T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SONLU ELEMANLI KÜMELERDE FONKSİYONLARA POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

Murat İbrahim YAZAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

HAZİRAN-2007
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Uzm. Murat İbrahim YAZAR' ın Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı "Sonlu Elemanlı Kümelerde Fonksiyonlara Polinomlarla Yaklaşım" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında oy birliği ile kabul edilmiştir.

…./…./…..

Adı Soyadı	**İmza**
Başkan: Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	…………………………..
Üye : Prof. Dr. Gabil YAGUBOV	…………………………..
Üye : Yrd. Doç. Dr. Mustafa KUDU	………………………….

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …/…/…… Gün ve ………./……. Sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Vahit ALİŞOĞLU
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda katkı ve yardımlarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi ve Bölüm Başkanı değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA ve Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Gabil YAGUBOV hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam esnasında ve tezin hazırlanma sürecinde değerli fikir ve düşüncelerinden yararlandığım kıymetli arkadaşlarım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim elemanları Arş. Gör. Ömür DEVECİ ve Arş. Gör. Erhan DENİZ' e ayrıca çalışmam boyunca bana göstermiş olduğu sabır ve manevi desteğinden dolayı değerli eşim Tuba YAZAR' a teşekkürlerimi borç bilirim.

Kars-2006 Murat İbrahim YAZAR

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında sonlu elemanlı kümelerde fonksiyonlara polinomlarla yaklaşım ele alınmıştır.

İlk olarak, çalışmada cebirsel ve trigonometrik polinomlarla yaklaşım başlıkları altında yaklaşım teorisinin temeli olan Weierstrass'ın birinci ve ikinci yaklaşım teoremleri ile Bohman-Korovkin teoremi ve ispatları ifade edilmiştir. En iyi yaklaşımın karakterizasyonu başlığı altında Chebyshev polinomunun özellikleri, trigonometrik fonksiyonlarla düzgün yaklaşım konuları ele alınmıştır. Bunlara ilaveten Chebyshev polinomlarının pratikte kullanımı ile ilgili örnekler verilmiştir.

Ayrıca, çalışmada interpolasyon konusu kısa ve öz olarak ele alınmıştır. İnterpolasyonla ilgili bir teorem ve bu teoremin üç farklı ispatı verilerek bu ispatların uygulamaları ile ilgili örnekler çözülmüştür.

Son olarak, Tezin esas kısmını teşkil eden sonlu elemanlı kümelerde fonksiyonlara polinomlarla yaklaşım konusu güncel çalışmalarda dikkate alınarak sunulmuş ve tartışılmıştır.

Konunun yaklaşım teorisindeki önemi ve yeri ifade edilmiştir. Sonlu elemanlı kümelerde yaklaşım ile ilgili olarak tek nokta değişim algoritmasına yer verilmiştir.

2007, 98 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Sonlu elemanlı kümelerde yaklaşım, En iyi yaklaşımın karakterizasyonu, İnterpolasyon, Markov eşitsizliği, Bernstein polinomları, Chebyshev polinomları.

ABSTRACT

In this thesis, approximation to functions with polynomials on finite sets is studied.

Firstly, under the title of approximation with algebraic and trigonometric polynomials, the first and second approximation theorems of Weierstrass which are known as the fundamentals of the approximation theory and Bohman-Korovkin theorem are stated with their proof. Under the title of the characterization of best approximation, the subjects of the properties of Chebyshev polynomials and uniform approximation with trigonometric polynomials are given. In addition, examples of Chebyshev polynomials in practice are given.

Furthermore, in the study the subject of interpolation is given briefly and clearly. In this section a theorem about interpolation and its three different proofs are given and the proofs are supported with applications.

Lastly, the main part of the thesis which is the subject of approximation to functions with polynomials on finite sets is presented and discussed in the view of recent studies.

The importance of subject is stated and also the one point exchange algorithm which is about the approximations on the finite sets is given.

2007, 98 Pages

Key words: Approximation on finite sets, characterization of best approximation, interpolation, Markov's inequality, Bernstein polynomials, Chebyshev polynomials.

SİMGELER DİZİNİ

Tezde kullanılan temel simgeler

Simgeler	Açıklama
$\forall$	Herhangi
$\exists$	Bazı
$\lVert\cdot\rVert$	Normlu uzayda norm
$E_n(f)$	f fonksiyonuna en iyi yaklaşım
$C[a,b]$	Tüm $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların uzayı
P_n	En çok *n* dereceli polinomlar uzayı
$B_n(f)$	Bernstein polinomları
$\omega_f(\delta)$	*f* fonksiyonunun $\delta>0$ için süreklilik modülü
$LipK^{\alpha}$	$\alpha.$ dereceden Lipschitz şartı
T_n	*n.* dereceden trigonometrik fonksiyonlar sınıfı
$C^{2\pi}$	$\mathbb{R}$ üzerinde $2\pi-$periyotlu sürekli fonksiyonlar uzayı
Ŧ	Kompleks düzlemde birim çember
$C($Ŧ$)$	Ŧ üzerindeki sürekli fonksiyonlar uzayı
$span(A)$	*A'* nın gerdiği uzay
$\dim T_n$	T_n uzayının boyutu
p_n^*	P_n kümesinde *f* fonksiyonuna en iyi yaklaşım polinomu
X_m	*m* noktadan oluşan sonlu küme
$E_n(f;X_m)$	X_m sonlu kümesinde *f* fonksiyonuna en iyi yaklaşım

1.GİRİŞ

Yaklaşım teorisi kökleri 19. yüzyıla dayanan matematiğin önemli ve kapsamlı teorilerinden biridir. Yaklaşım teorisi ilk olarak Rus matematikçi P.L. Chebyshev'in buhar makinesı ile ilgili olarak ortaya koyduğu aşağıdaki problemi ifade etmesi ile başlamıştır.

Bir $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı sürekli bir f fonksiyonu ve pozitif bir n sayısı verilsin. Acaba f fonksiyonunu $[a,b]$ aralığında herhangi bir noktada maximum hata kontrol edilebilecek şekilde en çok n dereceli bir $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinomu ile temsil edebilirmiyiz?[1].

Yaklaşım teorisinin bir diğer önemli ismi K. Weierstrass'ın vermiş olduğu sürekli fonksiyonlarla ilgili örnek ve yaklaşım teorisi ile ilgili akla gelebilecek ilk soru olan yaklaşımın var olma olasılığı ile ilgili elde ettiği iki temel sonuç yaklaşım teorisinin amacını ve özünü temsil etmektedir. Weierstrass'ın ifade ettiği sürekli ve hiçbir yerde diferansiyellenebilir olmayan fonksiyon aşağıdaki gibidir,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi)\,. \tag{1.1}$$

Burada $b \in (0,1)$, a tek tamsayı ve $ab > 1+(3\pi/2)$ dir [2]. Diğer taraftan, kompakt bir aralıkta reel değerli sürekli fonksiyonlar sınıfında cebirsel polinomların yoğun olduğu sonucu ile $2\pi-$periyotlu reel değerli sürekli fonksiyonlar sınıfında trigonometrik polinomların yoğun olduğu sonucu Weiertrass'a ait iki temel sonuçtur [1].

En iyi yaklaşım polinomları ile ilgili çalışmalar Chebyshev zamanında E. I. Zolaterev, A. I. Akhiezer, A.A. Markov ve V. A. Markov tarafından sürdürülmüştür [3]. Ayrıca Bernstein, Lebesgue, Kirschberger, Haar, Landau, de la Vállée-Poussin ve E. Borel yaklaşım teorisinin önemli isimlerinden bazılarıdır.

Yaklaşım teoreminin önemli sorularından biri de en iyi yaklaşım polinomunun varlığıdır. Bununla ilgili olarak Weierstrass-Lebesgue kompaktlık prensibi ile Banach-Alaoglu-Bourbaki teoremi bilinen iki önemli prensiptir[4].

Yaklaşım teorisinin kısa bir tarihi geçmişini ifade ettikten sonra tez çalışmasına geçelim; Bu tez çalışması en iyi yaklaşım polinomlarının bulunması ile yakından ilgilidir. Birçok durumda en iyi yaklaşım polinomunun bulunması genellikle çok zordur. Sonlu elemanlı kümelerde yaklaşımla ilgili çalışmalar genel olarak en iyi yaklaşım polinomu bulunamıyorsa bu takdirde en iyi yaklaşım polinomuna nasıl yaklaşırız sorusuna çözüm teşkil etmesi açısından önemlidir.

Bu tez çalışması 7 konu başlığı altında toplanmıştır. İlk bölüm giriş olmak üzere 2. bölüm konu ile ilgili gerekli temel bilgilerden oluşmaktadır ve bu bölümde [5-7] kaynaklarından yararlanılmıştır. Tezin 3., 4., 5. ve 6. bölümleri tezin asıl konusunun ön hazırlığı niteliğinde olup, bu kısımda gerekli olan teorik içerik hazırlanmıştır. Özellikle bu bölümlerde geniş bir ölçüde kaynak [8] den yararlanılmıştır. Bunun yanısıra [9-14] kaynaklarına da başvurulmuştur.

Tezin asıl kısmı 7. bölüm hazırlanırken son yapılan çalışmalar [15-26] dikkate alınarak konu güncel olarak sunulmaya çalışılmıştır.

Tez konusu ile ilgili olarak ilk yapılan çalışmalar arasında J .L. Walsh'a ait bir dizi makale[27-32] ve [33-34] konuyla ilgili temel teşkil eden kısa ve öz içerikleriyle oldukça faydalı olmuştur.

Ayrıca, konuyla ilgili olarak yararlanılan önemli çalışmalar arasında, rasyonel fonksiyonlara polinomlarla yakınsaklığın ele alandığı [35], keskinleştirilmiş polinomsal yaklaşımla ilgili makale[36], sonlu kümeler üzerinde monoton rasyonel yaklaşımla ilgili MONORAT, CONMAX, INCWORM algoritmalarının konu edinildiği makale[37], sonlu elemanlı kümeler üzerinde lineer olamayan ortalama-kare yaklaşımla ilgili çalışma[38] ve özellikle 7. bölümde yer verilen tek-nokta değişim algoritmasının iki değişkenli fonksiyonlar için olan versiyonunun yer aldığı makaleyi [39] sayabiliriz.

Kaynak [40]' da kompleks düzlemde kapalı düzgün basit eğri üzerinde tanımlı, genelleştirilmiş Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlara rasyonel fonksiyonlarla yaklaşımdan bahsedilir.

Son olarak, sonlu elemanlı kümelerde yaklaşım konusunun uygulamaları niteliğinde sayılabilecek son yıllarda yapılan çalışmalar arasında, önemli minimizasyon problemlerinden olan grafik renklendirme ve küme kaplama problemlerini içeren makale [41], Markov operatörleriyle ilgili yaklaşımı içeren makale[42] ve [43-44] makalelerinden bahsedebiliriz.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Genel Bilgiler

Tanım 2.1.1: X lineer uzayı ile X üzerinde tanımlı negatif olmayan bir fonksiyon verilsin. Eğer, $\|.\|$ fonksiyonu $\forall x, y \in X$ için aşağıdaki şartları taşıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm denir

i. $\|x\| \geq 0$;

ii. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

iii. $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için, $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

iv. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

$(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu lineer uzay denir[7].

X üzerindeki herhangi bir norm $d(x, y) = \|x - y\|$ metriğini üretir.

$X = C[a,b]$, $[a,b]$ aralığındaki tüm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonların uzayı olmak üzere, bu uzay üzerinde $\|f\| = \max\limits_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ normu verilsin. $Y = P_n$, $C[a,b]$ uzayının en çok n dereceli polinomlar altuzayı olsun. Bu çalışmada $n+1$ boyutlu $Y = P_n$ altuzayının elemanlarının fonksiyonlara olan yaklaşımı ile ilgileneceğiz.

Tanım 2.1.2: X normlu uzayı ile bu uzayda bir $A \subset X$ altkümesi verilsin. Eğer, A' daki her Cauchy dizisi A' da bir noktaya yakınsayan bir altdiziye sahipse A kümesine **kompakt** küme denir[5].

Tanım 2.1.3: X normlu uzayı verilsin. Eğer, bu uzaydaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyorsa X 'e **tam uzay** denir[5].

Lemma 2.1.2: V sonlu-boyutlu lineer bir uzay olsun. Bu durumda, V üzerindeki bütün normlar denktir. Diğer bir ifadeyle, eğer, $\|.\|_1$ ve $\|.\|_2$ V uzayı üzerinde iki norm ise bu durumda $0 < A$, $B < \infty$ sabitleri vardır öyle ki, $\forall x \in V$ için

$$A\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\|x\|_1 \tag{2.1.1}$$

Lemma 2.1.3: Verilen $a < b$ sabit sayıları ve bir pozitif n sayısı için $0 < A, B < \infty$ sabitleri vardır öyleki

$$A\sum_{k=0}^{n}|a_k| \leq \max_{a \leq x \leq b}\left|\sum_{k=0}^{n}|a_k x^k|\right| \leq B\sum_{k=0}^{n}|a_k|. \tag{2.1.2}$$

Lemma 2.1.4: Y sonlu-boyutlu normlu bir uzay ve $M > 0$ olsun. Bu durumda herhangi kapalı $\{y \in Y : \|y\| < M\}$ küresi kompakttır.

Lemma 2.1.5: Her sonlu-boyutlu normlu uzay tamdır. Özel olarak, eğer, Y sonlu-boyutlu normlu bir X uzayının altuzayı ise bu durumda Y, X' in kapalı bir altkümesidir.

Teorem 2.1.1: Y normlu lineer bir X uzayının sonlu-boyutlu bir altuzayı ve $x \in X$ olsun. Bu durumda, $\forall y \in Y$ için bir $y^* \in Y$ (tek olması gerekmiyor) elemanı vardır öyleki

$$\|x - y^*\| = \min_{y \in Y}\|x - y\| \tag{2.1.3}$$

dir. Yani, Y' nin elemanlarıyla x' e bir en iyi yaklaşım vardır.

İspat: İlk olarak dikkat edersek, $0 \in Y$ olduğundan biliyoruz ki, en yakın bir y^* noktası $\|x - y^*\| \leq \|x\| = \|x - 0\|$ eşitsizliğini sağlar. Dolayısıyla, $y \in Y$ vektörleri arasından $\|x - y\| \leq \|x\|$ eşitsizliğini sağlayan y^* vektörlerine bakmak yeterli olacaktır. Buna karşın, daha geniş bir vektörler kümesi kullanmak uygun olacaktır. Üçgen eşitsizliğinden,

$$\|x - y\| \leq \|x\| \Rightarrow \|y\| \leq \|x - y\| + \|x\| \leq 2.\|x\|, \tag{2.1.4}$$

elde edilir. Böylece, dikkatimizi kompakt kümedeki y vektörlerine kısıtlayabiliriz.

$$K = \{y \in Y : \|y\| < 2.\|x\|\}. \tag{2.1.5}$$

İspatı sonlandırmak için, sadece $f(y) = \|x - y\|$ fonksiyonun sürekli olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır:

$$|f(y) - f(z)| = \big|\|x - y\| - \|x - z\|\big| \le \|y - z\|, \tag{2.1.6}$$

Dolayısıyla, f bazı $y^* \in K$ noktalarında minumum değerini alacaktır.

Sonuç 2.1.2: Her $f \in C[a,b]$, ve her n pozitif sayısı için bir (tek olması gerekmiyor) $p_n^* \in P_n$ polinomu vardır öyle ki,

$$\|f - p_n^*\| = \min_{p \in P_n} \|f - p\| \tag{2.1.7}$$

Sonuç 2.1.3: Verilen $f \in C[a,b]$ fonksiyonu ve n pozitif sayısı için sabit bir $R < \infty$ sayısı vardır öyle ki, eğer,

$$\left\| f - \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right\| \le \|f\| \tag{2.1.8}$$

ise bu durumda $\max_{0 \le k \le n} |a_k| \le R$ dır.

Lemma 2.1.6: *Y, X* lineer normlu uzayının sonlu-boyutlu bir altuzayı olsun ve kabul edelim ki her $x \in X$ noktası tek bir $y_x \in Y$ en yakın noktasına sahip olsun. Bu durumda $x \mapsto y_x$ en yakın noktaya götüren dönüşüm süreklidir.

Tanım 2.1.4: *K*, *V* vektör uzayının bir altkümesi olsun. Eğer, *K*' da herhangi iki noktayı birleştiren bir doğru *K* kümesi tarafından kapsanıyorsa bu durumda *K* **konveks** kümedir denir. Bir başka ifadeyle, eğer

$$x, y \in K, 0 \leq \lambda \leq 1 \Rightarrow \lambda x + (1-\lambda) y \in K \tag{2.1.9}$$

oluyorsa, *K* konveks kümedir denir.

Tanım 2.1.5: Bir *X* vektör uzayı üzerinde tanımlı $\|.\|$ bir norm ve $\|x\| = r = \|y\|$ olacak şekilde $x \neq y \in X$ verilsin. Eğer, her $0 < \lambda < 1$ için $\|\lambda x + (1-\lambda) y\| < r$ oluyorsa, bu durumda $\|.\|$ normu **kesin konveksdir** denir.

Teorem 2.1.2: *Y*, *X* lineer normlu uzayının bir altuzayı ve $x \in X$ olsun. Y_x, *Y* kümesindeki *x'* e en iyi yaklaşımların oluşturduğu küme sınırlı, konveks bir kümedir.

İspat: Teorem 2.1.1 ' den Y_x kümesi $\{y \in X : \|y\| < 2.\|x\|\}$ kümesinin bir altkümesidir ve dolayısıyla Y_x kümesi sınırlı bir kümedir.

Şimdide Y_x' in konveks olduğunu gösterelim, $y_1, y_2 \in Y_x$ olması

$$\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = \min_{y \in Y} \|x - y\| \tag{2.1.10}$$

olduğu anlamına gelir. $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere, $y^* = \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2$ olarak alalım. $y^* \in Y_x$ olduğunu göstermek istiyoruz. Fakat dikkat edersek zaten $y^* \in Y$ dir. Son olarak,

$$\begin{aligned} \|x - y^*\| &= \|x - (\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)\| \\ &= \|\lambda (x - y_1) + (1-\lambda)(x - y_2)\| \\ &\leq \lambda . \|x - y_1\| + (1-\lambda) \|x - y_2\| \\ &= \min_{y \in Y} \|x - y\|, \end{aligned} \tag{2.1.11}$$

işlemlerinden $\left\| x - y^* \right\| = \min_{y \in Y} \left\| x - y \right\|$ elde ederiz ve dolayısıyla, $y^* \in Y_x$ dir.

Sonuç 2.1.4: X vektör uzayı kesin konveks bir norma sahipse bu durumda X ‘ in herhangi bir Y altuzayı ve $x \in X$ için Y ‘ de x’e en fazla bir tane en iyi yaklaşım olabilir. Diğer bir ifadeyle, Y_x ya boş kümedir ya da bir noktadan oluşur.

Lemma 2.1.7: X vektör uzayı kesin konveks bir norma sahiptir ancak ve ancak paralel olmayan vektörler üzerinde üçgen eşitsizliği kesin ise, yani ancak ve ancak

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } x \neq \alpha y, y \neq \alpha x \Rightarrow \left\| x + y \right\| < \left\| x \right\| + \left\| y \right\| \tag{2.1.12}$$

2.2 Noktasal ve Düzgün Yakınsama

Tanım 2.2.1: Bir X kümesi üzerinde tanımlı $f_n : X \to \mathbb{R}, n = 1,2,3,...$ fonksiyon dizisi verilsin. $\forall x \in X$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için bir N (ε ve muhtemelen x’ e bağlı) doğal sayısı var öyle ki, $\forall n > N$ için $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$ oluyorsa, $f_n : X \to \mathbb{R}, n = 1,2,3,...$ dizisi $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna noktasal yakınsar denir. Noktasal yakınsama kısaca $f_n \to f$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2: Bir X kümesi üzerinde tanımlı $f_n : X \to \mathbb{R}, n = 1,2,3,...$ fonksiyon dizisi verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için bir N (sadece ε bağlı, x’ e bağlı olmayan) doğal sayısı var öyle ki, $\forall n > N$ ve $\forall x \in X$ için $\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$ oluyorsa, $f_n : X \to \mathbb{R}, n = 1,2,3,...$ dizisi $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna düzgün yakınsar denir. Düzgün yakınsama kısaca $f_n \overrightarrow{\to} f$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.1: $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\forall\, n = 1,2,3,...,$ için $f_n(x) = e^x + \dfrac{x}{n}$ fonksiyon dizisi verilsin. Dikkat edersek belli bir x için $n \to \infty$ iken

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n} \to 0 \qquad (2.2.1)$$

olduğundan dolayı $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ dizisi $f(x) = e^x$ fonksiyonuna yakınsar. Bu yakınsama noktasal yakınsamadır, çünkü yakınsamanın hızı x' e bağlıdır. Örneğin, $|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}$ elde edebilmek için $n > 2|x|$ olarak almalıyız. Dolayısıyla, $x = 2$ noktasında eşitsizlik $n > 4$ için sağlanırken $x = 1000$ noktasında eşitsizlik için $n > 2000$ için sağlanır. Kısacası, yakınsama hızı x için düzgün değildir.

Yukardaki aynı fonksiyon dizisini bu sefer [-5,5] aralığına kısıtlayalım. Tabiî ki $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ dizisi yine $f(x) = e^x$ fonksiyonuna noktasal olarak yakınsar. Fakat bu sefer dikkat edersek yakınsamanın hızı [-5,5] aralığında düzgündür. Bunu görmek için;

$$x \in [-5,5] \text{ için } |f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{5}{n} \qquad (2.2.2)$$

ifadesinden $n \to \infty$ iken üst sınırın x noktasının seçiminden bağımsız olarak $\frac{5}{n} \to 0$ olduğunu görürüz. Sonuç olarak, bu durumda $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ dizisi $f(x) = e^x$ fonksiyonuna düzgün yakınsıyordur deriz.

2.3 Normlu Lineer Uzaylarda Lineer Dönüşümlerin Sürekliliği

Bu altbölüm boyunca V ve W vektör uzayları arasında $T : V \to W$ şeklinde tanımlanan lineer dönüşümünü ele alacağız. T dönüşümünün lineer olması demek $x, y \in V$ ve $\forall \alpha, \beta$ skalerleri için T dönüşümünün $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ eşitliğini sağlaması demektir. Tüm lineer dönüşümler $T(0) = 0$ ifadesini sağlar. Eğer, V vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\|_1$ normu ve W vektör uzayı üzerinde $\|\cdot\|_2$ normu tanımlı ise T dönüşümünün sürekliliğini ele alacağız.

