T.C

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERBOLİK TİP DENKLEM İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN İYİ KONULMASI VE ONUN NÜMERİK ÇÖZÜMÜNÜN ALGORİTMASI

Serkan BEYHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

MAYIS – 2007

KARS

Prof. Dr. Gabil YAGUBOV danışmanlığında Serkan BEYHAN'ın Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı Hiperbolik Tip Denklem için Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması ve Onun Nümerik Çözümün Algoritması adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında . . . . . …………….. ile kabul edilmiştir.

…./..../…….

	Adı Soyadı	İmza
Başkan	:Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	………………..
Üye	: Prof. Dr. Gabil YAGUBOV	……………….
Üye	: Doç. Dr. Refig ABDULLAHYEV	……………….

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…./……. gün ve ……../……. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Vahit ALİŞOĞLU

Enstitü Müdürü V.

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda bana en büyük katkıyı sağlayan ve değerli yardımlarını esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Gabil YAGUBOV'a ve Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam sürecinde ve tezin hazırlanması esnasında fikirlerinden yararlandığım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü yüksek lisans öğrencisi Salih ÖMÜR'e ve öğretim elemanları Arş. Gör. Erhan DENİZ'e ve Arş. Gör. Ömür DEVECİ'ye teşekkürlerimi borç bilirim.

Kars-2007 Serkan BEYHAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde hiperbolik tip denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alındı. Bu çalışmanın 3.1 bölümünde önce hiperbolik denklem için I. ve II. tip sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı ve tekliğine ait olan ve önceden bilinen hükümlerin ispatı verildi. Bu hükümleri kullanarak göz önüne alınan optimal kontrol probleminin çözümünün varlığına ait teoremler ispatlandı. Çalışmanın 3.2 bölümünde hiperbolik denklem için optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şartların elde edilmesi ile bağlı sorular incelendi. Bu amaçla önce fonksiyonellin differansiyellenebilmesi ispatlandı ve onun gradiyenti için formül elde edildi. Bu formülü kullanarak problemin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlandı. Bunun yanı sıra Pontryagin'in Maksimum Prensibi şeklinde gerek şart da ispatlandı. Bu bölümde en son ise göz önüne alınan optimal kontrol problemin nümerik çözümü için bir algoritm verildi.

2007, 48 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Hiperbolik Denklem, Optimal Kontrol, Lions Fonksiyoneli, Pontryagin'in Maksimum Prensibi.

ABSTRACT

In this thesis, optimal control problem with Lions functional was taken up for hyperbolic type equation. In the 3.1 section of this work, for hyperbolic equation, at first judgments relating to existence and uniqueness of the generalized solutions of I and II type boundary value problems and known previously were given. By using these judgments, the existences of the optimal control problem solutions were proved. In the 3.2 section of this thesis for hyperbolic equation and the solution of optimal control problem questions relating to getting conditions were analyzed. For this reason, firstly differential ability of the function was proved and a formula was obtained for its gradient. By using this formula, for the solution of the problem the necessity condition, in the form of variation inequality, was proved. In addition to this, Pontryagin's Maximum Principle was proved too. In this part algorithm was given for the numeral solution of the optimal control problem taken into consideration lastest.

2007, 48 pages

Key Words: Hyperbolic Equation, Optimal Control, Lions Functional, Pontryagin's Maximum Principle

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	herhangi
$\overset{o}{\forall}$	hemen hemen her yerde
$\ell > 0$	verilen sayı
$T > 0$	verilen sayı
$x \in [0, \ell]$	uzay değişkeni
$t \in [0, T]$	zaman değişkeni

$\Omega_T = (0,\ell)\times(0,T)$ $\Omega = \Omega_T$

$\delta_{\bar{t}}\, v_{pj}^{k} = (v_{pj}^{k} - v_{pj}^{k-1}) / \tau$, $p = 1,2$	t'ye göre sol fark
$\delta_{\bar{x}}\, v_{pj}^{k} = (v_{pj}^{k} - v_{pj-1}^{k}) / h$, $p = 1,2$	x'e göre sol fark
$\delta_{x}\, v_{pj}^{k} = (v_{p\,j+1}^{k} - v_{pj}^{k}) / h$, $p = 1,2$	x'e göre sağ fark
$\delta_{x\bar{x}}\, v_{pj}^{k} = (v_{p\,j+1}^{k} - 2 v_{pj}^{k} + v_{p\,j-1}^{k}) / h^2$, p= 1,2	x'e göre 2. mertebeden fark
$\bar{h} = \dfrac{\ell}{M}$, $\tau = \dfrac{T}{N}$, N >0 , M>0 ,	verilen sayılar

1.GİRİŞ

Hiperbolik denklemlerle ifade edilen sistemlerin optimal kontrol teorisi dağılmış parametreli sistemlerin optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Hiperbolik tip denklemler için optimal kontrol problemleri mekanik sistemlerin titreşimini, çeşitli dalga süreçlerini ve bunlar gibi süreçlerin incelendiği zaman ortaya çıkar [1– 4]. Söz konusu denklemler için optimal kontrol problemleri ile önce [1, 2, 4–19] ve bu gibi çalışmalarda farklı yazarlar tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmalarda lineer ve lineer olmayan hiperbolik denklemler için optimal kontrol teorisi ciddi bir biçimde geliştirilmiştir.

Sunulan bu tezde de hiperbolik tip denklem için optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Ancak burada incelenen problem konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden farklıdır. İncelenen problemde amaç fonksiyoneli olarak Lions fonksiyoneli kullanılmaktadır. Lions fonksiyoneli tipli fonksiyoneller ilk kez Fransız matematikçisi Lions tarafından sunulmuştur [5]. Bu tipli fonksiyoneller denklemin katsayılarıyla kontrol sistemleri için optimal kontrol problemlerinde ilk kez Iskenderov'un çalışmalarında sunulmuş ve analiz edilmiştir [20]. Sonralarda ise Lions fonksiyoneli tipli fonksiyoneller Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemlerinde Iskenderov ve Mahmudov'un çalışmalarında sıkça kullanılmıştır [21,22]. Hiperbolik tip denklemler için optimal kontrol problemlerinde bu tür fonksiyonellerin çok az kullanılmasından dolayı sunulan problemin incelenmesi gerek teorik, gerekse pratik açıdan çok önem taşır.

Tezin içeriğinin materyal ve yöntem bölümü iki alt bölümden, yani 3.1, 3.2 bölümlerinden oluşmaktadır. 3.1 bölümünde ele alınan problemin iyi konulmasına ait sorular cevaplandırılmaktadır. Ele alınan problemi incelemek için ilk önce gereken sonuçlar olarak hiperbolik tip denklem için I. ve II. tip sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı ve bir tekliğini içeren sonuçlar verilmektedir. Bu sonuçları kullanarak optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı üzerine teoremler ispatlanır.

Tezin 3.2. bölümünde hiperbolik tip denklem için optimal kontrol probleminde gerek şartlar incelenmektedir. Bunun için önce sunulan amaç fonksiyonelinin differansiyellenebilmesi incelenmiş ve onun gradiyenti için formül ispatlanmıştır. Bu formülden yararlanarak problemin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanmıştır. Sonra optimal kontrol teorisinin en önemli sonuçlarından biri olan Pontryagin'in Maksimum Prensibi ele alınan optimal kontrol problemi için ispatlanmıştır. Bölümün sonunda ele alınan optimal kontrol problemin nümerik çözümü için algoritma verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1: $L_2(a,b)$ uzayı elemanları (a,b) aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u,v\rangle_{L_2(a,b)} = \int_a^b u(x)v(x)dx,$$
$$\|u\|_{L_2(a,b)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(a,b)}}.$$

Tanım 2.2: $L(\Omega)$ uzayı elemanları Ω bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\phi(x,t)dxdt,$$
$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}.$$

Tanım 2.3: $L_\infty(a,b)$ uzayı elemanları (a,b) aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonların Banach uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L_\infty(a,b)} = vria\max_{x\in(a,b)}|u(x)|$$

Tanım 2.4: $C^0([0,T],B)$ Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_B .$$

Tanım 2.5: $W_2^{1,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan ve elemanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle $u(x,t)$ fonksiyonlarıdır ki, $u,\ \dfrac{\partial u}{\partial x},\ \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlayan Sobelev uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u,\phi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[u(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial x} \right] dxdt,$$

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^{1,1}(\Omega)}}$$

Tanım 2.6: $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup elemanları Ω dikdörtgeninin sınırında sıfıra eşittir.

Tanım 2.7: Diyelim ki B herhangi Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $w(u,\gamma) = \{v : v \in B, \|v-u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h\rangle_B + o\langle h,u\rangle$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa, bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında differansiyellenebilirdir. Burada B^* uzayı B'nin eşlenik uzayıdır.

Tanım 2.8: Eğer B Banach uzayından olan $\{u_k\}$dizisi için $\forall c \in B^*$, $\lim_{k\to\infty}\langle c,u_k\rangle = \langle c,u\rangle$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir. Burada B^* uzayı B'nin eşlenik uzayıdır.

Tanım 2.9: U, B Banach uzayının bir kümesi olsun. Eğer, $\forall\{u_k\} \in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu takdirde U kümesine B de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.10: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer, $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\underline{\lim}_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Teorem 2.11: Diyelim ki U, B Banach uzayının bir alt kümesi $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_* = \{u \in U : J(u) = J_* = \inf_U J(u)\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u_* \in U_*$ ve $\forall u \in U$ için $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0$ şartı sağlanır.

Teorem 2.12: U, B Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan yarı sürekli olsun. Bu takdirde $J_* = \inf_U J(u) > -\infty$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \phi$ zayıf kompakttır ve U dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar.

Teorem 2.13 (Goebel): Kabul edelim ki, $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $a < 0$, $\beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu takdirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle G alt kümesi vardır ki $\forall w \in G$ için

$$J_a(v) = I(v) + a\|v - w\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer, $\beta > 1$ ise $J_a(v)$ fonksiyoneli için en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır.

3. MATERYEL ve YÖNTEM

3.1. Hiperbolik Denklem için Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminin iyi Konulması.

Bu bölümde lineer hiperbolik denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin iyi konulması ile ilgili sorular incelenmektedir. Önce hiperbolik denklem için göz önüne alınan sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı ve bir tekliğine ait olan önceden bilinen hükümlerin ispatı gösterilir. Bu hükümleri kullanarak hiperbolik denklem için optimal kontrol probleminin çözümünün varlığına ait olan teoremler ispatlanır. Benzer problemler ısı geçirgenlik ve Schrödinger denklemleri için önceden [5,20,21,22] vs. çalışmalarında incelenmiştir.

3.1.1. Problemin Konulması.

$\ell > 0$, ve $T > 0$ verilen sayılar olmak üzere, $x \in [0,\ell]$, $t \in [0,T]$ $\Omega_t = (0,\ell)\times(0,t)$, $\Omega = \Omega_T$ olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım:

$$J_\alpha(v) = \|u_1 - u_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\|v - w\|^2_{L_2(0,T)} \tag{3.1.1.1}$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \left\{ v = v(t): \; v \in L_2(0,T), \; |v(t)| \le b_0, \; \overset{0}{\forall} t \in [0,T] \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} + a(x)u_p + v(t)u_p = f_p(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{3.1.1.2}$$

$$u_p(x,0) = \varphi_p(x), \quad \frac{\partial u_p(x,0)}{\partial t} = \psi_p(x), \quad x \in (0,\ell), \quad p = 1,2, \tag{3.1.1.3}$$

$$u_1(0,t) = u_1(\ell,t) = 0, \quad t \in (0,T) \tag{3.1.1.4}$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(\ell,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3.1.1.5}$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir.

Burada $a_0 > 0$, $\alpha \geq 0$, $b_0 > 0$ verilen sayılar, $a(x)$ ölçülebilir sınırlı fonksiyon olup,

$$0 < \mu_0 \leq a(x) \leq \mu_1, \quad \overset{0}{\forall} x \in (0,\ell), \quad \mu_0, \mu_1 = \text{ sabit} \tag{3.1.1.6}$$

şartını sağlar, $w \in L_2(0,T)$ verilen eleman, $\varphi_p(x)$, $\psi_p(x)$, $f_p(x,t)$, $p=1,2$ fonksiyonları ise aşağıdaki şartları sağlar:

$$\varphi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell), \quad \varphi_2 \in W_2^1(0,\ell), \quad \psi_p \in L_2(0,\ell), \quad p = 1,2 \tag{3.1.1.7}$$

$$f_p \in L_2(\Omega), \quad p = 1,2 \tag{3.1.1.8}$$

$\forall v \in V$ için (3.1.1.2) – (3.1.1.4) şartlarından $u_1 = u_1(x,t) \equiv u_1(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması hiperbolik denklem için 1. tip sınır değer problemi, (3.1.1.2), (3.1.1.3), (3.1.1.5) şartlarından $u_2 = u_2(x,t) \equiv u_2(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması hiperbolik denklem için 2. tip sınır değer problemidir.

Tanım 3.1.1.1: $\forall v \in V$ için (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümü olarak $\eta_{p0}(x,T) = 0$, $p = 1,2$ şartlarını sağlayan $\forall \eta_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega), \forall \eta_2 \in W_2^{1,1}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left(-\frac{\partial u_p}{\partial t}\frac{\partial \eta_p}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u_p}{\partial x}\frac{\partial \eta_p}{\partial x} + a(x)u_p\eta_p + v(t)u_p\eta_p \right) dxdt =$$

$$\int_0^\ell \psi_p(x)\eta_p(x,0)dx + \int_\Omega f_p\eta_p dxdt, \quad p = 1,2, \tag{3.1.1.9}$$

integral özdeşliklerini ve $u_p(x,0) = \varphi_p(x)$, $x \in (0,\ell)$ başlangıç şartlarını sağlayan $u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $u_2 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ fonksiyonları anlaşılır.

Tanım 3.1.1.1 anlamında (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümünü $W_2^{1,1}(\Omega)$ sınıfından olan genelleştirilmiş çözümü olarak adlandıracağız.

3.1.2. Sınır Değer Problemlerinin Genelleştirilmiş Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu alt bölümde [23-25] çalışmalarından bildiğimiz (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve bir tekliğine ait olan hükümleri vereceğiz. Bu amaçla önce hiperbolik denklem için aşağıdaki birinci tip sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u + v(t)u = f_1(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \tag{3.1.2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x), \qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_1(x), \qquad x \in (0,\ell) \tag{3.1.2.2}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0 \ , \quad t \in (0,T) \tag{3.1.2.3}$$

Buradan a_0, $a(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $f_1(x,t)$ verilenleri 3.1.1 alt bölümündeki şartları sağlar.

