T.C.
KARS KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANALİTİK FONKSİYONLARIN KAYDIRILMIŞ RİEMANN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Salih ÖMÜR

YÜKSEKLİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

NİSAN- 2008
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Salih ÖMÜR' ün Yrd.Doç. Dr. Nizami MUSTAFA' nın danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı Analitik Fonksiyonların Kaydırılmış Riemann Sınır Değer Problemleri adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği/çokluğu ile kabul edilmiştir.

.... /..... /2008

	Adı ve Soyadı	**imza**
Başkan :	………………………	....
Üye :	………………………	....
Üye :	……………………….	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2008 gün ve ..../ ....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

………………..

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada Analitik Fonksiyonların Kaydırılmış Riemann sınır değer problemleri ve bu problemlerin çözümleri ele alınmıştır.

Tezde incelenen Analitik Fonksiyonların Kaydırılmış Riemann sınır değer problemlerinin çözümleri çözüm yolları itibariyle önceki yazarların çözümlerinden farklılıklar gösterir.

Tez çalışmamda üniversitedeki görevlerinden bana zaman ayırarak üstün bilgileriyle bana yol gösteren değerli bilim adamı Sayın Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında ve tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını esirgemeyen
Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUBOV 'a, Sayın Doç. Dr. Mithat KAYA 'ya ve
Sayın Yrd. Doç. Dr. Gülçin BİLGİCİ 'ye teşekkürlerimi sunarım.

KARS-2008 **Salih ÖMÜR**

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde analitik fonksiyonların kaydırılmış Riemann sınır değer problemleri ele alındı.

Kaydırılmış Riemann sınır değer problemleri gösterilip;
bu problemlerin çözümleri yapıldı.

Kaydırılmış Riemann sınır değer problemlerinin sıradan Riemann sınır değer problemine dönüştürülebileceği elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Fredholm Denklemi,Sınır Değer Problemi,Liapunov Eğrisi,Cauchy İntegralleri.

ABSTRACT

In this thesis the boundary value problems for Riemann shift are studied.

Riemann Boundary Value Problems with shift and solutions of this problems obtained.

Transfer of Riemann Boundary Value Problems with shift to Riemann boundary value problems obtained.

Key Words:Fredholm Equation,Boundary Value Problems,Liapunov Curve ,Cauchy İntegrations.

SİMGELER DİZİNİ

$\in H$	Hölder Koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı
$\Phi(z)$	Bölgesel analitik fonksiyon
$\frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]_L$	G(t) fonksiyonunun indeksi
I nd G(t)	G(t) fonksiyonunun indeksi
P(z)= $c_0 + c_1 z + \ldots c_n z^n$	$\Phi(z)$ fonksiyonunun parçalanması
$K(t,\tau) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}$	Zayıf Fredholm Çekirdeği
$\Phi_-^+(t)$	$\Phi^+(t)$ ve $\Phi^-(t)$ sınır değerleri

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Analitik fonksiyonların kaydırılmış Riemann sınır değer problemleri matematiğin Kompleks Analiz dalında kullanılır.

Mekanik, fizik ve mühendislikteki çoğu problemler bu problemlere dönüştürülebilir.
Bu konuda en iyi çalışmalar Rusya'da yapılmıştır. N.I.Muskhelishvili'nin [10] F.D.Gakhov'un [8] kitapları 1970'lerden bu yana güncelliğini korumaktadır.

Analitik fonksiyonların kaydırılmış Riemann sınır değer problemlerini çözmek için analitik fonksiyon, Hölder Koşulu, Fredholm Denklemi gibi temel kavramlar tanımlanmış ve bazı yardımcı teoremlerden yararlanılmıştır.

Bu tez çalışmasında Analitik fonksiyonların kaydırılmış Riemann sınır değer problemleri ve bu problemlerin çözümleri ele alınmıştır.

Tez çalışmasının en önemli bölümlerinden birisi Analitik fonksiyonların kaydırılmış Riemann sınır değer problemlerinin sıradan Riemann sınır değer problemlerine dönüşebileceğinin ispatıdır.

Bu ispatı yapabilmek için sıfır indeksli sıfır atlamalı problem kullanılmış olup, Fredholm denkleminden yararlanılmıştır.

2.TEMEL BİLGİLER

2.1 Analitik (Holomorf) Fonksiyonlar

Tanım: Bir bölgede türevi mevcut olan fonksiyona orada analitik fonksiyon denir. Bölgeye fonksiyonun analitiklik bölgesi denir. Bu bölgenin her noktası için fonksiyon orada analitiktir denir.

Rasyonel fonksiyonlar paydasının sıfır olduğu noktalar hariç bütün düzlemde analitiktir.

Her üslü seri kendi yakınsaklık dairesinde bir analitik fonksiyonu gösterir. Bu daire gösterilen fonksiyonun analitik olduğu bölgedir[1].

Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir D(z_0,δ) komşuluğundaki bütün noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 da analitiktir denir[2].

Eğer bir f kompleks fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitikse f, S üzerinde analitiktir denir. Yani f(1/z) fonksiyonu sıfırda analitikse,
f(z) sonsuzlukta analitiktir.

Bir fonksiyonun analitik olduğu noktaların kümesi açık bir kümedir. Yani, A=$\{z \in C | f, z' de, analitik\}$ kümesi açıktır. Çünkü, herhangi bir $z_0 \in$ A noktası alınırsa D(z_0,δ) $\subset$ A olacak şekilde bir D(z_0,δ) komşuluğu vardır.

Bu nedenle bir f fonksiyonunun analitikliği bir açık A$\subset$C kümesinde tanımlanır.
f, herhangi bir S kümesinde analitiktir denirse gerçekte f bu S kümesini kapsayan açık bir A kümesinde analitiktir.

Bir f fonksiyonu C'nin tüm noktalarında analitikse f'ye **tam(entire) fonksiyon** denir.[2]

Uyarı: z_0 noktasında analitik olan fonksiyon bu noktada diferansiyellenebilirdir. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

Örnek: f(z)=$|z|^2$ fonksiyonu z=0 da diferansiyellenebilir. Fakat bu noktada analitik değildir.

Çünkü; z=0 hariç z=0 'ın hiçbir komşuluğunda diferansiyellenemez.

f(z)=u+iv=$x^2 + y^2$ $\quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Buradan u=$x^2 + y^2$ v=0 u_x=2x u_y=2y $v_x = 0$ $v_y = 0$ olur.

Cauchy-Riemann eşitlikleri sadece (x,y)=(0,0) noktasında gerçeklenir.[2]

Teorem: f(z)=u(x,y)+iv(x,y) olsun. f'nin bir $z_0 = x_0 + iy_0$ noktasında analitik ve f' nün sürekli olması için gerek ve yeter şart z_0=(x_0, y_0) noktasının bir D(z_0,δ) komşuluğunun bütün noktalarında u_x, u_y, v_x, v_y kısmi türevlerin var olması sürekli ve bu komşulukta $u_x = v_y, v_x = -u_y$ Cauchy-Riemann eşitliklerinin gerçeklenmesidir[2].

Eğer f analitikse $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) = v_y = (x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$ dır.

Tanım: Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasının her komşuluğundaki bazı noktalarda analitik fakat z_0'da analitik değilse f'nin z_0'da aykırılığı(singüleritesi) var denir[2].

Örnek: f(z)=$\frac{1}{z}$ fonksiyonunun z=0 'da aykırılığı vardır. Çünkü ,fonksiyonun bu noktada türevi yoktur.

Dolayısıyla ,bu noktada analitik değildir.

Ancak, z=0 'dan farklı her noktada analitiktir.

Örnek: f(z)=x ise f'nin hiçbir yerde analitik olmadığını gösteriniz.

f(z)=u+iv=x u=x v=0

$u_x = v_y, v_x = -u_y$ eşitliklerinin sağlanıp sağlanmadığına bakalım.

$u_x = 1$ $u_y = 0$ $v_x = 0$ $v_y = 0$ eşitliklerin sağlanmadığı görülür.