Teorem 2.3.1: $(V, \|.\|_1)$ ve $(W, \|.\|_2)$ normlu vektör uzayları ile $T : V \to W$ lineer dönüşümü verilsin. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

i. *T* dönüşümü Lipschitz şartını sağlar;
ii. *T* dönüşümü düzgün süreklidir;
iii. *T* dönüşümü süreklidir(her noktada);
iv. *T* dönüşümü $0 \in V$ noktasında süreklidir.
v. Bir $C < \infty$ sabiti vardır öyle ki, $\forall x \in V$ için $\|T(x)\|_2 \leq C\|x\|_1$ dir.

Not 2.3.1: Yukardaki teoremin v. şartını taşıyan dönüşüm sınırlıdır denir. Bu çalışmadaki sınırlılık kavramından kasıt *T* dönüşümünün sınırlı kümeleri sınırlı kümelere götürmesidir. *T* dönüşümü Lipschitz şartını sağladığından dolayı, eğer, $\forall x \in V$ için $\|T(x)\|_2 \leq C\|x\|_1$ ise bu durumda $\forall x, y \in V$ için $\|T(x) - T(y)\|_2 \leq C\|x - y\|_1$ olacaktır. Dolayısıyla, *T* dönüşümü *x* civarındaki *r* yarıçaplı küreyi $T(x)$ civarında *C.r* yarıçaplı küreye götürecektir. Kısaca, $T(B_r(x)) \subset B_{Cr}(T(x))$ olacaktır.

Yukardaki teoremin v. şartında geçen en küçük *C* sabiti *T* operatörünün normu olarak adlandırılır ve genellikle $\|T\|$ ile gösterilir.

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_1} = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Tx\|_2 . \tag{1.3.1}$$

Dolayısıyla, *T* operatörü sınırlıdır ancak ve ancak $\|T\| < \infty$ ise.

Sonlu-boyutlu normlu bir uzayda tüm normların denk olması bize aşağıdaki sonucu verir.

Sonuç 2.3.1: *V* sonlu-boyutlu olmak üzere, *V* ve *W* normlu vektör uzayları olsun. Bu durumda her $T : V \to W$ lineer dönüşümü süreklidir.

3. CEBİRSEL POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

3.1 Giriş

Bu bölümde P_n, $C[a,b]$ sınıfındaki en çok n dereceli cebirsel polinomlardan oluşan altuzay olmak üzere, P_n kümesindeki polinomlarla verilen bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonuna olan en iyi (düzgün) yaklaşım problemini ele alacağız. Bir önceki bölümden bu problemin p_n^* olarak adlandıracağımız bir çözümünün (birden fazla olması muhtemel) olduğunu biliyoruz.

$$E_n(f) = \min_{p \in P_n} \|f - p\| = \|f - p_n^*\| \tag{3.1.1}$$

olarak tanımlayalım. $P_n \subset P_{n+1}$ olduğundan her n için $E_n(f) \geq E_{n+1}(f)$ olacaktır. Bu bölümdeki amacımız $E_n(f) \to 0$ olduğunu göstermektir.

Teorem 3.1.1 (Weierstrass Yaklaşım Teoremi): $f \in C[a,b]$ olsun. Bu durumda $\forall \varepsilon > 0$ için $\|f - p\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir p polinomu vardır[8].

Weierstrass teoreminin bir sonucu olarak $\forall f \in C[a,b]$ için f fonksiyonuna en iyi düzgün yaklaşan bir p_n^* polinomunun var olduğunu söyleyebiliriz. Bu sonuç $E_n(f)$ kümesinin tam olarak yapısını belirlemek için önemli bir ilk adımdır. $E_n(f)$ kümesiyle ilgili daha kesin bilgileri sonraki bölümlerde inceleyeceğiz.

Weierstrass teoreminin bugüne kadar yüzlerce ispatı verilmiştir. Bütün ispatlar $[a,b]$ kapalı aralığının seçiminin önemli olmadığı yönünde bir basitleştirme ile başlar. Biz burada Weierstrass teoreminin bu çalışma için önem teşkil eden üç farklı ispatına yer vereceğiz.

Lemma 3.1.1: Eğer Weierstrass teoremi $C[0,1]$ için sağlanıyorsa bu durumda $C[a,b]$ içinde sağlanır ve tersine $C[a,b]$ için sağlanıyorsa $C[0,1]$ içinde sağlanır.

İspat: Weierstrass teoremi $C[0,1]$ için sağlanıyorsa bu durumda $C[a,b]$ içinde sağlandığını gösterelim.

Verilen herhangi bir $f \in C[a,b]$ için

$$g(x) = f(a + (b-a)x),\ 0 \le x \le 1, \tag{3.1.2}$$

olacak şekilde g fonksiyonunu yazabiliriz. Burada g fonksiyonu $C[0,1]$' in bir elemanıdır. Şimdi, verilen $\varepsilon > 0$ için kabul edelim ki, $\|g - p\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir p polinomunu bulabiliriz. Diğer bir ifadeyle,

$$\max_{0 \le x \le 1} |f(a + (b-a)x) - p(x)| < \varepsilon, \tag{3.1.3}$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $t = a + (b-a)x$ dersek $x = \dfrac{t-a}{b-a}$ eşitliğinden (2.1.2) ifadesini

$$\max_{a \le t \le b} \left| f(t) - p\left(\frac{t-a}{b-a}\right) \right| < \varepsilon \tag{3.1.4}$$

elde ederiz. Eğer, x değişkenine göre $p(x)$ bir polinom ise bu durumda $q(t) = p\left(\dfrac{t-a}{b-a}\right)$ ifadesi de t değişkenine göre bir polinomdur ve $q(t)$ polinomu $\|f - q\| < \varepsilon$ ifadesini sağlar.

Tersine, Weierstrass teoremi $C[a,b]$ için sağlanıyorsa, bu durumda $C[0,1]$ içinde sağlandığı benzer şekilde gösterilir.

3.2 Bernstein'ın İspatı

Şimdi sunacağımız Weierstrass Teoreminin ispatı 1912 yılında S.N. Bernstein tarafından verilmiştir. Bernstein' ın ispatı buradaki çalışma için bir çok yönden önem taşımaktadır. Bunlardan en önemli olanı da verilen $f \in C[a,b]$ fonksiyonuna yaklaşımın bir polinomlar dizisi ile verilmesidir. Üstelik daha sonra göreceğimiz gibi, Bernstein' ın ispatı Bohman-Korovkin Teoremi olarak bilinen güçlü, birleştirici bir teoreme öncülük eder.

Tanım 3.2.1: *f* fonksiyonu $[0,1]$ aralığı üzerinde sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left(B_n(f)\right)(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\quad 0\le x\le 1. \tag{3.2.1}$$

ile tanımlanan ifade f fonksiyonu için **Bernstein polinomlar dizisi** olarak adlandırılır[8].

Dikkat edersek, $B_n(f)$ en çok n. dereceden bir polinomdur. Ayrıca, $\left(B_n(f)\right)(0)=f(0)$ ve $\left(B_n(f)\right)(1)=f(1)$ dir. Bernsteien teoreminin ifadesi her $f\in C[0,1]$ için $B_n(f)$ polinom dizisinin f fonksiyonuna düzgün yakınsadığıdır. Bernstein' ın ispatı için sadece aşağıdaki üç durumun geçerli olduğunu göstermek yeterlidir.

$$f_0(x)=1,\ f_1(x)=x,\ \ f_2(x)=x^2. \tag{3.2.2}$$

Yukardaki üç ifade için aşağıdaki lemma verilmiştir.

Lemma 3.2.1: Aşağıdaki ifadeler sağlanır.

i. $B_n(f_0)=f_0$ ve $B_n(f_1)=f_1$.

ii. $B_n(f_2)=\left(1-\frac{1}{n}\right)f_2+\frac{1}{n}f_1$, ve dolayısıyla $B_n(f_2)\rightrightarrows f_2$.

iii. Eğer $0\le x\le 1$ ise $\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2.\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}\le\frac{1}{4n}$.

iv. Verilen $\delta > 0$ ve $0 \le x \le 1$ için $\{0,...,n\}$ kümesindeki $\left|\frac{k}{n} - x\right| \ge \delta$ eşitsizliğini sağlayan k' ların kümesini F ile gösterelim. Bu durumda $\sum_{k\in F}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \le \frac{1}{4n\delta^2}$ dir.

İspat:

i. $B_n(f_0) = f_0$ olduğu

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1. \tag{3.2.3}$$

binom formülünden elde edilir. $B_n(f_1) = f_1$ olduğunu görmek için ilk önce $k \ge 1$ için

$$\frac{k}{n}\binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1} \tag{3.2.4}$$

olduğunu not edersek, buradan

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= x\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{(n-1)-j} = x. \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

ii. $B_n(f_2)$ 'yi bulmak için;

Eğer, $k = 0$ ise bu durumda

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} = 0\,, \tag{3.2.6}$$

$k=1$ ise

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}=\frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1}=\frac{1}{n}\binom{n-1}{0}=\frac{1}{n}, \tag{3.2.7}$$

ve eğer, $k \geq 2$ ise bu durumda

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}=\frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{k-2}+\frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}. \tag{3.2.8}$$

Dolayısıyla,

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}+\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x. \tag{3.2.9}$$

olur ki, bu da $n\to\infty$ iken $\|B_n(f_2)-f_2\|=\frac{1}{n}\|f_1-f_2\|\to 0$ olduğunu gösterir.

iii. Bu maddeyi ispatlamak için (i) ve (ii) deki sonuçları kullanacağız. $((k/n)-x)^2=(k/n)^2-2x(k/n)+x^2$ olduğundan $0\leq x\leq 1$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}&=\left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x-2x^2+x^2\\&=\frac{1}{n}x(1-x)\leq\frac{1}{4n}\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

elde ederiz.

iv. $k\in F$ için $1\leq((k/n)-x)^2/\delta^2$ olduğuna dikkat edersek, buradan

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \le \frac{1}{\delta^2}\sum_{k\in F}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$\le \frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad (3.2.11)$$
$$\le \frac{1}{4\mathrm{n}\delta^2} \qquad (\text{(iii)'den})$$

Şimdi, Bernstein‘ın ispatını verebiliriz.

İspat: $f \in C[0,1]$ ve $\varepsilon > 0$ olsun. Bu durumda, f sürekli olduğundan bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki, her $|x-y| < \delta$ için $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/2$ dir. $\|f - B_n(f)\|$ değerini elde etmek için bir önceki lemmayı kullanacağız. İlk olarak dikkat edersek, $\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ sayıları negatif olmadığından ve (3.2.3) eşitliğinden toplamları 1 ‘e eşit olduğundan,

$$|f(x)-B_n(f)(x)| = \left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f\left(\frac{k}{n}\right)x^k(1-x)^{n-k}\right|$$
$$= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \qquad (3.2.12)$$
$$\le \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},$$

elde ederiz.

Belirli bir n için, $\{0,...,n\}$ kümesinde $|(k/n)-x| \ge \delta$ olacak şekildeki k’ ların kümesi F olsun. Bu durumda $k \notin F$ için $|f(x)-f(k/n)| < \varepsilon/2$ olurken diğer taraftan, $k \in F$ için $|f(x)-f(k/n)| < 2.\|f\|$ olur. Böylece, $n > \|f\|/\varepsilon\delta^2$ olmak üzere,

$$|f(x)-B_n(f)(x)| \le \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k\notin F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + +2.\|f\|\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$
$$< \frac{\varepsilon}{2}.1 + 2.\|f\|.\frac{1}{4n\delta^2}, \ (\text{Lemma } 2.2.1\,(\text{iv})) \qquad (3.2.13)$$
$$< \varepsilon.$$

3.3 Landau' nun İspatı

Bu bölümde ifade edilecek olan Weierstrass teoreminin ispatı 1908 yılında Landau tarafından verilmiştir. İlk olarak, dikkat edersek verilen bir $f \in C[0,1]$ fonksiyonu için p bir polinom olmak üzere, $f - p$ ifadesine yaklaşım yeterlidir. $f(0) + x(f(1) - f(0))$ lineer fonksiyonunu göz önüne alırsak $f(0) = f(1) = 0$ olduğunu ve dolayısıyla da [0,1] aralığının dışında $f \equiv 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Diğer bir ifadeyle, f fonksiyonunun tüm $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve düzgün sürekli olduğunu kabul edebiliriz.

Bir önceki altbölümde olduğu gibi tekrar f fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir polinomlar dizisi tanımlayacağız. c_n katsayıları

$$c_n = \int_{-1}^{1} (1 - t^2)^n \, dt = 1 \tag{3.3.1}$$

olacak şekilde seçilmek üzere,

$$L_n(x) = c_n \int_{-1}^{1} f(x+t)(1-t^2)^n \, dt, \tag{3.3.2}$$

ile $L_n(x)$ dizisini tanımlayalım.

f fonksiyonu üzerindeki kabulleri dikkate alırsak, (3.3.2) ifadesini aşağıdaki şekilde yazabiliriz,

$$L_n(x) = c_n \int_{-x}^{1-x} f(x+t)(1-t^2)^n \, dt = c_n \int_{0}^{1} f(t)(1-(t-x)^2)^n \, dt. \tag{3.3.3}$$

Yukardaki yazım şekli ile L_n 'in en çok $n.$ dereceden bir polinom olduğu açıktır.

Basit bir tümevarım hesabıyla $(1-t^2)^n \geq 1 - nt^2$ olduğu görülür ve buradan

$$\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n\,dt \geq 2.\int_{0}^{1/\sqrt{n}}(1-nt^2)dt = \frac{4}{3\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}, \tag{3.3.4}$$

elde ederiz. (3.3.4) eşitsizliğinden $c_n < \sqrt{n}$ olduğu görülür. Özel olarak, herhangi $0<\delta<1$ için $n \to \infty$ iken $c_n\int_{\delta}^{1}(1-t^2)^n\,dt < \sqrt{n}(1-\delta^2)^n \to 0$ elde ederiz ki, bu da c_n için istenilen eşitsizliktir.

$\varepsilon > 0$ verilsin, $|x-y| \leq \delta$ iken $|f(x)-f(y)| \leq \varepsilon/2$ olacak şekilde bir $0<\delta<1$ seçelim. Bu durumda $c_n(1-t^2)^n \geq 0$ ve integrali 1' e eşit olduğundan yeterince büyük n için

$$\begin{aligned}
|L_n(x)-f(x)| &= \left| c_n\int_{0}^{1}\left[f(x+t)-f(x)\right](1-t^2)^n\,dt \right| \\
&\leq c_n\int_{0}^{1}|f(x+t)-f(x)|(1-t^2)^n\,dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2}c_n\int_{0}^{\delta}(1-t^2)^n\,dt + 2\|f\|c_n\int_{\delta}^{1}(1-t^2)^n\,dt \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|\sqrt{n}(1-\delta^2)^n < \varepsilon
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

elde ederiz.

Buraya kadar olan kısımda bir gözlemde bulunursak: $B_n(f)$ Bernstein polinomları f fonksiyonuna uygun ve açık bir polinomial yaklaşım sunmalarına karşın bu yaklaşım hiçbir anlamda en iyi yaklaşım değildir. Aslında, hatırlarsak $f_1(x)=x$ ve $f_2(x)=x^2$ ise bu durumda $B_n(f_2)=\left(1-\frac{1}{n}\right)f_2+\frac{1}{n}f_1 \neq f_2$ dir. Açıkçası, sonlu boyutlu P_n polinomlar kümesinde f_2 fonksiyonuna en iyi yaklaşım $n \geq 2$ olmak üzere f_2 fonksiyonun kendisidir. Diğer taraftan, her zaman için

$$E_n(f) \leq \|f-B_n(f)\| \tag{3.3.6}$$

olduğundan dolayı Bernstein' ın ispatının detaylı bir şekilde kavranması polinomial yaklaşımdaki genel problem hakkında bize ışık tutacaktır.

Tanım 3.3.1: $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde tanımlı ve sınırlı bir f fonksiyonunun herhangi $\delta > 0$ için **süreklilik modülü** aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$\omega_f(\delta) = \omega_f([a,b];\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [a,b],\ |x - y| \le \delta\}. \tag{3.3.7}$$

Süreklilik modülünün bazı özellikleri:

1. Herhangi $x \neq y \in [a,b]$ için her zaman $|f(x) - f(y)| \le \omega_f(|x - y|)$ dir.
2. Eğer, $0 < \delta' < \delta$ ise bu durumda $\omega_f(\delta') \le \omega_f(\delta)$ dır.
3. f fonksiyonu düzgün süreklidir ancak ve ancak $\delta \to 0^+$ iken $\omega_f(\delta) \to 0$ ise.
4. Eğer, f' var ve $[a,b]$ aralığı üzerinde sınırlı ise bu durumda bazı K sabitleri için $\omega_f(\delta) \le K\delta$ dır.
5. Genel olarak, $0 < \alpha \le 1$ ve $0 \le K < \infty$ olmak üzere, eğer, her x, y için $|f(x) - f(y)| \le K|x - y|^\alpha$ oluyorsa f fonksiyonu K sabiti ile α dereceden

Lipschitz şartını sağlar deriz. Bu ifadeyi kısaltılmış olarak $f \in LipK^\alpha$ ile ifade edeceğiz.

Not: Eğer, $f \in LipK^\alpha$ ise bu durumda her $\delta > 0$ için $\omega_f(\delta) \le K\delta^\alpha$ dır.

Lemma 3.3.1: f $[a,b]$ aralığı üzerinde sınırlı bir fonksiyon ve $\delta > 0$ olsun. Bu durumda $n = 1,2,...$ için $\omega_f(n\delta) \le n\omega_f(\delta)$ dır ve bundan dolayı $\forall \lambda > 0$ için $\omega_f(\lambda\delta) \le (1 + \lambda)\omega_f(\delta)$ dır[8].

İspat: $|x - y| \le n\delta$ olacak şekilde $x < y$ verilsin, $[x, y]$ aralığını uzunlukları en fazla δ olacak şekilde n parçaya bölelim. Özel olarak, eğer, $k = 0,1,...,n$ için

$z_k = x + k(y-x)/n$ olarak alırsak, bu durumda herhangi $k \geq 1$ için $|z_k - z_{k-1}| \leq \delta$ elde ederiz ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} |f(x)-f(y)| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(z_k) - f(z_{k-1})\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(z_k) - f(z_{k-1})| \\ &\leq n\omega_f(\delta), \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

olduğundan $\omega_f(n\delta) \leq n\omega_f(\delta)$ elde ederiz.

Şimdi, $\forall \lambda > 0$ için $\omega_f(\lambda\delta) \leq (1+\lambda)\omega_f(\delta)$ olduğunu gösterelim. Verilen $\lambda > 0$ için $n-1 < \lambda \leq n$ olacak şekilde bir n tamsayı seçer ve ispatın ilk kısmını kullanırsak, buradan

$$\omega_f(\lambda\delta) \leq \omega_f(n\delta) \leq n\omega_f(\delta) \leq (1+\lambda)\omega_f(\delta) \tag{3.3.9}$$

elde ederiz.

Teorem 3.3.1: [0,1] aralığı üzerinde herhangi sınırlı *f* fonksiyonu için

$$\|f - B_n(f)\| \leq \frac{3}{2}\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{3.3.10}$$

dir ve özel olarak, eğer, $f \in C[0,1]$ ise bu durumda $n \to \infty$ iken $E_n(f) \leq \frac{3}{2}\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0$ olacaktır.

İspat:

$$\begin{aligned}
\left|f(x)-B_n(f)(x)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\left(f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right| \\
&\le \sum_{k=0}^{n}\left|f(x)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&\le \sum_{k=0}^{n}\omega_f\left(\left|x-\frac{k}{n}\right|\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad (3.3.11)\\
&\le \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sum_{k=0}^{n}\left[1+\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\right]\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&\le \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1+\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right],
\end{aligned}$$

Burada 3. eşitsizlikteki geçiş bir önceki lemma($\lambda=\sqrt{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|$ ve $\delta=\frac{1}{\sqrt{n}}$ alınarak) göz önüne alınarak sağlanmıştır. İspatın bundan sonra geri kalan kısmı toplamı belirleyeceğiz ve bunu Cauchy-Schwarz eşitsizliğini kullanarakkullanacağız. Her bir $\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ terimi negatif olmadığından,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \\
&\le \left[\sum_{k=0}^{n}\left|x-\frac{k}{n}\right|^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]^{1/2}.\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]^{1/2} \qquad (3.3.12)\\
&\le \left[\frac{1}{4n}\right]^{1/2}=\frac{1}{2\sqrt{n}},
\end{aligned}$$

elde ederiz ve son olarak

$$\left|f(x)-B_n(f)(x)\right|\le \omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[1+\sqrt{n}\,\frac{1}{2\sqrt{n}}\right]=\frac{3}{2}\omega_f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \qquad (3.3.13)$$

3.4 Bohman-Korovkin Teoremi

Bernstein' ın yaklaşımının sağladığı en büyük fayda $f \mapsto B_n(f)$ dönüşümünün polinomsal yaklaşımda basit bir formül sunarken aynı zamanda dönüşümün lineer ve pozitif olmasıdır. Başka bir ifadeyle

$$\begin{aligned} &B_n(f+g) = B_n(f) + B_n(g), \\ &B_n(\alpha f) = \alpha B_n(f),\ \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned} \tag{3.4.1}$$

ve $f \geq 0$ olduğunda $B_n(f) \geq 0$ dır.

Bildiğimiz gibi, herhangi pozitif ve lineer $L : C[0,1] \to C[0,1]$ dönüşümü aynı zamanda süreklidir.

Lemma 3.4.1: Eğer, $L : C[a,b] \to C[a,b]$ dönüşümü hem pozitif ve hem de lineer ise bu durumda *L* dönüşümü süreklidir[8].

İspat: İlk olarak dikkat edersek, pozitif bir dönüşüm lineer ise aynı zamanda monotondur. Diğer bir ifadeyle, $f \leq g$ için $L(f) \leq L(g)$ dir. Dolayısıyla, herhangi $f \in C[a,b]$ için

$$-f, f \leq |f| \Rightarrow -L(f), L(f) \leq L(|f|);\ \text{yani}\ |L(f)| \leq L(|f|), \tag{3.4.2}$$

elde ederiz. **1** sabit **1** fonksiyonu olmak üzere $|f| \leq \|f\|.\mathbf{1}$ ifadesinden

$$|L(f)| \leq L(|f|) \leq \|f\| L(1) \tag{3.4.3}$$

elde ederiz. Böylece, herhangi $f \in C[a,b]$ için

$$\|L(f)\| \leq \|f\| \|L(1)\|, \tag{3.4.4}$$

elde ederiz ve son olarak L lineer olduğundan L dönüşümü $\|L(1)\|$ sabiti ile Lipschitz şartını sağlar:

$$\|L(f)-L(g)\| = \|L(f-g)\| \leq \|L(1)\|.\|f-g\|. \tag{3.4.5}$$

Sonuç olarak, L dönüşümü süreklidir.