Tanım 3.1.2.1: $\forall v \in V$ için (3.1.2.1) – (3.1.2.3) sınır değer probleminin çözümünü olarak $\eta(x,T) = 0$, şartını sağlayan $\forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + a(x)u\eta + v(t)u\eta) \right) dxdt =$$

$$= \int_0^\ell \psi_1(x)\eta(x,0)dx + \int_\Omega f_p \eta \, dxdt \tag{3.1.2.4}$$

integral özdeşliğini $u(x,0) = \varphi_1(x)$, $x \in (0,\ell)$ başlangıç şartını sağlayan $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan $u = u(x,t) = u(x,t;v)$ fonksiyonu anlaşılır.

Teorem 3.1.2.1: Farz edelim ki, $a(x)$, $\varphi_1(x)$, $\psi_1(x)$, $f_1(x,t)$ fonksiyonları (3.1.1.6) – (3.1.1.8) şartlarını sağlasın. Bu takdirde $\forall v \in V$ için (3.1.2.1) – (3.1.2.3) sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek genelleştirilmiş çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_0 (\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(0,\ell)} + \|\psi_1\|_{L_2(0,\ell)} + \|f_1\|_{L_2(\Omega)}) \tag{3.1.2.5}$$

Burada $c_0 > 0$ sayısı φ_1 , ψ_1 ve f_1 den bağımsızdır.

İspat: Önce (3.1.2.1) – (3.1.2.3) sınır değer probleminin çözümünün varlığını ispatlayalım. Bu amaçla Galerkin metodunu kullanalım. Farz edelim ki, $u_k = u_k(x), \quad k = 1,2...$ sistemi $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayında temel fonksiyonlar sistemi olsun ve $(u_k, u_m)_{L_2(0,\ell)} = \delta_{km}$ şartı sağlansın. Burada δ_{km} Kronecker sabitleridir, yani

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m, \qquad k,m = 1,2... \end{cases}$$

Söylemek gerekir ki, $u_k = u_k(x), \quad k = 1,2...$ temel fonksiyonlar sistemi olarak

$$LX = \lambda X \tag{3.1.2.6}$$

$$X(0) = X(\ell) = 0 \tag{3.1.2.7}$$

Sturm-Liouville probleminin $\lambda = \lambda_k, \quad k = 1,2$ öz değerlerine karşılık gelen $X = u_k(x), \ k = 1,2...$ öz fonksiyonları sistemi kullanılabilir. Bildiğimiz gibi $u_k = u_k(x), \ k = 1,2...$ öz fonksiyonlar sistemi $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ de

$$(Lu_k, u_m)_{L_2(0,\ell)} = \int_0^\ell \left(a \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx} + a(x) u_k u_m \right) dx = \lambda_k \delta_{km}, \qquad k,m = 1,2... \tag{3.1.2.8}$$

ortogonallik şartlarını sağlar. $\lambda_k, \ k = 1,2...$ sayıları ise pozitif sayılar olup

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < .... < \lambda_k < ..... \tag{3.1.2.9}$$

şartlarını sağlar [23]. Burada

$$L = -a_o \frac{d^2}{dx^2} + a(x) \tag{3.1.2.10}$$

biçiminde olan operatördür.

(3.1.2.1) – (3.1.2.3) sınır değer probleminin yaklaşık çözümünü

$$u^N(x,t) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t) u_k(x) \tag{3.1.2.11}$$

biçiminde aşağıdaki sistemden bulalım:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\ell \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2} u_k(x)dx + \int_0^\ell a_0 \frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{du_k}{dx}dx + \int_0^\ell a(x)u^N u_k(x)dx + \\
&+\int_0^\ell v(t)u^N u_k(x)dx = \int_0^\ell f_1(x,t)u_k(x)dx, \qquad k=\overline{1,N}
\end{aligned} \tag{3.1.2.12}
$$

$$
C_k^N(0)=\alpha_k^N, \qquad \frac{dC_k^N(0)}{dt}=\beta_k^N, \tag{3.1.2.13}
$$

Burada α_k^N sabitleri $N\to\infty$ için $\varphi(x)$ -in $W_2^1(0,\ell)$ -in normunda approksimasyonu olan $\varphi^N(x)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k^N u_k(x)$ toplamının katsayılarıdır. β_k^N ise $N\to\infty$ için $\psi(x)$ in $L_2(0,\ell)$ in normunda approksimasyonu olan $\psi^N(x)=\sum_{k=1}^{N}\beta_k^N u_k(x)$ toplamının katsayılarıdır.

Görüldüğü gibi (3.1.2.12) eşitlikleri $C_k^N(t)$ bilinmeyenlerinin t'ye göre ikinci mertebeden adi differansiyel denklemler sistemidir. Bu denklemler $\{u_k(x)\}$ sistemi ortonormallik şartını sağladığından ikinci mertebeden türeve göre çözülmüş lineer differansiyel denklemlerdir. Kabul edilen şartlar altında (3.1.2.12) – (3.1.2.13) Cauchy probleminin bir tek çözümü vardır [23].

Şimdi $u^N(x,t)$ için kestirim elde edelim. Bunun için (3.1.2.12) – (3.1.2.13) eşitliklerinden her birini $\frac{dC_k^N(t)}{dt}$ ye çarpıp k üzerinden 1'den N'e kadar toplayalım.

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\ell \frac{\partial^2 u^N}{\partial t^2}\frac{\partial u^N}{\partial t}dx + \int_0^\ell a_0 \frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{\partial^2 u^N}{\partial t\partial x}dx + \int_0^\ell a(x)u^N \frac{\partial u^N}{\partial t}dx = \\
&= -\int_0^\ell v(t)u^N \frac{\partial u^N}{\partial t}dx + \int_0^\ell f_1(x,t)u^N(x,t)dx
\end{aligned}
$$

Buradan aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\ell \left[\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}\right)^2 + a_0\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2 + a(x)\left(u^N\right)^2\right]dx = \\
&= -\int_0^\ell v(t)u^N \frac{\partial u^N}{\partial t}dx + \int_0^\ell f_1 u^N dx
\end{aligned}
$$

Bu eşitliğin her iki tarafını $(0,t)$ aralığı üzerinden integrallemiş olursak ve $a(x)$ 'in sağladığı şartı kullanırsak:

$$\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[\left(\frac{\partial u^N}{\partial t}(x,t)\right)^2+a_0\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\mu_0\left(u^N(x,t)\right)^2\right]dx\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left[\left(\frac{\partial u^N(x,0)}{\partial t}\right)^2+a_0\left(\frac{\partial u^N(x,0)}{\partial x}\right)^2+\mu_1\left(u^N(x,0)\right)^2\right]dx+$$

$$+\int_0^t\int_0^{\ell}|v(t)|.\left|u^N\right|.\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|dxd\tau+\int_0^t\int_o^{\ell}|f_1(x,\tau)|.\left|u^N(x,\tau)\right|dxd\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygularsak

$$c_1\int_0^{\ell}\left[\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}(x,t)\right)^2+\left(u^N(x,t)\right)^2\right]dx\le$$

$$\le c_2\int_0^{\ell}\left[(\varphi_1(x))^2+\left(\frac{\partial\varphi_1(x)}{dx}\right)^2+(\psi_1(x))^2\right]dx+$$

$$+(b_0+1)\int_0^t\int_0^{\ell}\left|u^N(x,\tau)\right|^2+\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}(x,\tau)\right|^2+\left|\frac{\partial u^N}{\partial x}(x,\tau)\right|^2dx+$$

$$+\int_0^T\int_0^{\ell}|f_1(x,\tau)|^2dxd\tau$$

Burada $c_1=\min(1,a_0,\mu_0)$, $c_2=\max(1,a_0,\mu_1)$ dir.

Sonuncu eşitsizlikte Gronwall lemmasını uygularsak, aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial u^N}{\partial t}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}+\left\|\frac{\partial u^N}{\partial x}(.,t)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}+\left\|u^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\le$$

$$\le c_3\left(\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,\ell)}+\|\psi_1\|^2_{L_2(0,\ell)}+\|f_1\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\tag{3.1.2.14}$$

$t\in[0,T]$, $N=1,2,....$

Bu kestirimin her iki tarafını $(0,T)$ aralığı üzerinden integrallemiş olursak aşağıdaki kestirim ispatlanmış olur:

$$\left\|u^N\right\|_{W_2^{1,1}(\Omega)}\le c_4\left(\|u_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}}+\|\psi_1\|_{L_2^1(0,\ell)}+\|f_1\|_{L_2(\Omega)}\right),\quad N=1,2,....\tag{3.1.2.15}$$

Burada $c_4>0$ sayısı N, φ_1, ψ_1 *ve* f_1 'den bağımsızdır. (3.1.2.15) kestirimine göre $\{u^N\}$, $N=1,2,...$ dizisi $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayının normunda düzgün sınırlıdır. Bu takdirde $\{u^N\}$ dizisinden $W_2^{1,1}(\Omega)$ da $u\in W_2^{1,1}(\Omega)$ elemanına zayıf yakınsayan $\{u^{N_m}\}$ alt dizisini seçebiliriz. Bu zayıf yakınsayana alt diziyi yeniden $\{u^N\}$ ile gösterelim. Bu takdirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz.

$N\to\infty$ için

$$u^N \to u \qquad \text{zayıf } L_2(\Omega) \text{ da,} \tag{3.1.2.16}$$

$$\frac{\partial u^N}{\partial x} \to \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{zayıf } L_2(\Omega) \text{ da,} \tag{3.1.2.17}$$

$$\frac{\partial u^N}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{zayıf } L_2(\Omega) \text{ da,} \tag{3.1.2.18}$$

$W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayının $C^0([0,T]L_2(0,\ell))$'e kompakt gömülmesinden [6] $N\to\infty$ için $\forall t\in(0,T)$ için

$$u^N \to u \text{ kuvvetli } L_2(0,\ell)\text{-de} \tag{3.1.2.19}$$

limit bağıntısı geçerlidir; yani yakınsama t-ye göre düzgündür.

Diğer yandan, $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(\Omega)$ -ya kompakt gömüldüğünden $N\to\infty$ için

$$u^N \to u \text{ kuvvetli } L_2(\Omega) \text{ -da} \tag{3.1.2.20}$$

limit bağıntısı geçerlidir.

Şimdi limit fonksiyonu olan $u=u(x,t)$'nin (3.1.2.1) – (3.1.2.3) probleminin genelleştirilmiş çözümü olduğunu gösterelim. Önce $u(x,t)$ fonksiyonunun başlangıç şartı, yani $u(x,t)=\varphi(x)$, $x\in(0,\ell)$ şartını sağladığını ispatlayalım. Gerçekten (3.1.2.19) limit bağıntısını $u^N(x,0)$-in $\varphi_1(x)$'e $L_2(0,\ell)$-de yakınsadığını ve

$$\int_0^\ell |u(x,0)-\varphi(x)|^2 dx \le 2\int_0^l |u^N(x,0)-\varphi(x)|^2 dx + 2\int_0^\ell |u(x,0)-u^N(x,0)|^2 dx$$

eşitsizliğini kullanırsak, kolaylıkla $u(x,t)$ fonksiyonunun göz önüne alınan başlangıç şartı sağladığını elde ederiz. Şimdi $u(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.2.4) integral özdeşliğini sağlamasını ispatlayalım. Bunun için (3.1.2.12) denklemlerinden her birini $d_k(T)=0$ şartını sağlayan $W_2^1(0,T)$ -den olan $d_k(t)$ fonksiyonuna çarpıp, elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1-den N–1'e kadar toplayıp, sonra (0,T) üzerinden integrallemiş olursak, kısmi integrasyon yardımıyla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_\Omega \left[-\frac{\partial u^N}{\partial t}\frac{\partial \eta^N}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{\partial \eta^N}{\partial x} + a(x)u^N\eta^N + v(t)u^N\eta^N \right] dxdt = \int_\Omega f\eta^N dxdt, \tag{3.1.2.21}$$

Burada $\eta^N = \sum_{k=1}^{N} d_k(t)u_k(x)$ dir. Göründüğü gibi (3.1.2.21) eşitliği $\forall \eta^N$ için geçerlidir. Yani (3.1.2.21) bağıntısı özdeşliktir. Bu biçimde olan η^N ler kümesini W_k ile gösterelim. $\bigcup_{N=1}^{\infty} W_k$ kümesi $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayında her yerde yoğundur. Bu nedenle $N \to \infty$ için (3.1.2.21)-de üstte elde edilen yakınsamaları göz önüne alarak limite geçersek $u(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1.2.4) integral özdeşliğini $\forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ $\eta(x,T)=0$ için sağladığını ispatlamış oluyoruz.