Dolayısıyla, f hiçbir yerde analitik olmaz.

2.2 Eğri

Tanım: a) $[a,b] \subset R$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \longrightarrow C$ Fonksiyonuna C düzleminde bir eğri denir[2].

Burada, $\gamma(a)$, $\gamma(b)$ eğrinin başlangıç ve bitim noktalarıdır.

b) $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ'ya kapalı eğri denir.

c) Bir γ eğrisi verildiğinde γ'nın türevi var ve sürekli ise diferansiyellenebilir eğri denir.

d) γ diferansiyellenebilir bir eğri olsun . Eğer, $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ'ya düzgün eğri denir.

e) $[a,b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç γ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda γ'nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar γ'nün bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse γ parçalı diferansiyellenebilir eğridir.

f) γ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer, $\forall$ t$\in [a,b]$ için γ'(t)$\neq 0$ ise γ parçalı düzgün eğridir. $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ oluyorsa basit Jordan eğrisi denir.

g) γ basit bir eğri ve $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise basit kapalı eğri (kapalı Jordan eğrisi) denir[2].

2.3 Kapalı Jordan Eğrisi Teoremi

$\alpha \leq t \leq \beta$ aralığında x(t) ve y(t) t'nin sürekli ve reel fonksiyonları olduğuna göre x=x(t), y=y(t) sürekli bir eğrinin parametrik denklemidir. Burada yalnız t'nin farklı iki değerine farklı iki noktanın tekabül etmesi, yani eğrinin çifte noktasız olması lazımdır. Böyle bir şekle Jordan eğri parçası denir.

x+iy=z yani x(t)+iy(t)=z(t) konursa bu eğri parçası kısaca z=z(t) ile gösterilir[3].

Basit kapalı bir eğri (kapalı Jordan eğrisi) düzlemi üç kümeye ayırır[2].

1)Kapalı Jordan eğrisinin iç kısmındaki noktalardan oluşmuş sınırlı açık küme,

2)Kapalı Jordan eğrisinin üzerindeki noktalarının(sınır noktaları) oluşturduğu kapalı küme,

3) Kapalı Jordan eğrisinin dışındaki noktaların oluşturduğu sınırsız açık küme

Aşağıdaki özellikler de gerçeklenir.

a)Bir iç noktayı bir dış noktaya birleştiren her Jordan eğrisi bir sınır noktası bulundurur.

b)İç noktaların her çifti tamamen iç noktalardan oluşan bir Jordan Eğrisi ile birleştirilebilir.

c)Dış noktaların her çifti tamamen dış noktalardan oluşan bir Jordan Eğrisi ile birleştirilebilir.

d)İç noktaların kümesi sınırlı ,dış noktaların kümesi sınırsızdır.

3. BAZI YARDIMCI TEOREMLER

Teorem:(analitik fonksiyonların sürekliliği üzerine). Düşünelim ki bir ortak düzgün sınırları L eğrisi olan D_1 ve D_2 iki bölge olsun. $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ bu bölgelerde verilen iki analitik fonksiyon olsun.

Farz edelim ki , bir z noktası L eğrisine eğilimli ve her iki fonksiyonun limit değerlerine eğilimli L eğrisinde sürekli ve birbirine eşit olsun.

Bu koşullarda $f_1(z)$, $f_2(z)$'nin çözümsel işlevi bir başkasını oluşturur.[2]

Rezidüler Teoremi:f(z), D bölgesinde analitik bir fonksiyon ve γ, D'ye ait, üzerinde singüler nokta olmayan kapalı bir eğri olsun. f(z) 'nin γ eğrisi içindeki (sonlu sayıda) singüler noktaları $z_1, z_2, ...z_n$ ise bu noktalardaki rezidülerin toplamı

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} f(z)dz$$

ifadesine eşittir.[4]

Teorem: Eğer f(z) kompleks düzlemde sınırlı analitik bir fonksiyon ise f(z) sabittir.[5]

Hölder Koşulu: Düzgün bir L yayı(kapalı veya açık,sonlu veya sonsuz) üzerinde tanımlı bulunan bir $\varphi(\tau)$ fonksiyonunun bu yay üzerindeki herhangi iki noktada almış olduğu değerlerin farkı, A ve λ verilmiş pozitif sayılar olmak üzere,

$$|\varphi(\tau_2) - \varphi(\tau_1)| < A|\tau_2 - \tau_1|^{\lambda}$$

bağıntısını sağlasın. Bu halde , $\varphi(\tau)$ L üzerinde bir Hölder koşulu sağlıyor, denir.
Buradaki pozitif A ve λ sabitlerine , sıra ile Hölder sabiti ve Hölder indisi denir.
Bir Hölder koşulu sağlayan her fonksiyon L üzerinde süreklidir.
λ>1 halinde (1) bağıntısı $\varphi(\tau)$'nun L üzerinde türetebilir ve $\varphi'(\tau) \equiv 0$ olduğunu gösterir. Biz, $\varphi(\tau)$'nun bir sabitten ibaret olduğu bu çok özel durumu bir yana bırakacak ve her zaman $0 < \lambda \le 1$ olduğunu varsayacağız.[6]

Teorem(Kapalı Çevreler Hali): L kapalı bir düzgün yay, $\varphi(\tau)$ da L üzerinde bir Hölder koşulu sağlayan herhangi bir fonksiyon olsun. Bu halde , $t \in L$ ve $z \notin L$ olmak üzere

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - z}d\tau$$

ile tanımlanan $\Psi(z)$ fonksiyonu t noktasında süreklidir.[6]

LiouvilleTeoremi: f(z) fonksiyonu kompleks değişkenli tam düzlemde $a_0=\infty$,a_k (k=1,2,…,n).gibi kutupları olan noktalar hariç analitik olsun.

Farz edelim ki f(z) fonksiyonunun genişlemesinin temel bölümlerinin kutuplar çevresindeki formu:

a_0 noktasında:$G_0(z)=c_1^0 z + c_2^0 z^2 + ... + c_{n_0}^0 z^{n_0}$;

a_k noktasında:

$$G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)=\frac{c_1^k}{z-a_k}+\frac{c_2^k}{(z-a_k)^2}+\ldots+\frac{c_{m_k}^k}{(z-a_k)^{m_k}}.$$

f(z) bir rasyonel fonksiyondur. Ve aşağıdaki bağıntı ile temsil edilebilir.

$$f(z)=C+G_0(z)+\sum_{k=1}^{n} G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right).$$

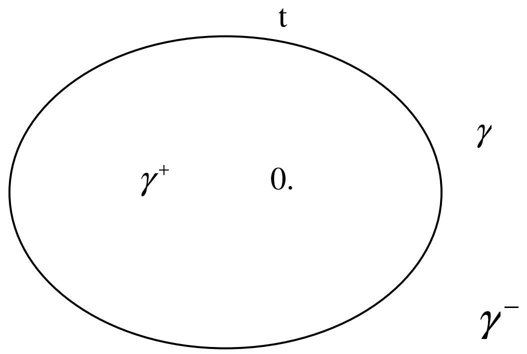
Özel olarak f(z) fonksiyonunun tekliği m dizisinin sonsuzluktaki bir kutbu ise; f(z) m dereceli bir polinomsal fonksiyondur.

$$f(z)=c_0+c_1 z+\ldots+c_m z^m \quad [7]$$

Sokhotski Formülü: $\varphi(\tau)$, Hölder koşulunu sağlasın,L parçalı düzgün eğri olmak üzere , cauchy integrali

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$$

z$\in \gamma^+$ ise $\Phi(z)$'nin limit değeri $\Phi^+(t)$ ve z$\in \gamma^-$ ise $\Phi(z)$'nin limit değeri $\Phi^-(t)$ değerleri olmak üzere



Şekil.3.1

$$\left.\begin{aligned}\Phi^+(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau\end{aligned}\right\}$$

ifadesine Sokhotski formülü denir.[8]

Burada taraf tarafa toplarsak ;

$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}dt$ elde edilir.

Taraf tarafa çıkarırsak ;

$\Phi^+(t)$ - $\Phi^-(t) = \varphi(\tau)$ elde edilir.