Teorem 3.4.1(Bohman-Korovkin, 1952): $L_n : C[a,b] \to C[a,b]$ pozitif, lineer operatörlerin bir dizisi olsun ve kabul edelim ki, aşağıda verilen üç durumun her birinde $L_n(f) \to f$ düzgün yakınsasın,

$$f_0(x)=1,\ f_1(x)=x,\ f_2(x)=x^2 \tag{3.4.6}$$

Bu durumda her $f \in C[a,b]$ için $L_n(f) \to f$ düzgün yakınsar.

İspat: $f \in C[a,b]$ olsun. f fonksiyonu düzgün sürekli olduğundan verilen $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki, $|x_1 - x_2| < \delta$ ise $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ dur.

Her $y \in [a,b]$ için

$$p_n(x) = f(y) + \varepsilon + \frac{2\|f\|(x-y)^2}{\delta^2}, \tag{3.4.7}$$

ve

$$p_\ell(x) = f(y) - \varepsilon - \frac{2\|f\|(x-y)^2}{\delta^2}, \tag{3.4.8}$$

olarak tanımlayalım. $|x-y| < \delta$ için $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ ve $|x-y| > \delta$ için

$$|f(x)-f(y)| < \frac{2\|f\|(x-y)^2}{\delta^2} \tag{3.4.9}$$

olduğundan $\forall x \in [a,b]$ için

$$p_\ell(x) \le f(x) \le p_n(x) \tag{3.4.10}$$

yazabiliriz.

L_n operatörleri pozitif lineer olduğundan $\forall x \in [a,b]$ ve özel olarak $x = y$ için

$$(L_n p_\ell)(x) \le (L_n f)(x) \le (L_n p_n)(x) \tag{3.4.11}$$

elde ederiz.

Verilen belirli f, ε ve δ için p_ℓ ve p_n , y değişkenine bağlı kuadratik polinomlardır. Açık bir ifade ile, $y \in [a,b]$ ‘ den bağımsız olarak katsayılar sınırlı ve $f_0(x) = 1,\ f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2$ durumları için $L_n(f) \to f$ düzgün yakınsadığından

$$p_n(x) = \left(f(y) + \varepsilon + \frac{2\|f\|y^2}{\delta^2} \right) - \left(\frac{4\|f\|y}{\delta^2} \right)x + \left(\frac{2\|f\|}{\delta^2} \right)x^2 . \tag{3.4.12}$$

Bu durumda $\forall n \ge N$ ve $y \in [a,b]$’ nin her seçimi için bir N sayısı vardır öyle ki, $\forall x \in [a,b]$ için

$$|(L_n p_n)(x) - (p_n)(x)| < \varepsilon , \tag{3.4.13}$$

ve benzer olarak

$$|(L_n p_\ell)(x) - (p_\ell)(x)| < \varepsilon \tag{3.4.14}$$

olacaktır. Bir başka ifadeyle, $L_n p_\ell$ ve $L_n p_n$ sırasıyla hem *x,* hem de *y* değişkenlerine göre p_ℓ ve p_n' ya düzgün yakınsarlar. $x = y$ olarak alırsak,

$$(L_n p_n)(y) < (p_n)(y) + \varepsilon = f(y) + 2\varepsilon \,, \tag{3.4.15}$$

ve

$$(L_n p_\ell)(y) > (p_\ell)(y) - \varepsilon = f(y) - 2\varepsilon \,, \tag{3.4.16}$$

elde ederiz. Dolayısıyla, $\varepsilon > 0$ verilsin, $\forall y \in [a,b]$ ve $\forall n \geq N$ için bir N sayısı vardır öyle ki (3.4.11) eşitsizliğinden

$$f(y) - 2\varepsilon < (L_n f)(y) < f(y) + 2\varepsilon \,, \tag{3.4.11}$$

elde ederiz ki, bununla teoremi ispatlamış oluruz.

Örnek 3.4.1 (Bohman-Korovkin teoreminin bir uygulaması): $f \in C[0,1]$ ve her n için $L_n(f)$ operatörler dizisi *f* fonksiyonuna aşağıda belirtildiği şekliyle " polinomial" bir yaklaşım olsun. $k = 0,1,...,n$ olmak üzere, $L_n(f)$ her bir $[(k-1)/n, k/n]$ alt aralığında lineer olsun ve bu alt aralıkların uç noktalarında $L_n(f)$, *f* fonksiyonu ile aynı ($L_n(f)(k/n) = f(k/n)$) değerlerini alsın. Bu şartlar altında her bir $f \in C[0,1]$ fonksiyonu için $L_n(f) \to f$ düzgün yakınsar. Burada Bohman-Korovkin teoreminin nasıl çalıştığını görelim.

$L_n(f_0) = f_0$ ve $L_n(f_1) = f_1$ olduğundan her lineer *f* fonksiyonu için $L_n(f) = f$ dir ve dolayısıyla, $L_n(f)$'in pozitif ve lineer olduğu açıktır. O halde, $L_n(f_2) \rightrightarrows f_2$ olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. $[(k-1)/n, k/n]$ aralığında $L_n(f_2)$ ile f_2 arasındaki maksimum uzaklık en fazla

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^2 = \frac{2k-1}{n^2} \leq \frac{2}{n} \tag{3.4.12}$$

olabilir. Yani, $n \to \infty$ iken $\|L_n(f_2) - f_2\| \leq \frac{2}{n} \to 0$ olacaktır. O halde, Bohman-Korovkin teoreminden, her bir $f \in C[0,1]$ fonksiyonu için $L_n(f) \to f$ düzgün yakınsar diyebiliriz.

4. TRİGONOMETRİK POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

4.1 Giriş

Trigonometrik bir polinom kısaca $a_0,...,a_n$ ve $b_0,...,b_n$ reel sayılar olmak üzere, aşağıda verilen formdaki bir fonksiyondur;

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{4.1.1}$$

T_n ile derecesi en çok *n.* dereceden olan trigonometrik fonksiyonların sınıfını ve *T* ile de tüm trigonometrik polinomların sınıfını göstereceğiz.

$\mathbb{R}$ üzerindeki 2π -periyotlu tüm sürekli fonksiyonlardan oluşan uzayı $C^{2\pi}$ ile göstereceğiz. T_n sınıfı $C^{2\pi}$ uzayı tarafından kapsanır. $C^{2\pi}$ uzayının çeşitli denk tanımları vardır. Bunlardan bir tanesi de, $C^{2\pi}$ uzayı, $\mathbb{R}$ üzerindeki tüm sürekli fonksiyonların uzayı $C(\mathbb{R})$'nin bir altuzayıdır. Fakat aşağıda verilen şekli ile $C^{2\pi}$ uzayını $C[0,2\pi]$'nin bir altuzayı olarak düşünebiliriz: $\mathbb{R}$ üzerindeki 2π -periyotlu sürekli fonksiyonların kümesini $f(0) = f(2\pi)$ eşitliğini sağlayan $f \in C[0,2\pi]$ fonksiyonlarının kümesi olarak tanımlayabiliriz. Bu şekildeki her bir f fonksiyonu $C(\mathbb{R})$ uzayının 2π -periyotlu bir elemanına genişletilmiş olur, $f(0) = f(2\pi)$ şartının $C[0,2\pi]$'nin bir altuzayını tanımladığını kolaylıkla görebiliriz. $C^{2\pi}$ uzayı için üçüncü bir tanım olarak, Ŧ, kompleks düzlemde birim çember olmak üzere Ŧ üzerindeki reel-değerli tüm sürekli fonksiyonlardan oluşan $C($Ŧ$)$ sınıfını verebiliriz. Bir başka ifadeyle, basit olarak aşağıdaki tespitlerde bulunmuş olduk:

$$\theta \longleftrightarrow e^{i\theta} \text{ ve } f(\theta) \longleftrightarrow f(e^{i\theta}). \tag{4.1.2}$$

Yukarıda ifade edilen üç tanımda da, her bir $f \in C^{2\pi}$ fonksiyonu tüm $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün sürekli ve düzgün sınırlıdır ve tamamıyla 2π uzunluğundaki herhangi bir aralıkta aldığı değerler ile belirlenir. $C^{2\pi}$ uzayı üzerinde aşağıda verilen normu tanımlayalım;

$$\|f\| = \max_{0\le x\le 2\pi}|f(x)| = \max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|. \tag{4.1.3}$$

4.2 Weierstrass' ın İkinci Teoremi

Teorem 4.2.1(Weierstrass' ın ikinci Teoremi, 1885): $f \in C^{2\pi}$ olsun. Bu durumda, $\forall\varepsilon > 0$ için $\|f - T\| < \varepsilon$ olacak şekilde trigonometrik bir T polinomu vardır.

Weierstrass' ın kendisi cebirsel polinomlarla yaklaşım üzerine olan teoremini içeren makalesinde bu teoremin ispatını vermiştir. Fakat, 1898' de Lebesgue aslında Weierstrass' ın iki teoreminin birbirine denk olduğunu göstermiştir.

Teoremin ispatına geçmeden, ilk olarak (4.1.1) ile verilen ifadenin bir polinom belirttiğini gösterelim.

Lemma 4.2.1: Herhangi $n \ge 0$ tamsayısı için $\cos nx$ ve $\sin(n+1)x/\sin x$ tam olarak *n*. dereceden polinomlar olarak $\cos x$ ile ifade edilebilirler.

İspat: $\cos kx + \cos(k-2)x = 2\cos(k-1)x\cos x$ yineleme formülünü kullanarak, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1,\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x,$ ve $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$ elde ederiz. Daha genel olarak, tümevarımla, $\cos nx$, 2^{n-1} baş katsayısı ile $\cos x$' in *n*. dereceden bir polinomudur. Bu gerçeği ve $\sin(k+1)x - \sin(k-1)x = 2\cos kx\sin x$ ifadesini kullanarak, $\sin(n+1)x$'in 2^n baş katsayılı $\sin x$ çarpanlı $\cos x$' in *n*. dereceden bir polinomu olarak yazılabileceğini görürüz.

Alternatif olarak, $(i\sin x)^{2k} = (\cos^2 x - 1)^k$ ifadesini kullanırsak

$$\cos nx = \mathrm{Re}\left[(\cos x + i\sin x)^n\right] = \mathrm{Re}\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i\sin x)^k \cos^{n-k} x\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}(\cos^2 x - 1)^k \cos^{n-2k} x, \tag{4.2.1}$$

elde ederiz. Bu açılımdaki $\cos nx$ ' in katsayısı

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^{n-1} \tag{4.2.2}$$

dır. Benzer olarak, $(i\sin x)^{2k+1} = i(\cos^2 x - 1)^k \sin x$ ifadesini kullanarak

$$\sin(n+1)x = \mathrm{Im}\left[(\cos x + i\sin x)^{n+1}\right] = \mathrm{Im}\left[\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(i\sin x)^k \cos^{n+1-k} x\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n+1}{2k+1}(\cos^2 x - 1)^k \cos^{n-2k} x \sin x, \tag{4.2.3}$$

elde ederiz ve bu açılımdaki $\cos^n x \sin x$ ' in katsayısı

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n+1}{2k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+}{k} = 2^n \tag{4.2.4}$$

olur.

Sonuç 4.2.1: (4.1.1) ile verilen herhangi bir trigonometrik polinom, P ve Q sırasıyla en çok n ve $n-1$ dereceli cebirsel polinomlar olmak üzere, $P(\cos x) + Q(\cos x)\sin x$ şeklinde yazılabilir. Eğer, (4.1.1) çift bir fonksiyonu ifade ediyorsa bu durumda sadece cosinüs kullanarak yazılabilir.

Sonuç 4.2.2: T sınıfı, tüm trigonometrik polinomların sınıfı, $C^{2\pi}$ uzayının hem bir altuzayı hem de bir alt halkasıdır (yani, T sınıfı lineer kombinasyonlar ve çarpımlar altında kapalıdır). Diğer bir ifadeyle, T sınıfı, $C^{2\pi}$ uzayının bir altcebiridir.

Burada sunulan süreç tersine çevrilebilir; yani, $\cos x$ ve $\sin x$ terimli her bir cebirsel polinom (4.1.1) formunda yazılabilir. Örneğin, $4\cos^3 x = 3\cos x + \cos 3x$ gibi.

Şimdi, $C^{2\pi}$ uzayı ile ilgili bazı bilgileri sunalım. İlk olarak, aşağıda verilen $2n+1$ tane fonksiyon lineer bağımsızdır.

$$A = \{1,\ \cos x,\ \cos 2x, ...,\ \cos nx,\ \sin x,\ \sin 2x, ...,\ \sin nx\} \tag{4.2.5}$$

Yukarda verilen fonksiyonların lineer bağımsız olduklarını göstermenin kolay bir yolu, $C^{2\pi}$ uzayı üzerinde bu fonksiyonların ortagonal olduğu bir iç çarpım tanımlamaktır. Özel olarak, $f, g \in A$ olmak üzere, herhangi bir çift fonksiyon için

$$< f, g >= \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx = 0, \qquad < f, f >= \int_0^{2\pi} f(x)^2 \neq 0\,. \tag{4.2.6}$$

İkinci olarak, A' daki her bir eleman

$$B = \{1,\ \cos x,\ \cos^2 x, ...,\ \cos^n x,\ \sin x, \cos x \sin x, ...,\ \cos^{n-1} x \sin x\} \tag{4.2.7}$$

ile verilen $2n+1$ tane fonksiyonun gerdiği uzayda kalır. Yani,

$$T_n \equiv spanA \subset spanB\,. \tag{4.2.8}$$

Boyutları karşılaştırırsak,

$$2n+1 = \dim T_n = \dim(spanA) \leq \dim(spanB) \leq 2n+1 \tag{4.2.9}$$

elde ederiz ve dolayısıyla da $spanA = spanB$ olmalıdır. T_n, $C^{2\pi}$ uzayının sonlu-boyutlu bir altuzayıdır ve T_n altuzayının bir tabanı olarak A veya B kümesini kullanabiliriz.

Son olarak, kompleks trigonometrik polinomlar için olan durumu özetleyelim. (4.1.1) ifadesinde kompleks katsayılar kullanırsak bu durumda

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} \tag{4.2.10}$$

ifadesi kompleks trigonometrik polinom ifade eder. Burada c_k katsayıları kompleks ve $z = e^{iz}$, $\overline{z} = e^{-iz}$ dir. n. dereceden kompleks trigonometrik polinomlar $\mathbb{C}$ üzerinde $2n+1$ boyutlu bir vektör uzayı teşkil eder(eğer, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayı olarak düşünürsek bu durumda boyut $2(2n+1)$ olur).

(4.2.10) ifadesindeki polinom reel değerli bir polinomu ifade eder ancak ve ancak

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} = \overline{\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}} = \sum_{k=-n}^{n} \overline{c}_{-k} e^{-ikx} \tag{4.2.11}$$

oluyorsa. Diğer bir ifadeyle, eğer her k için $c_k = \overline{c}_{-k}$ oluyorsa. Özel olarak, c_0 reel olmak üzere

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx} &= c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikx} + c_{-k} e^{-ikx}) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{n} (c_k e^{ikx} + \overline{c}_k e^{-ikx}) \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[(c_k + \overline{c}_k) \cos kx + i(c_k - \overline{c}_k) \sin kx \right] \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{n} \left[2\operatorname{Re}(c_k) \cos kx - 2\operatorname{Im}(c_k) \sin kx \right],
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

elde ederiz ve görüldüğü üzere (4.2.12) ifadesindeki son satır (4.1.1) formundadır.

Tersine, (4.1.1) formunda verilen herhangi bir reel trigonometrik polinom (4.2.10) formunda aşağıda verilen şekilde yazılabilir

$$a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=a_0+\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{a_k-ib_k}{2}\right)e^{ik}+\left(\frac{a_k+ib_k}{2}\right)e^{-ikx}\right], \qquad (4.2.13)$$

burada her k için $c_k=\overline{c}_{-k}$ dir.

$C^{2\pi}$ uzayı ve trigonometrik polinomlarla ilgili verilen bilgilerden sonra tekrar yaklaşım teorisine geri dönersek, $C^{2\pi}$ uzayını $C[0,2\pi]$'nin bir altuzayı olarak tanımlanabileceğinden ve T_n, $C^{2\pi}$ uzayının sonlu-boyutlu bir altuzayı olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.2.3: Her $f\in C^{2\pi}$ fonksiyonunun T_n uzayında (hepsi $\mathbb{R}$' de olmak üzere) bir en iyi yaklaşımı vardır. Eğer, f çift bir fonksiyon ise bu durumda en iyi yaklaşım polinomu da çiftdir.

İspat: Sadece sonucun ikinci ifadesini ispatlamamız yeterlidir. Dolayısıyla, $f\in C^{2\pi}$ fonksiyonunun çift olduğunu ve $T^*\in T_n$ polinomunun

$$\|f-T^*\|=\min_{T\in T_n}\|f-T\| \qquad (4.2.14)$$

eşitliğini sağladığını kabul edelim. Bu durumda, f fonksiyonu çift olduğundan, $\widetilde{T}(x)=T^*(-x)$ polinomu da aynı zamanda T_n uzayında f fonksiyonuna bir en iyi yaklaşımdır. Aslında,

$$\begin{aligned}\|f-\widetilde{T}\|&=\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-T^*(-x)|\\&=\max_{x\in\mathbb{R}}|f(-x)-T^*(x)|\\&=\max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-T^*(x)|=\|f-T^*\|.\end{aligned} \qquad (4.2.15)$$

dır.

Fakat bu durumda

$$\hat{T}(x)=\frac{\widetilde{T}(x)+T^*(x)}{2}=\frac{T^*(-x)+T^*(x)}{2}, \tag{4.2.16}$$

çift trigonometrik polinomu da T_n uzayında f fonksiyonuna bir en iyi yaklaşım olur. Çünkü

$$\left\|f-\hat{T}\right\|=\left\|\frac{(f-\widetilde{T})+(f-T^*)}{2}\right\|\leq\frac{\left\|f-\widetilde{T}\right\|+\left\|f-T^*\right\|}{2}=\min_{T\in T_n}\left\|f-T\right\| \tag{4.2.17}$$

dir. Şimdi Weierstrass' ın ikinci teoreminin Lebesgue (de la Vallée Poussin's versiyonu) tarafından verilen ispatını vereceğiz;

Teorem 4.2.2: $f\in C^{2\pi}$ ve $\varepsilon>0$ olsun. Bu durumda, $\left\|f-T\right\|=\max_{x\in\mathbb{R}}\left|f(x)-T(x)\right|<\varepsilon$ olacak şekilde trigonometrik bir T polinomu vardır.

İspat: İspatı, Weierstrass' ın $C[-1,1]$ için olan birinci teoreminin ispatının $C^{2\pi}$ için olan ikinci teoremini dolaylı olarak ifade ettiğini göstererek 3 adımda vereceğiz.

Adım 1. Eğer, f çift bir fonksiyonsa bu durumda, f ‘ e çift trigonometrik polinomlarla düzgün yaklaşılabilinir.

Eğer, f çift bir fonksiyonsa bu durumda, f fonksiyonunun $[0,\pi]$ aralığındaki yaklaşımını vermemiz yeterli olacaktır. Bu şartlar altında, amacımıza uygun olarak, $-1\leq y\leq 1$ olmak üzere, $C[-1,1]$ sınıfından $g(y)=f(\arccos y)$ fonksiyonunu ele alabiliriz. Weierstrass' ın birinci teoreminden

$$\max_{-1\leq y\leq 1}\left|f(\arccos y)-p(y)\right|=\max_{0\leq x\leq\pi}\left|f(x)-p(\cos x)\right|, \tag{4.2.18}$$

olacak şekilde cebirsel bir $p(y)$ polinomu vardır. Fakat, $T(x) = p(\cos x)$ çift bir trigonometrik polinomdur. Dolayısıyla, $\|f - T\| = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - T(x)| < \varepsilon$ dur.

$\|f - T\| < \varepsilon$ ifadesini kısaca $f \approx T$ ile gösterelim.

Adım 2. Verilen herhangi bir $f \in C^{2\pi}$ fonksiyonu için $2f(x)\sin^2 x \approx T_2(x)$ olacak şekilde bir T trigonometrik polinomu vardır.

$f(x) + f(-x)$ ve $[f(x) - f(-x)]$ fonksiyonlarının her ikisi de çifttir. Dolayısıyla,

$$f(x) + f(-x) \approx T_1(x) \text{ ve } [f(x) - f(-x)]\sin x \approx T_2(x) \ , \qquad (4.2.19)$$

olacak şekilde çift T_1 ve T_2 trigonometrik polinomlarını seçebiliriz. İlk ifadeyi $\sin^2 x$ ve ikinci ifadeyi $\sin x$ ile çarpıp toplarsak,

$$2f(x)\sin^2 x \approx T_1(x)\sin^2 x + T_2(x)\sin x \equiv T_3(x), \qquad (4.2.20)$$

elde ederiz. Burada, $T_3(x)$ hala trigonometrik bir polinomdur ve "$\approx$" sembolü "2ε farkı ile" anlamına gelir($|\sin x| \le 1$ olduğundan).

Adım 3. Verilen herhangi bir $f \in C^{2\pi}$ fonksiyonu için $2f(x)\cos^2 x \approx T(x)$ olacak şekilde bir T trigonometrik polinomu vardır ve burada "$\approx$" sembolü "2ε farkı ile" anlamına gelir.

$f(x - \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2} - x)$ ve $\left[f(x - \frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2} - x) \right]$ fonksiyonlarının her ikisi de çifttir. Dolayısıyla,

$$f(x - \frac{\pi}{2}) + f(\frac{\pi}{2} - x) \approx T_1(x) \text{ ve } \left[f(x - \frac{\pi}{2}) - f(\frac{\pi}{2} - x) \right]\sin x \approx T_2(x) \ , \qquad (4.2.21)$$

olacak şekilde çift T_1 ve T_2 trigonometrik polinomlarını seçebiliriz. İlk ifadeyi $\sin^2 x$ ve ikinci ifadeyi $\sin x$ ile çarpıp toplarsak,

$$2f(x-\frac{\pi}{2})\sin^2 x \approx T_1(x)\sin^2 x + T_2(x)\sin x \equiv T_4(x), \tag{4.2.22}$$

elde ederiz. Burada, $T_4(x)$ hala trigonometrik bir polinomdur ve "$\approx$" sembolü "2ε farkı ile" anlamına gelir.

