T.C
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ANALİTİK FONKSİYONLARIN YARI DÜZLEM İÇİN RİEMANN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Zeynep GÖRMÜŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

NİSAN 2008
KARS

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda katkı ve yardımlarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi ve Bölüm Başkanı değerli danışman hocam Yrd.Doç.Dr Nizami MUSTAFA'ya, Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof.Dr.Gabil YAGUBOV'a, Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Yrd.Doç.Dr. Kerem YAMAÇ'a ve desteklerinden dolayı sevgili aileme teşekkürlerimi sunarım.

NİSAN 2008 Zeynep GÖRMÜŞ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında analitik fonksiyonların yarı düzlem için Riemann sınır değer problemi ele alınmıştır.

Önce analitik fonksiyonların sınır değer problemlerinden söz edilmiş ve sınır değer problemlerinin çözümlerinde kullanılan teoremler verilmiştir.

Ayrıca, analitik fonksiyonların basit bağlantılı bölge için Riemann sınır değer problemlerine değinilmiş ve sınır değer problemlerinin uygulama alanları öğrenilmiştir.

2008, 26 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Riemann sınır değer problemleri, indeks, homojen problem

ABSTRACT

In this thesis, Riemann boundary value problem analitic functions for semi plane is studied.

At first, to talk about the Riemann boundary value problems of analytic functions and the problems which are used on the solutions of boundary value problems are given.

Furthermore, to touch on the Riemann boundary value problems of analitic functions for simple connected domain and the fields of applications of the boundary value problems are learned.

2008, 26 Pages

Key Words: Riemann boundary value problems, index, homogenus problem

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan bazı simgeleri gösterelim:

χ	İndeks
G(t)	L üzerinde sıfır değeri almayan bir fonksiyon
$IndG(t)$	G(t) fonksiyonunun indeksi
$\arg G(t)$	G(t) fonksiyonunun argümanı
detG(t)	G(t) fonksiyonunun determinantı
$\sum_{k=1}^{n} G(k)$	G(k) fonksiyonlarının genel toplamı
C(X)	X üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$X^{+}(z)$ ve $X^{-}(z)$	X(z) probleminin kanonik fonksiyonu

1. GİRİŞ

Matematikte, diferansiyel denklemler alanında, sınır şartları adı verilen ek şartlarla kurulan bir diferansiyel denkleme sınır değer problemi denir. Bir sınır değer probleminin çözümü aynı zamanda sınır şartlarını sağlayan bir diferansiyel denklemin de çözümüdür.

Sınır değer problemleri, fiziğin, fiziksel diferansiyel denklemler dalında olduğu gibi birçok branşta yer alır.

Uygulamaların faydalı olması için bir sınır değer problemi iyi konulmalıdır. Fen ve mühendislik uygulamalarında iyi konulmuş olan sınır değer problemleri, teorik bir çalışma olan kısmi diferansiyel denklemlerin ispatı ile yer alır.

İlk sınır değer problemleri çalışmaları arasında, çözümü Dirichlet prensibi ile verilen harmonik fonksiyonların bulunması (Laplace denkleminin çözümü) nın bir çalışması olan Dirichlet problemi yer alır.Konunun uygulamaları arasında Lineer olmayan Poisson denklemleri, iki nokta sınır değer problemleri ve Laplace denklemleri yer alır.

Bu çalışmada analitik fonksiyonların yarı düzlem için Riemann sınır değer problemleri incelenmiştir. Öncelikle konu ile ilgili klasik çalışmalar incelenmiş ve sınır değer problemleri ile ilgili bilgi verilmiştir. Yarı düzlem için sınır değer problemi, basit bağlantılı bölge içinde incelenir. Çalışmada ayrıca Riemann sınır değer problemlerinde sıkça kullanılan teoremlere yer verilmiştir.