4.CAUCHY İNTEGRALLERİ

L kompleks uzayda kapalı ya da açık olan $L_1,...L_n$ düzgün eğrilerinin bir kümesi olsun .

Pozitif yönlü her bir L_j için L_j^+ sembolü kullanılsın. Bu suretle L de pozitif yönlüdür.

$L^+ = \sum_{j=1}^{n} L_j^+$ ile gösterilir.

L_j ya da L' nin ters yönü L_j^- ya da L^- ile gösterilir.

Tanım: Eğer f(t) L üzerinde tanımlı bir kompleks fonksiyon ise

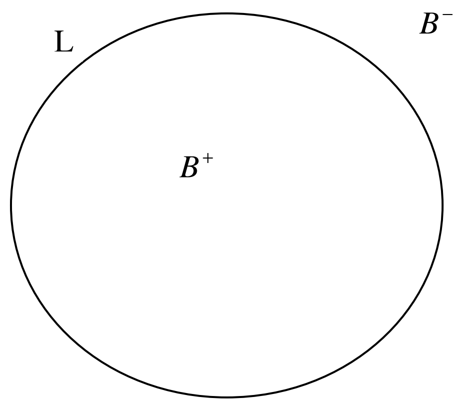
$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt$ $z \notin L$ integraline Cauchy İntegrali denir.[7]

Genelde f(t) sınırlı ve integrallenebilir farz edilir.
$z=\infty$ için tanımlıdır. $F(\infty)=0$ dır.Bundan dolayı F(z) fonksiyonu L hariç kompleks uzay üzerinde tanımlıdır.

5.CAUCHY ÇEKİRDEĞİ İLE İFADE EDİLEN FONKSİYONLAR

L, kapalı bir düzgün yay , $\varphi(z)$ de L üzerinde tanımlı ve integre edilebilen bir fonksiyon olsun. Bu halde , L'nin üzerinde bulunmayan her z için tanımlı olan

$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau$ z$\neq i$, z$\notin$ L , z$\in B^+$,z$\in B^-$



Şekil. 5.1

fonksiyonu hem L'nin içindeki B_+ hem de dışındaki B_- bölgesinde ayrı ayrı , z'nin regüler fonksiyonudur. $\Phi(z)$'nin B_+ ve B_- bölgelerindeki ifadelerini açıkça belirtmek istediğimizde, bunları(+) ve (-) üst indisleri ile , $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ şeklinde yazarız. Buna göre $\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^+(z), z \in B_+ \\ \Phi^-(z), z \in B_- \end{cases}$ olur.

L üzerinde tanımlı olan $\varphi(\tau)$ fonksiyonuna Cauchy integralinin yoğunluğu

$\frac{1}{\tau - z}$ 'ye de çekirdeği adı verilir.[6]

6. LİAPUNOV EĞRİSİ

L bir eğri olsun, L eğrisinin tanjantının eğim açısı θ, yay uzunluk parametresi s'nin bir fonksiyonu olsun , ve Hölder koşulunu sağlasın Yani θ(s) $\in H$

Verilen f'(t) $\in H$ ve t_0, L üzerinde sabit bir nokta

$$F(t)=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0} t \neq t_0 ise \\ f'(t_0) t = t_0 ise \end{array}\right\} \quad t\in L \text{ ve } F(t)\in H$$

Ayrıca Liapunov eğrisi θ(t), Hölder koşulunu sağlamalıdır.[7]

7. ANALİTİK FONKSİYONLARIN KAYDIRILMIŞ RİEMANN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

L kompleks düzlemde bir kapalı Liapunov parçalı eğrisi

Farz edelim $\tau=\alpha(t)$ L'de sürekli L üzerinde birebir içine fonksiyon olsun.
Böylece ters fonksiyonu t=$\alpha'(\tau)$'da sürekli ve birebirdir.

Buna göre $\alpha(t)$, L'de kendisine bir homeomorfizmadır. Buna **L'nin kaydırılmışı** denir.[7]

Eğer $\tau=\alpha(t)$ L boyunca t gibi pozitif dönüşlü tanımlanırsa L'nin değişmeyen pozitif yönünü korur. Ve $\alpha(t)$ bir pozitif kaydırmadır.

Diğer taraftan $\tau=\alpha(t)$ L'nin pozitif yönünü negatif yönüne götürürse bu bir negatif(ters) kaydırmadır. Üstelik her zaman $\alpha'(t)\in H$ ve L üzerinde sıfıra eşit değildir farz edilir.

$\alpha(t)$, L'nin bir pozitif kaydırılmışı ve L'nin iç ve dış tarafında D^{+},D^{-} ile tanımlanmış

$$\Phi^{+}(\alpha(t))=G(t).\Phi^{-}(t)+g(t) \qquad t\in L \tag{7.1}$$

Sınır değer şartını sağlayan bölgesel holomorf $\Phi(z)$ fonksiyonunu bulunuz.
Bu probleme , L üzerinde Riemann kaydırılmış sınır değer problemi denir.
G(t),g(t)$\in H$ ve G(t)$\neq 0$

Eğer, (7.1) probleminin çözümü $\Phi(z)$ var ise $\Phi^{+}_{-}(t)\in H$

Lemma: Eğer $\Phi(z)$ bölgesel analitik ve $\alpha(t)$, L'nin pozitif kaydırılmışı ise

$\Phi^{+}(\alpha(t))=\Phi^{-}(t)$ t$\in$ L

Eğer $\Phi(\infty)=0$ ise, $\Phi(z)\equiv 0$

Eğer, $\Phi(\infty)$ sınırlı ise, $\Phi(z)$=sabit [7]

7.1. Fredholm Denklemi: Farz edelim ki, L açık ya da kapalı olan düzgün bir eğri olsun.

$$K\Phi \equiv \Phi(t)+\int_L K(t,\tau).\Phi(\tau)d\tau = f(t) \quad t\in L \tag{7.1.1}$$

İfadesine ikinci çeşit Fredholm integral denklemi denir. K'ya da Fredholm operatörü denir. K(t, τ) 'ya denklemin çekirdeği denir.[7]

Genel olarak,

$$K(t,\tau)=\frac{K^*(t,\tau)}{|t-\tau|^{\alpha}}, \qquad 0\le \alpha <1 \tag{7.1.2}$$

kabul edilir.

$K^*(t,\tau)$ LxL 'de sürekli bir fonksiyondur .

Eğer, $\alpha>0$ ise (7.1.1) denklemi zayıf Fredholm denklemi olarak adlandırılır.

K de zayıf Fredholm operatörü dolarak adlandırılır.

Ayrıca, verilen f(t) fonksiyonu bilinmeyen $\Phi(t)$ gibi sürekli bir fonksiyondur.

$$K'\psi \equiv \psi(t)+\int_L K(\tau,t)\psi(\tau)d\tau = 0 \tag{7.1.3}$$

denklemine (7.1.1) numaralı denklemin adjointi denir. K' de K'nin adjoint operatörüdür.

(7.1.1) numaralı teoremin önemli sonuçları vardır:

1.K$\Phi=0$ probleminin Kompleks tanımlı bölgedeki lineer bağımsız çözümlerinin sayısı sınırlıdır.

2. K$\Phi=0$ ve $K'\Phi=0$'ın lineer bağımsız çözümlerinin sayısı eşittir.

3.(7.1.1) numaralı denklemin çözülebilmesi için gerek ve yeter şart

$$\int_L \psi_k(t)f(t)dt=0, \qquad k=1,\ldots,\upsilon \tag{7.1.4}$$

$\psi_{1...,}\psi_{v}$ de (7.1.3) numaralı denklemin çözümlerinin sistemi olarak tanımlanır.

7.2. Sıfır Atlamalı Problem

$$\Phi^{+}\left[\alpha(t)\right]-\Phi^{-}(t)=0 \tag{7.2.1}$$

Şartını sağlayan parçalı düzgün eğri üzerinde tanımlı bölgesel analitik bir fonksiyon $\Phi(z)$ tanımlansın ve ayrıca $\Phi^{-}(\infty)=0$ olsun.