$2f(x-\frac{\pi}{2})\sin^2 x \approx T_4(x)$ ise bu durumda $2f(x)\cos^2 x \approx T_5(x)$ dir ve burada $T_5(x)$ trigonometrik bir polinomdur.

Son olarak **adım 2** ve **adım 3** 'deki sonuçları birleştirirsek, $f \approx T_6(x)$ olacak şekilde bir $T_6(x)$ trigonometrik polinomun var olduğunu elde ederiz ve burada tekrar "$\approx$" sembolü "2ε farkı ile" anlamına gelir.

Tanım 4.2.1: Aşağıda verilen eşitliği sağlayan $T_n(x)$ cebirsel polinomları birinci ceşit Chebyshev polinomları olarak adlandırılır.

$$T_n(\cos x) = \cos nx, \quad n = 1,2,... \tag{4.2.23}$$

Dikkat edersek (4.2.23) formülü T_n ' i tek olacak şekilde derecesi tam olarak n olan bir polinom olarak tanımlar ve dolayısıyla $|x| > 1$ için $T_n(x)$ ' in değerini de tek olacak şekilde belirler.

Tanım 4.2.2: Aşağıda verilen eşitliği sağlayan $U_n(x)$ cebirsel polinomları ikinci ceşit Chebyshev polinomları olarak adlandırılır.

$$U_n(\cos x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x}, \quad n = 1,2,... \tag{4.2.24}$$

Burada da (4.2.24) formülü U_n'i tek olacak şekilde derecesi tam olarak n olan bir polinom olarak tanımlar.

Bundan sonraki bölümde Chebyshev polinomlarının ilgi çekici birçok özelliğine yer vereceğiz. Bir sonraki bölüme geçmeden önce bu özelliklerden bir tanesini verelim. Daha önce verdiğimiz yineleme formülünü

$$\cos nx = 2\cos x \cos(n-1)x - \cos(n-2)x, \tag{4.2.25}$$

$T_0(x) = 1$ ve $T_1(x) = x$ olmak üzere, aşağıdaki forma dönüştürebiliriz

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n \geq 2. \tag{4.2.26}$$

Bu yineleme bağıntısı (T_0 ve T_1 başlangıç durumları ile) birinci çeşit Chebyshev polinomlarının bir tanımı olarak alınabilir. Bu yineleme bağıntısı ile herhangi sayıda Chebyshev polinomlarının bir listesini vermek daha kolaydır. Örneğin, $T_2(x) = 2x^2 - 1,$ $T_3(x) = 4x^3 - 3x,$ $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ ve $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$

5. EN İYİ YAKLAŞIMIN KARAKTERİZASYONU

5.1 Giriş

Bu bölümde Chebyshev' in 1854' de ortaya koyduğu en iyi polinomsal yaklaşım probleminin çözümünü vereceğiz. Chebyshev, problemin bir çözümün var olduğuna dahi inanmayı gerektirecek hiçbir neden yok iken, çözümün tek olduğunu ileri sürmüştü. Aslında Weierstrass sonuçlarının ispatına 30 yıl önceden Chebyshev çalışmalarında yüzeysel olsada yer vermiştir. Bu sonuçların ispatı detaylı olarak 1903' de Kirschberger tarafından verilmiştir. Burada verilen sunumun içeriğini daha çok Haar ve de la Vallée Poussin ' a borçluyuz.

5.2 En İyi Yaklaşım

Lemma 5.2.1: $f \in C[a,b]$ ve $p = p_n^*$, f fonksiyonuna P_n kümesindeki bir en iyi yaklaşım olsun. Bu durumda,

$$f(x_1) - p(x_1) = -(f(x_2) - p(x_2)) = \|f - p\|, \tag{5.2.1}$$

olacak şekilde en azından iki farklı $x_1, x_2 \in [a,b]$ noktası vardır. Diğer bir ifadeyle, $f - p$ farkı her iki $\pm\|f - p\|$ değerini de alır.

İspat: $E = E_n(f) = \|f - p\| = \max_{a \le x \le b} |f(x) - p(x)|$ olarak yazalım. Eğer, lemmanın sonuçları yanlış ise, bu durumda bazı x_1 noktaları için $f(x_1) - p(x_1) = E$ olduğunu kabul edebiliriz. Fakat bu durumda,

$$e = \min_{a \le x \le b}(f(x) - p(x)) > -E \tag{5.2.2}$$

olur. Özel olarak, $E+e\neq 0$ olacaktır ve dolayısıyla da , $q=p+(E+e)/2$ P_n'in p polinomundan farklı bir elemanıdır. q polinomunun f fonksiyonuna p' den daha iyi bir yaklaşım olduğunu iddia ediyoruz. Buna göre,

$$E-\left(\frac{E+e}{2}\right)\geq f(x)-p(x)-\left(\frac{E+e}{2}\right)\geq e-\left(\frac{E+e}{2}\right), \tag{5.2.3}$$

veya

$$\left(\frac{E+e}{2}\right)\geq f(x)-q(x)\geq -\left(\frac{E+e}{2}\right) \tag{5.2.4}$$

dir. Yani,

$$\|f-q\|\leq\left(\frac{E-e}{2}\right)\leq E=\|f-p\|, \tag{5.2.6}$$

elde ederiz ki, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, lemmanın sonuçları doğrudur.

Sonuç 5.2.1: $f\in C[a,b]$ fonksiyonuna en iyi sabit yaklaşım

$$p_0^*=\frac{1}{2}\left[\max_{a\leq x\leq b} f(x)+\min_{a\leq x\leq b} f(x)\right], \tag{5.2.7}$$

dır ve dolayısıyla,

$$E_0(f)=\frac{1}{2}\left[\max_{a\leq x\leq b} f(x)-\min_{a\leq x\leq b} f(x)\right] \tag{5.2.8}$$

dir.

Tanım 5.2.1: Verilen bir $g \in C[a,b]$ fonksiyonu için $g(x) = \|g\|$ oluyorsa, $x \in [a,b]$ noktasına g fonksiyonu için bir **(+) nokta** denir. Benzer bir şekilde, $g(x) = -\|g\|$ oluyorsa, bu durumda, $x \in [a,b]$ noktasına *g* fonksiyonu için bir **(-) nokta** denir.

Farklı noktalardan oluşan $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$ kümesindeki x_i'ler alterne olarak (+) ve (-) noktalardan oluşuyorsa bu kümeye *g* fonksiyonu için **alternans küme** denir. Diğer bir ifadeyle, eğer,

$$|g(x_i)| = \|g\|, \quad i = 0,1,2,...,n, \tag{5.2.9}$$

ve

$$|g(x_i)| = -g(x_{i-1}), \quad i = 1,2,...,n, \tag{5.2.10}$$

oluyorsa $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$ noktalarından oluşan kümeye *g* fonksiyonu için **alternans küme** denir.

Teorem 5.2.1: $f \in C[a,b]$ ve $p = p_n^*$ polinomu P_n kümesinde *f* fonksiyonuna bir en iyi yaklaşım olsun bu durumda, $f - p$ fonksiyonu için en az $n+2$ noktadan oluşan alternans bir küme vardır.

İspat: Eğer, $f \in P_n$ ise durum açıktır. Dolayısıyla, $f \notin P_n$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $E = E_n(f) = \|f - p\| > 0$ olacaktır.

$\varphi = f - p$ (düzgün) sürekli fonksiyonunu ele alalım. $[a,b]$ kapalı aralığını $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ olmak üzere,

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| < E/2 \tag{5.2.11}$$

olacak şekilde yeteri kadar küçük aralıklara bölelim. Burada $x, y \in [t_i, t_{i+1}]$ dir. $[a,b]$ aralığını bu şekilde bölmemizin amacı: Eğer, $[t_i, t_{i+1}]$ aralığı $\varphi = f - p$ fonksiyonu için bir (+) nokta içeriyorsa, bu durumda φ fonksiyonu tüm $[t_i, t_{i+1}]$ aralıkları üzerinde pozitif olacaktır. Aslında,

$$x, y \in [t_i, t_{i+1}] \text{ ve } \varphi(x) = E \Rightarrow \varphi(y) > E/2 > 0 \text{ dır.} \tag{5.2.12}$$

Benzer olarak, eğer, $[t_i, t_{i+1}]$ aralığı $\varphi = f - p$ fonksiyonu için bir (-) nokta içeriyorsa bu durumda φ fonksiyonu tüm $[t_i, t_{i+1}]$ aralıkları üzerinde negatif olacaktır. Dolayısıyla, hiçbir $[t_i, t_{i+1}]$ aralığı aynı zamanda hem (+) hem de (-) noktaları içeremez.

Eğer, $[t_i, t_{i+1}]$ aralığı (+) bir nokta içeriyorsa (sırasıyla, (-) bir nokta içeriyorsa), bu aralığa $\varphi = f - p$ fonksiyonu için bir (+) aralık (sırasıyla, bu aralığa $\varphi = f - p$ fonksiyonu için bir (-) aralık) olarak adlandıralım. Dikkat edersek hiçbir (+) aralık bir (-) aralığa değmez bile. Diğer bir ifadeyle, (+) bir aralıkla (-) bir aralık kesin olarak ayrıktırlar.

Şimdi, soldan sağa doğru hiçbir aralığı atlamadan (+) ve (-) aralıklar olarak işaretleyelim. İlk işaretlenen aralığı (+) aralık olarak kabul etmenin bir sakıncası yoktur.

$$\begin{array}{ll} I_1, I_2, \ldots, I_{k_1} & \text{(+) aralıklar} \\ I_{k_1+1}, I_{k_1+2}, \ldots, I_{k_2} & \text{(-) aralıklar} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ I_{k_{m-1}+1}, I_{k_{m-1}+2}, \ldots, I_{k_m} & (-1)^{m-1} \text{ aralıklar.} \end{array} \tag{5.2.13}$$

Burada I_{k_1} aralığı, ulaşılan ilk I_{k_1+1} (-) aralığından önceki son (+) aralığıdır ve süreç bu şekilde devam etmektedir.

Daha sonraki referanslar için, tüm işaretli $[t_i, t_{i+1}]$ aralıklarının birleşimini $S = \bigcup_{j=1}^{m} I_{k_j}$ ile ve tüm işaretlenmemiş $[t_i, t_{i+1}]$ aralıklarının birleşimi N ile gösterelim. Dolayısıyla, S ve N kümesi $S \cup N = [a,b]$ olmak üzere, kompakt kümelerdir (dikkat edilirse S ve N kümeleri tam olarak ayrık sayılmaz, fakat en azından iç noktalarının kümeleri ayrıktır).

Buradaki amacımız (5.2.13) ‘de tanımlanan m sayısının $n+2$’den büyük olduğunu göstermektir. $m < n+2$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir (+) aralık herhangi bir (-) aralıktan kesin olarak ayrık olduğundan,

$$\begin{aligned} &\max I_{k_1} < z_1 < \min I_{k_1+1} \\ &\max I_{k_2} < z_2 < \min I_{k_2+1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\max I_{k_{m-1}} < z_{m-1} < \min I_{k_{m-1}+1} \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

olacak şekilde $z_1, z_2, ..., z_{m-1} \in N$ olacak şekilde noktalar bulunabilir ve bu noktalar yardımıyla aşağıdaki şekilde bir polinom kurabiliriz:

$$q(x) = (z_1 - x)(z_2 - x)...(z_{m-1} - x). \tag{5.2.15}$$

Dikkat edersek $m-1 \le n$ olduğundan dolayı $q \in P_n$ dir ($m < n+2$ olduğunu kabul etmiştik). Bazı uygun λ değerleri için $p + \lambda q \in P_n$ polinomunun f fonksiyonuna p polinomundan daha iyi bir yaklaşım olduğunu göstereceğiz.

İlk olarak, q ve $f - p$ polinomlarının aynı işrate sahip olduklarını iddia edelim. Aslında, $(\pm)$ aralıklarının hiçbirinde q polinomunun bir sıfırı yoktur, ve dolayısıyla da, işaretlenmiş aralıkların hepsinde sabit işaretlidir. Sonuç olarak, $I_1, I_2, ..., I_{k_1}$ aralıklarında her bir $(z_j - x) > 0$ olduğundan, $q > 0$ ve $I_{k_1+1}, ..., I_{k_2}$ aralıklarında $j > 1$ için $(z_j - x) > 0$ olduğunda $(z_1 - x) < 0$ olduğundan $q < 0$ dır ve süreç bu şekilde devam eder.

İkinci olarak, λ sayısını bulalım. $e = \max_{x \in N} |f(x) - p(x)|$ olarak alalım, burada N kümesi $[t_i, t_{i+1}]$ aralıkları arasından ne (+) ne de (-) olmayan aralıkların birleşimidir. Bu durumda $e < E$ olacaktır ve buna göre $\lambda > 0$ seçersek böylece $\lambda \|q\| < \min\{E - e, E/2\}$

olacaktır. $p+\lambda q$ polinomunun f fonksiyonuna p ‘den daha iyi bir yaklaşım olduğunu iddia ediyoruz. O halde, eğer, $x \in N$ ise bu durumda

$$|f(x)-(p(x)+\lambda q(x))| \leq |f(x)-p(x)| + \lambda |q(x)| \leq e + \lambda \|q\| < E \tag{5.2.16}$$

dir ve diğer taraftan, eğer, $x \notin N$ ise bu durumda x ne bir (+) nede (-) bir aralıktır. Özel olarak, $|f(x)-p(x)| > E/2 > \lambda \|q\|$ olduğunu ve $f(x)-p(x)$ ve $\lambda q(x)$ polinomlarının aynı işarete sahip olduklarını biliyoruz. Dolayısıyla, q polinomu S (tüm işaretli $[t_i, t_{i+1}]$ aralıklarının birleşimi) kümesi üzerinde sıfır değeri almadığından

$$\begin{aligned}|f(x)-(p(x)+\lambda q(x))| &= |f(x)-p(x)| - \lambda |q(x)| \\ &\leq E - \lambda \min_{x\in S} |q(x)| < E\end{aligned} \tag{5.2.17}$$

olacaktır ki bu p polinomunun en iyi yaklaşım olması ile çelişir. O halde, $m < n+2$ kabulümüz yanlıştır. Bununla teoremi ispatlamış olduk.

Not 5.2.1:

1. Burada işaret edilen $n+2$ sayısı aslında $1+\dim P_n$ sayısıdır.
2. Eğer, $f - p_n^*$, $n+2$ defa işaret değiştiriyorsa, bu durumda $f - p_n^*$, en azından $n+1$ tane sıfıra sahip olmalıdır. Dolayısıyla, p_n^* tam olarak $n+1$ tane noktada f ile uyumludur (veya f ‘in interpolasyonudur).

Şimdi en iyi yaklaşım polinomunun tekliğini ele alalım.

Teorem 5.2.2: $f \in C[a,b]$ olsun. Bu durumda, P_n kümesindeki f fonksiyonuna en iyi yaklaşım polinomu tektir.

İspat: Her iki $p, q \in P_n$ polinomlarının en iyi yaklaşım olduğunu kabul edelim. Diğer bir ifadeyle her iki polinom da $\|f-p\| = \|f-q\| = E_n(f) = E$ ifadesini sağlamış olsun. Bu durumda, daha önce de belirtildiği gibi, bu iki polinomun ortalaması

$r = (p+q)/2 \in P_n$ polinomu da aynı zamanda en iyi yaklaşım olur. Çünkü, $f - r = (f-p)/2 + (f-q)/2$ olduğundan $\|f - r\| = E$ olacaktır.

Teorem5.2.1' den, $f - r$, $n+2$ tane nokta içeren $x_0, x_1, ..., x_{n+1}$ alternans kümesine sahiptir. Dolayısıyla, her bir i için

$$-E \leq (f-p)(x_i), (f-q)(x_i) \leq E, \tag{5.2.18}$$

olmak üzere

$$(f-p)(x_i) + (f-q)(x_i) = \pm 2E \text{ (alterne eden)} \tag{5.2.19}$$

dir.
Fakat bu herbir i için

$$(f-p)(x_i) = (f-q)(x_i) = \pm E \text{ (alterne eden)} \tag{5.2.20}$$

olduğu anlamına gelir. Yani, $x_0, x_1, ..., x_{n+1}$ kümesi, $(f-p)$ ve $(f-q)$ 'nun her ikisinin de alternans kümesi olur. Ayrıca, $(q-p) = (f-p) - (f-q)$ polinomu $n+2$ tane sıfıra sahiptir. $(q-p) \in P_n$ olduğundan $q = p$ olmalıdır.

Teorem 5.2.3: $f \in C[a,b]$ ve $p \in P_n$ olsun. Eğer, $f - p$ polinomu $n+2$ (veya daha fazla) nokta içeren bir alternans kümesine sahip ise bu durumda $p \in P_n$ polinomu f fonksiyonuna en iyi yaklaşımdır.

İspat: $x_0, x_1, ..., x_{n+1}$, $f - p$ polinomounun alternans kümesi olsun ve kabul edelim ki $q \in P_n$ polinomu f polinomuna p polinomundan daha iyi bir yaklaşım olsun. Diğer bir ifadeyle, $\|f - q\| < \|f - p\|$ olsun. Özel olarak, her bir $i = 0,1,2,...,n+1$ için

$$|f(x_i) - p(x_i)| = \|f - p\| > \|f - q\| \geq |f(x_i) - q(x_i)| \tag{5.2.21}$$

olmalıdır. $|a|>|b|$ ise a ve $b-a$ aynı işaretli olacağından dolayı $q-p=(f-p)-(f-q)$ $n+2$ defa işaret değiştirir. Fakat bu durumda $q-p$ polinomunun en az $n+1$ tane sıfırı olması gerekirdi. $q-p \in P_n$ olduğundan bu durumda $q=p$ olması gerekir ki, bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, $p \in P_n$ polinomu f fonksiyonuna en iyi yaklaşımdır.

Örnek 5.2.1, [8]: $f-p_n^*$ polinomunun alternans kümesi en az $n+2$ noktaya sahip olması gerekli iken, alternans kümesi $n+2$ tane noktadan daha fazla nokta içerebilir; Dolayısıyla, alternans kümesi tek olması gerekmez. Örneğin, $[-\pi,\pi]$ aralığında $f(x)=\sin 4x$ fonksiyonunu ele alalım. f fonksiyonu ± 1 aralığında 8 noktada işaret değiştirdiğinden(alterne olduğundan) $p_0^*=0$ olduğu sonucuna varırız ve her biri tam olarak 2 tane nokta içeren 4x4=16 tane farklı alternans kümesi vardır(2 taneden fazla nokta içeren diğer kümeleri dikkat etmeye gerek yok). Ek olarak, aslında $p_1^*=...=p_6^*=0$ ve $p_7^*\neq 0$ elde ederiz.

Teorem 5.2.4 : $f\in C[a,b]$ olsun ve verilen $q\in P_n$ polinomu için $f(x_i)-q(x_i)$ ifadesinin $a\le x_0\le x_1\le ...\le x_{n+1}\le b$ olmak üzere, $n+2$ noktada işaret değiştirdiğini kabul edelim. Bu durumda,

$$E_n(f)\ge \min_{i=0,...,n+1}|f(x_i)-q(x_i)| \qquad (5.2.22)$$

dir.

İspat : Eğer, (5.2.21) eşitsizliğinin doğru olmadığını kabul edersek bu durumda, en iyi yakaşım polinomu $p=p_n^*$ için aşağıdaki eşitsizlik geçerli olacaktır

$$\max_{1\le i\le n+1}|f(x_i)-p(x_i)|\le E_n(f)<\min_{1\le i\le n+1}|f(x_i)-q(x_i)|. \qquad (5.2.23)$$

Temel olarak teorem 4.2.1 ‘in ispatındaki argümanların benzerini kullanırsak bir çelişkiye ulaşırız ve böylece teorem ispatlanmış olur.

Göreceli olarak çok basit fonksiyonlar için bile tam olarak en iyi yaklaşım polinomunu bulmak çok zordur (analitik olarak olmasa dahi). Şimdide, Chebyshev’ in çözdüğü iki probleme yer verelim.

Problem 5.2.1: $f(x) = x^n$ fonksiyonuna $[-1,1]$ aralığında en çok $n-1$ dereceli en iyi yaklaşan $p_{n-1}^* \in P_{n-1}^*$ polinomunu bulunuz. (Bu problemde verilen aralık çözüm için aşırı işlem gerektirdiğinden, genel çözümü daha sonra ele alacağız)

p_{n-1}^* polinomu $\max\limits_{|x|\le 1} \left| x^n - p_{n-1}^*(x) \right|$ değerini minimize ettiğinden problem 5.2.1 aşağıdaki probleme denktir.

Problem 5.2.2: $[-1,1]$ aralığı üzerinde 0’ dan en az sapan *n.* dereceden monik polinomu bulunuz. Diğer bir ifadeyle, $C[-1,1]$ uzayında en küçük norma sahip *n.* dereceden monik polinomu bulunuz.

İlk olarak, notasyonu basitleştirelim.

$$p(x) = x^n - p_{n-1}^*(x) \text{ (çözüm)}, \tag{5.2.24}$$

ve

$$M = \|p\| = E_{n-1}(x^n; [-1,1]), \tag{5.2.25}$$

olarak alalım. p polinomu ile ilgili olarak tek bildiğimiz gerçek, p polinomunun $(n-1)+2 = n+1$ tane nokta içeren $-1 \le x_0 \le x_1 \le ... \le x_{n+1} \le 1$ şeklinde bir alternans kümesi olduğudur. Yani, $|p(x_i)| = M$ ve her i için $p(x_{i+1}) = -p(x_i)$ dir. Buradaki ufak bir bilgiyi kullanarak Chebyshev p^2 ve p' polinomlarını karşılaştırmıştır.

Adım 1: $(-1,1)$ aralığındaki herhangi bir x_i noktasında $p'(x_i)=0$ olmalıdır (çünkü, $p(x_i)$, p polinomu için göreceli olarak ekstrem bir noktadır). Fakat, p' polinomu $n-1$ dereceli bir polinomdur ve dolayısıyla da en çok $n-1$ tane sıfırı vardır. Buradan,

$$x_i \in (-1,1) \text{ ve } i=1,...,n-1 \text{ için } p'(x_i)=0\,, \tag{5.2.26}$$

(aslında, $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ ' lerin hepsi p' polinomunun kökleridir) ve

$$x_0=-1,\ p'(x_0)\neq 0,\ x_{n-1}=1,\ p'(x_{n-1})\neq 0\,, \tag{5.2.27}$$

olmalıdır.

