T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BASİT İRTİBATLI BÖLGELER İÇİN ANALİTİK FONKSİYONLARIN RİEMANN SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

NİSBEL KOÇ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd.Doç.Dr. Nizami MUSTAFA

NİSAN - 2008
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilimdalı Yüksek Lisans öğrencisi Nisbel Koç'un Yrd.Doç.Dr. Mizami MUSTAFA'nın danışmanlığında Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı **"Basit İrtibatlı Bölgeler İçin Analitik Fonksiyonların Riemann Sınır Değer problemleri"** adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı Jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

18/04/ 2008

		Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	:	Prof.Dr.Gabil YAGUBOV	....
Üye	:	Yrd.Dr.Nizami MUSTAFA	....
Üye	:	Yrd.Dr.Gülçin BİLGİCİ	....
Üye	:		....

Bu tezin kabulü Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ……./..…/2008 gün ve ……/….. sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Vahit ALİŞOĞLU

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde, çalışmamız için gerekli temel tanım ve teoremler verilmiştir. Üçüncü ve dördüncü bölümde Riemann sınır değer problemleri ve çeşitleri incelenmiştir. En basit Riemann problemi olan sıçrama problemi, homojen ve homojen olmayan Riemann problemleri ve bu problemlerin çözümlerine yer verilmiştir.

2008, 50 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Cauchy tipi integral, sınır değer problemi, kesikli holomorfik fonksiyon, indis, kanonik fonksiyon, homojen problem, homojen olmayan problem

ABSTRACT

This thesis consists of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. Second chapter of this thesis deals with some basic definitions and theorems which are the main tools used in the subsequent chapters. The third and fourty chapter Riemann boundary value problems and their properties are investiagated. Finally, the jump problem which is the simplest Riemann problem, homogeneous and non-homogeneous Riemann problems are given in detail.

2008, 50 Pages

Keywords: Cauchy type integral, boundary value problems, sectionally holomorphic function, index, canonical function, homogeneous problems, non – homogeneous problems

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam da katkı ve yardımlarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi ve Bölüm Başkanı değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA ve Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Prof. Dr. Gabil YAGUBOV hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam esnasında ve tezin hazırlanma sürecinde değerli fikir ve düşüncelerinden yararlandığım kıymetli arkadaşım Elif ŞANLI AÇIKOL'a, Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Metamatik Bölümü öğretim görevlisi Murat İbrahim YAZAR'a, ve çalışmam boyunca manevi desteğini gördüğüm aileme teşekkürlerimi sunuyorum.

KARS -2008 Nisbel KOÇ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$F^{\pm}(t_0)$: $F(z)$ Cauchy tipi integralin sınır değerleri

$F(t_o)$: Cauchy esas değeri

$H^{\alpha}(L)$: L üzerinde α mertebeden Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı

X : Reel eksen

Z^{+} : Üst yarı-düzlem

Z^{-} : Alt yarı-düzlem

κ : Sınır değer probleminin indisi

$X(z)$: Riemann probleminin kanonik fonksiyonu

R_0 : Sonsuzda sonlu değer alan çözüme sahip Riemann problemi

R_{-1} : Sonsuzda sıfır olan çözüme sahip Riemann problemi

R_m : Sonsuzda en fazla $m.$ mertebeden çözüme sahip Riemann problemi

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>Sayfa No</u>

1.GİRİŞ

Başlangıç değer ve sınır değer problemleri reel ve kompleks diferansiyel denklemler teorisinde uygulama açısından önemli bir yer tutmaktadır. Gerek adi türevli, gerekse kısmi türevli denklemlerde genel çözümün varlığı bilinse bile belli tipten çözümlerin araştırılması ve bunların bazı başlangıç ve sınır değerlerinin sağlanmasının istenmesi fizik, mühendislik ve temel bilimlerde oldukça sık karşılaşılan bir durumdur. Genel olarak Cauchy Problemi olarak isimlendirilen başlangıç ve sınır değer problemlerindeki başlangıç ve sınır koşulları uygulamalarda ortaya çıkar. Örneğin bir bölgenin iç kısmındaki potansiyeli ölçme imkanımız olmayabilir, ancak sınırdaki potansiyel belirlendiğinde belli bir potansiyel denklemini çözüp sınır koşulları uygulanarak iç kısımdaki potansiyeli veren fonksiyonu belirleyebiliriz. Bu ise basit anlamı ile eliptik diferansiyel denklemler için bir sınır değer problemidir [1].