Son yıllardaki çalışmalar incelenerek sonuçları verilmiştir.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1 Analitik Fonksiyonların Sınır Değer Problemleri

Bir bölgedeki analitik fonksiyon problemi, onun reel ve imajiner kısımlarının değerleri arasındaki bağıntı ile verilir. Bu problem ilk olarak B.Riemann [2] tarafından 1857 yılında konulmuştur. D.Hilbert [3] de bunu Riemann – Hilbert problemi ile sınır değer probleminin formülasyonu çalışmasıyla takip etmiştir. Bulunan $\Phi(z) = u + iv$ fonksiyonu, L eğrisi tarafından sınırlanan bir basit bağlantılı S^+ bölgesinde analitiktir ve $S^+ \cup L$'de süreklidir. a,b ve c L'de verilen reel değerli sürekli fonksiyonlar olmak üzere sınır şartından

$$\mathrm{Re}(\, a + ib \,)\Phi = au - bv = c, \tag{2.1.1}$$

yazılır. Hilbert'in bir tekil integral denklemine indirgediği bu problem, bir tekil integral denklemin uygulamalarına verilebilecek bir örnektir.
(2.1.1) problemi iki Dirichlet problemine başarılı bir çözüm olarak indirgenebilir [4]
.
H. Poincaré [5] de yer alan problem (2.1.1) probleminin gelişmiş matematiksel teoremine benzer. Poincaré problemi S^+ bölgesinin L sınırında aşağıdaki şartı sağlayan bir $u(x, y)$ harmonik fonksiyonunun belirlenmesine bağlıdır:

$$A(s)\frac{\partial u}{\partial n} + B(s)\frac{\partial u}{\partial s} + C(s)u = f(s), \tag{2.1.2}$$

burada $A(s), B(s), C(s)$ ve $f(s)$ L'de reel fonksiyonlar, s yayın apsisi ve n de L'nin normalidir.

Genelleştirilmiş Riemann-Hilbert-Poincaré problemi aşağıdaki lineer sınır değer problemidir: Sınır şartından S^+ da bir $\Phi(z)$ analitik fonksiyonu bulunur

$$\mathrm{Re}\{\lambda\Phi\} = f(t_0), \qquad t_0 \in S^+ \tag{2.1.3}$$

burada λ, aşağıdaki formülle tanımlanan bir integro-diferansiyel operatördür

$$\lambda\Phi = \sum_{J=0}^{m}\left\{a_j(t_0)\Phi^{(j)}(t_0) + \int_L h_j(t_0,t)\Phi^j(t)ds\right\}, \tag{2.1.4}$$

burada $a_0(t_0),\ldots,a_m(t)$ 'ler L'de (Hölder şartını sağlayan) tanımlı H sınıfının (genelde kompleks değerli) fonksiyonlarıdır, $f(t)$ H sınıfının reel değerli bir fonksiyonu ve $h_j(t_0,t)$ de L'de aşağıdaki formda olan (genelde kompleks değerli) fonksiyonlardır

$$h_j(t_0,t) = \frac{h_j^0(t_0,t)}{|t-t_0|^\alpha}, \qquad 0 \le \alpha < 1, \tag{2.1.5}$$

burada $h_j^0(t_0,t)$ çift değişkenli H sınıfının fonksiyonlarıdır. (2.1.4) eşitliğinin sağ tarafındaki $\Phi^{(j)}(t_0)$ ifadesinden, $\Phi(z)$' nin j. türevinin S^+ bölgesindeki L eğrisinde olduğu anlaşılır.

Riemann-Hilbert-Poincaré probleminin bir özel hali, $m=0, h_j(t_0,t)=0$ iken Riemann-Hilbert problemidir; Poincaré problemi de aynı problemin özel bir formülasyonudur. Pek çok önemli sınır değer problemi – örneğin iki bağımsız değişkenli eliptik tipli kısmi diferansiyal denklemler için sınır değer problemleri – Riemann – Hilbert – Poincaré problemine indirgenebilir.

Riemann – Hilbert – Poincaré problemi bir de $a_m(t_0) \neq 0, t_0 \in L$ için gösterildi ve I.N.Vekula [4] tarafından çözüldü.

Problemin indeksinin konsepti sınır değer problemlerinin teorisinde önemli bir rol oynar (formül bir tamsayıyı verir)

$$\chi = 2(m+n),$$

burada $2\pi n$ S^+ bölgesinde yön soldan ayrılırken L eğrisinin traversalı altında $\arg a_m(t)$ 'nin artışıdır.