Adım 2: $M^2-p^2 \in P_{2n}$ polinomunu ele alalım. $i=1,...,n-1$ için $M^2-(p(x_i)^2)=0$ ve $[-1,1]$ aralığında $M^2-p^2 \geq 0$ olduğunu biliyoruz. Fakat bu durumda $2(n-1)+2=2n$ tane kök olması gerekir ve sonuç olarak $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ çift katlı kök, x_0 ve x_n tek katlı kök olup, bunların hepsi M^2-p^2 polinomunun köküdür.

Adım 3: Şimdi de, $(p')^2 \in P_{2(n-1)}$ polinomunu ele alalım. $(p')^2$ polinomunun herbir $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ noktasında çift katlı kökü oluğunu ve başka kökü olmadığını biliyoruz. Dolayısıyla, $(1-x^2)(p'(x))^2$ polinomuda $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$ noktalarında çift katlı köke, x_0 ve x_n noktalarında tek katlı köke sahip olacaktır. $(1-x^2)(p'(x))^2 \in P_{2n}$ olduğundan, polinomun tüm köklerini elde etmiş olduk.

Adım 4: $M^2-(p(x)^2)$ ve $(1-x^2)(p'(x))^2$ polinomları aynı köklere sahip aynı dereceden polinomlar olduğundan bir sabit çarpan farkıyla aynı polinomlardır. Bu çarpanın ne olduğunu belirlemek kolaydır: p polinomunun baş katsayısı 1 iken p' polinomunun baş katsayısı n dir. Dolayısıyla,

$$M^2 - (p(x))^2 = \frac{(1-x^2)(p'(x))^2}{n^2}, \tag{5.2.28}$$

dir. (4.2.9) ifadesini biraz düzenlersek

$$\frac{p'(x)}{\sqrt{M^2 - (p(x))^2}} = \frac{n}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{5.2.29}$$

elde ederiz. Burada, fazladan bir $\pm$ durumuyla karşı karşıyayız. Fakat bazı aralıklar üzerinde p' polinomunun pozitif olduğunu bildiğimizden basit olarak $[-1, x_1]$ aralığında pozitif olduğunu varsayacağız. (5.2.29) ifadesini integre edersek

$$\arccos\left(\frac{p(x)}{M}\right) = n.\arccos x + C, \tag{5.2.30}$$

ve buradan da

$$p(x) = M\cos(n\arccos x + C), \tag{5.2.31}$$

elde ederiz. Fakat, $p(-1) = -M$ (çünkü, $p'(-1) \geq 0$ dır) olduğundan dolayı,

$$\begin{aligned} &\cos(n\pi + C) = -1 \Rightarrow C = m\pi \quad (n+m \text{ tek}) \\ &\qquad \Rightarrow p(x) = \pm M\cos(n\arccos x) \\ &\qquad \Rightarrow p(\cos x) = \pm M\cos nx \end{aligned} \tag{5.2.32}$$

elde ederiz. $\cos nx$ ' in 2^{n-1} baş katsayılı *n*. dereceden bir polinom olduğunu biliyoruz (*n*. Chebyshev polinomu T_n), O halde problemimizin çözümü

$$p(x) = 2^{-n+1}T_n(x) \tag{5.2.33}$$

olmalıdır. $|x| \leq 1$ için $|T_n(x)| \leq 1$ olduğundan dolayı, minumum norm $M = 2^{-n+1}$ dir.

Teorem 5.2.5: Herhangi $n \geq 1$ için, $p(x) = x^n - 2^{-n+1}T_n(x)$ formülü herhangi başka bir $q \in P_{n-1}$ polinomu için aşağıdaki şartı sağlayan

$$2^{-n+1} = \max_{|x|\leq 1}\left|x^n - p(x)\right| < \max_{|x|\leq 1}\left|x^n - q(x)\right|, \tag{5.2.34}$$

bir $p \in P_{n-1}$ polinomunu tanımlar.

İspat: $2^{-n+1}T_n(x)$ polinomunun baş katsayısının 1 olduğunu biliyoruz, o halde $p \in P_{n-1}$ dir. $k = 1,...,n$ için $x_k = \cos((n-k)\pi / n)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda, $-1 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1$ ve

$$T_n(x_k) = T_n(\cos((n-k)\pi / n)) = \cos((n-k)\pi) = (-1)^{n-k} \tag{5.2.35}$$

elde edilir. $-1 \leq x \leq 1$ için $|T_n(x)| = |T_n(\cos\theta)| = |\cos n\theta| \leq 1$ olduğundan dolayı, T_n için $n+1$ nokta içeren bir alternans küme elde ederiz.

Diğer bir ifadeyle, $x^n - p(x) = 2^{-n+1}T_n(x)$ ifadesi $\left|x^n - p(x)\right| \leq 2^{-n+1}$ eşitsizliğini sağlar ve herbir $k = 0,1,...,n$ için $x_k^n - p(x_k) = 2^{-n+1}T_n(x_k) = (-1)^{n-k}2^{-n+1}$ eşitliği vardır. Teorem4.2.3 ‘ de verilen en iyi yaklaşım karakterizasyonundan p polinomu P_{n-1} kümesinde x^n ’ e en iyi yaklaşım olmalıdır.

Sonuç 5.2.1: $C[a,b]$ uzayında en küçük norma sahip tam olarak *n*. dereceden monik polinom aşağıdaki gibidir;

$$\frac{(b-a)^n}{2^n 2^{n-1}}.T_n\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right) \tag{5.2.36}$$

5.3 Chebyshev Polinomunun Özellikleri

Daha önce bahsedildiği gibi, $T_n(x)$ Chebyshev polinomu (tek, reel) her θ için $T_n(\cos\theta) = \cos\theta$ olacak şekilde *n.* dereceden(eğer $n = 0$ iken 1 baş katsayılı ve eğer, $n \geq 1$ iken 2^{n-1} baş katsayılı ise) bir polinomdur. Chebyshev polinomlarının ilginç olan ve birçok özelliği vadır. Biz burada sadece birkaç tanesini listeleyeceğiz.

C1. $n \geq 2$ için $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ dir.

İspat: $\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$ trigonometrik eşitliğinden her θ için $T_n(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n-1}(\cos\theta) - T_{n-2}(\cos\theta)$ elde edilir. Yani, tüm $-1 \leq x \leq 1$ için $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$ denklemi sağlanır. Her iki tarafta polinom olduğundan eşitlik tüm x 'ler için sağlanır.

Sıradaki iki özellik C1 özelliğine benzer şekilde ispatlanır.

C2. $m > n$ için $T_m(x) + T_n(x) = \frac{1}{2}\left[T_{m+n}(x) + T_{m-n}(x)\right]$ dir.

C3. $T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x)$.

C4. $T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n\right]$.

İspat: İlk olarak dikkat edersek $\sqrt{x^2-1}$ ifadesinin tek kuvvetleri $(x + \sqrt{x^2-1})^n$ ve $(x - \sqrt{x^2-1})^n$ ifadelerinin binom açılımlarını toplarsak sadeleşeceğinden C4 özelliğinin sağ tarafındaki ifade aslında bir polinomdur. Sonra, $x = \cos\theta$ için

$$\begin{aligned} T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta &= \frac{1}{2}(e^{in\theta} + e^{-in\theta}) \\ &= \frac{1}{2}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n\right] \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

$|x| \le 1$ için iki polinomun da eşit olduğunu göstermiş olduk, dolayısıyla, tüm x' ler için de eşitlik sağlanacaktır (reel veya kompleks x' ler için).

$|x| \ge 1$ olmak üzere, reel x' ler için $\frac{1}{2}\left[(x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right]$ ifadesi $\cosh(n\cosh^{-1} x)$' e eşittir. Bir sonraki özellik bunu ifade ediyor.

C5. Her reel x için $T_n(\cosh x) = \cosh nx$ dir.

C6. $|x| \ge 1$ için $T_n(x) \le (|x| + \sqrt{x^2-1})^n$ dir.

Bu iki özelliğin ispatı C4 özelliğinden elde edilir.

C7. Tek n' ler için $2^n x^n = \sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} 2T_{n-2k}(x)$ dir; çift n' ler için $2T_0$ T_0 ile değiştirilmelidir.

İspat: $-1 \le x \le 1$ için

$$\begin{aligned}
2^n x^n &= 2^n (\cos\theta)^n = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^n \\
&= e^{in\theta} + \binom{n}{1} e^{i(n-2)\theta} + \binom{n}{2} e^{i(n-4)\theta} + \ldots \\
&\qquad \ldots + \binom{n}{n-2} e^{i(n-4)\theta} + \binom{n}{n-1} e^{i(n-2)\theta} + e^{in\theta} \qquad (5.3.2) \\
&= 2\cos n\theta + \binom{n}{1} 2\cos(n-2)\theta + \binom{n}{2} 2\cos(n-4)\theta + \ldots \\
&= 2T_n(x) + \binom{n}{1} 2T_{n-2}(x) + \binom{n}{2} 2T_{n-4}(x) + \ldots,
\end{aligned}$$

burada eğer, n çift ise son toplamdaki son terim $\binom{n}{[n/2]} T_0$ (çünkü binom açılımında ortadaki terim $\binom{n}{[n/2]} = \binom{n}{[n/2]} T_0$ iki defa yer almıyor).

C8. T_n polinomunun kökleri $x_k^{(n)} = \cos((2k-1)\pi/2n), \quad k = 1,...,n$ lerdir. Kökler basit, reel ve $(-1,1)$ açık aralığındadır.

İspat: $k = 1,...,n$ değerlerini $x_k^{(n)} = \cos((2k-1)\pi/2n)$ ifadesinde deneyerek görebiliriz.

C9. T_n polinomunun iki takip eden kökü arasında T_{n-1} polinomunun bir kökü vardır.

İspat: $k = 1,...,n-1$ için

$$\frac{2k-1}{2n} < \frac{2k-1}{2(n-1)} < \frac{2k+1}{2n}, \tag{5.3.3}$$

eşitsizliğini kontrol edersek, $x_k^{(n)} > x_k^{(n-1)} > x_{k+1}^{(n)}$ olduğunu görürüz.

C10. T_n ve T_{n-1} polinomlarının ortak kökü yoktur.

İspat: Bu özeliğin C9 özelliğinin açık bir sonucu olmasına rağmen ispatını başka bir yol ilede elde edebiliriz: C1 özelliğinden dolayı $T_n(x_0) = 0 = T_{n-1}(x_0)$ olduğunu kabul edersek(ortak kök olduğunu) bu durumda $T_{n-2}(x_0) = 0$ elde edilir. Bu gözlemi tekrarlarsak $k = 0$ için dahil her $k < n$ için $T_k(x_0) = 0$ elde ederiz ki, bu bir çelişkidir.

C11. $\{x_k^{(n)} : 1 \le k \le n, \; n = 1,2,...\}$ kümesi $[-1,1]$ aralığında yoğundur.

İspat: $\cos x$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığı üzerinde (kesin) monoton olduğundan $\{(2k-1)\pi/2n\}_{k,n}$ kümesinin $[0,\pi]$ aralığında yoğun olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun içinse $\{(2k-1)\pi/2n\}_{k,n}$ kümesinin $[0,1]$ aralığında yoğun olduğunu göstermek yeterlidir. Fakat, yeterince büyük n için

$$\frac{2k-1}{2n}=\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}\approx\frac{k}{n} \tag{5.3.4}$$

dir. Yani, $\{(2k-1)\pi/2n\}_{k,n}$ kümesi $[0,1]$ aralığında rasyonel sayılar arasında yoğundur. Dolayısıyla da , $\{x_k^{(n)}:1\le k\le n,\ n=1,2,...\}$ kümesi $[-1,1]$ aralığında yoğundur.

Burada belirtmek gerekirse, $\{x_k^{(n)}\}_{k,n}$ köklerinin dağılımı tahmin edilebilir(bakınız, [13] Vol. I, s. 48–51). Yeterince büyük n için, $[x,x+\Delta x]\subset[-1,1]$ aralığındaki T_n polinomunun köklerinin sayısı yaklaşık olarak

$$\frac{n\Delta x}{\pi\sqrt{1-x^2}} \tag{5.3.5}$$

dir. Özel olarak, yeterince büyük n için T_n polinomunun kökleri ± 1 uç noktalarının yakınında mutlak değerce en büyükleridir.

Diğer bir ifadeyle, T_n polinomunun bir kökünün $[a,b]$ aralığında olma ihtimali yaklaşık olarak

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \tag{5.3.6}$$

dir.

C12. Chebyshev polinomları karşılıklı olarak $[-1,1]$ aralığı üzerinde $w(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ ağırlık fonksiyonuna bağlı olarak ortagonaldir.

İspat: $m\neq n$ için $x=\cos\theta$ değişimini uygularsak

$$\int_{-1}^{1} T_n(x)T_m(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} \cos m\theta \cos n\theta d\theta = 0 \tag{5.3.7}$$

elde ederken $m = n$ için

$$\int_{-1}^{1} T_n^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\pi} \cos^2 n\theta d\theta = \begin{cases} \pi & , n = 0 \text{ ise} \\ \pi/2 , & n > 0 \text{ ise} \end{cases} \tag{5.3.8}$$

elde edilir.

C13. $-1 \le x \le 1$ için $|T_n'(x)| \le n^2$ ve $|T_n'(\pm 1)| = n^2$ dir.

İspat: $-1 < x < 1$ için

$$\frac{d}{dx}T_n(x) = \frac{\frac{d}{d\theta}T_n(\cos\theta)}{\frac{d}{d\theta}\cos\theta} = \frac{n\sin n\theta}{\sin\theta}, \tag{5.3.9}$$

elde edilir. $|\sin n\theta| \le n.|\sin\theta|$ olduğundan $|T_n'(x)| \le n^2$ olur. $x = \pm 1$ için (5.3.9) formülünde $\theta \to 0$ ve $\theta \to \pi$ giderken limit alırsak $|T_n'(\pm 1)| = n^2$ elde ederiz.

Tezin sonraki bölümlerinde göreceğimiz gibi her $p \in P_n$ polinomu $-1 \le x \le 1$ için $|p'(x)| \le \|p\| n^2 = \|p\| T_n'(1)$ ifadesini sağlar. Fakat, $T_n(x)$ polinomu n. dereceden tüm polinomlar arasında daha büyük bir ihtimalle $[-1,1]$ aralığının dışındadır. Aşağıdaki teorem bunu ifade etmektedir.

Teorem 5.3.1, [8]: $p \in P_n$ ve $\|p\| = \max_{-1 \le x \le 1} |p(x)|$ olsun. Bu durumda, $|x_0| \ge 1$ olmak üzere herhangi bir x_0 ve $k = 0,1,...,n$ için

$$\left|p^{(k)}(x_0)\right| \leq \|p\|\left|T_n^{(k)}(x_0)\right|, \tag{5.3.10}$$

dir. Burada, $p^{(k)}$, *p* polinomunun *k*. mertebeden türevidir.

İspat: Teoremin doğru olmadığını ve bazı $k = 0,1,...,n$ için

$$\left|p^{(k)}(y)\right| > \|p\|\left|T_n^{(k)}(y)\right|, \tag{5.3.11}$$

olacak şekilde bir $y \geq 1$ sayısının olduğunu kabul edelim.

$$q = \frac{p^{(k)}(y)}{\left|p^{(k)}(y)\right|} \cdot \frac{p}{\|p\|} \tag{5.3.12}$$

olarak alırsak böylece $\|q\| = 1$ olacaktır. (5.3.11) eşitsizliğinden $q \neq \pm T_n$ olduğu görülür. α sayısı q polinomunun başkatsayısı olsun. Bu durumda $|\alpha| < 2^{n-1}$ olacaktır. Eğer, $\alpha = 0$ ise bunun doğru olduğu açıktır. Eğer, $\alpha \neq 0$ ise bu durumda q/α polinomunun başkatsayısı 1 olur. Buradan,

$$\left\|\frac{q}{\alpha}\right\| = \frac{1}{|\alpha|} > \frac{1}{2^{n-1}} \tag{5.3.13}$$

olacaktır.

$\eta_j = \cos\dfrac{j\pi}{n}, \quad j = 0,...,n$ olarak alırsak bu durumda

$$T_n(\eta_j) = (-1)^j, \; j = 0,...,n, \tag{5.3.14}$$

olacaktır. Her bir $j = 0,...,n-1$ için, eğer, $T_n(x) - q(x)$ polinomu (η_{j+1}, η_j) aralığının uç noktalarında kökü yok ise bu durumda (η_{j+1}, η_j) aralığında bir köke sahiptir. Bu köke sahip olduğunu görmek için $T_n(x)-q(x)$ polinomunun (η_{j+1},η_j) uç noktalarında kökü olmadığı durumu inceleyelim. Diğer bir ifadeyle, $T_n(\eta_j)-q(\eta_j)\neq 0$ ve $T_n(\eta_{j+1})-q(\eta_{j+1})\neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $T_n(\eta_j)-q(\eta_j)\neq 0$ ve $T_n(\eta_{j+1})-q(\eta_{j+1})\neq 0$ polinomları sırasıyla $(-1)^j$ ve $(-1)^{j+1}$ olmak üzere aynı işarete sahip olacaktır. Dolayısıyla, $T_n(x)-q(x)$ polinomu (η_{j+1},η_j) aralığında işaret değiştirir. Eğer, $j=0,...,n-1$ için $T_n(\eta_j)-q(\eta_j)=0$ ise bu durumda $\|q\|=1$, $q'(\eta_j)=0$ ve benzer olarak $T_n'(\eta_j)=0$ olduğundan η_j en azından iki katlı köktür. Dolayısıyla, $T_n(x)-q(x)$ polinomunun tüm köklerini $[-1,1]$ aralığında aldığını görüyoruz. Sonuç olarak, Rolle Teoreminden $T_n^{(k)}(x)-q^{(k)}(x)$ polinomu $n-k$ tane kökünü $[-1,1]$ aralığında alır. O halde, $T_n^{(k)}(x)-q^{(k)}(x)$ polinomu $x\geq 1$ için işaret değiştirmez. Fakat, $T_n^{(k)}(x)$ 'de x^{n-k} teriminin katsayısı $n(n-1)...(n-(k-1))2^{n-1}$ iken aynı terimin $q^{(k)}(x)$ deki katsayısı $n(n-1)...(n-(k-1))\alpha$ dır. Dolayısıyla, yeteri kadar büyük ve pozitif x ler için

$$T_n^{(k)}(x)-q^{(k)}(x)>0 \tag{5.3.15}$$

olacaktır ve buradan, özel olarak

$$q^{(k)}(y)=\frac{|p^{(k)}(y)|}{\|p\|}\leq T_n^{(k)}(y)=|T_n^{(k)}(y)| \tag{5.3.16}$$

elde ederiz ki, bu (5.3.11) eşitsizliği ile çelişir ve buda (5.3.10) eşitsizliğini $x_0\geq 1$ için ispatlar. Eğer, (5.3.11) eşitsizliğinde $y\leq -1$ ise $n-k$ ifadesinin çift olması durumunda yukardaki tartışma aynen geçerlidir. $n-k$ ifadesinin tek olması durumunda ise (5.3.12) eşitliği aşağıdaki şekilde değiştirilirse yine aynı tartışma geçerli olacaktır,

$$q=-\frac{p^{(k)}(y)}{|p^{(k)}(y)|}\cdot\frac{p}{\|p\|}. \tag{5.3.17}$$

Sonuç 5.3.1: $p \in P_n$ ve $\|p\| = \max\limits_{-1 \le x \le 1} |p(x)|$ olsun. Bu durumda, $|x_0| \ge 1$ olmak üzere, herhangi bir x_0 için

$$|p(x_0)| \le \|p\| \left(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1} \right)^n , \tag{5.3.18}$$

dir.

5.4 Trigonometrik Fonksiyonlarla Düzgün Yaklaşım

Bu altbölümde trigonometrik polinomlarla düzgün yaklaşım için Teorem 5.2.1–5.2.3' ün benzerleri olan sonuçları, ispatlarını vermeden listeleyeceğiz. Bu altbölüm boyunca $f \in C^{2\pi}$ dir ve T_n ile en çok n. dereceden trigonometrik fonksiyonların sınıfını göstereceğiz.

1. f fonksiyonu bir $T^* \in T_n$ en iyi yaklaşım polinomuna sahiptir.
2. $f - T^*$ fonksiyonu $[0, 2\pi)$ aralığında $2n + 2$ tane nokta içeren bir alternans kümeye sahiptir.
3. T^* tektir.
4. Eğer, herhangi, bir $T \in T_n$ polinomu için $f - T$ fonksiyonu $[0, 2\pi)$ aralığında $2n + 2$ tane nokta içeren bir alternans kümesine sahipse bu durumda $T = T^*$ dır.

Burada, verilen 1–4 ifadelerinin ispatı karşılık gelen cebirsel polinomlarla ilgili olan sonuçların ispatı birbirine benzerdir. Şimdi buradaki ifadelerle ilgili olarak birkaç örnek verelim.

Örnek 5.4.1: $m > n$ için $f(x) = A\cos mx + B\sin mx$ fonksiyonuna T_n sınıfındaki en iyi yaklaşım 0 dır.

İspat: Bazı R ve x_0 için $f(x) = R\cos m(x - x_0)$ şeklinde yazabiliriz. Geriye sadece f fonksiyonu için yeteri kadar geniş bir alternans kümesi(2π uzunluğunda herhangi bir aralıkta) bulmamız yeterlidir.

$x_k = x_0 + k\pi / m, k = 1,2,...,2m$ olarak tanımlarsak $f(x_k) = R\cos k\pi = R(-1)^k$ ve $x_k \in (x_0, x_0 + 2\pi]$ elde ederiz. $m > n$ olduğundan $2m > 2n + 2$ olacaktır. Sonuç olarak, f fonksiyonu için yeteri kadar geniş bir alternans kümesi bulunduğundan 0 polinomu f fonksiyonu için en iyi yaklaşımdır.

Örnek 5.4.2: $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n+1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ fonksiyonuna T_n sınıfındaki en iyi yaklaşım

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{5.4.1}$$

polinomudur ve $C^{2\pi}$' de $\|f - T\| = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2}$ dir.

İspat: En son verilen örnekten, $f - T$ fonksiyonu için T_n sınıfındaki en iyi yaklaşım 0 polinomudur. Dolayısıyla, f fonksiyonuna en iyi yaklaşım T olmalıdır.

Şimdi de, $\|f - T\| = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2}$ ifadesinin ispatını verelim. Her zaman için $A\cos mx + B\sin mx = \sqrt{A^2 + B^2}.\cos m(x - x_0)$ (bazı x_0' lar için) yazabileceğimizden $\|f - T\| = \sqrt{a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2}$ dir.

Aşağıdaki teorem cebirsel ve trigonometrik yaklaşım arasındaki bağlantıyı ifade etmektedir.