Böylece, $u=u(x,t)$ limit fonksiyonunu $\forall v \in V$ için (3.1.2.1) – (3.1.2.3) sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ da genelleştirilmiş çözümü olduğunu elde ederiz. Bunun yanı sıra $c_0 = c_4$ gösterip (3.1.2.15)'de limite geçerek, (3.1.2.5) kestiriminin geçerli olduğu ispatlanır. Şimdi (3.1.2.1) – (3.1.2.3) sınır değer probleminin var olan çözümünün bir tek olduğunu gösterelim. Farz edelim ki, (3.1.2.1) – (3.1.2.3) probleminin iki u_1 ve u_2 hali vardır. $u = u_1 - u_2$ olsun. Bu takdirde $u = u(x,t)$ fonksiyonu için aşağıdaki integral özdeşliği sağlanacaktır.

$$\int_\Omega \left[-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + a(x)u\eta + v(t)u\eta \right] dxdt = 0 \tag{3.1.2.22}$$

ve $u(x,0)=0, x\in(0,\ell)$ olur. Bu integral özdeşliğinde

$$\eta(x,t) = \begin{cases} 0 & , \quad b \le t \le T \\ \int_0^t u(x,\tau)d\tau, & 0 \le t \le b \end{cases} \tag{3.1.2.23}$$

fonksiyonunu yerini yazalım. Kolaylıkla söyleyebiliriz ki, $\eta(x,T)$ fonksiyonu $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayının elemanıdır ve $\eta(x,T)=0$. Bunun yanı sıra $\eta_x(x,t)$ fonksiyonu $\Omega_b=(0,\ell)\times(0,b)$ dikdörtgeninde $L_2(\Omega_b)$' de olan $\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}$ genelleştirilmiş türevine sahiptir. $\eta_x(x,t)$ ve $\eta_x(x,t)$, $u(x,t)$ fonksiyonları $L_2(0,\ell)$ uzayına ait olup, t-ye göre $L_2(0,\ell)$ normunda sürekli fonksiyonlardır. (3.2.1.23) formülünü (3.1.2.22)'de dikkate alıp $u,\frac{\partial u}{\partial t},\frac{\partial u}{\partial x}$ fonksiyonları η ve onun türevleri ile ifade edersek, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_b}\left[\frac{\partial\eta}{\partial t}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}-a_0\frac{\partial^2\eta}{\partial t\partial x}-a(x)\frac{\partial\eta}{\partial t}.\eta-v(t)\frac{\partial\eta}{\partial t}\eta\right]dxdt=0$$

$\left.\frac{\partial\eta}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.u\right|_{t=0}=0,\qquad \left.\frac{\partial\eta}{\partial x}\right|_{t=b}=0$ olduğunu kullanıp sonuncu eşitlikten bir sonraki eşitliği elde ederiz:

$$\frac{1}{2}\int_0^\ell\left[\left(\frac{\partial\eta(x,b)}{\partial t}\right)^2+a_0\left.\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right|_{t=0}\right]dx=$$
$$\int_{\Omega_b}\left(a(x)+v(t)\right)\frac{\partial\eta}{\partial t}\eta dxdt$$

Burada a(x) ve $v(t)$ üzerine konulmuş şartları kullanırsak, kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\int_0^\ell\left[\left(\frac{\partial\eta(x,b)}{\partial t}\right)^2+a_0\left.\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right|_{t=0}\right]dx\le$$
$$\le(b_0+\mu_1)\int_{\Omega_6}\left[\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2+(\eta)^2\right]dxdt \tag{3.1.2.24}$$

$w(x,t)=\int_0^t\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau$ olsun. Bu takdirde (3.1.2.23) formülünü kullanırsak,

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}=\int_0^t\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau=w(x,b)-w(x,t),\qquad t\le b \tag{3.1.2.25}$$

olur. Diğer yandan $\forall \overset{0}{x} \in (0,\ell)$ için

$$\int_0^b \eta^2 dt = \int_0^b \left(\int_0^t u d\tau \right)^2 dt \le \int_0^b (b-t) \int_t^b u^2 d\tau dt \le b^2 \int_0^b u^2 d\tau$$ elde edilir. Bu

eşitsizlikten ve (3.1.2.24)'den aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu yazabiliriz.

$$\begin{aligned} &\int_0^\ell u^2(x,b)dx + (a_0 - 2b(b_{0+}\mu_1))\int_0^\ell w^2(x,b)dx \le \\ &\le c_5 \int_{\Omega_b} \left(w^2(x,t) + u^2(x,t) \right) dxdt \end{aligned} \tag{3.1.2.26}$$

Burada $c_5 = (2b^2)(b_0 + \mu_1)$'dir. Bu eşitsizlikte b sayısını

$$a_0 - 2b(b_0 + \mu_1) \ge \frac{a_0}{2} \tag{3.1.2.27}$$

şartını kullanarak seçelim. Bu takdirde

$$\forall b \in \left[0, \frac{a_0}{4(b_0 + \mu_1)} \right] \text{ için} \tag{3.1.2.27}$$

şartı sağlanacaktır. Yani $\forall b \in \left[0, \frac{a_0}{4(b_0 + \mu_1)} \right]$ için (3.1.2.26) eşitsizliğinden kolaylıkla

$$\int_0^\ell \left[u^2(x,b) + w^2(x,b) \right] dx \le c_6 \int_{\Omega_b} \left(u^2(x,t) + w^2(x,t) \right) dxdt \tag{3.1.2.28}$$

elde edilir. Burada $c_6 = \left[\min(1, \frac{a_0}{2}) \right]^{-1} c_5$ tir. Bu eşitsizliğe Gronwall lemmasını uygularsak,

$$u(x,b) = 0, \quad w(x,b) = 0, \quad \forall b \in \left[0, \frac{a_0}{4(b_0 + \mu_1)} \right] \tag{3.1.2.29}$$

bağıntıları elde edilir. Aynı düşünceleri $t \in \left[\frac{a_0}{4(b_0 + \mu_1)}, \frac{a_0}{2(b_0 + \mu_1)} \right]$ devam ettirirsek, bu aralıkta $u(x,t) = 0$ elde edilecektir. Sonlu sayıda adım sonucu $u(x,t) = 0, \quad \forall t \in [0,\tau]$ olduğu ispatlanmış olur; yani $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ dir.

Böylece (3.1.2.1) – (3.1.2.3) sınır değer probleminin çözümün bir tek olduğu da ispatlanmış oldu. Teorem 3.1.2.1 ispatlandı.

Şimdi hiperbolik denklem için aşağıdaki ikinci tip sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial u^2} + a(x)u + v(t)u = f_2(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \tag{3.1.2.30}$$

$$u(x,0) = \varphi_2(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi_2(x), \quad x \in (0,\ell), \tag{3.1.2.31}$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3.1.2.32}$$

Burada a_0, $a(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$, $f_2(x,t)$ verileri 3.1.1. alt bölümündeki şartları sağlar.

Tanım 3.1.2.2. $\forall v \in V$ için (3.1.2.30) – (3.1.2.32) sınır değer probleminin çözümü olarak $\eta(x,T) = 0$ şartını sağlayan $\forall \eta \in W_2^{1,1}(\Omega)$ için

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial \eta}{\partial t} + a_0 \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + a(x)u\eta + v(t)u\eta \right) dxdt = \\ &= \int_0^\ell \psi_2(x)\eta(x,0)dx + \int_\Omega f_2 \eta dxdt \end{aligned} \tag{3.1.2.33}$$

integral özdeşliğini, $u(x,0) = \varphi_2(x), \quad x \in (0,\ell)$ başlangıç şartını sağlayan $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan $u = u(x,t) \equiv u(x,t;v)$ fonksiyonu anlaşılır.

Teorem 3.1.2.2. Farz edelim ki, $a(x)$, $\varphi_2(x)$, $\psi_2(x)$, $f_2(x,t)$ fonksiyonları (3.1.1.6) – (3.1.1.8) şartlarını sağlasın. Bu takdirde $\forall v \in V$ için (3.1.2.30) – (3.1.2.32) sınır değer probleminin $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek genelleştirilmiş çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|u\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_7 \left(\|\varphi_2\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|\psi_2\|_{L_2(0,\ell)} + \|f_2\|_{L_2(\Omega)} \right). \tag{3.1.2.34}$$

Burada $c_7 > 0$ sayısı φ_2, ψ_2, f_2 -den bağımsızdır.

Bu teoremde Galerkin metodunun yardımıyla ispatlanır. Ancak bir fark var ki,

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t) u_k(x) \quad \text{dır.}$$

Galerkin yaklaşımlarının oluşturulmasında kullanılan temel fonksiyonlar sistemi $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayında yok. O yüzden $W_2^1(0,\ell)$ uzayında baz oluşturması gerekir. $\{u^N\}$ yaklaşımlarının yakınsaması Teorem 3.1.2.1'de olduğu gibidir. Çözümün bir tekliği de ayni biçimde ispatlanır.

Böylece teorem 3.1.2.1 ve teorem 3.1.2.2'yi kullanarak (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı ve bir tekliği için aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.1.2.3: Farz edelim ki, $a(x), \varphi_p(x), \psi_p(x), f_p(x), \quad p = 1,2$ fonksiyonları (3.1.1.6) – (3.1.1.8) şartlarını sağlasın. Bu takdirde (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin $u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $u_2 \in W_2^{1,1}(\Omega)$ olan bir tek çözümü vardır ve çözüm için bir sonraki kestirimler geçerlidir:

$$\|u_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_6 \left(\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)} + \|\psi_1\|_{L_2(0,\ell)} + \|f_1\|_{L_2(\Omega)} \right) \tag{3.1.2.35}$$

$$\|u_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_7 \left(\|\varphi_2\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|\psi_2\|_{L_2(0,\ell)} + \|f_2\|_{L_2(\Omega)} \right) \tag{3.1.2.36}$$

3.1.3. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

(3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol problemini göz önüne alalım. Bu problem için gerekli olan çözümün varlığı ve tekliği sorularını inceleyelim. Önce $\alpha > 0$ için göz önüne alınca optimal kontrol probleminin bir tane çözümünün var olmasını ispatlayalım.

Teorem 3.1.3.1: $L_2(0,T)$ uzayında her yerde yoğun olan öyle bir G alt kümesi vardır ki, $\forall w \in G$ ve $\alpha > 0$ için (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat: Önce $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım. Fonksiyonelinin tanımına göre $J_0(v)$ aşağıdaki gibidir:

$$J_0(v) = \int_\Omega |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2 dxdt \tag{3.1.3.1}$$

$\Delta v \in L_2(0,T)$ artışı $v + \Delta v \in V$ olacak şekilde herhangi $v \in V$ elemanına verilen bir artış olsun. Bu takdirde (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümü olan $u_p = u_p(x,t) \equiv u_p(x,t;v)$, p=1,2 fonksiyonları $\Delta u_p = \Delta u_p(x,t) \equiv u_p(x,t;v+\Delta v) - u_p(x,t;v)$ artışına sahip olacaktır. Burada $u_p(x,t;v+\Delta v)$, $p=1,2$ fonksiyonları (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin $v + \Delta v \in V$ elemanına karşılık gelen çözümüdür. (3.1.1.2) – (3.1.1.5) şartlarından $\Delta u_p = \Delta u_p(x,t)$, $p=1,2$ fonksiyonlarının aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olduğunu kolaylıkla elde ederiz:

$$\frac{\partial^2 \Delta u_p}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 \Delta u_p}{\partial x^2} + a(x)\Delta u_p + (v + \Delta v)\Delta u_p =$$

$$= -\Delta v u_p, \quad p = 1,2, \quad (v(t) \in \Omega), \tag{3.1.3.2}$$

$$\Delta u_p(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \Delta u_p(x,0)}{\partial t} = 0, \quad p = 1,2 \quad \mathrm{x} \in (0,\ell), \tag{3.1.3.3}$$

$$\Delta u_1(0,t) = \Delta u_1(\ell,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3.1.3.4}$$

$$\frac{\partial \Delta u_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \Delta u_2(\ell,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3.1.3.5}$$

Burada $u_p = u_p(x,t) \equiv u_p(x,t;v)$, $p=1,2$ fonksiyonları (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin $v \in V$ ye karşılık gelen çözümüdür. Söylemek gerekir ki, (3.1.3.2) – (3.1.3.5) sınır değer problemi (3.1.1.2) – (3.1.1.5) gibidir. Bu nedenle (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır probleminin çözümüne ait olan düşünceleri kullanarak $\Delta u_p = \Delta u_p(x,t)$, $p=1,2$ fonksiyonları için aşağıdaki kestirimlerin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\|\Delta u_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_8 \|\Delta v u_1\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.1.3.6}$$

$$\|\Delta u_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_9 \|\Delta v u_2\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.1.3.7}$$

Burada $c_8 > 0$, $c_9 > 0$ sayıları Δv 'den bağımsızdır. $u_p \in W_2^{1,1}(\Omega)$ olduğunu göz önüne alırsak,

$$\|\Delta u_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{10} \|\Delta v\|_{L_\infty(0,T)}, \tag{3.1.3.8}$$

$$\|\Delta u_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{11} \|\Delta v\|_{L_\infty(0,T)}, \tag{3.1.3.9}$$

kestirimlerini ispatlayabiliriz. Burada $c_{10} > 0$, $c_{11} > 0$ sayıları Δv 'den bağımsızdır.

Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin artışını bulalım. (3.1.3.1) formülünü kullanırsak aşağıdaki formülü kolaylıkla elde ederiz.

$$\begin{aligned}
&\Delta J_0(v) = J_0(v + \Delta v) - J_0(v) = \\
&= 2\int_\Omega (u_1(x,t) - u_2(x,t))(\Delta u_1(x,t) - \Delta u_2(x,t))dxdt + \\
&+ \|\Delta u_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_2\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\int_\Omega \Delta u_1(x,t)\Delta u_2(x,t)dxdt.
\end{aligned} \tag{3.1.3.10}$$

Burada Cauchy – Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayıp (3.1.2.35) – (3.1.2.36) kestirimlerini kullanırsak,

$$|\Delta J_0(v)| \le c_{12}\left(\|\Delta u_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_2\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_2\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Bu eşitsizlikte (3.1.3.8) – (3.1.3.9) kestirimlerini uygularsak bir sonraki kestirim elde edilir:

$$|\Delta J_0(v)| \le c_{13}\left(\|\Delta v\|_{L_\infty(0,T)} + \|\Delta v\|^2_{L_\infty(0,T)}\right) \tag{3.1.3.11}$$

Burada $c_{13} > 0$ sayısı Δv 'den bağımsızdır. (3.1.3.11) eşitsizliğinde $\|\Delta v\|^2_{L_\infty(0,T)} \to 0$ için limite geçersek $\Delta J_0(v) \to 0$ limit bağıntısı ispatlanmış olur. Dolayısıyla $J_0(v)$ fonksiyoneli herhangi $v \in V$ noktasında süreklidir, yani $J_0(v)$ V kümesi üzerinde süreklidir. Diğer yandan $J_0(v) \ge 0, \quad \forall v \in V$, yani $J_0(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde alttan sınırlıdır. Tanıma göre V kümesi $L_2(0,T)$ uzayında kapalı ve sınırlı kümedir. $L_2(0,T)$ uzayı ise Hilbert uzayı olduğundan düzgün konveks uzaydır $[26]$.

$$I(v) = J_0(v), \qquad \tilde{X} = L_2(0,T), \qquad U = V$$

almış olursak kuramsal temeller bölümündeki teorem 2.14'ün şartlarının sağlandığını görürüz. Bu takdirde kuramsal temellerindeki teorem 2.14'ün $[27]$ hükmünü kullanmış olursak, $L_2(0,T)$ uzayında her yerde yoğun olan G alt kümesi bulunur ki, $\forall w \in G$ için $\alpha > 0$ olduğu takdirde (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğu elde edilir. Teorem 3.1.3.1 ispatlandı.

Şimdi (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin en azından bir çözüme sahip olmasını gösterelim.