Riemann – Hilbert – Poincaré problemi aşağıdaki formda verilen bir tekil integral denklemine indirgenir

$$N_{\mu} \equiv A(t_0)\mu(t_0) + \int_L N(t_0,t)\mu(t)ds = f(t_0) - c\sigma(t_0), \qquad (2.1.6)$$

burada μ, H sınıfının bilinmeyen reel değerli fonksiyonudur, c bilinmeyen bir reel sabit ve

$$N(t_0,t) = \frac{K(t_0,t)}{t - t_0} \qquad (2.1.7)$$

dır. $A(t_0), K(t_0,t)$ ve $\sigma(t_0)$ fonksiyonları $\alpha_j(t)$ ve $h_j(t_0,t), j = 0,...,m$ terimlerinde ifade edilir.

k ve k', ve

$$N'_{\nu} \equiv A(t_0)\nu(t_0) + \int_L N(t,t_0)\nu(t)ds = 0 \qquad (2.1.8)$$

i hatırlatan homojen integral denklemine karşılık olan $N_{\mu} = 0$ homojen integral denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayılarıdır. k ve k' sayıları

$$\chi = k - k' \qquad (2.1.9)$$

eşitliğiyle verilen Riemann – Hilbert – Poincaré probleminin χ indeksiyle ilişkilidir.

$f(t_0)$ 'ın eşitliğin sağ tarafında iken çözülebilir olması bir özel haldir. Riemann – Hilbert – Poincaré probleminin $f(t_0)$ sağ tarafta iken çözülebilir olması için gerekli ve önemli şart $k' = 0$ veya $k' = 1$ olmasıdır ve son halde (2.1.8) denkleminin $\nu(t)$ çözümü

$$\int_L \nu(t)\sigma(t)ds \neq 0 \qquad (2.1.10)$$

şartını sağlamalıdır. Her iki halde $\chi \geq 0$ dır ve $\mathrm{Re}\{\lambda\Phi\} = 0$ homojen probleminin $\chi + 1$ tane lineer bağımsız çözümü vardır. Eğer $\sigma(t) = 0$ ise Riemann – Hilbert – Poincaré probleminin sağ tarafı sadece $k' = 0$ için çözülebilirdir.

Riemann – Hilbert problemine gelince aşağıdaki durumlar geçerlidir:
1. Eğer $\chi \geq 0$ ise homojen problemdir,
2. Eğer $\chi < 0$ ise problemin tek çözümü

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k+\kappa/2)\Phi}\Omega(\Phi)c(\Phi)d\Phi = 0, k = 1, \ldots, -\chi - 1, \tag{2.1.11}$$

burada .

$$\Omega(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{a^2(\varphi) + b^2(\varphi)}} \exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} Q(\varphi)\cot g \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} d\varphi_1\right\}, \tag{2.1.12}$$

$$\Phi(t) = \arg\left[-t^{-\kappa}\frac{a - ib}{a + ib}\right], a^2 + b^2 \neq 0 \tag{2.1.13}$$

dır.

Riemann – Hilbert problemi, lineer eşlenik problemle kapalı bağlantılıdır. L, $z = x + iy$ kompleks düzleminin bazı S^+ bölgelerinde kapalı eğrilerden oluşan düzgün veya parçalı düzgün bir eğri olsun ve $S^+ \cup L$ birleşimi z düzleminde S^- ile gösterilsin. Bir $\Phi(z)$ fonksiyonu verilsin ve bu fonksiyon L eğrisinin bir komşuluğunda sürekli olsun. Eğer $\Phi(z)$ sonsuz bir $\Phi^+(t)$ veya (veya $\Phi^-(t)$) limitini sağlıyorsa yani L'nin soluna (veya sağına) kalırken bir keyfi yol boyunca z, t'ye benziyorsa $\Phi(z)$ fonksiyonunun soldan (veya sağdan) bir $t \in L$ 'de sürekli olduğu söylenebilir.

Eğer S^+ ve S^- de analitik ve herhangi $t \in L$ noktasında soldan ve sağdan sürekli ise, $\Phi(z)$ fonksiyonu sıçramalı L eğrisinde parçalı analitiktir.

Lineer eşlenik problem L eğrisiyle bir $\Phi(z)$ parçalı analitik fonksiyonundan oluşur, sonsuzdaki problemin sınır şartından

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), t \in L, \qquad (3.1.3)$$

dir. Burada $G(t)$ ve $g(t)$ L'de verilen H sınıfının fonksiyonlarıdır. L üzerinde her yerde $G(t) \neq 0$ olduğu varsayılırsa

$$\chi = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L \qquad (2.1.14)$$

eşitliği, lineer eşlenik fonksiyonun indeksi olarak adlandırılır.