Teorem 5.4.1: $f \in C[-1,1]$ olsun ve $\varphi \in C^{2\pi}$ fonksiyonunu $\varphi(\theta) = f(\cos\theta)$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$E_n(f) = \min_{p \in P_n}\|f - p\| = \min_{T \in \Im_n}\|\varphi - T\| = E_n^T(\varphi) \tag{5.4.2}$$

dir.

İspat: $p^*(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ polinomu f fonksiyonuna P_n sınıfındaki en iyi yaklaşım olsun. Bu durumda, $\hat{T}(\theta)=p^*(\cos\theta)$ T_n sınıfındadır ve

$$\max_{-1\le x\le 1}\left\| f(x)-p^*(x)\right\| = \max_{0\le\theta\le 2\pi}\left\| f(\cos\theta)-p^*(\cos\theta)\right\| \tag{5.4.3}$$

dır. Böylece, $\left\| f-p^*\right\| = \left\|\varphi-\hat{T}\right\| \ge \min_{T\in\Im_n}\left\|\varphi-T\right\|$ olacaktır.

Diğer taraftan, φ çift olduğundan T_n sınıfındaki f fonksiyonuna en iyi yaklaşımın T^* olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla, bazı cebirsel $q\in P_n$ polinomları için $T^*(\theta)=q(\cos\theta)$ dır. Sonuç olarak, $\left\|\varphi-T^*\right\| = \left\| f-q\right\| \ge \min_{p\in P_n}\left\| f-p\right\|$ dir.

Not 5.4.1:

1. Eğer, $\min_{p\in P_n}\left\| f-p\right\| = \min_{T\in\Im_n}\left\|\varphi-T\right\|$ olduğunu biliyorsak bu durumda, $T^*(\theta)=p^*(\cos\theta)$ olmalıdır.
2. Her bir $\varphi\in C^{2\pi}$ fonksiyonuna $f(x)=\varphi(\arccos x)$ olmak üzere bir $f\in C[-1,1]$ fonksiyonu karşılık gelir ve tabiî ki, teorem 5.2.1' in sonucu ve not 5.2.1 de bu şartlarda sağlanır.
3. Çift trigonometrik polinomlardan bahsedildiğinde bir şekilde arka planda Chebyshev polinomları yer almaktadır. $T(\theta)$ çift trigonometrik polinom olsun, $x=\cos\theta$ alırsak bu durumda

$$T(\theta)=\sum_{k=0}^{n} a_k\cos k\theta = \sum_{k=0}^{n} a_k T_k(\cos\theta) = p(\cos\theta) \tag{5.4.4}$$

olacaktır. Burada, $p(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k T_k(x)\in P_n$ dir.

5.5 Chebyshev Polinomunun Pratikliği

Bu altbölümde verilen örnekler "Chebyshev polinomları" adlı [14] kitabından alınmıştır.

Daha önce belirtildiği gibi Chebyshev polinomları bir yineleme bağınıtısı ile üretilebilirler. Süreci tersine çevirirsek, x^n ifadesini $T_0, T_1, ..., T_n$ terimleri cinsinden elde edebiliriz. Aşağıda ilk birkaç terimi listeleyelim:

$$T_0(x) = 1 \qquad 1 = T_0(x)$$

$$T_1(x) = x \qquad x = T_1(x)$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1 \qquad x^2 = (T_0(x) + T_2(x))/2$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x \qquad x^3 = (3T_1(x) + T_3(x))/4$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1 \qquad x^4 = (3T_0(x) + 4T_2(x) + T_4(x))/8$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \qquad x^5 = (10T_1(x) + 5T_3(x) + T_5(x))/16$$

Chebyshev polinomları kendilerine denk olan birçok çeşit polinoma göre nümerik hesaplamalar açısından belirgin bazı avantajlara sahiptir. Buna verilebileceğimiz ilk örnek, biraz düzenleme yaptıktan sonra elde edilen aşağıdaki eşitliktir;

$$1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = \frac{15}{6}T_0(x) - \frac{7}{4}T_1(x) + T_2(x) - \frac{1}{4}T_3(x) + \frac{1}{8}T_4(x). \tag{5.5.1}$$

Bu düzenleme ile görüyoruz ki, $1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ fonksiyonuna $[-1,1]$ aralığında kübik bir yaklaşım (5.5.1) eşitliğinin sağ tarafında T_4 terimini atarak en çok $1/8$ hata (çünkü $\|T_4(x)\| \le 1$ dir) ile olurken, kübik yaklaşım için basitçe $1 - x + x^2 - x^3$ kullansak dahi hata 1' den daha büyük oluyor.

İkinci bir örnek olarak, $[-1,1]$ aralığında küçük norma sahip olan bir polinomun aşağıda verildiği gibi sıkıntı verecek ölçüde büyük katsayılara sahip olma olasılığıdır.

$$(1-x^2)^{10} = 1-10x^2+45x^4-120x^6+210x^8-252x^{10} \\ +210x^{12}-120x^{14}+45x^{16}-10x^{18}+x^{20} \tag{5.5.2}$$

Fakat, Chebyshev formunda:

$$(1-x^2)^{20} = \frac{1}{524,288}\{92.378T_0(x)-167.960T_2(x)+125.97T_4(x)-77.52T_6(x) \\ +38.76T_8(x)-15.504T_{10}(x)+4.845T_{12}(x)-1.14T_{14}(x) \\ +190T_{16}(x)-20T_{18}(x)+T_{20}(x)\} \tag{5.5.3}$$

dir. Burada en büyük katsayının yaklaşık olarak 0,3 olduğuna dikkat ediniz ve ayrıca son üç terimi atarsak maksimum hata 0,0004 civarında olur.

Son örnek olarak, $-1 \le x, \xi \le 1$ olmak üzere, $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}e^{\xi}}{(n+1)!}$ Taylor polinomunu ele alalım. $n=6$ alırsak serinin yaklaşımındaki hata $e/7! \approx 0.0005$ civarındadır. Fakat Chebyshev polinomlarını kullanırsak

$$\sum_{k=0}^{6} \frac{x^k}{k} = 1.26606T_0(x)+1.13021T_2(x)+0.04427T_3(x)+0.00547T_4(x) \\ +0.00052T_5(x)+0.04427T_3(x)+0.00004T_6(x). \tag{5.5.4}$$

Başlangıç yaklaşımında ki hatanın yaklaşık olarak 0,0005 olduğunu görürüz, dolayısıyla, ek bir hata olmaksızın altıncı terimi atabiliriz. Hatta 5. terimin atılmasında dahi hata 0,001 ‘ den daha fazla değildir.

6. İNTERPOLASYON

Bu bölümde aşağıda verilen teoremin üç farklı ispatına ve uygulamalarına yer vereceğiz.

Teorem 6.1: $x_0, x_1, ..., x_n$ farklı noktalar ve $y_0, y_1, ..., y_n$ $\mathbb{R}$' de keyfi noktalar olsun. Bu durumda,

$$p(x_i) = y_i,\ i = 0,1,...,n \tag{6.1}$$

eşitliğini sağlayan tek bir $p \in P_n$ polinomu vardır.

Teoremin teklik kısmının ispatı açıktır. $p, q \in P_n$ (6.1) eşitliğini sağlayan iki farklı polinom olsun. Fakat, eğer, bu iki polinom (5.1) eşitliğini sağlıyorsa bu durumda $n+1$ noktada bu iki polinom eşit olacağından $p \equiv q$ olacaktır. Burada zor olan kısım teoremin varlık kısmının ispatıdır.

İspat 1 (Vandermonde determinantı): $p(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ polinomunun

$$p(x_i) = \sum_{k=0}^{n} c_k x_i^k = y_i,\ i = 0,1,...,n \tag{6.2}$$

eşitliğini sağlayabilmesi için $c_0, c_1, ..., c_n$ sayılarının değerlerinin ne olması gerekir sorusunun cevabını arıyoruz. Diğer bir ifadeyle c_i' ler için $n+1$ tane lineer denklemden oluşan bir sistemi çözmek istiyoruz. Bu sistemin matris formu:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

dir. Bu denklemin her zaman tek bir çözümü vardır çünkü katsayı matrisinin determinantı

$$D = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j) \neq 0 \tag{6.3}$$

dır (D Vandermonde determinantı olarak adlandırılır; eğer $x_0 < x_1 < ... < x_n$ ise $D > 0$ dır).

Lemma 6.1: $D = \prod_{0 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$ dir.

İspat:

$$V(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x) = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n-1} & x_{n-1}^2 & \cdots & x_{n-1}^n \\ 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \end{bmatrix}$$

$V(x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x)$ *n.* derecden x ‘ in bir polinomdur ve kökleri $x = x_i$, i $= 0,1,...,n$-1 dir. Dolayısıyla, kökler ile dereceyi karşılaştırırsak $V(x_0,...,x) = c\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ elde ederiz. Bununla beraber, $V(x_0,...,x)$ içinde x^n ’ in katsayısının $V(x_0, x_1, ..., x_{n-1})$ olduğunu görmek kolaydır ve böylece, $V(x_0,...,x) = V(x_0,...,x_{n-1})\prod_{i=0}^{n-1}(x - x_i)$ olacaktır. $\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ 1 & x_1 \end{vmatrix} = x_1 - x_0$ açık ifadesini ve tümevarımı kullanarak sonuç elde edilir.

İspat 2(Lagrange interpolasyonu): $\ell_i(x_j) = \delta_{i,j}$ olacak şekilde $\ell_i(x) \in P_n$, $i = 0,...,n$ polinomları varsa, interpolasyon polinomu p’ yi tanımlayabiliriz(burada $\delta_{i,j}$ Kronecker deltasıdır; yani $i \neq j$ için $\delta_{i,j} = 0$ ve $i = j$ için $\delta_{i,j} = 1$ dir). İnterpolasyon polinomu

$p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x)$ dir. Ayrıca, dikkat edersek $\{\ell_0, \ell_1, ..., \ell_n\}$ polinomları P_n için bir taban teşkil eder. $\ell_i(x)$ için iki tane formül vereceğiz:

a) $\ell_i(x) = \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

b) $W(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n)$ ile başlayalım ve ihtiyacımız olan polinomlar bazı $a_i \in \mathbb{R}$' ler için

$$\ell_i(x) = a_i \frac{W(x)}{x - x_i} \tag{6.4}$$

eşitliğini sağlar. Fakat, bu durumda $1 = \ell_i(x_i) = a_i W'(x_i)$ olacaktır**.** Yani,

$$\ell_i(x) = \frac{W(x)}{(x - x_i)W'(x)}, \tag{6.5}$$

dir.

Dikkat edersek $\ell_i(x)$ polinomları $i = 0,1,...,n$ için $\prod_{j \neq i}(x - x_j)$ polinomunun bir çarpanıdır ve dolayısıyla da $p(x)$' in uygun bir lineer kombinasyon olduğunu söyleyebiliriz. Sonuç olarak $p(x)$ interpolasyon polinomunun varlığı gösterilmiş oldu.

İspat 3(Newton formülü): Aşağıda verilen formda bir $p(x)$ polinomunun var olduğunu göstermek istiyoruz;

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + ... + a_n(x - x_0)...(x - x_{n-1}). \tag{6.6}$$

Bu formda x_i' ler $i = 0,1,...,n-1$ kullanılarak a_i' ler için çözümü bulmayı çok kolaylaştırır.

$$y_0 = p(x_0) = a_0$$
$$y_1 = p(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \Rightarrow a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} \tag{6.7}$$

bu şekilde devam edersek,

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$
$$a_3 = \frac{y_3 - a_0 - a_1(x_3 - x_0) - a_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \tag{6.8}$$

.

.

.

[13] III. cilt. ‘ de a_i ’ ler için başka bir formül verilmiştir].

Örnek 6.1: Yukarıda verilen üç ispatı karşılaştırmak amacıyla $(1,2),(2,-1)$ ve $(3,1)$ noktalarından geçen kuadratik interpolasyon polinomlarını bulalım.

İlk olarak Vandermode determinantını kullanırsak, c_i ’ leri elde etmek için aşağıdaki lineer denklem sistemini elde ederiz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

(6.9) sistemini çözersek $c_0 = 10,\ c_1 = -\frac{21}{2},\ c_2 = \frac{5}{2}$ buluruz. Buradan, interpolasyon polinomunu $p(x) = 10 - \frac{21}{2}x + \frac{5}{2}x^2$ olarak elde ederiz.

İkinci olarak Lagrange metodunu kullanırsak, verilen noktalar için $W(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ elde ederiz ve (6.2) eşitliğini kullanarak

$$\ell_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-1).2} = \frac{(x-2)(x-3)}{2},$$

$$\ell_1(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-2).(-1)} = -(x-1)(x-3), \qquad (6.10)$$

$$\ell_2(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-3).2} = \frac{(x-1)(x-2)}{2},$$

elde ederiz ve $p(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \ell_i(x)$ ifadesini kullanırsak interpolasyon polinomu

$$p(x) = (x-2)(x-3) + (x-1)(x-3) + \frac{1}{2}(x-1)(x-2) \qquad (6.11)$$

olarak bulunur.

Son olarak Newton formülünü kullanarak interpolasyon polinomunu bulalım. $y_0 = p(x_0) = a_0$ eşitliğinden $a_0 = 2$, $a_1 = \dfrac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0}$ eşitliğinden $a_1 = \dfrac{-1-2}{2-1} = -3$ ve $a_2 = \dfrac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$ eşitliğinden $a_2 = \dfrac{1-2+3(3-2)}{(3-1)(2-1)} = 1$ olarak buluruz. (6.3) formülünü kullanırsak interpolasyon polinomu

$$p(x) = 2 - 3(x-1) + \frac{5}{2}(x-1)(x-2) \qquad (6.12)$$

olarak bulunur.

Burada belirtmek gerekirse Lagrange metodunun biraz daha kullanışlı olduğu ileri sürülebilir. Şimdi Lagrange metodunun birkaç iyi yönünden daha bahsedelim.

Verilen farklı $n+1$ nokta için $a \le x_0 < x_1 < \ldots < x_n \le b$ önce

$$W(x) = \prod_{i=o}^{n} (x - x_i) \qquad (6.13)$$

ve

$$\ell_i(x)=\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}=\frac{W(x)}{(x-x_i)W'(x_i)} \tag{6.14}$$

polinomlarını elde ederiz. Buna göre, Lagrange interpolasyon formülü

$$L_n(f)(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\ell_i(x), \tag{6.15}$$

olacaktır. (6.15) ifadesinden $L_n(f)$'in P_n sınıfında x_i noktalarında f fonksiyonu ile çakışan tek polinom olduğunu söyleyebiliriz. Özel olarak, $p\in P_n$ olduğunda $L_n(p)=p$ olmak zorundadır. Aslında, $L_n : C[a,b]\to P_n$ ‘e bir lineer projeksiyondur.

Aşağıdaki şekilde noktalardan oluşan bir dizi kurmamız

$$X=\begin{cases} x_0^{(0)} & & & \\ x_0^{(1)} & x_1^{(1)} & & \\ x_0^{(2)} & x_1^{(2)} & x_2^{(2)} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{cases} \tag{6.16}$$

ve buna karşılık gelen

$$L_n(f)(x)=\sum_{i=0}^{n} f(x_i^{(n)})\ell_i^{(n)}(x) \tag{6.17}$$

projeksiyon dizisini elde etmemiz gerekir. Verilen bir $f\in C[a,b]$ fonksiyonu için her zaman P_n sınıfında f ‘ e en iyi yaklaşım polinomu p_n^* olmak üzere, $L_n(f)=p_n^*$ olacak şekilde bir *X* dizisi bulunulabilir($f-p_n^*$ ‘ın $n+1$ kökü olduğundan, bu kökleri x_i ’ ler için kullanabiliriz). Böylece, $\|L_n(f)-f\|=E_n(f)\to 0$ olacaktır. Bununla beraber, yakınsaklık problemi önce *X’* in seçilip sonra $L_n(f)$ ’ nin ele alınması durumunda dramatik bir değişiklik gösterir. Genel olarak, $L_n(f)$ ’ nin f fonksiyonuna yakınsadığına inanmak için hiçbir neden yoktur, hatta aşağıdaki teoremde ifade edildiği üzere, bunun tersi geçerlidir.

Teorem 6.2(Faber, 1914): $[a,b]$ aralığında verilen noktaların herhangi bir X dizisi için $\|L_n(f)-f\|$ farkının sınırsız olduğu bazı $f \in C[a,b]$ fonksiyonları vardır.

Teorem 6.3(Kharshiladze, Lozinski, 1941): Her n için, $L_n : C[a,b] \to P_n$ sürekli, lineer bir projeksiyon olsun. Bu durumda, $\|L_n(f)-f\|$ farkının sınırsız olduğu bazı $f \in C[a,b]$ fonksiyonları vardır.

L_n operatörleri pozitif (monoton) değillerdir, aksi takdirde Bohman-Korovkin teoremi(ve L_n' in $C[a,b]$' den P_n' ye bir projeksiyon olduğu gerçeği) her $f \in C[a,b]$ fonksiyonu için $L_n(f)$' nin f fonksiyonuna düzgün yakınsadığını ifade ederdi.

Bu teoremlerden anlaşılacağı üzere, interpolasyon polinomunun yaklaşımı ilgili olarak her şey istenildiği gibi değildir. Bu yüzden yaklaşılacak olan f fonksiyonu üzerine bazı ekstra şartlar koymamız gerekir. Bu yönde bir ilk adım olarak, ispatlayacağız ki, eğer, f fonksiyonu yeteri kadar çok türevlenebiliyorsa bu durumda en azından $\|L_n(f)-f\|$ hatası ölçülebilirdir.

Teorem 6.4: f fonksiyonu $[a,b]$ aralığı üzerinde $n+1$ sürekli türeve sahip olsun. $a \le x_0 < x_1 < ... < x_n \le b$ ve x_i noktalarında f fonksiyonuna $p \in P_n$ polinomunun interpole ettiğini ve $W(x) = \prod_{i=o}^{n}(x-x_i)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\|f-p\| \le \frac{1}{(n+1)!}\|f^{(n+1)}\|\|W\| \tag{6.18}$$

dir.

İspat: Teoremi verilen $x \in [a,b]$ noktası için

$$f(x) - p(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) W(x), \tag{6.19}$$

olacak şekilde bir $\xi \in (a,b)$ noktasının var olduğunu göstererek ispatlayacağız. Eğer, x, x_i noktalarından biri ise bu durumda (6.19) formülünün her iki tarafı sıfır olur ve ispat tamamlanmış olur. Aksi takdirde, $W(x) \neq 0$ olacaktır ve $\lambda = \frac{[f(x) - p(x)]}{W(x)}$ olarak tanımlayabiliriz. Şimdi aşağıdaki ifadeyi ele alalım,

$$\varphi(t) = f(t) - p(t) - \lambda W(t) \tag{6.20}$$

Açıkçası, herbir $i = 0,1,...,n$ için $\varphi(x_i) = 0$ dır ve bizim λ seçimimizden dolayı aynı zamanda $\varphi(x) = 0$ dır. Rolle teoreminden, φ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında $n+2$ tane farklı köke sahip olduğundan, bazı $\xi \in (a,b)$ noktaları için $\varphi^{(n+1)}(\xi) = 0$ olmalıdır. Dolayısıyla, *p* polinomu en çok *n*. dereceden, *W* monik ve $n+1$. dereceden olduğundan

$$\begin{aligned} 0 = \varphi^{(n+1)}(\xi) &= f^{(n+1)}(\xi) - p^{(n+1)}(\xi) - \lambda W^{(n+1)}(\xi) \\ &= f^{(n+1)}(\xi) - \left(\frac{f(x) - p(x)}{W(x)} \right).(n+1)! \end{aligned} \tag{6.21}$$

elde ederiz.

Not 6.1:

1. (6.19) eşitliği Lagrange formül kalanı olarak adlandırılır.
2. $f^{(n+1)}(\xi)$ terimi aslında x değişkenine göre sürekli bir fonksiyondur. Yani, $\frac{[f(x) - p(x)]}{W(x)}$ süreklidir; x_i noktasındaki değeri $\frac{[f'(x_i) - p'(x_i)]}{W'(x_i)}$ ve $W'(x_i) = \prod_{i \neq j} (x_i - x_j) \neq 0$ dir.

3. Herhangi $[a,b]$ aralığı üzerindeki hangi noktalar kullanılırsa kullanılsın e^x fonksiyonunun Lagrange interpolasyon polinomları dizisi e^x fonksiyonuna düzgün yakınsar. Bu durumda,

$$\left\| e^x - L_n(e^x) \right\| \le \frac{c}{(n+1)!}(b-a)^n \tag{6.22}$$

olur ve burada $c = \left\| e^x \right\| \in C[a,b]$ dir.

4. $[-1,1]$ aralığı üzerinde T_n, n. Chebyshev polinomunun köklerini $x_i = \cos((2i-1)\pi/2n)$ olarak alırsak $\prod_{i=1}^{n}(x - x_i)$ ifadesinin normunu minimize etmiş oluruz. Eğer, iyi bir düzgün yaklaşım arzulanıyorsa Chebyshev polinomlarının kökleri bölünmüş noktalar için optimale yakın bir seçimdir.

İnterpolasyonun yakınsaması sorusu ile benzeri olan Fourier serilerinin yakınsaması sorusu aslında çok yakından ilişkilidir ve burada cevaplar da neredeyse aynıdır.

L_n ‘nin sürekli(sınırlı) olduğu gerçeğini hatırlarsak, bu bize Faber’in teorem 6.2 ‘ deki negatif sonucunu bir parça kavrayabilmemizi sağlayacaktır.

Lemma 5.2: Herhangi $f \in C[a,b]$ için $\left\| L_n(f) \right\| \le \left\| f \right\| \left\| \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| \right\|$ dir.

$\Lambda_n = \left\| \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| \right\|$ sayıları bu süreçle ilişkili olarak Lebesque sayıları olarak adlandırılır. Bu eşitsizlikte işe yarayabilecek olması mümkün en küçük sabitin Λ_n olduğunu görmek zor değildir(Diğer bir ifadeyle, $L_n = \Lambda_n$ dir). Aslında, eğer,

$$\left\| \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x)| \right\| = \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x_0)| \tag{6.23}$$

ise bu durumda her i için $f(x_i) = \text{sgn}(\ell_i(x_0))$ ve $\|f\| = 1$ olacak şekilde bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonu bulabiliriz. Bu durumda,

$$\|L_n(f)\| \geq |L_n(f)(x_0)| = \left|\sum_{i=0}^{n} \text{sgn}(\ell_i(x_0))\ell_i(x_0)\right| = \sum_{i=0}^{n} |\ell_i(x_0)| = \Lambda_n \|f\| \tag{6.24}$$

olacaktır. Buradan, $\Lambda_n \geq c \log n$ (bakınız Rivlin) olduğu sonucu elde edilir ve dolayısıyla, $n \to \infty$ iken $\Lambda_n \to \infty$ olacaktır.