$\varphi(\tau)$, D^{-} bölgesinde analitik

$$-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=0 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\Gamma=0 \quad (\Gamma=(\varphi(\infty))$$

şartlarını kullanarak $\Phi^{+}(t)$ fonksiyonu için integral denklemi oluştururuz ki, bu uygun bölgelerde fonksiyonların sınır değeri olacaktır.

Denklemin çözülebilirliğini düşünürsek Cauchy İntegralini sağlayan iki yeni analitik fonksiyon tanımlarız ki ,

$$\Psi^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\Phi^{-}(\tau)}{\tau-z}d\tau \qquad \Psi^{-}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\Phi^{+}(\tau)}{\tau-z}d\tau \tag{7.2.2}$$

Sokhotski formülünü hatırlayalım,

$\varphi(\tau)$ Hölder koşulunu sağlasın

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

$$\Phi^{-}(t)=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \qquad \text{ile}$$

$$-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=0 \qquad \frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\Gamma=0 \quad (\Gamma=(\varphi(\infty))$$

şartlarından dolayı

$$\Psi^{+}(t)=\frac{1}{2}\Phi^{-}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\Phi^{-}(\tau)}{\tau-t}d\tau=0 \tag{7.2.3}$$

$$\Psi^-(t) = -\frac{1}{2}\Phi^+(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - t}d\tau = 0 \qquad (7.2.4)$$

olur.

Eşitliklerin sağ tarafı D^+_- bölgesinde analitik fonksiyonların $\Phi^+_-(t)$ sınır değerleri olduğu zaman sağlanır.

Eşitliği $\Phi^-(t)$ için düzenlersek

$$\Psi^+(t) - \Psi^-[\alpha(t)] = \frac{1}{2}\{\Phi^-(t) + \Phi^+[\alpha(t)]\} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(\tau)}{\tau - t}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau - \alpha(t)}d\tau = 0 \qquad (7.2.5)$$

(7.2.1) sınır değer koşulunun anlamıyla $\Phi^+(t)$ fonksiyonu bu bağıntıdan çıkarılır.

İkinci integralde τ 'yu $\tau = \alpha(\tau_1)$ olarak değiştirip yerine koyarsak ve τ_1 değişkenini τ ile tekrar ifade edersek $\Phi^-(t)$ için integral denklemini

$$\Psi^+(t) - \Psi^-[\alpha(t)] \equiv \Phi^-(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\Phi^-(\tau)d\tau = 0 \qquad (7.2.6)$$

Denklemin çekirdeği

$$K(t, \tau) = \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}$$

olur.

$\tau = t$ olacak şekilde birinci mertebeden tekil indirgenebilen bir nokta vardır ki;

$$\alpha(t) - \alpha(\tau) = \int_\tau^t \alpha'(u)du$$

$$\alpha'(\tau)(t - \tau) = \int_\tau^t \alpha'(\tau)du$$

bağıntıları çıkarılır.

$$\alpha(t) - \alpha(\tau) - \alpha'(\tau)(t - \tau) = \int_\tau^t [\alpha'(u) - \alpha'(\tau)]du$$

elde edilir.

Son integrali hesaplarsak

$|u - \tau| = r$ yazarsak ve $|d\tau| = |ds| \le m|dr|$ eşitsizliğini kullanırsak

$|du| = |ds|$ <mdr

$\left|\alpha'(u)-\alpha'(\tau)\right| < Ar$ Hölder koşulunda hesaplarsak

$$\left|\alpha(t)-\alpha(\tau)-\alpha'(\tau)(t-\tau)\right| < Am\int_0^{\lambda} r^{\lambda}dr = \frac{Am}{\lambda+1}\lambda^{1+\lambda}$$

$$=\frac{Am}{1+\lambda}\left|t-\tau\right|^{1+\lambda}$$

elde ederiz.

λ yeteri kadar küçük bir sayı olduğundan

$$\left|K(t,\tau)\right| < M\left|t-\tau\right|^{\lambda-1}$$

M sabit olmak üzere, elde edilir.

Dolayısıyla, (7.2.6) integral denklemi bir Fredholm denklemidir.

Kolayca görülebilir ki ,(7.2.1) sınır değer şartlarını sağlayan ve (7.2.3) analitiklik şartlarını sağlayan $\Phi^{-}(t)$ fonksiyonu (7.2.6) integral denklemini sağlar.

Lemma 1:Sıfır atlamalı ve $\Phi^{-}(\infty)=0$ şartlı genel problem çözülemez.[8]

Farz edelim ki çözülebilir olsun $\Phi(z)$ bölgesel analitik fonksiyonu çözüm olsun (7.2.1) sınır değer şartının sonucu olarak; k herhangi bir sabit olmak üzere $\Phi_k(z)=\left[\Phi(z)\right]^k$ problemin çözümleridir.

Bu fonksiyonların hepsinin lineer bağımsız olduğu apaçıktır.

Dolayısıyla $\Phi_k^{-}(t)$ sonsuz sayıda çözümleri olduğundan (7.2.6) integral denklemini sağlar.

Ancak bir Fredholm integral denklemi sadece sınırlı sayıda çözümlere sahip olduğundan bu bir çelişkidir.

Dolayısıyla lemma ispatlanır.

Lemma 2: Homojen Fredholm denklemi (7.2.6) çözümsüzdür.[8]

Farz edelim ki homojen Fredholm integral denkleminin çözümü sıfırdan farklı $\Phi^{-}(t)$ olsun. Bu çözümün anlamıyla yeni bir fonksiyon düzenlersek

$\Phi^{+}(t) = \Phi^{-}[\beta(t)]$

Eğer, $\beta(t)$ $\alpha(t)$'ye ters ise yani ($\beta[\alpha(t)] \equiv t$)

Daha sonra (7.2.2) formülüne göre iki analitik $\Psi^{+}(z)$, $\Psi^{-}(z)$ fonksiyonları tanımlayalım.(7.2.6) denklemine göre

$$\Psi^{+}(t) = \Psi^{-}[\alpha(t)] \quad \text{ya da} \quad \Psi^{+}[\beta(t)] = \Psi^{-}(t) \tag{7.2.7}$$

Ayrıca, $\Psi^{-}(\infty) = 0$ olmak kaydıyla elde edilir.

$\beta(t)$ eğri üzerinde kendisine resmedilen $\alpha(t)$ kadar iyi olan bir fonksiyondur.

Dolayısıyla (7.2.7) problemi ile (7.2.1) problemi aynı çeşittendir.

Bu sebepten Lemma 1'in bazları $\Psi^{+}(z) = \Psi^{-}(z) \equiv 0$

(7.2.3),(7.2.4) formülleri sebebiyle en son sonuç $\Phi^{+}(t), \Phi^{-}(t)$ sırasıyla D^{+}, D^{-} bölgelerinde analitik olan fonksiyonların sınır değerlerini oluşturur.

Dolayısıyla, (7.2.1) sınır değer probleminin çözümleri $\Phi^{+}(z)$, $\Phi^{-}(z)$ fonksiyonlarıdır.

Ve Lemma 1'e göre benzer şekilde 0 olurlar.

Netice itibariyle $\Phi^{-}(t)$ =0 olur.