Teorem 3.1.3.2: Farz edelim ki, $a(x)$, $\varphi_p(x)$, $\psi_p(x)$, $f_p(x,t)$, $p=1,2$ fonksiyonları (3.1.1.6) – (3.1.1.8) şartlarını sağlasın. $w \in L_2(0,T)$ verilen eleman olsun. Bu takdirde (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol problemi $\alpha \geq 0$ için en azından bir çözüme sahiptir.

İspat: Herhangi $\{v^m\} \in V$ minimalleştirici dizisini alalım:

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha\left(v^m\right) = J_{\alpha^*} = \inf_{v\in V} J_\alpha(v)$$

her bir $v^m \in V$, $m=1,2,...$ için (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümünü

$$u_p^m = u_p^m(x,t) \equiv u_p\left(x,t;v^m\right), \quad p=1,2$$

gibi gösterelim. Teorem 3.1.2.3'e göre her bir $v^m \in V$, $m=1,2,...$ için (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirimler geçerlidir.

$$\left\|u_1^m\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \leq c_6\left(\left\|\varphi_1\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,\ell)} + \left\|\psi_1\right\|_{L_2(0,\ell)} + \left\|f_1\right\|_{L_2(\Omega)}\right) = c_{13,} m=1,2,.., \qquad (3.1.3.12)$$

$$\left\|u_2^m\right\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \leq c_7\left(\left\|\varphi_2\right\|_{W_2^1(0,\ell)} + \left\|\psi_2\right\|_{L_2(0,\ell)} + \left\|f_2\right\|_{L_2(\Omega)}\right) = c_{14}, m=1,2,.. \qquad (3.1.3.13)$$

Burada c_{13} >0, c_{14} >0 sabitleri m'den bağımsızdır. V kümesi $L_\infty(0,T)$ uzayında sınırlı küme olduğundan $\{v^m\} \in V$ dizisinden bu uzayda $v \in L_\infty(0,T)$ elemanına ($*$)- zayıf yakınsayan $\{v^{m_k}\}$ alt dizisi seçilebilir. Bu alt diziyi kolaylık için yeniden $\{v^m\}$ ile gösterelim. Bu takdirde $m \to \infty$ için

$$v^m \to v, \quad L_\infty(0,T) \text{'de } (*) \text{ zayıf.} \qquad (3.1.3.14)$$

V kümesi $L_\infty(0,T)$ uzayında kapalı sınırlı ve konveks kümedir. Bu takdirde $[28]$ çalışmasından bildiğimiz ilgili teoreme göre V kümesi $L_\infty(0,T)$'de $(*)$ zayıf kapalı küme olur. Yani $v \in V$'dir. Bu nedenle (3.1.3.14) limit bağıntısından aşağıdaki limit bağıntısını elde ederiz: $m \to \infty$ için

$$\int_0^T v^m(t)q(t)dt \to \int_0^T v(t)q(t)dt, \quad \forall q \in L_1(0,T). \tag{3.1.3.15}$$

(3.1.3.12) – (3.1.3.13) kestirimlerinden görüldüğü üzere $\{u_p^m\}$, $p = 1,2$ dizileri sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzaylarının normlarına m'ye göre düzgün sınırlıdırlar. Bu takdirde $\{u_p^m\}, p = 1,2$ dizilerinden $\psi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $\psi_2 \in W_2^{1,1}(\Omega)$ elemanlarına zayıf yansıyan alt diziler seçmek mümkündür. Kolaylık olsun diye yakınsayan alt dizileri yeniden $\{u_p^m\}, p = 1,2$ ile gösterelim. Böyle olduğu takdirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $m \to \infty$ için

$$u_p^m \to u_p, \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf} \tag{3.1.3.16}$$

$$\frac{\partial u_p^m}{\partial x} \to \frac{\partial u_p}{\partial x}, \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf} \tag{3.1.3.17}$$

$$\frac{\partial u_p^m}{\partial t} \to \frac{\partial u_p}{\partial x}, \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf} \tag{3.1.3.18}$$

p=1,2 limit bağıntıları geçerlidir. $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayları $L_2(\Omega)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$u_p^m \to u_p \quad L_2(\Omega) \text{ kuvvetli } p=1,2 \tag{3.1.1.19}$$

limit bağıntısını elde ederiz.

$\{u_1^m\}$, $\{u_2^m\}$ dizilerinin elemanları (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzaylarına ait genelleştirilmiş çözümleri olduğundan her bir m=1,2,... için aşağıdaki integral özdeşliklerinin sağlandığını elde ederiz:

$$\int_{\Omega}\left[-\frac{\partial u_p^m}{\partial t}\frac{\partial \eta_p}{\partial x}+\frac{\partial u_p^m}{\partial x}\frac{\partial \eta_p}{\partial x}+a(x)u_p^m\eta_p+v^m(t)u_p^m\eta_p\right]dxdt=$$
$$=\int_0^{\ell}\varphi(x)\eta_p(x,0)dx+\int_{\Omega}f_p(x,t)\eta_p(x,t)dxdt,\quad p=1,2 \tag{3.1.3.20}$$

$$\forall\eta_1\in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega),\quad \eta_1(x,T)=0,\ \forall\eta_2\in W_2^{1,1}(\Omega),\quad \eta_2(x,T)=0,$$

Bunun yanı sıra

$$u_p^m(x,0)=\varphi_p(x),\quad p=1,2 \tag{3.1.3.21}$$

şartlarını da sağlamaktadır. (3.1.3.16) – (3.1.3.18) limit bağıntılarını kullanarak, $m\to\infty$ için

$$\int_{\Omega}\left(-\frac{\partial u_p^m}{\partial t}\frac{\partial \eta_p}{\partial t}+a_0\frac{\partial u_p^m}{\partial x}\frac{\partial \eta_p}{\partial x}+a(x)u_p^m\eta_p\right)dxdt$$
$$\to\int_{\Omega}\left(-\frac{\partial u_p}{\partial t}\frac{\partial \eta_p}{\partial t}+a_0\frac{\partial u_p}{\partial x}\frac{\partial \eta_p}{\partial x}+a(x)u_p\eta_p\right)dxdt \tag{3.1.3.22}$$

p=1,2 $\forall\eta_1\in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega),\quad \eta_1(x,T)=0,\quad \forall\eta_2\in W_2^{1,1}(\Omega),\quad \eta_2(x,T)=0$ limit bağıntılarını elde ederiz.

Şimdi aşağıdaki limit bağıntılarının geçerli olduğunu ispatlayalım. $m\to\infty$ için

$$\int_{\Omega}v^m(t)u_p^m(x,t)\eta_p(x,t)dxdt\to$$
$$\to\int_{\Omega}v(t)u_p(x,t)\eta_p(x,t)dxdt,\quad p=1,2, \tag{3.1.3.23}$$

Kolaylıkla aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\int_{\Omega}v^m u_p^m\eta_p dxdt=\int\left(v^m-v\right)u_p\eta_p dxdt$$
$$+\int_{\Omega}v^m\left(u_p^m-u_p\right)\eta_p dxdt+\int_{\Omega}vu_p\eta_p dxdt,\quad p=1,2 \tag{3.1.3.24}$$

$u_1,\eta_1\in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega),\quad u_2,\eta_2\in W_2^{1,1}(\Omega),$ olduğundan $\psi_p\eta_p\in L_1(\Omega),\quad p=1,2$ şartı sağlanır. Bu takdirde (3.1.1.15) limit bağıntısını kullanarak $m\to\alpha$ için

$$\int_{\Omega} \left(v^m - v\right) u_p \eta_p \, dxdt \to 0, \quad p = 1,2 \tag{3.1.3.25}$$

bağıntısı ispatlanır. (3.1.3.24) eşitliğinin sağ tarafından ikinci terimi değerlendirelim. Cauchy – Bunyakovsky eşitsizliğini kullanıp $v^m \in V$ olduğunu göz önüne alırsak:

$$\left| \int_{\Omega} v^m \left(u_p^m - u_p\right) \eta_p \, dxdt \right| \le$$
$$\le b_0 \left\| \eta_p \right\|_{L_2(\Omega)} \left\| u_p^m - u_p \right\|_{L_2(\Omega)}, \; p = 1,2, \quad m = 1,2,...$$

eşitsizliğini elde ederiz. (3.1.3.19) limit bağıntısını sonuncu eşitsizlikte dikkate alıp limite geçersek,

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\Omega} v^m \left(u_p^m - u_p\right) \eta_p \, dxdt = 0, \; p = 1,2 \tag{3.1.3.26}$$

elde edilir. Böylece (3.1.3.25) ve (3.1.3.26) limit bağıntılarını dikkat alıp, (3.1.3.24) eşitliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçersek, (3.1.3.23) limit bağıntısının geçerli olduğunu ispatlamış oluyoruz.

(3.1.3.22) ve (3.1.3.23) limit bağıntılarını dikkate alarak (3.1.3.20) integral özdeşliklerinde limite geçersek

$$\begin{gathered} \int_{\Omega} \left[-\frac{\partial u_p}{\partial t} \frac{\partial \eta_p}{\partial x} + a_0 \frac{\partial u_p}{\partial x} \frac{\partial \eta_p}{\partial x} + a(x) u_p \eta_p + v(t) u_p \eta_p \right] dxdt = \\ \int_0^{\ell} \psi_p(x) \eta_p(x,0) dx + \int_{\Omega} f_p(x,t) \eta_p(x,t) dxdt, \quad p = 1,2 \end{gathered} \tag{3.1.3.27}$$

$\forall \eta_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega), \quad \eta_1(x,T) = 0, \qquad \forall \eta_2 \in W_2^{1,1}(\Omega), \quad \eta_2(x,T) = 0$ integral özdeşliklerinin geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece $\left\{u_p^m\right\}, \; p = 1,2$ dizilerinin limit fonksiyonları olan $u_p, \; p = 1,2$ fonksiyonlarının (3.1.3.27) integral özdeşliklerini sağladığını elde ediyoruz. İspatı tamama erdirmek için; $u_p(x,t), p = 1,2$ fonksiyonlarının $u_p(x,0) = \varphi_p(x), \, p = 1,2$ şartlarını sağlamasını göstermek yeterlidir. Gerçekten $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayları $C^0\left([0,T], L_2(0,\ell)\right)$ uzayınca kompakt gömüldüğünden $\left\{u_p^m\right\}$ dizileri $\forall t \in [0,T]$ için $L_2(0,\ell)$ uzayının normunda u_p, p=1,2 fonksiyonlarını kuvvetli yakınsayacaktır. Yani $m \to \infty$ ve $\forall t \in [0,T]$ için

$$\left\| u_p^m(.,t) - u_p(.,t) \right\|_{L_2(0,\ell)} \to 0, \quad p = 1,2 \tag{3.1.3.28}$$

limit bağıntıları geçerlidir. Bu limit bağıntılarını ve

$$u_p^m(x,0) = \varphi_p(x), \quad p = 1,2, \quad m = 1,2... \tag{3.1.3.29}$$

başlangıç şartlarını kullanırsak,

$$\int_0^\ell \left| u_p(x,0) - \varphi(x) \right|^2 dx \le 2 \int_0^\ell \left| u_p(x,0) - u_p^m(x,0) \right|^2 dx +$$
$$+ \int_0^\ell \left| u_p^m(x,0) - \varphi(x) \right|^2 dx, \quad p = 1,2$$

eşitsizliğinde limite geçersek,

$$u_p(x,0) = \varphi(x), \quad p = 1,2, \quad \overset{0}{\forall}\, x \in (0,\ell) \tag{3.1.3.30}$$

başlangıç şartlarını elde ederiz.

Böylece $\{u_p^m\}$, $p = 1,2$ fonksiyonlar dizisinin limit fonksiyonları olan $u_p = u_p(x,t)$, $p = 1,2$ fonksiyonları (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin $(v^m) \in V$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v = v(t) \in V$ 'ye karşılık gelen ve $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan (3.1.3.27) integral özdeşliklerini, (3.1.3.20) başlangıç şartlarını sağlayan çözümleridir, yani $u_p = u_p(x,t) \equiv u_p(x,t;v)$, $p = 1,2$ dir. $(v^m) \in V$ dizisi $v \in V$ elemanına $(*)$ zayıf yakınsadığında $\{u_p^m\}$, $p = 1,2$ dizileri $u_p(x,t)$, $p = 1,2$ fonksiyonlarına zayıf yakınsar. Bu nedenle $\left\| u_1 - u_2 \right\|_{L_2(\Omega)}^2$, $\left\| v - w \right\|_{L_2(0,T)}$ normlarının alttan zayıf yarı sürekli olduğunun ve $\alpha \ge 0$ olduğunu göz önüne alırsak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz.

$$J_{\alpha^*} \le J_\alpha(v) \le \varliminf_{m \to \infty} J_\alpha(v^m) = J_{\alpha^*}$$

Bu bağıntıdan $J_{\alpha^*} = J_\alpha(v)$ olduğu ispatlanır. Yani $v \in V$ elemanı $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde minimum noktasıdır. Böylece $\alpha \ge 0$ olduğunda (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olması ispatlanmış olur. Teorem 3.1.3.2 ispatlandı.

3.2 Hiperbolik Denklem için Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminde Çözüm için Gerek Şartlar

Bu bölümde hiperbolik denklemler için optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şartlara ait sorular incelenmektedir. Bu nedenle önce göz önüne alınan problemde fonksiyonelin differansiyellenebilmesi incelenip, onun gradiyantı için formül elde edilir. Bu formülün yardımıyla varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanır. Bunun yanı sıra Pontryagin'in Maksimum Prensibi biçiminde gerek şart da elde edilir. Nihayet bu bölümde göz önüne alınan optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için algoritma verilmektedir.

3.2.1 Fonksiyonelin Differansiyellenebilmesi

Bu alt bölümde (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminde amaç fonksiyonelin differansiyellenebilmesi incelenir ve onun gradiyenti için formül ispatlanır.

Farz edelim ki, $\phi_p = \phi_p(x,t), \quad p = 1,2$ fonksiyonları aşağıdaki eşlenik problem denilen sınır değer probleminin çözümü olsun:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 \phi_p}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 \phi_p}{\partial x^2} + a(x)\phi_p + v(x)\phi_p = \\ &= (-1)^p 2\left(u_1(x,t) - u_2(x,t)\right), \quad p = 1,2\end{aligned} \tag{3.2.1.1}$$

$$\phi_p(x,T) = 0, \quad \frac{\partial \phi_p(x,T)}{\partial t} = 0, \quad x \in (0,\ell), \quad p = 1,2, \tag{3.2.1.2}$$

$$\phi_1(0,t) = \phi_1(\ell,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3.2.1.3}$$

$$\frac{\partial \phi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2(\ell,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0,T) \tag{3.2.1.4}$$

Burada $u_p = u_p(x,t), \; p = 1,2$ fonksiyonları (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin $v \in V$ için çözümüdür.