Lemma6.3(Lebesque teoremi): Herhangi $f \in C[a,b]$ için $\|f - L_n(f)\| \leq (1 + \Lambda_n)E_n(f)$ dir.

İspat: P_n sınıfında f fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom p^* olsun. Bu durumda, $L_n(p^*) = p^*$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|f - L_n(f)\| &\leq \|f - p^*\| + \|L_n(f - p^*)\| \\ &\leq (1 + \Lambda_\text{n})\|f - p^*\| = (1 + \Lambda_\text{n})E_n(f) \end{aligned} \tag{6.25}$$

elde ederiz.

7. SONLU ELEMANLI KÜMELERDE YAKLAŞIM

7.1 Giriş

Bu bölümde çalışmanın esas amacını teşkil eden konu ele alınmıştır. Tez çalışmasının özünü içeren bu bölümün daha iyi anlaşılabilmesi açısından ön hazırlık teşkil eden önceki bölümleri çok fazla detaya inmeden ama geniş tutmayı amaçlayarak daha kompakt bir içerik sunulmaya çalışılmıştır.

Bu bölümün veya genel olarak tezin amacını ifade eden aşağıdaki soruyu ifade edelim:

En iyi yaklaşımın bulunması genellikle çok zor olduğundan dolayı en iyi yaklaşım her zaman elde edemiyorsak bu durumda en iyi yaklaşıma nasıl yaklaşabiliriz?

Bu sorunun cevabı sonlu elemanlı kümelerdeki yaklaşımda yatmaktadır. Sonlu elemanlı kümelerde yaklaşımı ele alırken çalışmanın bir özeti olarak aşağıdaki planı takip edeceğiz:

1. $a \le x_1 < ... < x_m \le b$ olmak üzere m tane farklı noktadan oluşan $[a,b]$ aralığının sonlu bir altkümesi X_m ' i belirleyelim ve f fonksiyonuna en iyi yaklaşımın bulunduğu P_n sınıfını $C(X_m)$ 'in bir altuzayı olarak düşünelim. Diğer bir ifadeyle, eğer, en iyi yaklaşımı $p_n^*(X_m)$ olarak ifade edersek bu durumda,

$$\max_{1\le i\le m}\left|f(x_i) - p_n^*(X)(x_i)\right| = \min_{p\in P_n}\max_{1\le i\le m}\left|f(x_i) - p(x_i)\right| \equiv E_n(f;X_m) \ . \tag{7.1.1}$$

2. Yukarda bahsettiğimiz yaklaşımın $m \to \infty$ giderken X_m ' in giderek daha büyük bir küme olmasına bağlı olarak tüm $[a,b]$ aralığındaki en iyi yaklaşıma yakınsama sürecini tartışacağız. Pratikte, $p_n^*(X_m)$ 'ın p_n^*(tüm $[a,b]$ aralığındaki en iyi yaklaşım) yakınsaması üzerine çok fazla düşünmeye gerek yoktur, bunun yerine biraz daha soyut olarak gözüken $E_n(f;X_m) \to E_n(f)$ yakınsamasını tartışacağız.

3. (1) ve (2) maddelerinde verilen süreçleri yürütebilmek için etkin bir starateji bulmaya çalışacağız.

7.2 Sonlu Elemanlı X_m Kümesi ile İlgili Gözlemler

1. Eğer, $m \leq n+1$ ise bu durumda $E_n(f;X_m)=0$ dır. Yani, her zaman için f fonksiyonu ile $n+1$(veya daha az) noktada örtüşen bir $p \in P_n$ polinomu bulabiliriz. Tabiî ki, eğer, $m < n+1$ ise p polinomu tek olmayacaktır. Hangi durum söz konusu olursa olsun $m \geq n+2$ olduğunu da kabul edebiliriz. Aslında, daha sonra göreceğimiz gibi, asıl olarak üzerinde düşünmemiz gereken durum $m = n+2$ dir.

2. Eğer, $X \subset Y \subset [a,b]$ ise bu durumda $E_n(f;X) \leq E_n(f;Y) \leq E_n(f)$ dir. Aslında, $p \in P_n$ Y üzerindeki en iyi yaklaşım polinomu ise bu durumda

$$E_n(f;X) \leq \max_{x\in X}\left|f(x)-p(x)\right| \leq \max_{x\in Y}\left|f(x)-p(x)\right| = E_n(f;Y) \qquad (7.2.1)$$

dir. Sonuç olarak, X_m kümesi büyüdükçe $E_n(f;X_m)$' in $E_n(f)$'ye yaklaşacağını bekleyebiliriz.

Şimdi, 4. bölümde verilen en iyi yaklaşımın karakterizasyonu ilgili çalışmaları X_m kümesine kısıtlayalım.

Teorem 7.2.1: $m \geq n+2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

i. $p \in P_n$ polinomu X_m kümesinde f fonksiyonuna bir en iyi yaklaşımdır ancak ve ancak $f-p$ farkı X_m kümesinde $n+2$ nokta içeren bir alternans kümesine sahip ise. Yani, X_m kümesinde alterne olarak $f-p = \pm E_n(f;X_m)$ dir.

ii. $p_n^*(X_m)$ tektir.

Şimdi bu teoremin $m = n + 2$ durumuna nasıl indirgenebileceğini görelim.

Teorem 7.2.2: $f \in C[a,b]$ olsun ve $m \geq n + 2$ olacak şekilde n'yi belirleyelim.

i. Eğer, $p_n^* \in P_n$ polinomu tüm $[a,b]$ aralığında en iyi yaklaşım ise bu durumda $[a,b]$ aralığının $p_n^* = p_n^*(X_{n+2}^*)$ olacak şekilde $n+2$ nokta içeren bir X_{n+2}^* altkümesi vardır. Üstelik $[a,b]$ aralığının diğer herhangi bir X_{n+2} altkümesi için $E_n(f;X_{n+2}) \leq E_n(f) = E_n(f;X_{n+2}^*)$ olur ve $m = n+2$ durumunda ise ancak ve ancak $p_n^*(X_{n+2}) = p_n^*$ ise geçerli olur.

ii. Eğer, $p_n^*(X_m) \in P_n$, X_m üzerinde en iyi yaklaşım polinomu ise bu durumda $p_n^*(X_m) = P_n^*(X_{n+2}^*)$ ve $E_n(f;X_m) = E_n(f;X_{n+2}^*)$ olacak şekilde X_m kümesinin bir X_{n+2}^* altkümesi vardır. Diğer herhangi bir $X_{n+2} \subset X_m$ altkümesi için $E_n(f;X_{n+2}) \leq E_n(f;X_{n+2}^*) = E_n(f;X_m)$ olur ve $m = n+2$ durumunda ise ancak ve ancak $p_n^*(X_{n+2}) = p_n^*(X_m)$ ise geçerli olur.

İspat:

i. X_{n+2}^* $[a,b]$ aralığı üzerinde $f - p_n^*$ için tam olarak $n+2$ nokta içeren bir aletrnans küme olsun. Bu durumda, X_{n+2}^* $f - p_n^*$ için aynı zamanda X_{n+2}^* kümesi üzerinde de bir alternans kümesi olur. Yani, $x \in X_{n+2}^*$ için

$$\pm(f(x) - p_n^*(x)) = E_n(f) = \max_{y \in X_{n+2}^*} \left| f(y) - p_n^*(y) \right| \tag{7.2.2}$$

elde ederiz ve X_{n+2}^* kümesi üzerindeki en iyi yaklaşımın tekliğinden dolayı $p_n^* = p_n^*(X_{n+2}^*)$ ve $E_n(f) = E_n(f;X_{n+2}^*)$ olur. İkinci iddia da $[a,b]$ aralığındaki p_n^* tekliğini kullanarak benzer şekilde ispatlanır.

ii. Yukardaki ispatın aynısıdır (sadece $[a,b]$ aralığı yerine X_m alınmalıdır).

Buraya kadar, izlediğimiz metot (henüz tamamlanmayan), X_m kümesini $m \geq n+2$ olmak üzere, $E_n(f;X_m) \leq E_n(f) = E_n(f;X_m) + \varepsilon$ olacak şekilde seçtik ve $E_n(f;X_{n+2})$' nin en büyük değeri anlamına gelen "en iyi" için $X_{n+2} \subset X_m$ kümesini arıyoruz. Daha sonra p_n^* için bir yaklaşım olarak $p_n^*(X_{n+2})$' yi aldık. Biraz sonra görüleceği üzere, $p_n^*(X_{n+2})$ açıkça ve direk olarak hesaplanabilir.

Şimdi, kabul edelim ki, X_{n+2}'nin elemanları $a \leq x_0 < x_1 < ... < x_{n+1} \leq b$, $p = p_n^*(X_{n+2})$ polinomu $p(x) = a_0 + a_1(x) + ... + a_n x^n$ ve

$$E = E_n(f;X_{n+2}) = \max_{0 \leq i \leq n+1} \left| f(x_i) - p(x_i) \right| \tag{7.2.3}$$

olsun. p ve E 'yi hesaplamak için $f(x_i) - p(x_i) = \pm E$ gerçeğini kullanacağız.

$$\begin{aligned} f(x_0) &= E + p(x_0) \\ f(x_1) &= -E + p(x_1) \\ &\vdots \\ f(x_{n+1}) &= (-1)^{n+1} E + p(x_{n+1}) \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

şeklinde yazalım. p ve E'yi bulmak için $n+2$ tane bilinmeyen $E, a_0, ..., a_n$ değerlerini ve $n+2$ denklem içeren bir lineer denklem sistemini çözmemiz gerekiyor. Sistemin determinantı aşağıdaki gibidir.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ -1 & 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = A_0 + A_1 + ... + A_{n+1} > 0. \tag{7.2.5}$$

Burada ilk sütunda kofaktörlerden oluşmaktadır ve her bir minor A_k bir Vandermonde determinantıdır (dolayısıyla, her k için $A_k > 0$ dır). E' yi bulmak için Cramer kuralını uygularsak

$$\begin{aligned} E &= \frac{f(x_0)A_0 - f(x_1)A_1 + \cdots + (-1)^{n+1} f(x_{n+1})A_{n+1}}{A_0 + A_1 + \cdots + A_{n+1}} \\ &= \lambda_0 f(x_0) - \lambda_1 f(x_1) + \cdots + (-1)^{n+1} \lambda_{n+1} f(x_{n+1}), \end{aligned} \tag{7.2.6}$$

elde ederiz ve burada $\lambda_i > 0$ ve $\sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i = 1$ dir. Üstelik en çok n. dereceden polinomlar için $E = E_n(q; X_{n+2}) = 0$ olduğundan dolayı, her $q \in P_n$ polinomu için aynı λ_i'ler $\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \lambda_i q(x_i) = 0$ ifadesini de sağlarlar.

Bu problemin daha açık bir çözümünü daha verelim. $n+2$ tane nokta olduğundan dolayı, interpolasyon polinonomu P_{n+1} sınıfından olacaktır. Bu veri ışığında problemi daha açık bir şekilde ifade edelim.

p polinomu P_{n+1} sınıfında $p(x_i) = f(x_i), i = 0,1,...,n+1$ eşitliğini sağlayan (tek) polinom ve e polinomuda P_{n+1} sınıfında $e(x_i) = (-1)^i$, $i = 0,1,...,n+1$ eşitliğini sağlayan (tek) polinom olsun. Eğer $p - \lambda e \in P_n$ olacak şekilde bir λ skaleri bulmak mümkün olsaydı bu durumda $p - \lambda e = p_n^*(X_{n+2})$ ve $|\lambda| = E_n(f; X_{n+2})$ olurdu, çünkü X_{n+2} kümesi üzerinde $f - (p - \lambda e) = \lambda e = \pm\lambda$ (alterne olarak) dir ve böylece de $|\lambda| = \max_{x \in X_{n+2}} |f(x) - (p(x) - \lambda e(x))|$ dir. Dolayısıyla, p ve e polinomlarının baş katsayısını karşılaştırmamız gerekiyor.

Yukarıda elde ettiğimiz üzere p polinomu $n+1$' den daha küçük bir dereceye sahip olduğundan dolayı, $p = p_n^*(X_{n+2})$ ve $E_n(f; X_{n+2}) = 0$ dır. Böylece, $\lambda = 0$ değeri istenilen değerdir. Aksi takdirde p polinomunun derecesi tam olarak $n+1$ olur ve e polinomunun da derecesi $n+1$ midir? sorusu akla gelir.

$W(x) = \prod_{i=0}^{n+1} (x - x_i)$ olmak üzere, e polinomu

$$e(x)=\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{W'(x_i)}.\frac{W(x)}{(x-x_i)} \qquad (7.2.7)$$

dir ve e polinomunun baş katsayısı $\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)^i}{W'(x_i)}$ dir. Eğer, bu başkatsayının sıfırdan farklı olduğunu gösterebilirsek problemin çözmüş olacağız. Fakat,

$$W'(x_i)=\prod_{j\neq i}(x-x_i)=(-1)^{n-i+1}\prod_{j=0}^{i-1}(x_i-x_j)\prod_{j=i+1}^{n+1}(x_j-x_i) \qquad (7.2.8)$$

olduğundan dolayı, $\frac{(-1)^i}{W'(x_i)}$ sabit $(-1)^{n+1}$ işaretine sahiptir. Son olarak,

$$p(x)=\sum_{i=0}^{n+1}\frac{f(x_i)}{W'(x_i)}.\frac{W(x)}{(x-x_i)}, \qquad (7.2.9)$$

polinomunun başkatsayısı $\sum_{i=0}^{n+1}\frac{(-1)}{W'(x_i)}$ dir ve λ değerini bulmak kolaydır.

Sonuç 7.2.1: $p_n^*(X_{n+2})=p-\lambda e$ dır ve burada λ değeri

$$\lambda=\frac{\sum_{i=0}^{n+1}f(x_i)/W'(x_i)}{\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i/W'(x_i)}=\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\lambda_i f(x_i), \qquad (7.2.10)$$

$$\lambda_i=\frac{1/\left|W'(x_i)\right|}{\sum_{j=0}^{n+1}1/\left|W'(x_j)\right|}, \qquad (7.2.11)$$

ve $|\lambda|=E_n(f;X_{n+2})$ dir. Üstelik $q\in P_n$ polinomu için $\sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i\lambda_i q(x_i)=0$ dır.

Örnek 7.2.1: $X_4 = \{0,1/3,2/3,1\} \subset [0,1]$ kümesi üzerinde $f(x) = x^2$ fonksiyonuna en iyi lineer yaklaşım polinomunu bulunuz.

Çözüm: Burada $p(x) = a_0 + a_1(x)$ polinomunu arıyoruz ve bu polinomu ararken X_4 kümesinin sadece $1+2=3$ noktadan oluşan alt kümelerini ele alacağız. Bu alt kümeler 4 tanedir:

$$X_{4,1} = \{0,1/3,2/3\}, X_{4,2} = \{0,1/3,1\}, X_{4,3} = \{0,2/3,1\}, X_{4,4} = \{1/3,2/3,1\}. \qquad (7.2.12)$$

Her bir durumda bir p polinomu ve bir λ (=E) bulacağız. Örneğin, $X_{4,2}$ durumunda $x = 0,1/3,1$ için $f(x) = \pm\lambda + p(x)$ denklemlerinden oluşan sistemi çözmeliyiz.

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \lambda^{(2)} + a_0 \\ \frac{1}{9} &= -\lambda^{(2)} + a_0 + \frac{1}{3}a_1 \\ 1 &= \lambda^{(2)} + a_0 + a_1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda^{(2)} &= \frac{1}{9} \\ a_0 &= -\frac{1}{9} \\ a_1 &= 1 \end{aligned} \qquad (7.2.13)$$

diğer üç durum içinse $\lambda^{(1)} = 1/18, \lambda^{(3)} = 1/9, \lambda^{(4)} = 1/18$ buluruz. En büyük λ' yı aradığımızdan dolayı $X_{4,2}$ (veya $X_{4,3}$) istenen durumdur ve $f(x) = x^2$ fonksiyonuna en iyi lineer yaklaşım polinomu $p_1^*(X_4)(x) = x - 1/9$ dur.

7.3 Markov ve Bernstein Eşitsizlikleri

Sonlu elemanlı kümelerde yaklaşımın yakınsaklığını tartışabilmemiz için P_n sınıfı üzerinde türevin sınırlı olduğunu bilmemiz gereklidir.

Aşağıdaki teoremde verilen eşitsizlik A. A. Markov'a (1889) aittir.

Teorem 7.3.1: Eğer, $p \in P_n$ ve $|x| \le 1$ için $|p(x)| \le 1$ ise bu durumda $|x| \le 1$ için $|p'(x)| \le n^2$ dir. Üstelik $|p'(x)| = n^2$ durumu $x = \pm 1$ noktalarında ve yalnız *n*. dereceden Chebyshev polinomu $p = \pm T_n$ için oluşur.

Markov' un kardeşi, V. A. Markov, 1916 yılında $\left|p^{(k)}(x)\right| \le T_n^{(k)}(1)$ olduğunu gösterek bu eşitsizliği bir adım öteye taşımıştır. Bu tezin amacına uygun olarak türev üzerinde bazı sınırlamalar bu çalışma için yeterli olacaktır. $\|.\|$, $C[-1,1]$ üzerindeki norm olmak üzere türev üzerinde sadece aşağıdaki sınırlamaları kullanacağız:

$$\|p'\| \le n^2 \|p\| \text{ ve } \|p''\| \le n^4 \|p\| \tag{7.3.1}$$

Markov'dan yaklaşık 20 yıl sonra 1912 'de Bernstein $|z| \le 1$ birim diski üzerindeki kompleks bir polinomun türevi için benzer bir sınırlama problemini ele almıştır. Günümüzde maksimum modül teoremi sınırlamayı $|z| = 1$, yani $z = e^{i\theta}$, durumuna indirgeyebileceğimizi söyler. Dolayısıyla teorem 7.3.1'i trigonometrik polinomlar anlamında ifade edebiriz.

Teorem 7.3.2: Eğer, $S \in T_n$ ve $|S(\theta)| \le 1$ ise bu durumda $|S'(\theta)| \le n$ dir. Eşitlik durumu sadece $S(\theta) = \sin(\theta - \theta_0)$ durumunda mümkündür.

Burada Markov eşitsizliğini, 1928 yılında Pólya ve Szegö'nun ispatındaki metodu kullanarak Bernstein'ın eşitsizliğinden elde edilebileceğini göstereceğiz. Başlamak için, $x_i = \cos((2i-1)\pi / 2n), i = 1,...,n$ noktalarının T_n Chebyshev polinomunun kökleri olduğu durumdaki Lagrange interpolasyon formülünü ele alalım. Hatırlarsak, $-1 < x_n < x_{n-1} < ... < x_1 < 1$ dir.

Lemma 7.3.1: Her bir $p \in P_{n-1}$ polinomu aşağıdaki formda yazılabilir

$$p(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} p(x_i).(-1)^{i-1} \sqrt{1 - x_i^2} . \frac{T_n(x)}{x - x_i} . \tag{7.3.2}$$

İspat: Bildindiği üzere Lagrange interpolasyon formülünde derecesi n' den küçük olan polinomlar için $T_n(x)$ polinomu $W(x)=(x-x_1)...(x-x_n)$ çarpımından oluşmaktadır. Bu durumda geriye sadece $T_n'(x_i)$ türevini hesaplamak yeterli olacaktır. $x=\cos\theta$ için

$$T_n'(x)=\frac{n.\sin n\theta}{\sin\theta}=\frac{n.\sin n\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=\frac{n.\sin n\theta}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{7.3.3}$$

olduğunu hatırlarsak bu durumda $x_i=\cos((2i-1)\pi/2n)$ olacaktır. Diğer bir ifadeyle, $\theta_i=(2i-1)\pi/2n$ için $\sin n\theta_i=\sin((2i-1)\pi/2)=(-1)^{i-1}$ olacaktır.

Sonuç olarak,

$$\frac{1}{T_n'(x)}=\frac{(-1)^{i-1}\sqrt{1-x_i^2}}{n}, \tag{7.3.4}$$

elde ederiz.

Lemma 7.3.2: Herhangibir $p\in P_{n-1}$ polinomu için

$$\max_{-1\le x\le 1}|p(x)|\le \max_{-1\le x\le 1}\left|n\sqrt{1-x^2}\,p(x)\right|, \tag{7.3.5}$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat: Kolaylık olması açısından $M=\max_{-1\le x\le 1}\left|n\sqrt{1-x^2}\,p(x)\right|$ olarak alalım.

İlk olarak $[x_n,x_1]$ aralığındaki bir x noktasını ele alalım. Herhangi bir x noktası için $|x|\le\cos(\pi/2n)=x_1$ olacağından, $\sqrt{1-x^2}$ ifadesini aşağıdaki gibi hesaplayabiliriz:

$$\sqrt{1-x^2}\ge\sqrt{1-x_1^2}=\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{\pi}{2n}\right)}=\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)\ge\frac{1}{n} \tag{7.3.6}$$

(ortalama değer teoreminden $0 \le \theta \le \pi/2$ için $\sin\theta \ge 2\theta/\pi$ dir). Dolayısıyla, $|x| \le \cos(\pi/2n)$ için $|p(x)| \le n\sqrt{1-x^2}\,|p(x)| \le M$ elde ederiz.

Şimdi de, $[x_n, x_1]$ aralığının dışındaki bir x noktasını ele alalım ve interpolasyon formülünü uygulayalım. Bu durumda her bir $x - x_i$ faktörü aynı işaretlidir.

Böylece,

$$
\begin{aligned}
|p(x)| &= \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} p(x_i)\frac{(-1)^{i-1}\sqrt{1-x_i^2}\,T_n(x)}{x-x_i}\right| \\
&\le \frac{M}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_i}\right| = \frac{M}{n^2}\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_i}\right|,
\end{aligned}
\tag{7.3.7}
$$

elde ederiz. $\sum_{i=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_i} = T_n'(x)$ ve $|T_n'(x)| \le n^2$ olduğundan dolayı, $|p(x)| \le M$ dir ve böylece lemma ispatlanmış oldu.