7.3. Verilen Atlama İle Problem:

$$\Phi^{+}[\alpha(t)] - \Phi^{-}(t) = g(t) \tag{7.3.1}$$

n.mertebeden sonsuzlukta bir kutbu olan fonksiyon sınıflarının çözümünü ararsak problemi genelleyebiliriz.

$$-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(z)}{\tau - t}d\tau = 0$$

şartı ve $\varphi(t)$, D^{-} bölgesindeki bir analitik fonksiyonun sınır değeri ise ,

sonsuzluk hariç n.mertebede bir kutbu vardır.

$$\gamma(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+...........a_{n-1}z+a_n$$

$$-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}$$

$$\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\gamma(t)=0$$ analitiklik şartları sebebiyle

analitiklik şartları bu durumda

$$\frac{1}{2}\Phi^+(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^+(\tau)}{\tau-t}d\tau=0 \qquad (7.3.2)$$

$$\frac{1}{2}\Phi^-(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^-(\tau)}{\tau-t}d\tau-P_n(t)=0$$

Eğer $P_n(z)=c_0+c_1z+..........c_nz^n$ sonsuzlukta $\Phi^-(z)$ fonksiyonunun polinomsal temel bileşenleri ise

$$\left.\begin{aligned}\Psi^+(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^-(z)}{\tau-z}d\tau-P_n(z)\\ \Psi^-(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^+(z)}{\tau-z}d\tau\end{aligned}\right\} \qquad (7.\ 3.3)$$

iki bağıntı dolayısıyla (7.3.2) şartlarını

$$\left.\begin{aligned}\Psi^+(t)&=\frac{1}{2}\Phi^-(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^-(\tau)}{\tau-t}d\tau-P_n(t)=0\\ \Psi^-(t)&=-\frac{1}{2}\Phi^+(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi^+(\tau)}{\tau-t}d\tau=0\end{aligned}\right\} \qquad (7.3.4)$$

yazarız. Devam ettirirsek $\Phi^-(t)$ için homojen olmayan Fredholm denklemi elde edilir.

$$\begin{aligned}\Psi^+(t)-\Psi^-[\alpha(t)]&\equiv\Phi^-(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}-\frac{1}{\tau-t}\right]\Phi^-(\tau)d\tau-P_n(t)+\\ &+\frac{1}{2}g(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{g(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}d\tau=0\end{aligned} \qquad (7.3.5)$$

(7.2.6) denklemine benzeyen homojen denklem Lemma 2'ye göre çözülemez.

Netice itibariyle (7.3.5) denklemi herhangi bir sağ taraf için çözülebilir.

$R(t,\tau)$ (7.3.5) denkleminin bir çözümü olsun. Böylece (7.3.5)'in çözümü

$$\Phi^-(t)=g_1(t)+P_n(t)+\int_L R(t,\tau)[g_1(\tau)+P_n(\tau)]d\tau \qquad (7.3.6)$$

ile ifade edilir. Halbuki

$$g_1(t) = -\frac{1}{2}g(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}d\tau \qquad (7.3.7)$$

Eğer, g(t) Hölder şartını sağlaması hesaba katılmazsa bu ispatlanır.

(7.3.5) denkleminin çözümü bu şartı sağlar.

Gerçekten denklemin R(t, τ) çözümü, tekrarlayan köklerin toplamı olarak adlandırılabilir.

Tekil olmayan köklerin tekrarlaması özelliklerini geliştirir;

Netice olarak çözümün fonksiyonel özellikleri ile o köklerin özellikleri aynıdır.

Lemma 2'nin ispatına benzer sonuç olarak (7.3.5) denkleminin her çözümü (7.3.1) sınır değer probleminin bir çözümüdür.

$\Phi^+(t)$ 'nin sınır değerini

$$\Phi^+(t) = \Phi^-[\beta(t)] + g[\beta(t)] \qquad (\beta[\alpha(t)] \equiv t) \qquad (7.3.8)$$

Olarak buluruz.

8. İNDEKS

L kapalı düzgün parçalı eğri ve G(t) sürekli L üzerinde sıfır olmayan bir fonksiyon olmak üzere,

L üzerinde 2π ile bölünen pozitif yönde resmedilen G(t) fonksiyonun argumentinin artışına G(t) fonksiyonunun indeksi denir.[8]

Eğer L üzerine resmedilen w sabitinin artışı $[w]_L$ şeklinde tanımlanırsa,

G(t) fonksiyonunun indeksi

$$\chi = IndG(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L$$

Şeklinde gösterilir. Fonksiyonun logaritması alınarak indeks hesaplanabilir.

lnG(t)=ln$|G(t)| + i\arg G(t)$

yani

$$\chi = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L$$

İndeks, integralle hesaplanabilir.

$$\chi = IndG(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\arg G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t)$$

İndeks 2π'nin katı olmalıdır.

8.1. Sıfır İndeks İle Homojen Problem

Düşünelim ki ,

$$\Phi^+[\alpha(t)]=G(t)\ \Phi^-(t) \qquad (G(t)\neq 0) \qquad (8.1.1)$$

$\alpha(t)$, parçalı düzgün L eğrisinde birebir yolla kendi kendisine yönünü koruyarak resmedilsin

Ind $\Phi^+[\alpha(t)]$=Ind $\Phi^+(t)$=N^+

Elde edilir.

Böylece

χ = Ind G(t)=N^++N^-

Bundan dolayı aşağıdakileri elde ederiz.

1. χ <0 için homojen problem çözülemez.

2. χ =0 için homojen problemin çözümü sıfırları içermez.

$\Phi^{-}(\infty)=1$ şartını sağlayan çözümü arayacağız.

(8.1.1) bağıntısındaki logaritmaları alırsak

$$\ln\Phi^{+}[\alpha(t)]\text{-}\ln\Phi^{-}(t)=\ln G(t)$$

elde edilir.

Bölgesel analitik fonksiyon için $\Gamma(z)=\ln\Phi(z)$ $\Phi^{+}[\alpha(t)]-\Phi^{-}(t)=g(t)$

(7.3.1) sınır değer koşulu ile toplamsal $\Gamma(\infty)=0$ şartını elde ederiz.

$\Gamma(z)$ fonksiyonunun (7.3.6) formülü ile verildiği apaçıktır. (7.3.8) nin içinde

g(t)=lnG(t) ve $P_n(z)\equiv 0$ koyarsak, netice olarak,

$$\Phi(z)=e^{\Gamma(z)}; \qquad \Gamma_{-}^{+}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Gamma_{-}^{+}(z)}{\tau-z}d\tau \tag{8.1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^{-}(t) &= g_1(t)+\int R(t,\tau)g_1(\tau)d\tau \\ \Gamma^{+}(t) &= \Gamma^{-}[\beta(t)]+\ln G[\beta(t)] \end{aligned}\right\} \tag{8.1.3}$$

bağıntıları problemin bir tek çözümüdür. $g_1(t)$ (7.3.6) formülü ile tanımlanmıştı.

Ayrıca, g(t)=ln G(t) ve $R(t,\tau)$, (7.3.5) integral denkleminin çözümü idi.

$$\gamma^{+}[a(t)]=\frac{1}{\alpha'(t)}\gamma^{-}(t) \tag{8.1.4}$$

Sınır değer şartıyla $\gamma^{+}(z)$ ($\gamma^{-}(\infty)=0$) bölgesel analitik fonksiyonu bulmalıyız.

$\alpha'(t)$ 'nin sıfır indeksi olduğunu ispatlarız.

$[\alpha(\tau)-\alpha(t)]/(\tau-t)$ oranını göz önüne alalım.

L eğrisinin üzerindeki τ noktası boyunca pay ve payda aynı π artışı elde eder.

Kesrin serbest değişkeninin artışı t ve τ ‘ya eşit olmayanlar için sıfırdır.

$\tau\to$ t limit alırsak istediğimizi elde ederiz. Hem de $\alpha'(t)\neq 0$ olmadığı bilinir.

Sonuç olarak (8.1.4) problemi koşulsuz ve tekil değerli çözülebilirdir.

9. HOMOJEN KAYDIRILMIŞ RİEMANN SINIR DEĞER PROBLEMİ

$\Phi^+(\alpha(t)) = G(t).\Phi^-(t) \quad t\in L$ (9.1)

G(t)$\in H$ ve G(t)$\neq 0$

Problemin indeksi $\kappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]_L$ $0\in D^+$ farz edebiliriz.