Tanım 3.2.1.1: (3.2.1.1) – (3.2.1.4) eşlenik sınır değer probleminin çözümü denilirken $\tilde{\eta}_p(x,0)=0,\quad p=1,2,\quad \forall\tilde{\eta}_1\in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega),\quad \forall\tilde{\eta}_2\in W_2^{1,1}(\Omega)$ için

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left[-\frac{\partial\phi_p}{\partial t}\frac{\partial\tilde{\eta}_p}{\partial t}+a_o\frac{\partial\phi_p}{\partial x}\frac{\partial\tilde{\eta}_p}{\partial x}+a(x),\phi_p\tilde{\eta}_p+v(t)\phi_p\tilde{\eta}_p\right]dxdt=\\&=\int_\Omega\left((-1)^p2(u_1(x,t)-u_2(x,t))+\tilde{\eta}_p(x,t)\right)dxdt,\quad p=1,2\end{aligned}\tag{3.2.1.5}$$

integral özdeşliğini sağlayan $\phi_2\in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega),\ \phi_2\in W_2^{1,1}(\Omega)$ fonksiyonları anlaşılmaktadır.

(3.2.1.1) – (3.2.1.4) eşlenik probleminin (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer problemi ile aynı tipli olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten $t=T-\tau$ değişken dönüşümü yapılırsa, $\tilde{\phi}_p(x,\tau)=\phi_p(x,T-\tau),\quad p=1,2$ gösterimi kullanılırsa, (3.2.1.1) – (3.2.1.4) probleminden aşağıdaki problemi elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\tilde{\phi}_p}{\partial\tau^2}-a_0\frac{\partial^2\tilde{\phi}_p}{\partial x^2}+a(x)\tilde{\phi}_p+\tilde{v}(\tau)\tilde{\phi}_p=\\&=(-1)^p2(\tilde{u}_1(x,\tau)-\tilde{u}_2(x,\tau)),\quad p=1,2\end{aligned}\tag{3.2.1.6}$$

$$\tilde{\phi}_p(x,0)=0,\quad \frac{\partial\tilde{\phi}_p(x,0)}{\partial t}=0,\quad x\in(o,\ell),\quad p=1,2\tag{3.2.1.7}$$

$$\tilde{\phi}_1(0,\tau)=\tilde{\phi}_1(\ell,\tau)=0,\quad \tau\in(0,T)\tag{3.2.1.8}$$

$$\frac{\partial\tilde{\phi}_2(0,\tau)}{\partial x}=\frac{\partial\tilde{\phi}_2(\ell,\tau)}{\partial x}=0,\quad \tau\in(0,T)\tag{3.2.1.9}$$

Burada $\tilde{v}(\tau)=v(T-\tau)=v(t),\quad \tilde{u}_p(x,\tau)=u_p(x,T-\tau)=u_p(x,t),\quad p=1,2$ dir. Görüldüğü üzere (3.2.1.6) – (3.2.1.9) sınır değer problemi (3.1.1.2) – (3.1.1.5) tipli sınır değer problemidir. Bu problem (3.2.1.1) – (3.2.1.4) eşlenik probleme denk olduğundan istenen hükme varmış oluyoruz. Bu nedenle $u_1-u_2\in W_2^{1,1}(\Omega)$ olduğundan teorem 3.1.2.3 hükmünü kullanarak (3.2.1.1) – (3.2.1.4) eşlenik probleminin bir tek çözümüne sahip olduğunu ve çözüm için

$$\|\phi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)}\le c_{15}\|u_1-u_2\|_{L_2(\Omega)},\tag{3.2.1.10}$$

$$\|\phi_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)}\le c_{16}\|u_1-u_2\|_{L_2(\Omega)},\tag{3.2.1.11}$$

kestirimlerinin geçerli olduğunu elde ederiz. Burada $c_{15} > 0, c_{16} > 0$ sabitlerdir.

Aşağıdaki fonksiyonu göz ününe alalım:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{H}(t,u_1(.,t),u_2(.,t),v,\phi_1(.,t),\phi_2(.,t)) = \\
&-\int_0^{\ell}(u_1(x,t)\phi_1(x,t)+u_2(x,t)\phi_2(x,t))dx - \\
&-\alpha(v(x)-w(t))^2
\end{aligned}
\tag{3.2.1.12}
$$

Bu fonksiyona (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol problemi için Hamilton – Pontryagin fonksiyonu denir.

Teorem 3.2.1.1: Farz edelim ki, Teorem 3.1.2.3'ün şartları sağlanmış olsun ve $w \in L_2(0,T)$ verilen eleman olsun. Bu takdirde $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında differansiyellenebilir ve onun gradiyantı için

$$J'_\alpha(v) = -\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial v} \tag{3.2.1.13}$$

formülü geçerlidir. Burada $\mathrm{H} = \mathrm{H}(t,u_1,u_2,v,\phi_1,\phi_2)$ fonksiyonu (3.2.1.12) formülü ile tanımlanır.

İspat: $\forall v \in V$ elemanını alalım ve bu eleman üzerinde $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışını bulalım. (3.1.1.1) ve (3.1.3.10) formüllerini kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki formülü yazabiliriz;

$$
\begin{aligned}
&\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\Delta v) - J_\alpha(v) = \\
&= 2\int_\Omega (u_1(x,t)-u_2(x,t))(\Delta u_1(x,t)-\Delta u_2(x,t))dxdt + \\
&+2\alpha\int_0^T (v(t)-w(t))\Delta v(x)dt + \\
&+\|\Delta u_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_2\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\int_\Omega \Delta u_1(x,t)\Delta u_2(x,t)dxdt + \\
&+\alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)}
\end{aligned}
\tag{3.2.1.14}
$$

Burada $\Delta u_p = \Delta u_p(x,t) = u_p(x,t;v+\Delta v) - u_p(x,t;v), \quad p = 1,2$ fonksiyonları (3.1.3.2) – (3.1.3.5) sınır değer probleminin çözümüdür.

$u_2 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega),\ u_2 \in W_2^{1,1}(\Omega)$ fonksiyonları (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümü olduğundan (3.1.3.27) özdeşliklerini kullanarak (3.1.3.2) – (3.1.3.5) sınır değer probleminin çözümü olan $\Delta u_p = \Delta u_p(x,t),\ p=1,2$ fonksiyonları için aşağıdaki özdeşlikleri yazabiliriz:

$$\int_\Omega \left[-\frac{\partial \Delta u_p}{\partial t}\frac{\partial \eta_p}{\partial t} + a_0 \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x}\frac{\partial \eta_p}{\partial x} + a(x)\Delta u_p \eta_p + (v+\Delta v)\Delta u_p \eta_p \right] dxdt =$$

$$- \int_\Omega \Delta v(t) u_p(x,t)\eta_p(x,t)dxdt,\ p=1,2, \tag{3.2.1.15}$$

$$\forall \eta_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega),\ \forall \eta_2 \in W_2^{1,1}(\Omega),\ \eta_p(x,T)=0,\ p=1,2$$

Bu integral özdeşliklerinde $\eta_p(x,t),\ p=1,2$ fonksiyonlarının yerine $\phi_p(x,t),\ p=1,2$ fonksiyonlarını alabiliriz. Bu takdirde

$$\int_\Omega \left[-\frac{\partial \Delta u_p}{\partial t}\frac{\partial \phi_p}{\partial t} + a_0 \frac{\partial \Delta u_p}{\partial x}\frac{\partial \phi_p}{\partial x} + a(x)\Delta u_p \phi_p + (v+\Delta v)\Delta u_p \phi_p \right] dxdt =$$

$$= -\int_\Omega \Delta v(t) u_p(x,t)\phi_p(x,t)dxdt, \quad p=1,2, \tag{3.2.1.16}$$

eşitliğini elde edebiliriz.

$\Delta u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega),\ \Delta u_2 \in W_2^{1,1}(\Omega),\ \Delta u_p(x,0)=0,\ p=1,2$ olduğundan (3.2.1.2) – (3.2.1.5) özdeşliklerinde $\tilde{\eta}_p(x,t),\ p=1,2$ fonksiyonlarının yerine $\Delta u_p(x,t)$, p=1,2 fonksiyonlarını alalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\int_\Omega \left[-\frac{\partial \Delta \phi_p}{\partial t}\frac{\partial u_p}{\partial t} + a_0 \frac{\partial \phi_p}{\partial x}\frac{\partial \Delta u_p}{\partial x} + a(x)\phi_p \Delta u_p + v\phi_p \Delta u_p \right] dxdt =$$

$$= (-1)^p 2\int_\Omega (u_1(x,t) - u_2(x,t))\Delta u_p(x,t)dxdt, \quad p=1,2 \tag{3.2.1.17}$$

(3.2.1.16) – (3.2.1.17) eşitsizliklerini taraf tarafa çıkarırsak, bir sonraki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\int_\Omega \Delta v(t)\Delta u_p \phi_p dxdt = -\int_\Omega \Delta v(t)\Delta u_p \phi_p dxdt -$$

$$-(-1)^p 2\int_\Omega (u_1(x,t) - u_2(x,t))\Delta u_p(x,t)dxdt,\ p=1,2$$

p=1 ve p=2 için bu eşitsizlikler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$2\int_{\Omega}(u_1(x,t)-u_2(x,t))\Delta u_1(x,t)dxdt = \int_{\Omega}\Delta v(t)\Delta u_1\phi_1 dxdt + \int_{\Omega}\Delta v(t)\Delta u_1\phi_1 dxdt$$

$$-2\int_{\Omega}(u_1(x,t)-u_2(x,t))\Delta u_2(x,t)dxdt = \int_{\Omega}\Delta v(t)u_2\phi_2 dxdt + \int_{\Omega}\Delta v(t)\Delta u_2\phi_2 dxdt$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$2\int_{\Omega}(u_1(x,t)-u_2(x,t))(\Delta u_1(x,t)-\Delta u_2(x,t))dxdt = \int_{\Omega}\Delta v(x)(u_1\phi_1+u_2\phi_2)dxdt + \int_{\Omega}\Delta v(x)(\Delta u_1\phi_1+\Delta u_2\phi_2)dxdt \tag{3.2.1.18}$$

Bu eşitliği fonksiyonelin artışı için olan (3.1.1.14) formülünde dikkate alarak

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_{\Omega}(u_1(x,t)\phi_1(x,t)+u_2(x,t)\phi_2(x,t))\Delta v(x)dxdt + + 2\int_0^T (v(t)-w(t))\Delta v(t)dt + R \tag{3.2.1.19}$$

formülünü elde ederiz. Burada R kalanı aşağıdaki formül ile tanımlanmaktadır.

$$R = \int_{\Omega}(\Delta u_1(x,t)\phi_1(x,t)+\Delta u_2(x,t)\phi_2(x,t))\Delta v(t)dxdt + \|\Delta u_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_2\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\int_{\Omega}\Delta u_1(x,t)\Delta u_2(x,t)dxdt + + \alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)} \tag{3.2.1.20}$$

(3.1.3.1) – (3.1.3.5), (3.2.1.10) – (3.2.1.11) kestirimlerini kullanarak Cauchy –Bunyakovsky eşitsizliğinin yardımıyla R kalanını aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$|R| \le c_{16}\|\Delta v\|^2_{L\infty(0,T)}, \tag{3.2.1.21}$$

Burada $c_{16>}\ 0$ sayısı Δv 'den bağımsızdır. Buradan

$$R = o\left(\|\Delta v\|_{L_\infty(o,T)}\right) \tag{3.2.1.22}$$

olduğu elde edilir. Yani R kalanı $\|\Delta v\|_{L_\infty(o,T)}$'ye göre sonsuz küçüktür. Bu eşitliğin yardımıyla (3.2.1.19) formülünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_0^T\left[\int_0^{\ell}(u_1(x,t)\phi_1(x,t)+u_2(x,t)\phi_2(x,t))dx + 2\alpha(v(t)-w(t))\right]\Delta v(t)dt + + o\left(\|\Delta v\|_{L\infty(0,T)}\right) \tag{3.2.1.23}$$

Fonksiyonellerinin Frechet anlamında türevinin tanımını kullanırsak (3.2.1.23) formülünden yola çıkarak $J_\alpha(v)$ fonksiyonellerinin $\forall v \in V$ elemanı üzerinde differansiyellenebilir olduğunu ve onun gradiyantı için

$$\Delta J'_\alpha(v) = \int_0^\ell (u_1(x,t)\phi_1(x,t) + u_2(x,t)\phi_2(x,t))dxdt + \\ + 2\alpha(v(t) - w(t)) \tag{3.2.1.24}$$

formülünü elde ederiz. Hamilton – Pontryagin fonksiyonu için olan formülü dikkate alırsak teoremin hükmünün geçerli olduğu elde edilir. Teorem 3.2.1.1 ispatlandı.

3.2.2 Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Varyasyon Eşitsizliği Şeklinde Gerek Şart

Bu alt bölümde optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanacaktır.

Teorem 3.2.2.1: Farz edelim ki, Teorem 3.2.1.1'in şartları sağlanmış olsun ve $v^* \in V$ kontrolü (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü olsun. Bu takdirde $\forall v \in V$ için

$$\int_0^T \left[\int_0^\ell \left(u_1^*(x,t)\phi_1^*(x,t) + u_2^*(x,t)\phi_1^*(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v^*(t) - w(t)\right) \right] \left[v(t) - v^*(t)\right] dt \geq 0$$

(3.2.2.1)

eşitsizliği geçerlidir. Burada $u_p^*(x,t) \equiv u_p\left(x,t;v^*\right)$, $\phi_p^*(x,t) = \phi_p\left(x,t;v^*\right)$, $p = 1,2$ sırasıyla (3.1.1.2) – (3.1.1.5) ve (3.2.1.1) – (3.2.1.4) sınır değer problemlerinin çözümleridir.