Eğer $\Phi(z) = (\Phi_1,..., \Phi_n)$ bir parçalı analitik vektör, $G(t)$ $(n \times n)$ tipinde bir kare matris ve $g(t) = (g_1,..., g_n)$ bir vektör ve bir de $\det G(t) \neq 0$ ise

$$\chi = \frac{1}{2\pi}[\arg \det G(t)]_L$$

tamsayısı lineer eşlenik problemin toplam indeksi olarak adlandırılır. İndeksin konsepti ve toplam indeks, lineer problem teorisinde önemli bir rol oynar [6], [7], [8].

(2.1.6) formundaki tek boyutlu tekil integral denklemleri teorisi, lineer eşlenik problem teorisinin temelidir.

2.2 Bazı Yardımcı Teoremler

Şimdi Riemann sınır değer problemlerinin çözümünde sıkça kullanılan teoremleri verelim:

1. Analitik Devam Teoremi: D_1 ve D_2 bölgeleri ortak düzgün bir L sınırına sahip olsun; D_1 ve D_2 bölgelerinde iki tane $f_1(z)$ ve $f_2(z)$ fonksiyonları verilsin. Bir z noktası L eğrisine yaklaştığında her iki $f_1(z)$, $f_2(z)$ fonksiyonları L eğrisi üzerinde sürekli olan limit değerine yaklaşsın ve limit değerleri birbirine eşit olsun. Bu koşullar altında $f_1(z)$, $f_2(z)$ fonksiyonları birbirlerinin analitik devamını oluştururlar.

2. Genelleştirilmiş Liouville Teoremi: $f(z)$ fonksiyonu kutup noktası olabilecek, $a_0 = \infty$, $a_k (k = 1,2,...,n)$ noktaları hariç tüm kompleks düzlemde analitik olsun ve kutup noktaları civarındaki $f(z)$ fonksiyonunun açılımının temel kısımları aşağıdaki formda olsun:

a_0 noktasında : $G_0(z) = c_1^0 z + c_2^0 z^2 + ... + c_{n_0}^0 z^{n_0}$;

a_k noktalarında : $G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) = \frac{c_1^k}{z-a_k} + \frac{c_2^k}{(z-a_k)^2} + ... + \frac{c_{m_k}^k}{(z-a_k)^{m_k}}$.

Bu takdirde $f(z)$ rasyonel bir fonksiyondur ve aşağıdaki şekilde ifade edilebilir

$$f(z) = C + G_0(z) + \sum_{k=1}^{n} G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right).$$

Özel olarak, eğer $f(z)$ fonksiyonunun tek singularitesi sonsuzda m. dereceden bir kutup noktası ise bu durumda $f(z)$ fonksiyonu m. dereceden bir polinomdur:

$$f(z) = c_0 + c_1 z + ... + c_m z^m \text{ [9].}$$

3. ANALİTİK FONKSİYONLARIN BASİT BAĞLANTILI BİR BÖLGE İÇİN RİEMANN SINIR DEĞER PROBLEMİ

3.1 Problemin Formüle Edilmesi

Tanım: $\varphi = X \to Y$ kompleks fonksiyonu verilsin. $\forall t_1, t_2 \in X$, K>0 ve α >0 için

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq K.|t_1 - t_2|^{\alpha} \qquad (3.1.1)$$

oluyorsa $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde K sabiti ve α üssü ile **Hölder Şartı'nı** sağlar denir ve bu $\varphi \in KH_{\alpha}(X)$ ile belirtilir [10].

Uyarı: $C(X)$, X üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi olsun. Burada $KH_{\alpha}(X) \subset C(X)$ olduğu açıktır.

Kompleks düzlemi iç bölge D^+ ve dış bölge D^- bölgelerine ayıran basit kapalı düzgün bir L eğrisi Hölder şartını sağlayan bu eğri üzerinde G(t) (G(t) eğri üzerinde sıfır değeri almayan bir fonksiyon) ve g(t) pozisyon fonksiyonları verilsin. İki fonksiyon bulmak gerekir: $z = \infty$ dahil olmak üzere, D^+ bölgesinde analitik olan $\Phi^+(z), D^-$ bölgesinde analitik olan $\Phi^-(z)$, öyle ki bu fonksiyonlar L eğrisi üzerinde aşağıda verilen iki lineer ifadeden birini sağlar

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \qquad \text{(homojen problem)} \qquad (3.1.2)$$

veya

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \qquad \text{(homojen olmayan problem)} \qquad (3.1.3)$$

G(t) fonksiyonuna Riemann probleminin katsayısı ve g(t) fonksiyonuna da serbest terim denir.