Şimdi dikkatimizi trigonometrik polinomlara çevirelim. Verilen bir $p \in P_n$ cebirsel polinomuna karşılık $S(\theta) = p(\cos\theta)$ trigonometrik polinomunu ele alalım. Bu durumda $S'(\theta) = p'(\cos\theta)\sin\theta$ en çok n. dereceden tek trigonometrik bir polinomdur ve $|S'(\theta)| = |p'(\cos\theta)\sin\theta| = \left|p'(x)\sqrt{1-x^2}\right|$ dir. Tersine, eğer, $S \in T_n$ tek trigonometrik bir polinom ise bu durumda $S(\theta)/\sin\theta$ çift bir polinomdur ve en çok $(n-1)$. dereceden bazı p cebirsel polinomları için $S(\theta)/\sin\theta = p(\cos\theta)$ şeklinde yazılabilir. Lemma 7.3.2' den

$$
\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left|\frac{S(\theta)}{\sin\theta}\right| = \max_{0\le\theta\le 2\pi}|p(\cos\theta)| \le n.\max_{0\le\theta\le 2\pi}|p(\cos\theta)\sin\theta| = n.\max_{0\le\theta\le 2\pi}|S(\theta)| \tag{7.3.8}
$$

yazılabilir ki, buradan aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 7.3.1: Eğer, $S \in T_n$ bir tek trigonometrik polinom ise bu durumda

$$\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left|\frac{S(\theta)}{\sin\theta}\right| \le n.\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left|S(\theta)\right|, \tag{7.3.9}$$

dır.

Teorem 7.3.2'(Bernstein Eşitsizliği): Eğer $S \in T_n$ ise bu durumda

$$\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left|S'(\theta)\right| \le n.\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left|S(\theta)\right|, \tag{7.3.10}$$

dır.

İspat: İlk önce $f(\alpha,\theta) = \left[S(\alpha+\theta) - S(\alpha-\theta)\right]/2$ şeklinde yardımcı bir fonksiyon tanımlayalım. Sabit bir α için $f(\alpha,\theta)$ en çok n. dereceden θ değişkenli tek trigonometrik bir polinomdur. Sonuç olarak,

$$\left|\frac{f(\alpha,\theta)}{\sin\theta}\right| \le n.\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left|f(\alpha,\theta)\right| \le n.\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left|S(\theta)\right|, \tag{7.3.11}$$

dır. Fakat

$$S'(\alpha) = \lim_{\theta\to 0}\frac{S(\alpha+\theta) - S(\alpha-\theta)}{2\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{f(\alpha,\theta)}{\sin\theta} \tag{7.3.12}$$

olduğundan $\left|S'(\theta)\right| \le n.\max_{0\le\theta\le 2\pi}\left|S(\theta)\right|$ elde ederiz.

Teorem 7.3.1'(Markov Eşitsizliği): Eğer, $p \in P_n$ ise bu durumda

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|p'(x)\right| \le n^2 \max_{-1\le x\le 1}\left|p(x)\right|, \tag{7.3.13}$$

dir.

İspat: $S(\theta) = p(\cos\theta)$ polinomunun

$$\max_{-1\le x\le 1}|p(x)| = \max_{0\le\theta\le 2\pi}|p(\cos\theta)|, \tag{7.3.14}$$

eşitliğini sağlayan en çok n. dereceden trigonometrik bir polinom olduğunu biliyoruz. $S'(\theta) = p'(\cos\theta)\sin\theta$ polinomu da aynı zamanda en çok n. dereceden trigonometrik bir polinom olduğundan dolayı Bernstein eşitsizliğinden

$$\max_{0\le\theta\le 2\pi}|p'(\cos\theta)\sin\theta| \le n.\max_{0\le\theta\le 2\pi}|p(\cos\theta)|, \tag{7.3.15}$$

elde ederiz. Diğer bir ifadeyle,

$$\max_{-1\le x\le 1}\left|p'(x)\sqrt{1-x^2}\right| \le n.\max_{-1\le x\le 1}|p(x)|, \tag{7.3.16}$$

olur. $p' \in P_{n-1}$ olduğundan istenilen eşitsizlik lemma 2 kullanılarak elde edilir:

$$\max_{-1\le x\le 1}|p'(x)| \le n.\max_{-1\le x\le 1}\left|p'(x)\sqrt{1-x^2}\right| \le n^2 \max_{-1\le x\le 1}|p(x)|. \tag{7.3.17}$$

7.4. Sonlu Elemanlı Kümeler Üzerindeki Yaklaşımların Yakınsaklığı

Bu alt bölümü biraz basitleştirmek için bazı kabullerde bulunacağız. Bu kabuller sırasıyla: Sadece $I = [-1,1]$ aralığı üzerindeki polinom yaklaşımlarını ele alacağız. Sabit bir $n = 0,1,...$ tamsayısı için sabit bir $f \in C[-1,1]$ fonksiyonunu ele alacağız. Her $m \ge 1$ tamsayısı için I aralığının $-1 \le x_1 \le ... \le x_m \le 1$ şeklinde m noktadan oluşan sonlu elemanlı bir X_m alt kümesini ele alacağız. Bunlara ek olarak $x_1 = -1$ ve $x_m = 1$ olduğunu kabul edeceğiz. Eğer,

$$\delta_m = \max_{x\in I} \min_{1\le x_i \le m} |x - x_i| > 0\,, \tag{7.4.1}$$

olarak alırsak bu durumda her bir $x \in I$ noktası bazı x_i noktalarına ait δ_m'ler içinde olacaktır. Eğer, X_m kümesi birbirine eşit uzaklıklarda bulunan noktalardan olşuyorsa bu durumda $\delta_m = 1/(m-1)$ olacağı açıktır.

Bu alt bölümdeki amaç aşağıdaki sonucu ispatlamaktır.

Eğer, (6.4.1) ile verilen δ_m için $\delta_m \to 0$ ise o zaman $E_n(f; X_m) \to E_n(f)$ dir.

İspata geçmeden önce Markov eşitsizliği ile ilgili aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 7.4.1: $\tau_m \equiv \delta_m^2 n^4 / 2 < 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda herhangi $p \in P_n$ için

(1) $\max_{-1\le x\le 1} |p(x)| \le (1-\tau_m)^{-1} \max_{1\le i\le m} |p(x_i)|$,

(2) $\omega_p([-1,1]; \delta_m) \le \delta_m n^2 (1-\tau_m)^{-1} \max_{1\le i\le m} |p(x_i)|$

eşitsizlikleri geçerlidir.

İspat:

(1) : $|p(a)| = \|p\|$ olmak üzere, a' yı $[-1,1]$ aralığında alalım. Eğer, $a = \pm 1 \in X_m$ ise ispat tamamdır (çünkü bu durumda $(1-\tau_m)^{-1} > 1$ olacaktır), değilse bu durumda $-1 < a < 1$ ve $p'(a) = 0$ olacaktır. $|a - x_i| \le \delta_m$ olacak şekilde $x_i \in X_m$ noktasını seçelim ve Taylor teoremini uygulayalım:

$(-1,1)$ aralığında bazı c 'ler için

$$p(x_i) = p(a) + (x_i - a)p'(a) + \frac{(x_i - a)^2}{2} p''(c)\,. \tag{7.4.2}$$

(7.4.2) ifadesini aşağıdaki gibi düzenlersek

$$|p(a)| \le |p(x_i)| + \frac{\delta_m^2}{2}|p''(c)| \tag{6.4.3}$$

elde ederiz ve Markov eşitsizliğini dikkate alırsak:

$$\|p\| \le \max_{1\le i\le m}|p(x_i)| + \frac{\delta_m^2 n^4}{2}\|p\| \tag{7.4.4}$$

elde ederiz ki, bununla ispat tamamlanmış olur.

(2) : Burada herbir $p \in P_n$ polinomu $n^2\|p\|$ sabiti ile Lipschitz şartını sağlar. Ayrıca,

$$|p(s) - p(t)| = |(s-t)p'(c)| \le |s-t|\|p'\| \le n^2\|p\||s-t| \tag{7.4.5}$$

(ortalama değer teoremi ve markov eşitsizliğinden) dir. Dolayısıyla, $w_p(\delta) \le \delta n^2\|p\|$ dir ve bunu **(1)** ifadesi ile birleştirirsek

$$w_p(\delta_m) \le \delta_m n^2\|p\| \le \delta_m n^2 (1-\tau_m)^{-1} \max_{1\le i\le m}|p(x_i)| \tag{7.4.6}$$

elde ederiz ki, bununla ispat tamamlanmış olur.

Şimdi $E_n(f;X_m)$ ile $E_n(f)$ ifadelerini karşılaştırabiliriz. Lemmada olduğu gibi

$$\tau_m = \frac{\delta_m^2 n^4}{2} < 1 \ , \tag{7.4.7}$$

olduğunu kabul edelim ve

$$\Delta_m = \frac{\delta_m n^2}{1-\tau_m} \tag{7.4.8}$$

olarak alalım($\delta_m \to 0$ iken aynı zamanda $\tau_m \to 0$ ve $\Delta_m \to 0$ dır).

Şimdi, bu alt bölümün başında bahsettiğimiz sonucu ifade edip ispatlayalım.

Teorem 7.4.1: $f \in C[-1,1]$ için

$$E_n(f;X_m) \le E_n(f) \le (1+\Delta_m)E_n(f;X_m) + \omega_f([-1,1];\delta_m) + \Delta_m \|f\| \tag{7.4.9}$$

dir. Sonuç olarak, eğer, $\delta_m \to 0$ ise bu durumda $E_n(f;X_m) \to E_n(f)$ dır ($m \to \infty$ giderken).

İspat: $p = p_n^*(X_m) \in P_n$ polinomu f fonksiyonuna X_m kümesindeki en iyi yaklaşım olsun. Hatırlarsak

$$\max_{1\le i\le m} |f(x_i) - p(x_i)| = E_n(f;X_m) \le E_n(f) \le \|f-p\| \tag{7.4.10}$$

dir. Burada $\|f-p\|$ değerini bulmak istiyoruz.

$x \in [-1,1]$ olsun ve $|x - x_i| \le \delta_m$ olacak şekilde $x_i \in X_m$ noktasını seçelim. Bu durumda,

$$\begin{aligned} |f(x)-p(x)| &\le |f(x)-f(x_i)| + |f(x_i)-p(x_i)| + |p(x_i)-p(x)| \\ &\le \omega_f(\delta_m) + E_n(f;X_m) + \omega_p(\delta_m) \\ &\le \omega_f(\delta_m) + E_n(f;X_m) + \Delta_m \max_{1\le i\le m}|p(x_i)| \end{aligned} \tag{7.4.11}$$

elde ederiz. Yukardaki bölümde $\omega_p(\delta_m)$ 'i hesaplamak için bir önceki lemmamnın (2). şıkkını kullandık. Şimdi ise $\omega_p(\delta_m)$ ifadesini p 'ye bağlı olmadan hesaplamayı revize edelim. Bunun için üçgen eşitsizliğini kullanacağız:

$$\max_{1\le i\le m}|p(x_i)| \le \max_{1\le i\le m}|f(x_i)-p(x_i)| + \max_{1\le i\le m}|f(x_i)| \\ \le E_n(f;X_m)+\|f\| \tag{7.4.12}$$

elde ederiz. Tüm parçaları bir araya getirirsek aşağıdaki sonuca ulaşırız:

$$E_n(f) \le \omega_f \delta_m + E_n(f;X_m) + \Delta_m\left[E_n(f;X_m)+\|f\|\right]. \tag{7.4.13}$$

Böylece ispat tamamlanmış oldu.

Kaynak [8]'de belirtildiği gibi *m* üzerinde daha düşük bir sınırlama getirmek olasıdır ki, bu durumda $E_n(f;X_m) \le E_n(f) \le +E_n(f;X_m)+\varepsilon$ olur. Fakat bu problem için etkili olmayan bir yaklaşımdır.

Tez çalışmasının son kısmı olarak aşağıdaki sonlu elamanlı yaklaşımlarla ilgili algoritmayı verelim.

7.5 Tek Nokta Değişim Algoritması

$f \in C[-1,1]$, n ve $\varepsilon > 0$ verilsin.

1. Başlangıç olarak X_{n+2} kümesini seç. Bu küme için uygun olabilecek bir seçim $x_i = \cos\left(\dfrac{n+1-i}{n+1}\pi\right), i = 0,1,...,n+1$ dir. Bu noktalar T_{n+1} Chebyshev polinomu için "zirve" noktalarıdır; yani $T_{n+1}(x_i) = (-1)^{n+1-i}$ dir (ve böylece T_{n+1}, sonuç 7.2.1 de bahsedilen *e* polinomudur).

2. $p = p_n^*(X_{n+2})$ ve λ'yı bul (bir lineer denklem sistemini çözerek). $[-1,1]$ aralığında f fonksiyonuna en iyi yaklaşım polinomu p^* olmak üzere hatırlarsak

$$|\lambda| = |f(x_i) - p(x_i)| \le \|f - p^*\| \le \|f - p\|, \tag{7.5.1}$$

dır.

3. $e(x) = f(x) - p(x)$ "hata fonksiyonunu" (eğer, gerekli ise yaklaşık olarak) bul. Herhangi η noktası için $|f(\eta) - p(\eta)| = \|f - p\|$ dir.

4. η noktasını uygun bir x_i ile değiştir. Böylece elde edilen yeni $X'_{n+2} = \{x'_1, x'_2, ...\}$ kümesi için $f(x'_i) - p(x'_i)$ alterne olarak işaret değiştirecektir ve tüm i'ler için $|f(x'_i) - p(x'_i)| \geq \lambda$ olacaktır. Bu durumda yeni $p' = p_n^*(X'_{n+2})$ polinomu ve yeni λ' aşağıdaki eşitsizliği mutlaka sağlar

$$|\lambda| = \min_{0 \leq i \leq n+1} |f(x'_i) - p(x'_i)| \leq \max_{0 \leq i \leq n+1} |f(x'_i) - p'(x'_i)| = |\lambda'| . \qquad (7.5.2)$$

Aşağıdaki gözlem de la Vallée Poussin' e aittir:

$f - p$ farkı $f - p'$ ye ait alternans bir küme üzerinde alterne olarak işaret değiştirdiğinden $f - p'$ farkının bu küme üzerindeki minumum hatayı artırdığı sonucu elde edilir (daha geniş bir bilgi en iyi yaklaşımın karaktreizasyonu bölümünde verilmiştir). Powell'a göre yeni $p' = p_n^*(X'_{n+2})$ polinomu ve yeni λ' matris teknikleri kullanılarak çok kolay bir şekilde elde edilebilir (çünkü burada değiştirilen sadece x_i'lerden bir tanesidir ve dolayısıyla, sayfa 77'deki matrisde tek bir satırın değiştirilmesine ihtiyaç vardır).

5. Yeni λ' parametresi $|\lambda'| \leq \|f - p^*\| \leq \|f - p'\|$ eşitsizliğini sağlar ve hesaplamalar

$$\|f - p'\| - |\lambda'| = |f(\eta') - p'(\eta')| - |\lambda'| < \varepsilon$$

elde edilince son bulur.

8. ARAŞTIRMA BULGULARI

Çalışmada sonlu elemanlı kümelerde yaklaşım konusu ele alınmış, sonlu elemanlı kümelerde en iyi yaklaşımın elde edilmesi ile ilgili startejiler araştırılmış ve yaklaşımların yakınsaklığı ile ilgili bilgi sunulmuştur.

Ayrıca, çalışmada sonlu elemanlı kümelerde yaklaşımla ilgili tek nokta değişim algoritması verilmiştir.

9. SONUÇ

Tez çalışmasında sonlu elemanlı kümelerde yaklaşımın elde dedilmesi ile ilgili bir srateji ortaya konmuştur. Yaklaşımların yakınsaklığı incelenmiş ve sonlu elemanlı kümelerde yaklaşımla ilgili bir algoritma verilmiştir. Bu konu ile ilgili çalışmaların yaklaşım teorsindeki amacı ve önemi ifade edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Pinkus A., Density in approximation theory, Surveys in Approximation Theory, 1 (2005) 1-45.

[2] Pinkus, A., Weierstrass and approximation theory, Journal of Approximation Theory, 107 (2000) 1-66.

[3] Goncharov V. L., The theory of best approximation of functions, Journal of Approximation Theory, 106 (2000) 2-57.

[4] Tikhomirov, V. M., Commentary on the article by V. L. Goncharov,"*The theory of the best approximation of functions",* Journal of Approximation Theory, 106 (2000) 58-65.

[5] Kolmogorov, A. N. and Fomin, S. V., Introductory Real Analysis, Dover Publications**,** New York, 1970.

[6] Musayev, B., ve Alp, M., Fonksiyonel Analiz, Balcı Yayınları, Kütahya, 2000.

[7] Mustafa, N., Çözümlü Problemlerle Fonksiyonel Analiz, Bizim Büro Basımevi, Kars, 2006.

[8] Rivlin, T. J., An Introduction to the Approximation of Functions, Dover Publications, New York ,1981.

[9] Timan, A. F., Theory of Approximation of Functions of a Real Variable, Dover Publications, New York, 1994.

[10] Cheney, E. W., Approximation Theory, McGraw-Hill Book Company, New York, 1966.

[11] Lorentz, G. G., Approximation of Functions, Holt, Reinhart and Winston, New York, 1966.

[12] Rivlin, T. J., The Chebyshev Polynomials, John Wiley &Sons, New York, 1974.

[13] Natanson, I., Constructive Function Theory, 3 vols., Ungar, 1964-1965.

[14] Fox, L. and Parker, I. B., Chebyshev Polynomials, Oxford University Pres, 1968.

[15] Kamal, A., Approximation by finite rank operators with ranges in c_0, Internat. J. Math. & Math. Sci., 16(2) (1993) 283-288.

[16] Ali, S. A. and Al-Jarrah, R., Best approximation of finite sets in normed linear space, Numerical Functional Analysis and Optimization, 21 (5-6) (2000) 571-578.

[17] Pinkus, A. and Strauss, H., L^1 –approximation with constraints, Transections of the American Math. Society, 322 (1) (1990) 233-261.

[18] Mathar, R. J., Chebyshev series expansion of inverse polynomials, Journal of Computational and Applied Math., 196 (2000) 596-607.

[19] Chatterjee, G. and Roth, B., Chebychev approximation methods for evaluating conicity, Measurement, 23 (1998) 63-76.

[20] Andrievskii, V., Polynomial approximation of analytic functions on a finite number of continua in the complex plane, Journal of Approximation Theory, 133 (2005) 238-244.

[21] Abdullayev, F. G. and Shevchuk,I. A., Uniform estimates for polynomial approximation in domain with corners, Journal of approximation Theory, 137 (2005) 143-165.

[22] Chidume, C. E., and Ali, B., Approximation of common fixed points for finite families of nonself asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007) 960-973.

[23] Petrushev, P., Multivariate *n*-term rational and piecewise polynomial approximation", Journal of Approximation Theory, 121 (2003) 158-197.

[24] Mezhevich, K. G. and Shirokov, N. A., Polynomial approximations on disjoint segments, Journal of Mathematical Sci., 98 (6) (2000) 706-715.

[25] Rubinov, A. M., Best approximation by normal and conormal sets, Journal of approximation Theory, 107 (2000) 212-243.

[26] Vieira, D. M., Polynomial approximation in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 328(2) (2007) 984-994.

[27] Walsh, J. L., Note on invariance of degree of polynomial and trigonometric approximation under change of independent variable, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 45 (1959) 1528-1531.

[28] Walsh, J. L., On the convergence of sequences of polynomials of best approximation, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 16 (1930) 297.

[29] Walsh, J. L., On interpolation and approximation by functions analytic and bounded in a given region, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 24 (1938) 477-486.

[30] Walsh, J. L. and Mottzkin, T. S., Polynomials of best approximation on a real finite point set, Proc. Natl. Acad. Sci. USA., 43 (1957) 845-646.

[31] Walsh, J. L. and Mottzkin, T. S., Polynomials of best approximation on an interval, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 45 (1959) 1523-1528.

[32] Walsh, J. L. and Mottzkin, T. S., Polynomials of best approximation on an interval-II, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 48 (1962) 1533-1537.

[33] Sewell, W. E., Degree of approximation to a continuous function on a non-analytic curve, Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 47 (1961) 195-202.

[34] Kakeya, S., On approximate polynomials, Tôhoku Math. Journal, 6 (1914) 42-46.

[35] Wang, G., Sederberg, T. W. and Chen, F., On the convergence of polynomial approximation of rational functions, Journal of Approximation Theory**,** 89 (1977) 267-288.

[36] Law, A. G. and McKerracher A., Sharpened polynomial approximation, Pacific Journal of Math**.,** 51 (2) (1975) 491-494.

[37] Kaufmann, E. H., Leeming, D. J. and Taylor, G. D., Adaptive monotone rational approximation on finite sets, Numerical Algorithms**,** 32 (2003) 1-12.

[38] Dunham, C. B., Nonlinear mean-square approximation on finite sets, SIAM Journal of Numerical Analysis, 12 (1) (1975) 105-110.

[39] Bennett, J. M. and Bryan, R. N., A single-point exchange algorithm for approximating functions of two variables, ACM Transactions on Mathematical Software, 5 (3) (1979) 296-307.

[40] Mustafaev, N., “Singüler integraller için kuadratik formüller ve kapalı düzgün eğri üzre singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümüne uygulanması”, Doktora Tezi, Azerbaycan Devlet Üniversitesi, Bakü (1991).

[41] Lund, C. and Yannakakis, M., On the hardness of approximating minimization problems, Journal of the Association for Computing Machinary, 41 (5) (1994) 960-981.

[42] Ding, J., Li, T. Y. and Zhou, A., Finite approximations of Markov operators, Journal of Computational and Applied Math**.,** 147 (2002) 137-152.

[43] Abbasbandy, S. and Amirfakhiran, M., A new approach to universal approximation of fuzzy functions on a discrete set of points, Applied Mathematical Modelling, 30 (2006) 1525-1534.

[44] Molchanov, I., Tontchev N., Optimal approximation and quantisation, J. Math. Anal. Appl.**,** 325 (2007) 1410-1429.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Murat İbrahim YAZAR
Doğum Yeri : Ankara
Doğum Tarihi : 17.05.1976
Medeni Hali : Evli
Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Vangölü Anadolu Lisesi (1987-1994)
Lisans : Yüzüncü Yıl Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (1994-1998)
Y. Lisans :

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl

Çalıştığı Kurum	Görevi	Yıl
Van Vali Mithat bey İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni	1998-1999
Kafkas Üniversitesi	Arştırma Görevlisi	1999-2000
Boğaziçi Üniversitesi	Arştırma Görevlisi	2000-2002
Kafkas Üniversitesi	Uzman	2002-

Yayınlar (SCI ve diğer)

1. Mustafa, N. and Yazar, M. İ., On the approximate solution of a nonlınear singular integral equation with a Cauchy kernel, Far East Journal of Applied Mathematics 27 (1) (2007) 101-119.