Buna göre problem kaydırılmadan

$\Phi^+(\alpha(t)) = \left[t^{-\kappa}G(t)\right]t^{\kappa}\Phi^-(t)$ yazılabilir ki ,bu da

$$X\,(\mathrm{z}) = \begin{cases} X^+(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{X\left[\alpha^{-1}(\tau)\right]}{\tau - z}d\tau, z\in D^+\right. \\ X^-(z) = z^{-\kappa}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{X(\tau)}{\tau - z}d\tau\right\} z\in D^- \end{cases} \quad (9.2)$$

$\chi(t)\in H$ olmak üzere $\chi(t)$, Kχ =log$\left\{t^{-\kappa}G(t)\right\}$ 'nin tek çözümü olduğu kolayca görülür ki

$X^+(\alpha(t)) = G(t).X^-(t) \quad t\in L$ (9.3)

(9.3), teorem (9.1)'in her iki tarafının logaritması alınarak doğrulanır.

X (z)$\neq 0$her yerde ve X (z)'nin z=∞'da - κ dizisi vardır, ki ; X (z) aynı zamanda problemin kanonik fonksiyonu olarak adlandırılır.

(9.1)'i (9.3) ile yazıp ve $\Omega(z) = \Phi(z)/X(z)$ alırsak

$\Omega^+(\alpha(t)) = \Omega^-(t) \quad$ t$\in$ L

elde ederiz.

$\Omega(z)$'nin z=∞ da sınırlı bir dizisi vardır. Yine (9.1) denkleminden

$$\Omega(z) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{w\left[\alpha^{-1}(\tau)\right]}{\tau - z}d\tau, z\in D^+ \\ \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{w(\tau)}{\tau - z}d\tau + P(z), z\in D^- \end{cases}$$

P(z) herhangi bir polinom ve w(t), P(z) ile tanımlı tek Kw=P(t)'nin çözümüdür.

$\Phi(z)$ bilinmeyen fonksiyona dönersek

$$\Phi(z)=\begin{cases} \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{w\left[\alpha^{-1}(\tau)\right]}{\tau - z}d\tau, z \in D^+ \\ \\ \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{w(\tau)}{\tau - z}d\tau + X(z).P(z), z \in D^- \end{cases} \tag{9.4}$$

(9.1)'nin çözümü bulunur. P(z) herhangi bir polinom ,

w(t), Kw=P(t)'nin çözümü X (z), (9.2) deki gibi kanonik fonksiyon

$\chi(t)$, Kχ =log$\left[t^{-\kappa}G(t)\right]$'nin çözümü

κ, G(t) 'nin indeksi $\Phi(z)$ sonsuzlukta m dizisiyle sağlanırsa

P(z)= κ+m dereceli herhangi bir polinom ve κ+m≥ 0 ise problemin κ+m+1 tane lineer bağımsız çözümü vardır.

κ+m<0 ise çözüm sadece 0'dır.

10. HOMOJEN OLMAYAN KAYDIRILMIŞ RİEMANN SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Basit atlama problemi

$$\Phi^{+}(\alpha(t)) = \Phi^{-}(t) + g(t) \quad t \in L \tag{10.1}$$

göz önüne alalım

$\Phi(z)$ sonsuzda sınırlı bir dizidir. Öyleyse bunun asıl parçalanması

P(z)= $c_0 + c_1 z + ... c_n z^n$ yazabiliriz.

Farz edelim sonsuzlukta asıl parçalanması P(z) olan $\Phi(z)$ fonksiyonu çözüm olsun.

L üzerinde $\phi(t) \in H$ fonksiyonu tanımlanır ki,

$$\Phi(z) = \begin{cases} \Phi^{-}(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\phi(\tau)}{\tau - z} d\tau + P(z), z \in D^{-} \\ \\ \Phi^{+}(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\phi\left[\alpha^{-1}(\tau)\right]}{\tau - z} d\tau, z \in D^{+} \end{cases} \tag{10.2}$$

Plemlj Formülü

$$\begin{aligned} &\Phi^{+}(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\Phi^{+}(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0, t \in L \\ &\Phi^{-}(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\Phi^{-}(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0 \end{aligned} \tag{10.3}$$

(10.2) yerine konursa

$$\Phi^{+}(\alpha(t)) = \frac{1}{2}\Phi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\alpha'(\tau).\Phi(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)} d\tau$$

$$\Phi^{-}(t) = -\frac{1}{2}\Phi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(\tau)}{\tau - t} d\tau + P(t) \tag{10.4}$$

Elde edilir.

(10.1) ’de yerine koyarsak

$$\mathrm{K}\phi \equiv \phi(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L K(t,\tau).\phi(\tau)d\tau = g(t) + P(t), \quad t\in L \quad g(t)\in H \tag{10.5}$$

çözümü varsa o da $\in H$

$$\mathrm{K}(t,\tau) = \frac{1}{\tau - t} - \frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(t) - \alpha(t)} \quad \textbf{(Zayıf Fredholm Çekirdeği)}$$

(10.5) denklemine zayıf Fredholm denklemi denir.[7]

Verilen g(t) ve P(t) için (10.5) ‘un tek çözümü olduğunu ispatlayalım.

$\mathrm{K}\phi = 0$ ’ın sadece çözümünün sıfır olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$\phi_0(t)$, $\mathrm{K}\phi = 0$ ’ın çözümü olsun $\phi_0(t)\in H$

$$\Phi_0(z) = \begin{cases} \Phi_0^+(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\phi_0\left[\alpha^{-1}(\tau)\right]}{\tau - z}d\tau \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad z\in D^+, z\in D^- \\ \Phi_0^-(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\phi_0(\tau)}{\tau - z}d\tau \end{cases} \tag{10.6}$$

$\phi_0(t)\in H$ ise $\Phi_0^{\pm}(t)\in H$ tır.(10.2)’in çözümüne benzer olarak

$\mathrm{K}\phi_0 = 0$ ile $\quad \Phi_0^+(\alpha(t)) = \Phi_0^-(t) \quad t\in L$

Apaçık bellidir ki $\Phi_0(\infty) = 0$ bundan dolayı ve (10.6) nın sonucu $\Phi_0(z) = 0$

(10.6) denklemin sonucu olarak $\phi_0(\alpha^{-1}(t))$ $\quad D^-$ deki uygun $\psi^-(z)$ analitik fonksiyonun sınır değeridir ki;

$\phi_0(\alpha^{-1}(t)) = \psi^-(t)$ ile $\psi^-(\infty) = 0$

elde ederiz.

Benzer olarak D^+ 'daki uygun $\psi^+(z)$ analitik fonksiyonun sınır değeri

$\phi_0(t)$ ‘dir; ki $\quad \phi_0(t) = \psi^+(t)$

Böylece $\psi^+(\alpha^{-1}(t)) = \psi^-(t)$ ile $\quad \psi^-(\infty) = 0$ elde ederiz.

$\psi_-^+(t)\in H$ ise $\quad \psi_-^+(z)\equiv 0$ dır .

Dolayısıyla, $\phi_0(t)=0$ yani , $\mathrm{K}\phi$ =0’ın çözümü sadece sıfırdır.

11. HOMOJEN OLMAYAN PROBLEMİN KANONİK GÖSTERİMİ

$\Phi^{+}(\alpha(t)) = G(t).\Phi^{-}(t)$+g(t) homojen olmayan denklemin kanonik fonksiyonu X (z) olsun

$\dfrac{\Phi^{+}(\alpha(t))}{X^{+}(\alpha(t))} = \dfrac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)} + \dfrac{g(t)}{X^{+}(\alpha(t))}$, yazılabilir. Ve (9.4) dolayısıyla,

$$\Phi(z) = \begin{cases} \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\Phi\left[\alpha^{-1}(\tau)\right]}{\tau - z} d\tau, z \in D^{+} \\ \\ \dfrac{X(z)}{2\pi i}\displaystyle\int_L \dfrac{\Phi(\tau)}{\tau - z} d\tau + X(z).P(z), z \in D^{-} \end{cases} \qquad (11.1)$$

P(z) herhangi bir polinom ve

$\phi(t)$, $\quad$ K$\phi = \dfrac{g(t)}{X^{+}(\alpha(t))} + P(t)$ (11.2)

Probleminin çözümü

P(z) , κ-1 dereceli κ sabitlerini içeren herhangi bir polinom olmak üzere
Eğer homojen olmayan problemin indeksi $\kappa \geq 0$ ise genel çözümü (11.1) deki gibidir.