Verilen Sıçrama Miktarına Uygun Olarak Analitik Fonksiyonun Bölgesel Olarak Belirlenmesi: İlk olarak özel tipte bir Riemann problemini ele alalım. Kapalı bir L eğrisi üzerinde Hölder şartını sağlayan bir G(t) fonksiyonunun verildiğini kabul edelim. Sonsuzda sıfır değeri alan ve bir $\varphi(t)$ sıçramasında L eğrisi boyunca geçen bölgesel analitik bir $\Phi(z)(z \in D^+$ için $\Phi(z) = \Phi^+(z), z \in D^-$ için $\Phi(z) = \Phi^-(z))$ fonksiyonunun, diğer bir ifadeyle, aşağıdaki koşulu sağlayan bir fonksiyonun bulunması gerekir

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \tag{3.1.4}$$

Bu problemin çözümü

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \tag{3.1.5}$$

dir. Bu çözümün tekliğini ispatlamak kolaydır. Aslında, iki çözümün varlığını kabul edersek ve çözümler arasındaki farkı ele alırsak, L eğrisi üzerindeki bu fark sıçramasının sıfır olduğunu buluruz; bu fonksiyon tüm düzlemde analitiktir ve sonsuzda sıfır değerini alır. Dolayısıyla, Liouville teoremi de aynı şekilde sıfır değerini aldığını ifade eder [3].

Kapalı bir eğri üzerinde verilen ve Hölder şartını sağlayan keyfi bir $\varphi(t)$ fonksiyonu, $\Phi^-(\infty) = 0$ şartı altında, $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ analitik fonksiyonlarının sınır değerlerini oluşturan $\Phi^+(t), \Phi^-(t)$ fonksiyonlarının farkının formunda tek biçimde ifade edilebilir.

Eğer $\Phi^-(\infty) = 0$ ek şartı göz ardı edilirse, problemin çözümünün (3.1.5) formülü ile verilebileceği kolaylıkla görülür.

3.2 Homojen Problemin Çözümü

Problemin Çözümü: $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$ homojen problemi çözülebilir olsun ve $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonları çözüm olsunlar. $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ fonksiyonlarının tanımlanan D^+, D^- bölgelerindeki sıfır sayıları, sırasıyla N^+ ve N^- ile gösterilsin. $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$ eşitliğinin her iki tarafındaki indeks hesaplanır ve indeksin özellikleri kullanılırsa

$$N^+ + N^- = Ind G(t) = \chi \tag{3.2.1}$$

elde edilir.

Riemann probleminin katsayısının χ indeksi, problemin indeksi olarak adlandırılır. Yukarıdaki eşitliğin sol tarafı negatif olmayan bir sayıdır. Dolayısıyla,

1) Homojen Riemann sınır değer probleminin çözülebilir olması için problemin χ indeksinin negatif olmayan bir sayı olması gerekir ($\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının kutup noktaları yoktur).
2) Eğer $\chi > 0$ ise $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ fonksiyonları ikisinin de indeksi sıfır olmak üzere problemin çözümünü oluştururlar.
3) Eğer $\chi = 0$ ise $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ fonksiyonlarının sıfır değeri aldığı nokta yoktur.

Tanım: $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$ sınır şartını sağlayan ve düzlemin sonlu kısmındaki her yerde sıfır dizisine sahip bölgesel analitik bir fonksiyona homojen **Riemann probleminin kanonik fonksiyonu** denir. Dolayısıyla, sonsuzdaki noktada fonksiyonun derecesi χ indeksine eşit olur [10].

$\chi \geq 0$ için kanonik fonksiyonun hiçbir kutup noktası yoktur ve sınır değer probleminin bir çözümünü oluşturur.

$\chi < 0$ için kanonik fonksiyonun sonsuzda bir kutup noktası vardır ve dolayısıyla homojen Riemann probleminin bir çözümü değildir. Bunun yanında, homojen olmayan problemi çözmek için yardımcı bir fonksiyon olarak da kullanılabilir.