Özellikle sınır değer problemlerinde problemin tanımlı olduğu bölgenin sınırının düzgünlüğü çok önemlidir. Çünkü sınır değer problemlerinin çözümleri için geliştirilen metodlarda integral kavramı kullanılmaktadır. İntegraller ise sınırı düzgün bölgeler için hesaplanabilmektedir. Bu nedenle sınırı düzgün olmayan bölgelerde tanımlanan çeşitli sınır değer problemleri için değişik metodlar geliştirilmiş veya çözümün varlığı ve tekliği için değişik kriterler ortaya konmuş, teoriler geliştirilmiştir [2]. Ayrıca denklemlerin formu değiştikçe sınır değer koşullarının yanında bazı ek koşullar ortaya çıkmaktadır. Ancak en zayıf koşullar altında problemi çözmek temel amaçtır. Sınır değer problemlerindeki zorluklar bölgenin sınırının düzgün olmayışından kaynaklanabileceği gibi denklemin katsayılarının singülerliğinden de ortaya çıkabilir.

Bilindiği gibi bir bölge içinde (sınır hariç)bir diferansiyel denklemi sağlayan ve bölgenin sınırı üzerinde sürekli (problemin özeliğine göre Hölder sürekli) olan çözümün bulunması ya da çözümün varlık ve tekliğinin araştırılması problemine Dirichlet sınır-değer problemi denir. Bu tür problemlerin çözümünün varlık ve tekliğinin araştırılmasında uygun koşullar altında Banach ve Schauder Sabit Nokta Prensipleri kullanılır. Bölgenin sınırı üzerindeki dönme sayısı olan indis kavramına ihtiyaç duyulmaz. Ancak bu tezin temel konusu olan Riemann sınır değer problemlerinin çözümlerinde indis kavramı önem kazanır ve indisin pozitif, negatif tamsayılar veya sıfır olmasına göre aynı problemin çözümünün varlık ve tekliği değişir. Hölder süreklilik ancak bu tür problemlerde önem kazanmaktadır.

Analitik fonksiyonlar için sınır değer problemleri teorisinin en önemli araçlarından birisi Cauchy tipli integrallerdir. Birçok tipten sınır değer problemi, Cauchy tipli integraller kullanılarak çözülebilmiştir.

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}\,dt, \qquad z\notin L$$

Cauchy tipli integrali incelendiğinde $t_0 \in L$ olmak üzere integalin $F^{\pm}(t_0)$ sınır değerleri ne zaman vardır ve nasıl hesaplanır sorusu ile karşılaşılır. I.Plemelj, L parçalı düzgün kapalı bir eğri olmak üzere, $f(t)\in H^{\alpha}(L)$ iken sınır değerlerinin varlığını göstermiştir. I.I.Privalov, $f(t)\in H^{\alpha}(L)$ iken $F(z)$ Cauchy tipli integralinin ve $F^{\pm}(t_0)$ sınır değerlerinin de H sınıfına ait olduğunu ispatlamıştır [3].