Eğer indeksi κ<0 ise (11.1) deki P≡0 şartı sağlanmalı ve

$$\int_L \tau^{r} \phi(\tau) d\tau = 0 \qquad r = 0,\ldots - \kappa - 1 \qquad (11.3)$$

çözülebilirlik koşulunun sağlanması gereklidir.

K$\phi = \dfrac{g(t)}{X^{+}(\alpha(t))}$ 'nin tek çözümü $\phi(t)$ dir ki;

$$\phi(t) = \text{g(t)} + \int_L \frac{\gamma(t,\tau)}{X^{+}(\alpha(\tau))} g(\tau) d\tau$$

$\gamma(t,\tau)$, K'nin kararlılığı (11.3) de yerine yazılırsa

$$\int_L h_r(t) g(t) dt = 0 \quad r = 1,\ldots - \kappa \qquad (11.4)$$

$h_1,\ldots h_{-\kappa}$ g(t)'den bağımsız lineer bağımsız fonksiyonları tanımlanır.

Böylece Homojen olmayan problemin çözümü

Eğer, indeksi $\kappa \geq 0$ ise (11.1)-(11.2) deki gibidir ki; P(z) κ-1 dereceli herhangi bir polinom. Eğer, indeksi $\kappa<0$ ise tek çözüm var (11.1)-(11.2)' deki $P \equiv 0$ şartı ve ancak ve ancak (11.4)'ün $-\kappa$ şartları sağlanır ve çözümün derecesi κ.

12. KONFORM DÖNÜŞÜM

$\varphi : D \to D'$ D, D' kompleks düzlemde tanımlı iki açık küme

Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa φ'ye konform dönüşüm denir.[9]

a) φ eşlenebilir

b) φ analitik

c) φ^{-1} analitik

Kompleks fonksiyonlar genelde bir bölgeyi başka bir bölge üzerine resmeder.
Resmedilen bölge ile resim bölgesi arasındaki ilginin daha iyi belirlenebilmesi ve bu resmetme işleminden uygulamada yararlanabilmek için , herhangi kompleks fonksiyon yerine konform dönüşüm yapan analitik fonksiyonlar göz önüne alınır.

Bu uygulamalarda amaç ;
Problemi verilen bölge yerine bundan daha basit bir bölgede çözmek ve sonucu ters dönüşüm yardımıyla verilen ilk bölgeye taşımaktır.

Bunun için verilen bölgeyi basit bölgeye resmeden 1-1 analitik fonksiyonu bulmak gerekir.[2]

Tanım: B, C 'de bir bölge olmak üzere f:B $\longrightarrow C$ sürekli dönüşümü verilsin.

Eğer bir $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün $\gamma_1 ve \gamma_2$ eğrilerinin f(γ_1) ve f(γ_2) resim eğrileri de w_0 da aralarında yön ve büyüklük bakımından aynı α açısı yapıyorlarsa f fonksiyonuna z_0 da bir konform dönüşümdür denir.[2]

Eğer her $z_0 \in B$ noktasında f konform ise f, B de konformdur denir.

13. ANALİTİK FONKSİYONLARIN KAYDIRILMIŞ RİEMANN SINIR DEĞER PROBLEMİNİ SIRADAN RİEMANN SINIR DEĞER PROBLEMİNE DÖNÜŞTÜRME

İki D_{-}^{+} bölgesinin konform dönüşümle iki yeni ortak parçalı düzgün eğri ile ayrılan D_{1-}^{+} bölgesine resmedildiğini , D_{1-}^{+} 'nin tüm düzlem için birbirini tümlediğini ve bundan dolayı ,

parçalı düzgün L eğrisinde tanımlı t ve $\alpha(t)$ noktaları yeni L_1 parçalı düzgün eğrisi üzerinde aynı noktalara dönüştüğünü göstermek yeterlidir.

Buna istinaden kaydırılmış Riemann problemi sıradan Riemann problemine dönüşür.
Sıfır indeksli sıfır atlamalı problemi

$$w^{+}[\alpha(t)] - w^{-}(t) = 0 \tag{13.1}$$

$w^{-}(z)$ 'nin sonsuzlukta bir kutbu olduğu ve açılımının

$$w^{-}(z) = z + \frac{c_1}{z} + \dots \tag{13.2}$$

olması şartı sağlansın.
Problemin integral denklemini oluşturursak

$$\Phi^{-}(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\Phi^{-}(\tau)d\tau - P_n(t) + \frac{1}{2}g(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}d\tau = 0$$

($\Phi^{-}(t)$ için homojen olmayan Fredholm denklemi)

$\Phi^{-}(t)$ için homojen olmayan Fredholm denklemi'nde

g(t)=0 $P_n(t) = t$ ve $\Phi^{-}(t) = w^{-}(t)$ yazarsak

$$w^{-}(t) - \frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\frac{\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau)-\alpha(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right] w^{-}(\tau)d\tau = t \tag{13.3}$$

koşulsuz tek değerli çözülebilir denklem elde ederiz.

$w^{-}(t)$ buradan bulunur. Ve (13.1) 'in sınır-değer şartından $w^{+}(t) = w^{-}[\beta(t)]$

$w^{+}(z)$ ' de Cauchy formülünden elde edilir.

$\sigma(t)$, $w^{-}(t)$'nin ters fonksiyonu olsun yani, ($w^{-}[\sigma(t)] \equiv t$) (13.1)'de t ile $\sigma(t)$ yer değiştirirsek

değişkenlerin bütün değerleri için sağlanan

$$w^{+}\{\alpha[\sigma(t)]\} \equiv t \tag{13.4}$$

Elde ederiz.

Bölgesel analitik $\Phi_1(z)$ fonksiyonu

$$\Phi^{+}(z) = \Phi_1^{+}[w^{+}(z)] \quad , \qquad \Phi^{-}(z) = \Phi_1^{-}[w^{-}(z)] \tag{13.5}$$

dir.

$\Phi^{+}[\alpha(t)] = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t)$

(**homojen olmayan denklemin kaydırılmış Riemann sınır değer problemi**) dolayısıyla, problem

$\Phi_1^{+}\{w^{+}[\alpha(t)]\} = G(t)\Phi_1^{-}[w^{-}(t)] + g(t)$ yazılır.

$t = \sigma(t_1)$ yazılırsa

$\Phi_1^{+}\{w^{+}[\alpha(\sigma(t_1))]\} = G[\sigma(t_1)]\Phi_1^{-}(t_1) + g[\sigma(t_1)]$ Elde edilir.

(13.4) özdeşliğinin sağlanması ve $G_1 = G, g_1 = g$ yazılırsa Riemann sınır değer problemi elde edilir.

$$\Phi_1^{+}(t) = G_1(t)\Phi_1^{-}(t) + g_1(t) \tag{13.6}$$

Böylece kaydırılmış Riemann sınır değer problemi sıradan Riemann sınır değer problemine dönüşür.

En son çözüm itibariyle hala kalan iki problemin denkliğinin ispatıdır.

Yani (13.5) bağıntılarının kümesi ,$\Phi^{+}(\alpha(t)) = G(t).\Phi^{-}(t)$ +g(t) homojen olmayan kaydırılmış problemin her bir çözümü ve (13.6) Riemann probleminin çözümü karşılıklı olarak aynıdır.

Düşünelim ki D_{-}^{+} bölgesinde $w_{-}^{+}(z)$ analitik fonksiyonları kendine özgü $L_{1}{}_{-}^{+}$ eğrileriyle sınırlı $D_{1}{}_{-}^{+}$ bölgesine resmedilsin;

Buna göre,

Aşağıdakileri açıklayabiliriz.

1. $D_1{}^{+}_{-}$ iç bölgesinde ortak noktaları olmayan ve bunlar ortak sınır L_1 ile bölünen bütün düzlemde birbirinin tümleyeni olarak şekillenen bölgelerdir.