Eğer Riemann probleminin sınır şartı aşağıdaki formda yazılırsa

$$\Phi^{+}(t) = t^{\chi}\left[t^{-\chi}G(t)\right]\Phi^{-}(t), \qquad (3.2.2)$$

keyfi herhangi bir χ için $X(z)$ probleminin kanonik fonksiyonunun aşağıdaki eşitliklerle verilebileceği kolaylıkla bulunabilir

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}, \qquad X^{-}(z) = z^{-\chi}e^{\Gamma^{-}(z)} \qquad (3.2.3)$$

burada

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\ln\left[t^{-\chi}G(\tau)\right]}{\tau - z}d\tau$$

dir. $\chi \geq 0$ için homojen problemin genel çözümü kanonik fonksiyonlarla aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\Phi(z) = X(z).P_{\chi}(z) \qquad (3.2.4)$$

3.3 Homojen Olmayan Problemin Çözümü

Problemin Çözümü: Sınır şartının G(t) katsayısını, (3.1.3) homojen probleminin kanonik fonksiyonunun sınır değerinin oranı, $G(t)=\dfrac{X^{+}(t)}{X^{-}(t)}$ ile değiştirilirse bu durumda aşağıdaki kısaltılmış formül elde edilir

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)}=\frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)}+\frac{g(t)}{X^{+}(t)} \tag{3.3.1}$$

$\dfrac{g(t)}{X^{+}(t)}$ fonksiyonu Hölder şartını sağlar. $\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t)$ ye bağlı olarak $\dfrac{g(t)}{X^{+}(t)}$ fonksiyonunu analitik fonksiyonların sınır değerlerinin farkı ile ifade edilirse

$$\frac{g(t)}{X^{+}(t)}=\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t), \tag{3.3.2}$$

olur. Burada

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z} \tag{3.3.3}$$

dir. Bu durumda sınır şartı aşağıdaki formda yazılabilir

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)}-\Psi^{+}(t)=\frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)}-\Psi^{-}(t) \tag{3.3.4}$$

$\dfrac{\Phi^{-}(z)}{X^{-}(z)}$ fonksiyonu $\chi\geq 0$ için sonsuzda bir kutba ve $\chi<0$ için χ. dereceden bir sıfıra sahiptir.

Teorem: $\chi \geq 0$ olduğu durumda homojen olmayan Riemann problemi keyfi bir serbest terim için çözülebilirdir ve genel çözüm aşağıdaki eşitlikle ifade edilir

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z).P_\chi(z) \tag{3.3.5}$$

burada kanonik fonksiyon $X(z)$ (3.3.3) ile tanımlanmıştır ve $P_\chi(z)$ keyfi kompleks katsayılı χ. dereceden bir polinomdur. Eğer $\chi = -1$ ise homojen olmayan problem yine çözülebilirdir ve tek çözüme sahiptir [10].

χ < -1 olduğu durumda genel olarak homojen olmayan problem çözülebilir değildir. Çözülebilir olması için gerek ve yeter şart problemin serbest teriminin $-\chi - 1$ şartlarını sağlamasıdır $\left(\int_L \frac{g(t)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0(k = 1,2,...,-\chi - 1) \right)$. Eğer bu şartlar sağlanmıyorsa problemin tek çözümü $P(z) \equiv 0$ olmak üzere $\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z} + X(z).P_\chi(z)$ eşitliğidir.

Sonuç olarak, $\chi \geq 0$ için $\Phi^-(\infty) = 0$ şartı altındaki çözüm aşağıdaki formülle ifade edilir

$\Phi(z) = X(z)\left[\Psi(z) + P_{\chi-1}(z)\right]$ (eğer $\chi = 0$ ise $P(z) \equiv 0$ olarak alınır)
(3.3.6)

χ < 0 ise $P(z) \equiv 0$ olmak üzere çözüm daha önce olduğu gibi yine yukarıdaki formülle ifade edilir ve çözülebilirlik için aşağıdaki $-\chi$ şartının sağlanması gereklidir:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0, \qquad (k = 1,2,...,-\chi) \tag{3.3.7}$$

Dolayısıyla, homojen olmayan problemin çözülebilirliği üzerine olan teorem daha simetrik bir formu kabul eder ve lineer olarak χ keyfi sabitlerine bağlıdır:

$\chi \geq 0$ için homojen olmayan problemin genel çözümü lineer olarak χ keyfi sabitlerine bağlıdır.

$\chi < 0$ için çözülebilirlik şartlarının sayısı $-\chi$ 'dir.

$\chi = 0$ için problem mutlak olarak çözülebilirdir ve çözüm tektir.

