça).
3. Domarkas, A.L., İvanauskas, F.F., Lineer Olmayan Schrödinger Denklemler Sisteminin Çözümünün Varlığı Hakkında // Diferansiyel Denklemler, C.26, No 7, Sayfa 1137–1147, Moskova, 1990, (Rusça).
4. Hüseynov, M.M., Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Başlangıç–Sınır Değer Probleminin Çözümlerinin Sınırlı Olması Hakkında // Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler İçin Sınır Değer Problemleri, Derleme, Sayfa 56–58, Bakü, 1990, (Rusça).
5. İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., Kuantum Mekanik Potansiyelin Bulunması Ters Problemin Çözümü İçin Varyasyon Yöntemi // DAN SSSR, c.303, No:5, s.1044–1048, Moskova, 1988., Lineer Olmayan Kuantum Mekanik Sistemlerin Optimal Kontrolü // Otomatik ve Telemekanik, No:12– s. 27–38, Moskova, 1989, (Rusça).
6. İskenderov, A.D., Matematiksel Fiziğin Çok Boyutlu Ters Problemlerinin Varyasyon Konumları Hakkında // DAN SSSR, c.274, No:3, s. 531–533, Bakü, 1984., Durgun Olamayan Schrödinger Denkleminde Potansiyelin Bulunması // Matematik Modellemenin ve Optimal Kontrolün Problemleri, s. 6–36, Bakü, 2001, (Rusça).
7. Lions, J.L., Magenes, E.M., Non – Homogeneous Boundary Value Problems and Application. Vol. 1,2, Berlin, 1972.
8. Nasibov, Ş.M., Schrödinger Tipli Bir Lineer Olmayan Denklem Hakkında // Diferansiyel Denklemler, c.16, No:4, s. 660–670, Moskova, 1980, (Rusça).
9. Pozzi, G.A., Problemi Di Cauchy e Problemi ai Limiti Per Equatione de Eroluzione det tipo di Schrödinger Lineary e Non Lineary – I.II // Ann. Mat. Pura Appl.-I- vol. 78; II – 1969.-vol 81, 1968.

10. Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Bir İnvers Problemin Varyasyon Konulmasının Farklar Metoduyla Çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisinin Haberleri. Seri: Fizik–Teknik ve Matematik Bilimleri, Cilt:16, No:1–2, s.46–51, M.A, 1995., Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin İdentifikasyon Problemi Hakkında // Diferansiyel Denklemler c:33, No:12, s.1691–1698, 1997, (Rusça).
11. Yagubov, G.Ya., Kuazi Lineer Schrödinger Denklemi'nin Katsayısı İle Optimal Kontrol, Bilimler Doktoru Tezi, s.318, Kiev, 1994, (Rusça).
12. Yakupov, S.Y., Erolusyon Denklemler İçin Cauchy Probleminin Düzgünlüğü ve Onların Uygulamaları // Fonksiyonel Analiz ve Onun Uygulamaları, C.4. No:3, s.86–94, Moskova, 1970, (Rusça).
13. Ladijenskaya, O.A., Uraltseva, N.N., Lineer ve Quazi Lineer Eliptik Tip Denklemler, Moskova, Nauka, 1973, (Rusça).
14. Ladijenskaya, O.A., Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri, Moskova, Nauka, 1973, (Rusça).
15. Mikhaylov, V.P., Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler, Moskova, Nauka, 1973, (Rusça).
16. Tikhonov, A.N., Samarskiy, A.A., Matematiksel Fiziğin Denklemleri, Moskova, Nauka, 1972, (Rusça).
17. Silla, N., Schrödinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü, Doktora Tezi, s. 165, Bakü, 1991, (Rusça).
18. Vasilyev, F.P., Extremal Problemlerin Çözüm Metotları, s. 400, Moskova, Nauka, 1981, (Rusça).
19. Bramble, J.H., Hilbert, S.R., Bounds for A class of Lineer Functionals with Application to Hermite Interpolation // Numer wath, vol.16, P. 362–369, 1971.
20. Samarskiy, A.A., Lazarov, R.D., Makarov, V.L., Genelleşmiş Çözümlü Diferansiyel Denklemler İçin Fark Şemaları, s.296, Moskova, Vısşaya Şkola, 1987, (Rusça).
21. Samarskiy, A.A., Andreev, V.B., Eliptik Denklem İçin Fark Metotları, Moskova, Nauka, 1976, (Rusça).

ÖZGEÇMİŞ

1978 yılında Kars'ta doğdu. İlk ve orta öğrenimini Kars'ta tamamladı. 1997 yılında kazandığı Atatürk Üniversitesi Mühendislik Fakültesi İnşaat Mühendisliği Bölümü'nden 2001 yılında mezun oldu. İki yılı aşkın bir süre kendisine ait mühendislik bürosunda proje çizimi ve statik hesaplama işi yaptı. 2004 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladı.

2003 yılından bu yana Kafkas Üniversitesi Ardahan Meslek Yüksekokulu'nda Öğretim Görevlisi olarak görev yapmaktadır. Ardahan Meslek Yüksekokulu'nun yanı sıra Kars Meslek Yüksekokulu ve Kars Sağlık Yüksekokulu'nda matematik, ticari matematik, istatistik ve bilgisayar dersleri vermiştir. Meslek Yüksekokulları ve İktisadi ve İdari Bilimler Fakültelerinde okutulmak üzere yayınlanmış Ticari Matematik isimli kitabı bulunmaktadır.