2. D^{+}_{-},. $D_1{}^{+}_{-}$ ile birebir karşılık gelen bölgelerdir.

Buna göre,

İspat: $L_1{}^{+}_{-}$ parçalı düzgün eğrileri $\xi = w^{+}(t)$ $\xi = w^{-}(t)$ (t$\in L$)

denklemleriyle kendine özgü tanımlanabilir.

Fakat sınır değer koşulundan dolayı

$$w^{-}(t) = w^{+}[\alpha(t)] = w^{+}(t_1)$$

t, L eğrisini bir kez dönerse

$t_1 = \alpha(t)$ 'de aynı yönde bir kez gider.

Bu sebepten L^{-} parçalı düzgün eğrisi ile $L_1{}^{+}_{-}$ çakışır.

Biz bunu kısaca L_1 diye gösterebiliriz.

Konform dönüşüm özelliklerinden dolayı ve parçalı düzgün eğrilerin özelliklerinden dolayı karşılıklı bire bir bölgeleri açıklayabiliriz.

Öncelikle Hölder koşulunu sağlayan $w^{+}[\alpha(t)] - w^{-}(t) = 0$ (13.1) sınır değer probleminin bir türevi vardır..

(13.1) sınır değer koşulunun diferansiyeli ile

$$\alpha'(t)\gamma^{+}[\alpha(t)] = \gamma^{-}(t)\left(\gamma(z) = \frac{dw}{dz}\right) \tag{13.7}$$

elde edilir.

(13.2) dolayısıyla, (13.7) sınır değer problemi $\gamma^{-}(\infty) = 1$ şartıyla çözülebilir.

Aslında bu problem $\gamma^{+}[a(t)] = \dfrac{1}{\alpha'(t)}\gamma^{-}(t)$ ile çakışır.

Aynı çözümden dolayı Bu problemin çözümü vardır ve $\gamma^{+}_{-}(t)$ Hölder koşulunu sağlar.

$w^{+}[\alpha(t)] - w^{-}(t) = 0$ (13.1) orjinal problemin çözümünü integral ile yapalım.

İntegral sonucunda hiç logaritmik terimin kalmadığı görülür.

Bundan dolayı sonsuz uzaklıktaki noktanın rezidüsünün sıfır olduğunu ispatlamak gereklidir.

Gerçekten

$$\int_L \gamma^-(t)dt = \int_L \alpha'(t)\gamma^+[\alpha(t)]\ \mathrm{dt} = \int_l \gamma^+(t_1)dt_1 = 0$$

$\gamma(z)$ integrali ve uygun bir sabit seçilmesi halinde Hölder koşulunu sağlayan eğri üzerinde türevlenebilen (13.1) probleminin çözümünü bulabiliriz.

Düşünelim ki tersi doğru olsun yani $t_1 \neq t_2$ için

$w^-(t_1) = w^-(t_2) = w_0$

$w_-^+(z) = w_-^+(z) - w_0$ farkını göz önüne alırsak

$w_-^+(z)$ fonksiyonları (13.1) sınır değer koşulunu sağlar ve aşağıdaki eşitlikler oluşur.

$w_1^-(t_1) = w_1^-(t_2) = w_1^+[\alpha(t_1)] = w_1^+[\alpha(t_2)] = 0$

Parçalı düzgün eğri üzerinde sıfır olmayan fonksiyonlara ulaşırız.

$$w_2^-(z) = \frac{w_1^-(z)}{(z-t_1)(z-t_2)} \qquad w_2^+(z) = \frac{w_1^+(z)}{[z-\alpha(t_1)][z-\alpha(t_2)]} \tag{13.8}$$

(12.1) sınır değer koşulunda $w_{1}{}_-^+$ fonksiyonlarını $w_2^+(t)$ 'nin terimleri olarak belirtirsek

$$w_2^+[\alpha(t)] = \frac{(t-t_1)(t-t_2)}{[\alpha(t)-\alpha(t_1)][\alpha(t)-\alpha(t_2)]} w_2^-(t)$$ sınır değer koşulu bulunur.

İndeksin katsayısı sıfır ve (13.8) koşuluna göre $w^-(\infty) = 0$ sonra (sıfır indeksli homojen problem) konusuna göre $w_2^\pm(z) \equiv 0$ ise $w_-^+(z) = w_0 = sabit$

$w^-(z)$ 'nin sonsuzlukta bir kutbunun olması anlamsızlığından

Birebir aynı dönüşüm gerektiği gibi ispatlanmış olur.

Bu kaydırılmış problemin basit Riemann problemine indirgenebilirliği aşağıdaki teoremi üretir.

Teorem: $\kappa \geq 0$ için homojen kaydırılmış problemin ($\kappa+1$) tane lineer bağımsız çözümü vardır. Homojen olmayan problem koşulsuz çözülebilir;ve bunun çözümü ($\kappa+1$) keyfi sabitlerden lineer bağımlıdır.[8]

Eğer $\kappa \leq$ -1 ise homojen olmayan problemin çözülebilirlik (-κ-1) şartları tamamlanmadan homojen problem çözülemez.[8]

14. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 1. sayfasında tanımlanan analitik fonksiyonların kaydırılmış Riemann sınır değer problemlerinin çözümleri yapılmıştır.

Tezin 13. bölümünde analitik fonksiyonların kaydırılmış Riemann sınır değer problemlerinin sıradan Riemann sınır değer problemine dönüşebileceği elde edilmiştir.

15. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Tezde incelenen analitik fonksiyonların kaydırılmış Riemann sınır değer problemlerinin çözüm yöntemleri ve bu problemlerin sıradan Riemann problemlerine dönüşebileceğinin elde ediliş yöntemi bakımından diğer çalışmalardan farklıdır.

Belirtmek gerekir ki Litvincuk, F.D.Gakhov ve onların öğrencileri tarafından analitik fonksiyonların kaydırılmış Riemann sınır değer problemleri çözülmüştür.

Bu yazarlar çoğunlukla analitik fonksiyonların kaydırılmış Riemann sınır değer Problemlerinin çözümüyle ilgilenmişlerdir.

Tezde analitik fonksiyonların kaydırılmış Riemann sınır değer problemlerinin sıradan Riemann sınır değer problemine dönüşebileceği gösterilmiştir.

16. KAYNAKLAR

[1]**KNOP KONRAD, TERZİOĞLU NAZIM** (Çeviren).Fonksiyonlar Teorisine Başlangıç , İstanbul ,1962

[2]**BAŞKAN T**.''Kompleks fonksiyonlar teorisi''vipaş (2000)

[3]**KNOP KONRAD, TERZİOĞLU NAZIM** (Çeviren).Fonksiyonlar Teorisi, Cilt-1 ,İstanbul ,1962

[4]**SAN NECDET "**Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, İzmir,(1979)

[5]**GAMELİN THEODORE W .**"Complex Analysis,Springer-Verlag New York,(2001)

[6]**İDEMAN M**."Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, İstanbul,(1999)

[7]**JİAN-KE LU** "Boundary Value Problems for Analytic Functions"World scientific Publishing Co.Pte.Ltd(1993)

[8]**GAKHOV.F.D."**Boundary Value Problems .", Çeviri Editörü/Editörleri, ***SNEDDON I.N univercity of Glasgow***, LONDON , (1966).

[9]**EBERHARD FREİTAG ROLF BUSAM."**Complex Analysis, Springer (2005)

[10]**MUSKHELISHVILI N.I. ''**Singular integral equations'' Gostekhizdat (1946)

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Salih Ömür

Doğum Yeri: Tarsus

Doğum Tarihi: 21.03.1977

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili : Orta öğretimde hazırlık sınıfı okuduğundan iyi derecede İngilizce bilgisine sahiptir.

Eğitim Durumu

Lise: Tarsus Cengiz Topel Lisesi (1995)

Lisans: Erciyes Üniversitesi Yozgat Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (Bozok Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü) (2001)

Yükseklisans: Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilimdalı [Matematiksel Analiz] Alanı (2008)

Çalıştığı Kurumlar

1.Esenyayla Şehit Bahçeli Erdağı İlköğretim Okulu KARS (2002-2006)

2.Atatürk Lisesi BATMAN(2007-2008)