İspat: Tanımından görüldüğü gibi V kümesi $L_\alpha(0,T)$ uzayının konveks kümesidir. Diğer yandan $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesinde Teorem 3.2.1.1'e göre Frechet anlamında differansiyellenebilir fonksiyoneldir ve onun gradiyenti için

$$J'_\alpha(v) = \int_0^\ell (u_1(x,t)\phi_1(x,t) + u_2(x,t)\phi_2(x,t))dx + 2\alpha(v(t) - w(t)) \tag{3.2.2.2}$$

formülü geçerlidir. $J'_\alpha(v)$'nin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla $J'_\alpha(v)$'nin $\forall v \in V$ için artışını bulalım. (3.2.2.2) formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned}
\Delta J'_\alpha(v) &= J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v) = \\
&= \int_0^\ell [\Delta u_1(x,t)\phi_1(x,t) + u_1(x,t)\Delta\phi_1(x,t) + \Delta u_1(x,t)\phi_1(x,t) + \\
&+ \Delta u_2(x,t)\phi_2(x,t) + u_2(x,t)\Delta\phi_2(x,t) + \Delta u_2(x,t)\Delta\phi_2(x,t)]dx \\
&+ 2\alpha\Delta v(t)
\end{aligned} \tag{3.2.2.3}$$

Burada $\Delta u_p = \Delta u_p(x,t),\ \ p=1,2$ fonksiyonları (3.1.3.2) – (3.1.3.5) sınır değer probleminin çözümü $\Delta\phi_p = \Delta\phi_p(x,t) \equiv \phi_p(x,t;v+\Delta v) - \phi_p(x,t;v),\ \ p=1,2$ fonksiyonları için aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial^2\Delta\phi_p}{\partial t^2} - a_0\frac{\partial^2\Delta\phi_p}{\partial x^2} + a(x)\Delta\phi_p + (v(t)+\Delta v(t))\Delta\phi_p = \\
&= -\Delta v(t)\phi_p(x,t) + 2(-1)^p(\Delta u_1 - \Delta u_2) \quad (x,t)\in\Omega,\quad p=1,2
\end{aligned} \tag{3.2.2.4}$$

$$\Delta\phi_p(x,T) = 0,\quad \frac{\partial\Delta\phi_p(x,T)}{\partial t} = 0,\quad x\in(0,\ell) \tag{3.2.2.5}$$

$$\frac{\partial\Delta\phi_2(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial\Delta\phi_2(\ell,t)}{\partial x} = 0,\quad t\in(0,T) \tag{3.2.2.6}$$

$$\Delta\phi_1(x,t) = \Delta\phi_1(\ell,t) = 0,\quad t\in(0,T) \tag{3.2.2.7}$$

Görüldüğü gibi (3.2.2.4) – (3.2.2.5) sınır değer problemi (3.2.1.1) – (3.2.1.4) gibi aynı tipli sınır değer problemidir. Bu nedenle (3.2.1.10), (3.2.1.11) kestirimlerine benzer olarak aşağıdaki kestirimlerin geçerli olduğunu yazabiliriz:

$$\|\Delta\phi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{17}\left(\|\Delta v\phi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_1 - \Delta u_2\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{3.2.2.8}$$

$$\|\Delta\phi_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{18}\left(\|\Delta v\phi_2\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_1 - \Delta u_2\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{3.2.2.9}$$

Burada $c_{17}>0$, $c_{18}>0$ sabitleri Δv'den bağımsızdır. (3.2.1.10), (3.2.1.11), (3.1.3.8) – (3.1.3.9) kestirimlerini (3.2.2.8) – (3.2.2.9) eşitsizliklerinde kullanırsak;

$$\|\Delta\phi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{19}\|\Delta v\|_{L_\infty(0,T)}, \tag{3.2.2.10}$$

$$\|\Delta\phi_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{20}\|\Delta v\|_{L_\alpha(0,T)}, \tag{3.2.2.11}$$

kestirimlerini elde ederiz, burada $c_{19}>0$, $c_{20}>0$ sayıları Δv'den bağımsızdır.

Şimdi bu kestirimleri kullanarak $\Delta J'_\alpha(v)$'ni kestirelim. Cauchy–Bunyakovsky eşitsizliğinden yararlanarak $\Delta J'_\alpha(v)$ için aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\|\Delta J_\alpha(v)\|_{L_1(0,T)} \le \|\Delta u_1\|_{L_2(\Omega)}\|\phi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\phi_1\|_{L_2(\Omega)}\|u_1\|_{L_2(\Omega)} +$$
$$+\|\Delta u_1\|_{L_2(\Omega)}\|\Delta\phi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_2\|_{L_2(\Omega)}\|\phi_2\|_{L_2(\Omega)} + \|u_2\|_{L_2(\Omega)}\|\Delta\phi_2\|_{L_2(\Omega)} +$$
$$+\|\Delta u_2\|_{L_2(\Omega)}\|\Delta\phi_2\|_{L_2(\Omega)} + 2\alpha\|\Delta v\|_{L_2(0,T)}$$

Bu eşitsizlikte (3.1.2.35), (3.1.2.36), (3.1.3.8), (3.1.3.9), (3.2.1.10), (3.2.1.11), (3.2.2.10) ve (3.2.2.11) kestirimlerinden yararlanırsak

$$\|J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)\|_{L_1(0,T)} \le c_{21}\|\Delta v\|_{L_\infty(0,T)} \qquad (3.2.2.12)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu ispatlamış oluyoruz. Bu eşitsizlik her hangi $v \in V$ için geçerli olduğundan $J'_\alpha(v)$ gradiyantının V kümesi üzerinde sürekli olduğu elde edilir. Böylece $J_\alpha(v)$ fonksiyonellinin V kümesi üzerinde sürekli differansiyellenebilir fonksiyon olduğu ispatlanmış oldu. Şunları dikkate alırsak, [15] çalışmasından bildiğimiz teoremin şartlarını sağladığı görülür.(Bazı kuramsal temeller, Teorem 2.12). Bu takdirde söz konusu teoreme göre $v* \in V$ çözümü için

$$\left\langle J'_\alpha(v^*), v - v^* \right\rangle_{L_\infty(0,T)} \ge 0, \quad \forall v \in V$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu ispatlanır. Bu eşitsizlikle $J'_\alpha(v)$ gradiyantı ifadesinin yerine yazarsak teoremin hükmünün, yani (3.2.2.1) eşitsizliğinin geçerli olduğu ispatlanır. Teorem 3.2.2.1 ispatlandı.

3.2.3. Pontryagin'in Maksimum Prensibi Şeklinde Gerek Şart

Bu alt bölümde göz önüne alınan optimal kontrol probleminin çözümü için optimal kontrol teorisinin şu önemli sonuçlarından biri olan Pontryagin'in Maksimum Prensibi biçiminde gerek şartı ispatlamaya çalışacağız.

Teorem 3.2.3.1: Farz edelim ki, teorem 3.1.3.2' nin şartları sağlansın ve $v* \in V$ kontrolü (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin çözümü olsun. Bu takdirde $\overset{0}{\forall} t \in (0,T)$ için

$$H\left(t,u_1^*(.,t),u_2^*(.,t),v^*(t),\phi_1^*(.,t)\phi_2^*(.,t)\right)=$$
$$=\sup_{v\in[-b_0,b_0]} H\left(t,u_1^*(.,t),u_2^*(.,t)v,\phi_1^*(.,t),\phi_2^*(.,t)\right), \tag{3.2.3.1}$$

bağıntısı geçerlidir. Burada $H(t,u_1,u_2,v,\phi_1,\phi_2)$ Hamilton - Pontryagin Fonksiyonu, $u_p^* \equiv u_p^*(x,t) \equiv u_p(x,t;v^*)$, $p=1,2$, $\phi_p^* = \phi_p^*(x,t) \equiv \phi_p(x,t;v^*)$, $p=1,2$ sırasıyla (3.1.1.2) – (3.1.1.4) ve (3.2.1.1) – (3.2.1.4) sınır değer problemlerinin çözümleridir.

İspat: (0,*T*) aralığının içinden herhangi θ lebesque noktasını tespit edelim [29]. ε>0 sayısı

$$\Pi_\varepsilon \equiv \left\{t:\theta-\frac{\varepsilon}{2}<t<\theta+\frac{\varepsilon}{2}\right\}\subset(0,T) \tag{3.2.3.2}$$

olacak biçimde yeteri kadar küçük pozitif sayı olsun. Farz edelim ki, $v^* = v^*(t)\in V$ kontrolü (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin çözümü olsun. Bu optimal kontrolün iğnesel varyasyonu;

$$v^\varepsilon(t)=\begin{cases} W, & t\in\Pi_\varepsilon \\ v^*(t), & t\notin\Pi_\varepsilon \end{cases} \tag{3.2.3.3}$$

biçiminde tanımlayalım. Burada $w\in[-b_0,b_0]$ herhangi sayıdır. $v^\varepsilon\in V$ olduğu açıktır. Lebesque noktasının tanımı kullanarak $\varepsilon\to 0$ için

$$v^\varepsilon \to v^* \text{ kuvvetli } L_p(0,T)\text{'de } 1\le p<+\infty \tag{3.2.3.4}$$

limit bağıntısını kolaylıkla ispatlayabiliriz.

Farz edelim ki, $u_{p\varepsilon}(x,t)=u_p(x,t;v^\varepsilon)$, p=1,2 fonksiyonları (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin $v^\varepsilon = v^\varepsilon(t)\in V$ kontrolüne karşılık gelen çözümü olsun. Bu takdirde

$$\Delta u_{p\varepsilon}(x,t)=u_{p\varepsilon}(x,t)-u^*{}_p(x,t)\equiv$$
$$\equiv u_p(x,t;v^\varepsilon)-u_p(x,t;v^*),\quad p=1,2$$

sınır değer probleminin $v^*, v^\varepsilon\in V$ yazıldığında çözümüdür. Böyle olduğu takdirde (3.1.3.6) – (3.1.3.7) kestirimleri aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\|\Delta u_{1\varepsilon}\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_8 \left\|\Delta v^\varepsilon u_1^*\right\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.2.3.5}$$

$$\left\|\Delta u_{2\varepsilon}\right\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_9 \left\|\Delta v^{\varepsilon} u_2^*\right\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.2.3.6}$$

Burada $\Delta v^{\varepsilon} = v^{\varepsilon} - v^*$ dır. $c_8>0$, $c_9>0$ sayıları $\varepsilon > 0$ dan bağımsızdır. Sonuncu eşitsizliklerde iğnesel varyasyonu göz önüne alırsak;

$$\left\|\Delta u_{1\varepsilon}\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_8 \left(\int_{\theta-\varepsilon/2}^{\theta+\varepsilon/2} \left\|\Delta v^{\varepsilon}(t) u_1^*(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 \right)^{1/2}$$

$$\left\|\Delta u_{2\varepsilon}\right\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_9 \left(\int_{\theta-\varepsilon/2}^{\theta+\varepsilon/2} \left\|\Delta v^{\varepsilon}(t) u_2^*(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 \right)^{1/2}$$

eşitsizlikleri elde ederiz. Burada $\forall t \in [0,T]$ için

$$\left\|u_1^*(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)} \le c_{22} \left\|u_1^*\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \tag{3.2.3.7}$$

$$\left\|u_2^*(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)} \le c_{23} \left\|u_2^*\right\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \tag{3.2.3.8}$$

eşitsizliklerini uygularsak, aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta u_{1\varepsilon}\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} &\le c_8 \left(\int_{\theta-\varepsilon/2}^{\theta+\varepsilon/2} \left\|\Delta v^{\varepsilon}(t)\right\|^2 dt \right)^{1/2} . \max_{\theta-\frac{\varepsilon}{2} \le t \le \theta+\frac{\varepsilon}{2}} \left\|u_1^*(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)} \le \\
&\le c_{24} \left(\int_{\theta-\varepsilon/2}^{\theta+\varepsilon/2} \left\|\Delta v^{\varepsilon}(t)\right\|^2 dt \right) . \\
&\left(\int_{\theta-\varepsilon/2}^{\theta+\varepsilon/2} \left[\left\|u_1^*(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 + \left\|\frac{\partial u_1^*(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 + \left\|\frac{\partial u_1^*(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 \right] dt \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.2.3.9}$$

$$\begin{aligned}
\left\|\Delta u_{2\varepsilon}\right\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} &\le c_9 \left(\int_{\theta-\varepsilon/2}^{\theta+\varepsilon/2} \left\|\Delta v^{\varepsilon}(t)\right\|^2 dt \right)^{1/2} . \max_{\theta-\frac{\varepsilon}{2} \le t \le \theta+\frac{\varepsilon}{2}} \left\|u_2^*(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)} \le \\
&\le c_{25} \left(\int_{\theta-\varepsilon/2}^{\theta+\varepsilon/2} \left\|\Delta v^{\varepsilon}(t)\right\|^2 dt \right) \\
&. \left(\int_{\theta-\varepsilon/2}^{\theta+\varepsilon/2} \left[\left\|u_2^*(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 + \left\|\frac{\partial u_2^*(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 + \left\|\frac{\partial u_2^*(.,t)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 \right] dt \right)^{1/2}
\end{aligned} \tag{3.2.3.10}$$

Burada $c_{24}=c_8.c_{22}$, $c_{25}=c_9.c_{23}$ dir. (3.2.3.9) ve (3.2.3.10) eşitsizliklerinde

$$\left(\int_{\theta-\varepsilon/2}^{\theta+\varepsilon/2}\left\|\Delta v^{\varepsilon}(t)\right\|^{2}dt\right)^{1/2}=\left(\int_{\theta-\varepsilon/2}^{\theta+\varepsilon/2}\left|w-v^{*}(t)\right|^{2}dt\right)^{1/2}\leq 2b_0\varepsilon^{1/2}$$

eşitsizliğini ve integralın mutlak sürekliğini kullanırsak bir sonraki eşitsizliklerin geçerli olduğu elde ederiz:

$$\left\|\Delta u_{1\varepsilon}\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)}\leq c_{26}\varepsilon^{1/2}\eta_1(\varepsilon) \qquad (3.2.3.12)$$

$$\left\|\Delta u_{2\varepsilon}\right\|_{W_2^{1,1}(\Omega)}\leq c_{27}\varepsilon^{1/2}\eta_2(\varepsilon) \qquad (3.2.3.13)$$

Burada $c_{26}>0$, $c_{27}>0$ sabitleri $\varepsilon>0$ dan bağımsızdır. $\eta_1(\varepsilon)>0$, $\eta_2(\varepsilon)>0$ ve $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\eta_1(\varepsilon)=0$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\eta_2(\varepsilon)=0$