4. ANALİTİK FONKSİYONLARIN YARI DÜZLEM İÇİN RİEMANN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Problemin Çözümü:

L eğrisinin reel eksende olduğu kabul edilirse Riemann problemi üst ve alt yarı düzlemlerde sırasıyla $\Phi^{+}(z)$ ve $\Phi^{-}(z)$(bölgesel olarak analitik olan $\Phi(z)$ fonksiyonu) analitik fonksiyonlarının bulunmasından oluşur, bu analitik fonksiyonların limit değerleri eğri üzerinde (3.1.3) sınır şartını sağlar.

Verilen G(t) ve g(t) fonksiyonları eğrinin hem sonlu noktalarında hem de sonsuz civarındaki noktalarında Hölder şartını sağlar. Burada $G(t) \neq 0$ olduğu kabul edilir.

Çözüm, sonlu eğridekine benzer olarak elde edilir. Sonlu bir eğrinin durumu ile arasında olan temel fark, burada noktanın sonsuzda olması ve koordinat sisteminin orijin eğrisinin kendi eğrisi üzerinde kalmış olmasıdır ve dolayısıyla, kanonik fonksiyonunun sıfır olmayan bir dereceye sahip olmasına olanak sağlayan istisna bir noktanın alınamamasıdır. Burada L eğrisi boyunca birime eşit indekse sahip olan t yardımcı fonksiyonunun yerine reel eksende aynı özelliğe sahip aşağıda verilen lineer kesir fonksiyonu tanımlanır

$$\frac{t-i}{t+i}, \tag{4.1.1}$$

bu fonksiyonun argümanı

$$\arg\frac{t-i}{t+i} = \arg\frac{(t-i)^2}{t^2+1} = 2\arg(t-i) \tag{4.1.2}$$

dir. Reel eksende pozitif yönde hareket eden t için 2π ile değişir. Böylece,

$$Ind\frac{t-i}{t+i} = 1 \tag{4.1.3}$$

Eğer $IndG(t) = \chi$ ise

$$G(t)\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{-\chi} \tag{4.1.4}$$

indeksi sıfırdır ve logaritması reel eksende tek değerli bir fonksiyondur.

-i istisna noktası için kanonik fonksiyon şu formda oluşturulur

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)}, \qquad X^{-}(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{-\chi} e^{\Gamma^{-}(z)}, \tag{4.1.5}$$

Burada

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \ln\left[\left(\frac{\tau-i}{\tau+i}\right)^{-\chi} G(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau-z} \tag{4.1.6}$$

dir. Bu fonksiyonun limit değeri kullanılarak $\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t) \quad (-\infty \le t \le \infty)$ sınır şartı (3.3.1) ifadesine dönüştürülebilir.

Daha sonra sınır şartını (3.3.4) formuna dönüştürmeyi mümkün kılan

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}, \tag{4.1.7}$$

analitik fonksiyonu tanımlanır.

Sonlu bir eğrideki durumun tersine, burada, genel olarak $\Psi^{-}(\infty) \neq 0$ olduğu gözlemlenir. Analitik tamlama ile ilgili teorem ve ilgili fonksiyonun $z = -i$ noktasında $-\chi$ ($\chi > 0$ için) derecesini aşmayan bir kutup noktası olabileceği dikkate alınırsa, genelleştirilmiş Liouville teoreminden aşağıdaki ifade elde edilir

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \Psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \Psi^-(z) = \frac{P_\chi(z)}{(z+i)^\chi} (\chi \geq 0) \tag{4.1.8}$$

Burada $P_\chi(z)$ derecesi χ'ten büyük olmayan keyfi katsayılı bir polinomdur. Buradan problemin genel çözümü

$$\Phi(z) = X(z)\left[\Psi(z) + \frac{P_\chi(z)}{(z+i)^\chi}\right], \qquad \chi > 0 \text{ için} \tag{4.1.9}$$

$$\Phi(z) = X(z)[\Psi(z) + C], \qquad \chi < 0 \text{ için} \tag{4.1.10}$$

$\chi < 0$ için $X(z)$ fonksiyonu $z = -i$ noktasında $-\chi$ derecesinde bir kutba sahiptir; dolayısıyla, problemin çözülebilir olması için $C = -\Psi^-(-i)$ olarak almalıyız. $\chi < -1$ için aşağıda verilen ek şartların sağlanması gerekir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^k} = 0 \qquad (k = 2,3,\ldots,-\chi) \tag{4.1.11}$$

Böylece, sonlu bir eğri olması durumundakine benzer bir sonuç elde edilmiş oldu.