Riemann problemi ilk olarak D.Hilbert tarafından göz önüne alındığı için bazı yazarlar bu problemi Hilbert problemi olarak adlandırırlar. L basit kapalı düzgün bir eğri; $\Phi(z)$, L nin dışında her yerde analitik; $g(t)$ ve $G(t)$ L üzerinde verilmiş Hölder sürekli fonksiyonlar olmak üzere

$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)$ (homojen hal)

$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+g(t)$ (homojen olmayan hal)

özelliğini sağlayan $\Phi(z)$ analitik fonksiyonunun bulunması problemine Riemann Problemi denir. Burada $\Phi^{+}(t)$ ve $\Phi^{-}(t)$ fonksiyonları D^{+}, D bölgesinin iç kısmı, D^{-} dış kısmı olarak tanımlanır.

$a(s), b(s), c(s)$ reel fonksiyonları aynı L eğrisi üzerinde tanımlanmış Hölder -sürekli fonksiyonlar olmak üzere D^{+} da analitik ve L üzerinde

$$a(s)u(s) + b(s)v(s) = c(s), \qquad 0 \le s \le 1$$

bağıntısını sağlayan $f = u + iv$ analitik fonksiyonunun bulunması problemine ise Hilbert Sınır-Değer Problemi denir [4]. Bu tür problemlerdeki sınır verileri, genellikle uygulamalardan direkt olarak ortaya çıkan sınır koşullarıdır.

Fakat Hilbert problemi çok özel koşullar altında incelemiş, üstelik oldukça karmaşık yöntemler kullanarak onu Fredholm integral denklemine dönüştürmüştür. Plemelj, Cauchy tipli integraller yardımı ile oldukça basit olarak homojen Riemann probleminin tam çözümünü vermiştir. Aynı problem, E.Picard tarafından iki integral denklem inşa edilerek incelenmiştir. Onların ilki, ikinci tipten bir Fredholm integral denklemi diğeri ise singüler integral denklemidir; bu denklemleri araştırmamış daha sonra onlarla ilgisi olmayan Plemelj'in çözümü ile aynı olan basit bir çözüm aktarmıştır.

Genel çözüm, ilk olarak F.D.Gakhov tarafından verilmiştir. Bu çözüm bazı basitleştirme ve genelleştirmelerle üçüncü bölümde yer almaktadır. Gakhov 'da, sadece, L nin bir tek kapalı eğri olduğu durumu dikkate alınmıştır; genel durumu ise, yani, L nin birden fazla kapalı eğrilerden oluşması durumunu B.V.Khvedelidze incelemiştir.

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \qquad t \in L$$

Homojen olmayan Riemann Problemi ilk olarak Privalov tarafından göz önüne alınmıştır. L yi düzgün kapalı bir eğri, G ile g yi Lebesque anlamında integrallenebilir fonksiyonlar ve $0 \langle m \langle |G(t)| \langle M$ almıştır. Bununla beraber, Picard'ın incelediği homojen problemin çözüm yöntemini kullanmış ve tam bir çözüm elde edememiştir. Problemin çözümünü ilk olarak Gakhov yapmıştır. Söz konusu çözüm bazı genelleştirmelerle 3. ve 4. bölümde yer almaktadır. Gakhov'un incelediği L nin bir tek kapalı eğri olması durumunu Khvedelidze genelleştirmiştir. Ayrıca Privalov, ve Gakhov'dan sonra T.Carlemen söz konusu probleme benzer bir problemi (özel durum için) çözmüştür. Gakhov ve Carlemen'in çözüm yöntemleri aslında aynıdır.

Hilbert Problemi, reel ve imajiner kısımlarının limit değerleri arasında verilen bir bağıntı ile bir bölgede analitik olan bir fonksiyonun bulunmasıdır. Bu problem, ilk defa B.Riemann'ın meşhur makalesinde ifade edilmiş ve Hilbert tarafından çalışılmıştır. Bu yüzden Riemann-Hilbert Problemi de denmektedir. Başlangıçta, Hilbert singüler integral denklemlerin bir uygulamasını vermek için problemi böyle denklemler tipine indirgemiştir. Sonra, iki Dirichlet probleminin çözümüne çok basit olarak uygulanabileceğini görmüştür. Problemin tüm araştırmaları ve kullanılan çözüm yöntemleri, I.N.Vekua'nın makalesinde yer almaktadır [5].