Şimdi (3.1.1.1) fonksiyonelinin $v^*\in V$ elemanı üzerinde artışını bulalım.

$$\begin{aligned}
&\Delta J_\alpha(v^*,\varepsilon)=J_\alpha(v^\varepsilon)-J_\alpha(v^*)=\\
&=2\int_\Omega\left(u_1^*(x,t)-u_2^*(x,t)\right)\left(\Delta u_{1\varepsilon}(x,t)-\Delta u_{2\varepsilon}(x,t)\right)dxdt+\\
&+\left\|\Delta u_{1\varepsilon}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\Delta u_{2\varepsilon}\right\|^2_{L_2(\Omega)}-2\int_\Omega\Delta u_{1\varepsilon}.\Delta u_{2\varepsilon}dxdt+\\
&+\alpha\int_0^T\left(v^*(t)-w(t)\right)\Delta v^\varepsilon(t)dt+\alpha\left\|\Delta v^\varepsilon\right\|^2_{L_2(0,T)}
\end{aligned} \qquad (3.2.3.14)$$

(3.2.1.18) formülünün aynısını yani v^* ve $v^\varepsilon\in V$ kontrollerine ve onların artışı olan $\Delta v^\varepsilon=v^\varepsilon-v^*$'a karşılık geleni yazarsak;

$$\begin{aligned}
&2\int_\Omega\left(u_1^*(x,t)-u_2^*(x,t)\right)\left(\Delta u_{1\varepsilon}(x,t)-\Delta u_{2\varepsilon}(x,t)\right)dxdt=\\
&=\int_\Omega\Delta v^\varepsilon(t)\left(u_1^*(x,t)\phi_1^*(x,t)+u_2^*(x,t)\Delta t_2^*(x,t)\right)dxdt+\\
&+\int_\Omega\Delta v^\varepsilon(t)\left(\Delta u_{1\varepsilon}^*(x,t)\phi_1^*(x,t)+\Delta u_{2\varepsilon}^*(x,t)\Delta\phi_2^*(x,t)\right)dxdt
\end{aligned} \qquad (3.2.3.15)$$

formülünü elde ederiz. Bu formülü (3.2.3.14) de dikkate alalım. Bu takdirde fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\begin{aligned}
&\Delta J_\alpha(v^*,\varepsilon)=J_\alpha(v^\varepsilon)-J_\alpha(v^*)=\\
&=\int_\Omega\left(u_1^*(x,t)\phi_1^*(x,t)+u_2^*(x,t)\phi_2^*(x,t)\right)\Delta v^\varepsilon(t)dt+
\end{aligned}$$

$$+2\alpha\int_0^T \left(v^*(t)-w(t)\right)\Delta v^{\varepsilon}(t)dt+\alpha\left\|\Delta v^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(0,T)}+R(\varepsilon) \qquad (3.2.3.16)$$

Burada $R(\varepsilon)$ aşağıdaki formül ile tanımlanır;

$$R(\varepsilon)=\left\|\Delta u_{1\varepsilon}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\Delta u_{2\varepsilon}\right\|^2_{L_2(\Omega)}-2\int_{\Omega}\Delta u_{1\varepsilon}(x,t).\Delta u_{2\varepsilon}(x,t)dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\left(\phi_1^*(x,t)\Delta u_{1\varepsilon}(x,t)+\phi_2^*(x,t)u_{2\varepsilon}(x,t)\right)\Delta v^{\varepsilon}(t)dt \qquad (3.2.3.17)$$

Hamilton – Pontryagin Fonksiyonu için olan ifadeyi kullanırsak fonksiyonelin artışı için olan (3.2.3.16) formülünü aşağıdaki gibi de yazabiliriz.

$$\Delta J_{\alpha}\left(v^*,\varepsilon\right)=J_{\alpha}\left(v^{\varepsilon}\right)-J_{\alpha}\left(v^*\right)=$$

$$=-\int_0^T \Delta_{\varepsilon}H\left(t,u_1^*(.,t),u_2^*(.,t)v,\phi_1^*(.,t),\phi_2^*(.,t)\right)\mathrm{dt}+\mathrm{R}(\varepsilon) \qquad (3.2.3.18)$$

Burada

$$\Delta_{\varepsilon}H\left(t,u_1^*,u_2^*,v^*,\phi_1^*,\phi_2^*\right)=$$

$$=H\left(t,u_1^*,u_2^*,v^{\varepsilon},\phi_1^*,\phi_2^*\right)-H\left(t,u_1^*,u_2^*,v^*,\phi_1^*,\phi_2^*\right) \qquad (3.2.3.19)$$

Şimdi (3.2.3.8) formülünde yer alan $R(\varepsilon)$ terimini kestirelim. (3.2.3.17) formülünün yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\left|R(\varepsilon)\right|\leq 2\left\|\Delta u_{1\varepsilon}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+2\left\|\Delta u_{2\varepsilon}\right\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\int_{\theta-\varepsilon/2}^{\theta+\varepsilon/2}\left|\Delta v^{\varepsilon}(t)\right|dt\ \left(\max_{0\leq t\leq T}\left\|\Delta u_{1\varepsilon}(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}\times\max_{0\leq t\leq T}\left\|\phi_1^*(.,t)\right\|_{L_2(\Omega)}+\right.$$

$$\left.+\max_{0\leq t\leq T}\left\|\Delta u_{21\varepsilon}(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}\times\max_{0\leq t\leq T}\left\|\phi_2^*(.,t)\right\|_{L_2(\Omega)}\right) \qquad (3.2.3.20)$$

$\phi_1^*,\phi_2^*,\Delta u_{1\varepsilon},\Delta u_{2\varepsilon}$ fonksiyonları için (3.2.3.7) – (3.2.3.8) eşitsizliklerinin aynısını yazıp (3.2.3.12) – (3.2.3.13) eşitsizliğinden

$$\left|R(\varepsilon)\right|\leq c_{28}\varepsilon.\eta_3(\varepsilon)+c_{25}\varepsilon^{3/2}\left(\eta_1(\varepsilon)+\eta_2(\varepsilon)\right) \qquad (3.2.3.21)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu ispatlamış oluyoruz. Burada $c_{28}>0$, $c_{25}>0$ sabitleri ε'dan bağımsızdır. $\eta_3(\varepsilon)>0$, $\lim_{\varepsilon\to 0}\eta_3(\varepsilon)=0$

Sonuncu eşitsizlikten kolaylıkla,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon}=0 \tag{3.2.3.22}$$

bağıntısı elde edilir. Bu bağıntıyı kullanarak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin birinci varyasyonu için formülü ispatlamaya çalışalım.

$v^*\in V$ kontrolü (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin çözümü olduğundan

$$\Delta J_\alpha(v^*,\varepsilon)=J_\alpha(v^\varepsilon)-J_\alpha(v^*)\geq 0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin her iki tarafını $\varepsilon>0$ 'a bölüp $\varepsilon\to 0^+$ için limite geçelim.

$$0\leq \delta J_\alpha(v^*)=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\Delta J_\alpha(v^*,\varepsilon)}{\varepsilon}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{J_\alpha(v^\varepsilon)-J_\alpha(v^*)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{R(\varepsilon)}{\varepsilon}-$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T\Delta_\varepsilon H\left(t,u_1^*(.,t),u_2^*(.,t)v^*,\phi_1^*(.,t),\phi_2^*(.,t)\right)dt$$

$\theta\in(0,T)$ noktasının Lebesque noktası olduğunu ve $\Delta_\varepsilon H$ için olan formülü dikkate alırsak sonuncu eşitlikten fonksiyonelin birinci varyasyonu için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$0\leq \delta J_\alpha(v^*)=-\left[H\left(\theta,u_1^*(.,\theta),u_2^*(.,\theta),w,\phi_1^*(.,\theta),\phi_2^*(.,\theta)\right)-\right.$$

$$\left.-H\left(\theta,u_1^*(.,\theta),u_2^*(.,\theta),v^*(t),\phi_1^*(.,\theta),\phi_2^*(.,\theta)\right)\right]$$

Bu eşitsizlik herhangi $w\in[-b_0,b_0]$ için ve herhangi Θ Lebesque noktası için geçerli olduğundan teoremin hükmünün doğruluğunu elde etmiş oluyoruz. Çünkü $\forall w\in[-b_0,b_0]$ ve $\overset{0}{\forall} t\in(0,T)$ için

$$H\left(t,u_1^*(.,t),u_2^*(.,t),w,\phi_1^*(.,t),\phi_2^*(.,t)\right)\leq$$

$$H\left(t,u_1^*(.,t),u_2^*(.,t),v^*,\phi_1^*(.,t),\phi_2^*(.,t)\right)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu elde edilir. Buradan teorem 3.2.3.1 ispatlanmış oluyor.

3.2.4 Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü için Algoritma

Bu alt bölümde (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin çözümü için algoritmayı vereceğiz. Bu nedenle (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol problemini özel hal olarak içeren aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım:

$$J_\alpha(v) = \|u_1 - u_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\|v - w\|^2_{L_2(0,T)} \tag{3.2.4.1}$$

fonksiyonelinin $V \equiv \left\{ v = v(t):\ v \in L_2(0,T),\ |v(t)| \le b_0,\ \overset{0}{\forall} t \in [0,T] \right\}$ kümesi üzerinde

$$\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2} - a_0 \frac{\partial^2 u_p}{\partial x^2} + a(x)u_p + v(t)u_p = f_p(x,t),\ (x,t) \in \Omega,\ p = 1,2 \tag{3.2.4.2}$$

$$u_p(x,0) = \varphi_p(x),\quad \frac{\partial u_p(x,0)}{\partial t} = \psi_p(x),\quad x \in (0,\ell),\quad p = 1,2, \tag{3.2.4.3}$$

$$u_1(0,t) = g_{10}(\mathrm{t}),\quad u_1(\ell,t) = g_{11}(t),\quad t \in (0,T) \tag{3.2.4.4}$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = g_{20}(t),\quad \frac{\partial u_2(l,t)}{\partial x} = g_{21}(t),\quad t \in (0,T), \tag{3.2.4.5}$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Burada $\alpha \ge 0$, $\mathrm{b}_0 > 0$, $a_0 > 0$, $\ell > 0$, $T > 0$ verilen sayılar, $w(t)$, $a(x)$, $\varphi_p(x)$, $\psi_p(x)$, $f_p(x,t)$, $p = 1,2$ fonksiyonları 3.1 bölümündeki şartları sağlar. $g_{pm}(t)$, $p = 1,2$, $m = 0,1$ fonksiyonları ise [0,T] aralığında tanımlanan sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır.

Görüldüğü gibi (3.2.4.1) – (3.2.4.5) optimal kontrol probleminde $g_{pm}(t) = 0$, $p = 1,2$, $m = 0,1$ alırsak (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol problemini elde ederiz. Burada amacımız (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol problemi için uygulanan çözüm algoritmasının daha genel biçimde olmasıdır.

(3.2.4.1) – (3.2.4.5) optimal kontrol problemini bir sonsuz boyutlu ekstremal problem olarak çözmek için gradiyantın izdüşümü metodunu kullanacağız.

Farz edelim ki $v_0 = v_0(t) \in V$ elemanı verilsin. Gradiyantın izdüşümü yöntemine göre $v_m = v_m(t)$, $m = 1,2,...$ dizisi aşağıdaki şema ile tanımlanmaktadır. [15,30]:

$$v_{m+1}(t)=P_V\left(v_m(t)-\beta_m J'_\alpha(v_m)\right), \quad m=0,1,2,... \tag{3.2.4.6}$$

Burada $P_V(z)$ ifadesi $z=z(t)$ noktasının V kümesine izdüşümüdür. [15,30] çalışmasından bildiğimiz formüle göre $v_{m+1}(t)$ için

$$v_{m+1}(t)=\begin{cases}-b_0, & v_m(t)-\beta_m J'_\alpha(v_m)<-b_0, \\ b_0, & v_m(t)-\beta_m J'_\alpha(v_m)>b_0, \\ v_m(t)-\beta_m J'_\alpha(v_m), & \left|v_m(t)-\beta_m J'_\alpha(v_m)\right|\le b_0\end{cases} \tag{3.2.4.7}$$

formülünü elde ederiz. Burada $\beta_m>0$ sayısı bilinmeyen sayı olup çeşitli yöntemlerle bulunabilir. Mesela $\beta_m>0$ sayısı

$$J_\alpha(v_{m+1})<J_\alpha(v_m) \tag{3.2.4.8}$$

şartından bulabiliriz. (3.2.4.7) formülünde yer alan $J'_\alpha(v_m)$ miktarı (3.2.4.1) fonksiyonelinin gradiyantının $v_m\in V$ noktasındaki ifadesidir. (3.2.1.24) formülünü kullanırsak $J'_\alpha(v_m)$ için aşağıdaki formülü yazabiliriz.

$$J'_\alpha(v_m)=\int_0^\ell\left(u_{1m}(x,t)\phi_{1m}(x,t)+u_{2m}(x,t)\phi_{2m}(x,t)\right)dx+$$

$$+2\alpha\left(v_m(t)-w(t)\right), \quad m=0,1,2,\ldots \tag{3.2.4.9}$$

Burada $u_{pm}=u_{pm}(x,t)=u_p(x,t;v_m)$, $p=1,2$ fonksiyonları (3.2.4.2) – (3.2.4.5) sınır değer probleminin $v_m\in V$ için karşılık gelen çözümüdür. $\phi_{pm}=\phi_{pm}(x,t)\equiv\phi_p(x,t;v_m)$, p=1,2 fonksiyonları ise (3.2.1.1) – (3.2.1.4) eşlenik probleminin $v_m\in V$ için karşılık gelen çözümüdür.

Şimdi (3.2.4.1) – (3.2.4.5) optimal kontrol probleminin nümerik çözüm algoritmasını açıklayalım. Bunun için önce (3.2.4.1) – (3.2.4.5) problemine sonlu farklar metodunu uygulayalım ve problemin sonlu farklı aynısını yazalım. [0,T] aralığında $\overline{w}_\tau\equiv\left\{t=t_k : t_k=k\tau, \quad k=\overline{0,N}, \quad \tau=\frac{T}{N}\right\}$ ile $[0,\ell]$ aralığında ise $\overline{w}_h\equiv\left\{x=x_j : x_j=jh, \quad \mathrm{j}=\overline{0,M}, \quad \mathrm{h}=\frac{\ell}{N}\right\}$ ile değiştirelim. Sonuçta $\overline{\Omega}=[0,\ell]\times[0,T]$ bölgesinin yerine $\overline{w}_{h\tau}=\overline{w}_h\times\overline{w}_\tau$ ile aynısını ifade ediyoruz.