Teorem: $\chi \geq 0$ için homojen ve homojen olmayan Riemann sınır değer problemleri yarı düzlem için mutlak çözülebilirdir ve çözüm $\chi + 1$ tane keyfi sabite lineer bağımlıdır. $\chi <$ 0 için homojen problem çözümsüzdür. $\chi < 0$ için homojen olmayan problemin çözümü tektir. $\chi = -1$ olması durumunda homojen olmayan problem mutlak çözülebilirdir ve $\chi <$ -1 için eğer $-\chi - 1$ tane ek şart sağlanırsa çözülebilirdir [10].

Sonsuzda basitçe sınırlı olan Riemann problemlerinin çözümlerinin araştırılmasından sonra şimdi de sonsuzda sıfır değeri alan çözümlerin özel bir araştırması yapılacaktır.

Sınır şartları $\Phi^{+}(\infty)=0$ ve $\Phi^{-}(\infty)=0$ olarak değiştirilirse $g(\infty)=0$ elde edilir. Sonuç olarak, Riemann probleminin sonsuzda sıfır değeri alan bir çözüme sahip olabilmesi için, sınır şartının serbest terimlerinin de sonsuzda sıfır değerini alması gerekir. Çözümü elde etmek için (4.1.9) deki P_{χ}'i, $P_{\chi-1}$ ile değiştirmek gerekir ve (4.1.10) bağıntısında da C = 0 olarak alınmalıdır.

Böylece, $\chi \leq 0$ için (4.1.11) formülünde $P_{\chi-1}=0$ olarak alınır.

(4.1.11) bağıntısındaki çözülebilirlik şartları bir şart daha eklenerek tamamlanmış olur, bu şartta $\Psi(i)=0$ dır. Böylece bu şart aşağıdaki formu alır

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)} \frac{d\tau}{(\tau+i)^{k}} = 0 \qquad (k = 2,3,\ldots,-\chi) \qquad (4.1.12)$$

$\chi > 0$ için χ tane keyfi sabite bağlı bir çözüm vardır; $\chi \leq 0$ için çözüm tektir ve $\chi < 0$ olması durumunda çözümün varlığı için gerek ve yeter şart $-\chi$ tane şartın sağlanmasıdır.

5. ARAŞTIRMA BULGULARI

Yarı düzlem için Riemann sınır değer problemleri incelenirken analitik fonksiyonlara değinilmiş, indeks hesabı ve sınır değer problemleri üzerine yapılan çalışmalar öğrenilmiştir.

6.SONUÇ

Tez çalışmasında yarı düzlem için Riemann sınır değer problemlerinin bir üst başlığı olan basit bağlantılı bölgeden, bu bölgede homojen ve homojen olmayan problemlerden ve bu problemlerin kanonik fonksiyonlarından bahsedilmiştir. Konu ile ilgili yapılan diğer çalışmalardan farklı olarak giriş ve ön bilgiler kısımlarında sınır değer problemlerinden ve bunların uygulama alanlarından bahsedilmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1] Boundary value problem, ***Wikipedia***, the free ancyclopedia

[2] B.Riemann, ***Werke-Nachtrage***, Teubner (1892-1902) (Translated from German)

[3] D.Hilbert, "Grünze einer allgemeinen Theorie der linearen integralgleichungen", Chelsea reprint (1953)

[4] I.N.Vekula, ***Trudy Tbil. Matç İnst. Akad.*** Nauk GruzSSR, 11 (1942) pp.109-139

[5] H.Poincaré, "Leçons de mécanique celeste", 3 , Paris (1910)

[6] N.I.Muskhelisvili, "Singular integral equations", ***Wolters-Noordorff*** (1972) (Translated from Russian)

[7] F.D.Gakhov, "Boundary value problems", Pergamon (1966) (Translated from Russian)

[8] B.V.Khevedelidze, ***Trudy Tbil .Mat .İnst. Akad.*** Nauk GruzSSR, 23 (1956) pp.3-158

[9] T.Başkan, Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Bursa (1998)

[10] F.D.Gakhov, Boundary Problems, ***Nauka***, Moskow (1977)

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Ardahan'da doğdu. İlk ve orta okulu Ardahan'da, liseyi Erzincan Fen Lisesinde okudu. 2001 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı ve 2005 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına başladı.

2005 yılından bu yana çeşitli eğitim-öğretim kurumlarında matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.