Sınırı düzgün olmayan bölgelerde Dirichlet Problemlerini çözümleri genelde yoktur. Çünkü çözümler sınır integralleri ile ifade edilmektedir. Bölgenin sınırı düzgün olmadığı zaman genelleştirilmiş anlamda çeşitli regülerlik kriterleri verilmektedir. Örneğin bir dikdörtgenin çevresi klasik anlamda düzgün olmadığı halde Vekua'nın geliştirdiği bir kritere göre dikdörtgenin çevresi düzgündür. Problemlerin çözümlerinin bulunuşunu, çözümlerin varlık ve tekliğini araştırmak için çeşitli regülerlik kriterlerinden biride Wiener anlamında regülerlikdir [6]. Ayrıca analitik fonksiyonların periyodik Riemann sınır değer problemlerinin yaklaşık çözümü Heinric Begehr tarafından çalışılmıştır [7].

Dirichlet probleminin matematiksel fizik ve mühendislik alanlarında geniş uygulamaları mevcuttur. Elektrostatik (elektrostatiğin temel problemi), hidrodinamik gibi dallarda Dirichlet probleminin tipleri ile karşılaşılmıştır. Ayrıca, elastikliğin düz statik teorisinde uygulamaya sahip olan elastik yarı düzlem için birinci, ikinci ve birleşik problemler, sürtünmesiz bir elastik yarı düzlemin sınırında katı pulun basınç problemi, sürtünmeli bir elastik yarı düzlemin sınırında bir katı pulun dengesi problemi, iki elastik zeminin birbiriyle teması problemi (Hertz' ingenelleştirilmiş düzlem problemi) ile hidrodinamik, elastik teori ve matematiksel fiziğin diğer alanlarında karşılaşılan süreksiz katsayılar için Hilbert problemi önemli problemlerdendir.

Bu çalışma içerik bakımından dört bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde çalışmamızda gerekli temel tanım ve teoremler verilmiş ve analitik fonksiyonların sınır değer koşulları ile sıçrama problemi tanımlanmış, üçüncü ve dördüncü bölümde ise Riemann sınır değer problemleri ve çeşitleri tanıtılarak çözümleri araştırılmıştır.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1. Kompleks Düzlemde Eğri Ve Bölge

Tanım 2.1.1: $C=\{z=x+iy : x,y\in R\ \}$ kompleks düzleminde (x,y) dik koordinat sistemi verilsin.

a) $[a,b\subset R]$ olmak üzere sürekli bir, $\varphi:[a,b\ ]\to C$, $\varphi(t)=x(t)+iy(t)$ fonksiyonuna C düzleminde bir eğri denir. Burada $\varphi(a),\varphi(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

b) Bir φ eğrisi verildiğinde $\varphi(a)=\varphi(b)$ ise, φ ye kapalı eğri denir.

c) Bir φ eğrisi verildiğinde her $t\in[a,b]$ için $\varphi^{'}(t)=x^{'}(t)+iy^{'}(t)$ türevi ($t=a$ için $\varphi^{'}(a^{+})$ sağ ve $t=b$ için $\varphi^{'}(b^{-})$ sol türevleri) var ve sürekli ise φ diferensiyellenebilir bir eğridir denir.

d) φ diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer $\forall t\in[a,b]$ için $\varphi^{'}(t)\neq 0$ (veya $\forall t\in[a,b]$ için $(x^{'}(t))^{2}+(y^{'}(t))^{2}\rangle 0$) ise φ ye düzgün eğri denir.

e) Bir φ eğrisi sadece $t_1=t_2$ için $\varphi(t_1)=\varphi(t_2)$ oluyorsa φ ye basit eğri denir. Tanımından görülüyor ki basit eğri kendisini kesmeyen eğridir. Basit eğrilere Jordan eğrileri de denir, φ basit bir eğri ve $\varphi(a)=\varphi(b)$ ise φ ye kapalı basit eğri (Kapalı Jordan eğri) adı verilir.