Fonksiyonelin kontroller nümeriğinin ve sınır değer probleminin sonlu taralı aynısını da yazarak aşağıdaki problemi elde ederiz.

$$I_\alpha([v]_N) = \tau h \sum_{k=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{M-1} \left| u_{1j}^k - u_{2j}^k \right|^2 + \alpha\tau \sum_{k=1}^{N-1} \left| u_k - w_k \right|^2 \tag{3.2.4.10}$$

fonksiyonunun $V_N \equiv \{[v]_N : [v]_N = (u_1,...,u_{N-1}),\ |v_k| \le b_0,\ k = \overline{1, N-1}\}$ kümesi üzerinde

$$\delta_{t\bar{t}} u_{pj}^k - a\delta_{x\bar{x}} u_{pj}^{k+1} + a_j u_{pj}^{k+1} + v_k u_{pj}^{k+1} = f_{pj}^{k+1},$$

$$j = \overline{1, M-1},\ k = \overline{1, N-1},\ p=1,2 \tag{3.2.4.11}$$

$$u_{pj}^0 = \varphi_{pj},\ \ \delta_{\bar{t}} u_{pj}^1 = \psi_{pj},\ \ j = \overline{1, M-1},\ \ p=1,2 \tag{3.2.4.12}$$

$$u_{10}^{k+1} = g_{10}^{k+1},\ \ u_{1M}^{k+1} = g_{11}^{k+1},\ \ k = \overline{1, N-1}, \tag{3.2.4.13}$$

$$\delta_{\bar{x}} u_{21}^{k+1} = g_{20}^{k+1},\ \delta_{\bar{x}} u_{2M}^{k+1} = g_{21}^{k+1},\ \ k = \overline{1, N-1} \tag{3.2.4.14}$$

minimumunu bulmak gerekir. Burada *N*,*M* verilen pozitif tam sayılardır ve

$$a_j = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} a(x)dx, \qquad j = \overline{1, M-1} \tag{3.2.4.15}$$

$$\varphi_{pj} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_p(x)dx, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad \varphi_{10} = \varphi_{1M} = 0,$$

$$\varphi_{20} = \varphi_{21},\ \varphi_{2M} = \varphi_{2M-1} \tag{3.2.4.16}$$

$$\psi_{pj} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \psi_p(x)dx, \quad j = \overline{1, M-1},\ \ p=1,2 \tag{3.2.4.17}$$

$$g_{pm}^{k+1} = g_{pm}(t_{k+1}), \quad p=1,2 \quad m=0,1\ , \quad k = \overline{1, N-1} \tag{3.2.4.18}$$

$$f_{pj}^{k+1} = \frac{1}{\tau h} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_p(x,t)dxdt\ , \quad j = \overline{1, M-1},$$

$$k = \overline{1, N-1},\ \ p=1,2 \tag{3.2.4.19}$$

$$w_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_k}^{t_{k+1}} w(t)dt\ , \qquad k = \overline{1, N-1} \tag{3.2.4.20}$$

dır.

Görüldüğü gibi (3.2.4.10) – (3.2.4.14) problemi (3.2.4.1) – (3.2.4.5) optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısıdır ve sadece sonlu boyutlu ekstremal problemdir. Bu problemin çözümü bulmak için de gradiyantın izdüşümünü kullanabiliriz.

Farz edelim ki $[v_0] \in V_N$ verilen kontrol olsun. $\{[v_m]\}$ dizisinin elemanlarını bulmak için

$$[v_{m+1}] = P_{V_N}\left([v_m] - \beta_m I'_\alpha([v_m])\right), \quad m = 0,1,2,... \qquad (3.2.4.21)$$

yineleme formülünü kullanabiliriz [15,30]. Burada $\beta_m > 0$ bilinmeyen sayı olup

$$I_\alpha([v_{m+1}]) < I_\alpha([v_m]) \qquad (3.2.4.22)$$

şartından seçilebilir. $I'_\alpha([v_m])$ türevi $I_\alpha([v])$ fonksiyonunun gradiyantının $[v_m]$ noktasındaki değeridir ve bu vektörün bileşenleri aşağıdaki formül ile tanımlanmaktadır:

$$\left(I'_\alpha([v])\right)_k = h\sum_{j=1}^{M-1}\left(u_{1j}^k([v])P_{1j}^k([v]) + u_{2j}^k([v])P_{2j}^k([v])\right) +$$

$$+ 2\alpha(v_k - w_k), \quad k = \overline{1, N-1} \qquad (3.2.4.23)$$

Burada $u_{pj}^k([v])$, p=1,2, ağ fonksiyonları $[v] \in V_k$ için (3.2.4.11) – (3.2.4.14) fark şemasının çözümüdür. $P_{pj}^k[v]$, p=1,2, ise aşağıdaki eşlenik problemin $[v] \in V_k$ için çözümüdür.

$$\begin{aligned}&\delta_{t\bar{t}}\phi_{pj}^k - a_0\delta_{x\bar{x}}\phi_{pj}^{k-1} + a_j\phi_{pj}^{k-1} + v_k\phi_{pj}^{k-1} = \\ &= (-1)^p 2\left(u_{1j}^{k-1} - u_{2j}^{k-1}\right), \ j = \overline{1, M-1}, \ k = N-1,...,1, \ p = 1,2\end{aligned} \qquad (3.2.4.24)$$

$$\phi_{pj}^N = 0, \quad j = \overline{0, M}, \quad \delta_{\bar{t}}\phi_{pj}^N = 0, \quad j = \overline{1, M-1}, \quad p = 1,2 \qquad (3.2.4.25)$$

$$\phi_{10}^{k-1} = 0, \ \phi_{1M}^{k-1} = 0, \ k = N-1,...,1, \qquad (3.2.4.26)$$

$$\delta_{\bar{x}}\phi_{21}^{k-1} = 0, \ \delta_{\bar{x}}\phi_{2M}^{k-1} = 0, \ k = N-1,...,1, \qquad (3.2.4.27)$$

(3.2.4.21) formülünde yer alan β_m parametresi üstte söylediğimiz gibi (3.2.4.22) biçiminde olan ve monotonluk şartı denilen şartın yardımıyla geçilebilir. Bunun için $\beta_m = \beta =$ sabit alıp (3.2.4.22) şartının sağlanıp sağlanmadığını kontrol ediyoruz. Eğer (3.2.4.22) şartı sağlanıyor ise, bu takdirde (3.2.4.21) formülünde $\beta_m = \beta =$ sabit olarak bulunan parametre olur. Aksi halde, yani (3.2.4.22) şartı sağlanamadığından β sayısını 1'den büyük sayıya o zamana kadar bölüyorlar ki, $\beta_m = \beta$ için (3.2.4.22) şartı sağlanmış olsun.

(3.2.4.21) yineleme formülünde iterasyonların bulunması süreci

$$\left(\tau \sum_{k=1}^{N-1} \left| v_{km+1} - v_{km} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon \qquad (3.2.4.28)$$

şartının sağlanması halinde durdurulur. Burada $\varepsilon > 0$ sayısı önceden bilinen sayıdır.

Fonksiyonelin gradiyantı için olan formülden görüldüğü gibi, bir adımda gradiyantı bulmak için iki tane (3.2.4.11) – (3.2.4.14) ve (3.2.4.23) – (3.2.4.26) fark şemalarının çözümlerini bulmak gerekir. Bu şemaların çözümünü bulmak için kovma metodunun kullanabiliriz [3].

Böylece (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin nümerik çözüm algoritması açıklanmış oldu.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 3.1 bölümünde hiperbolik denklem için Lions Fonksiyonelli optimal kontrol probleminin çözümünün varlığına ait teoremler ispatlandı.

Tezin 3.2 bölümünde ise ele alınan optimal kontrol probleminde amaç fonksiyonelin differansiyellenebilir olduğu ispatlandı ve onun gradiyenti için formül elde edildi. Bunların yanı sıra ele alınan optimal kontrol problemin çözümü için varyasyon eşitsizliği ve Pontryagin'in Maksimum Prensibi şeklinde gerek şartlar ispatlandı. Tezin sonunda problemin çözümü için algoritma verildi.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Tezde ele alınan optimal kontrol problemi konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden ciddi biçimde farklılanmaktadır. Hiperbolik tip denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemleri çok az ele alındığından tez çalışması gerek teorik, gerekse pratik önem taşır. Bu tezde Lions Fonksiyonelli optimal kontrol problemleri için elde edilen araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar, önceki çalışmalardaki sonuçlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

6. KAYNAKLAR

1) Butkovskiy A.G., Dağılmış Parametreli Sistemlerin Optimal Kontrolü; Moskova , Nauka, 1975 (Rusça)

2) Sirazettinov T. K. Dağılmış Parametreli Sistemlerin Optimizasyonu; Moskova, Nauka, 1977 , (Rusça)

3) Tikhonov H.N., Samarskiy A.A ,Matematiksel Fiziğin Denklemleri; Moskova, Nauka, 1972, (Rusça)

4) Troitskiy V.A., Mekanik Sistemlerin Titreşiminin Optimal Süreçleri; Leningrad, 1976

5) Lions J.L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations; Springer–Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972

6) Lions J.L., Control des Systemes Distribues Sınguliers. – Gauthier Villars. (Singüler Dağılmış Parametreli Sistemlerin Kontrolü); Moskova, Nauka, 1987 (Rusça)

7) Lurye K.A., Matematiksel Fizik Problemlerinde Optimal Kontrol; Moskova, Nauka, 1975, (Rusça)

8) Plotnikov V.I., Sikorskaya E.R., Lineer Olmayan Hiperbolik Denklemler Sistemi ile İfade Edilen Kontrol Edilebilir Objektlerin Optimizasyonu; Izv. VUZOV, Radiofizika, 1972, 16, No:3, s , 346 – 357 (Rusça)

9) Iskenderov A.D. , Tagiyev R.G.. Durgun Olmayan Kuazilineer Denklemlerin Katsayılarında Kontrol Varolan Optimizasyon Problemleri; DAN Az. SSR, 1981, No:8, S.G – 11 (Rusça)

10) Iskenderov A.D., Nittiyev A.A., Kuazilineer Evolasyon Denklemler için Optimal Kontrol Problemi; DAN Az. SSR, 1986, 42, No:5, s.7–10, (Rusça)

11) Guliyev H.F., İkinci Mertebeden Hiperbolik Denklemler için Bazı Optimal Kontrol Problemleri.; Bakü , 2001, (Azerbaycan Türkçesi)

12) Hasanov K.K., Hiperbolik Denklemler Sistemi ile ifade Edilen Süreçler için Optimal Kontrolün Varlığı Hakkında, Nümerik Analiz ve Matematiksel Fizik , 1973, c.13 , No:3, s.599-602 (Rusça)

13) Lukyanov A.T., Scrovayskiy S. Ya., Bir Bilineer Hiperbolik Sistemlerde Optimal Kontrol; Izv. Vuzov, 1983, No:10, S. 46–48 (Rusça)

14) Yegorov Yu. V., Banach Uzayında Optimal Kontrol; DAN, SSSR, 1963 , T.150, No:2 , S.241 – 244 (Rusça)

15) Vasilyev F.P., Ekstramal Problemlerin Çözüm Metotları; Moskova, Nauka, 1981, (Rusça)

16) Sokhin A.S. Salınım Denklemi ile ifade Edilen Lineer Olmayan Kontrol Edilebilir Sistemler için Bazı Optimal Kontrol Problemleri; Diferansiyel Denklemler, 1981, 17, No:3, s. 501–509 (Rusça)

17) Emanuilov D. Yu., Singuler Dağılmış Sistemlerin Kontrol Problemlerinin Çözümünün Varlık Teoremleri. – Matem, Sbornik, 1990, 181, No:3, s. 321–333. (Rusça)

18) Suryanarayana M.B., Existences Teorems for Optimization Problems Concerning Hyperbolic Partial Differential Equations; Journ. Optim and Theory and Appl.,1975, 15, No:4, pp.361-392

19) Joo İ., On the Control of a Circular Membrane I., Acta Math. Hung., 1993, 61, No:3-4 , pp. 303 – 325.

20) Iskenderov A.D., Matematiksel Fiziğin Çok Boyutlu Ters Problemlerin Varyasyon Konulmaları Hakkında., DAN SSSR, 1984 , 274, No:3, s.531–533 (Rusça)

21) Iskenderov A.D. , Mahmudov N.M., Kuantum Mekanik Sistemler için Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol; AMBA'nin Haberleri , Fizik Teknik, Matematik Bilimleri Serisi 1915, c.18, No:5–6, s.30-35 (Rusça)

22) Mahmudov N.M., Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü; ABA'nın Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri , 1997, 7, s.79–82

23) Ladıjenskaya O.A., Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri., Moskova, Nauka, 1973 (Rusça)

24) Lions J. L., Magenes E., Non Homogeneous Baundry Value Problems and Applications: vol 1., Springer – Verlag , Berlin, Heidelberg , New York , 1972

25) Lions J.L. Magenes E. Non Homogeneous Baundry Value Problems and Applications; vol.2, Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.

26) Iyosido K., Functional Analisys; M. Miv , 1967.

27) Gobel M., On Existence of Optimal Control Math. Nacr, 1979, vol.93, pp: 67-73

28) Kalmogorov A.N. , Fomin S.V., Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları, Moskova, Nauka, 1989

29) Pontryagin L.S., B., Optimal Süreçlerin Matematik Teorisi.- M.; Nauka , 1969

30) Iskenderov A.D., Taguyev R.G. , Yagubov G. Ya. Optimizasyon Metotları, Bakü, 2001

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Ankara ilinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Ankara Özel Yükseliş Koleji II okulunda tamamladı. 1993 yılında kazandığı Marmara Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesinden 2000 yılında mezun oldu. Dil eğitimi almak için Amerika Birleşik Devletleri Georgia eyaletinde Georgia Tech. Language School'da 1 yıl İngilizce kursu aldı. 2002 yılında döndüğü İstanbul ilinde çeşitli dershanelerde 2 yıl süreyle çalıştı. 2004 yılından MEB. Ardahan iline ataması yapıldı.

Halen Ardahan Rekabet Kurumu Fen Lisesinde ve Ardahan Anadolu Öğretmen Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve 1 çocuk babasıdır.