f) Bir $\varphi:[a,b]\to C,\varphi(t)=x(t)+iy(t),t\in[a,b]$ eğrisi verilsin. Eğer, eğri üzerindeki noktalar $\varphi(a)$ dan başlamak üzere t nin artışına karşılık geliş sırasına göre taranırsa, φ üzerinde pozitif yönde dönülmüş olur. Eğer, φ kapalı eğri ise bu eğri üzerinde hareket ettiğimiz zaman φ eğrisinin sınırladığı sınırlı bölge solda (sağda) kalıyorsa φ eğrisi pozitif yönlüdür denir [8].

$z_0\in C$ noktası ve $\varepsilon\rangle 0$ sayısı verilsin. $U_{\varepsilon}(z_0)=\{z\in C:|z-z_0|\langle\varepsilon\}$ kümesine z_0 ın $\varepsilon-$ komşuluğu, $U_{\varepsilon}(z_0)=U_{\varepsilon}(z_0)/\{z_0\}$ kümesine de z_0 ın delinmiş $\varepsilon-$komşuluğu denir(18).

Tanım 2.1.2: Bir $D \subset C$ kümesi verildiğinde $\forall z \in D$ için $|z| \langle R$ olacak şekilde bir $R \rangle 0$ sayısı varsa, D ye sınırlı küme denir.

$z_0 \in D$ noktası verildiğinde, $U_\varepsilon(z_0) \subset D$ olacak şekilde bir $\varepsilon \rangle 0$ sayısı varsa z_0 noktasına D nin iç noktası denir.

$z_0 \notin D$ noktasının $U_\varepsilon(z_0) \cup D = \emptyset$ olacak şekilde bir komşuluğu varsa z_0 noktasına D nin dış noktası denir.

$z_n \in D(n \in N)$ olmak üzere yakınsak her (z_n) dizisinin limiti D nin bir limit noktası adını alır.

D kümesine ait noktalar sadece iç noktalar ise D ye açık küme, D kümesi limit noktalarının hepsini içeriyorsa D ye kapalı küme adı verilir.

a) Bir $D \subset C$ kümesinin içindeki her P noktasını her $Q \in D$ noktasına, kümenin dışına taşmayan bir çizgiyle birleştirme olanağı varsa, D ye irtibatlı (veya bağımlı) küme denir. İrtibatlı bir küme içindeki P noktasını Q noktasına birleştiren bütün çizgiler sürekli kaydırmalarla, kümenin dışına taşmadan üst üste getirilebiliyorsa ve bu özellik her (P,Q) nokta çifti için varsa, söz konusu küme basit irtibatlı (basit bağımlı) küme adını alır.

b) Açık ve irtibatlı $D \subset C$ kümesine bir bölge, açık ve basit irtibatlı $D \subset C$ kümesine de basit irtibatlı bölge adı verilir.

φ, C kompleks düzleminde herhangi bir kapalı Jordan eğrisi olsun. Jordan teoremi gereğince, bu eğri kompleks düzlemini, $z = \infty$ noktasını içermeyen iç D^+ ve $z = \infty$ noktasını içeren dış D^- bölgeleri olmak üzere ikiye böler. Buna göre $C = D^+ \cup \varphi \cup D^-$ dir. Biz φ üzerindeki yönün (aksi söylenmedikçe), her zaman D^+ bölgesini sol tarafta bırakacak biçimde, yani φ üzerindeki pozitif yönü, seçeceğiz. φ üzerinde pozitif yönün seçildiğini açıkça belirtmek istediğimizde φ yi φ^+ şeklinde yazacağız [8-9].

2.2. Hölder Koşulunu Sağlayan Fonksiyonlar Sınıfı

Tanım 2.2.1: C kompleks düzleminde herhangi bir kapalı φ Jordan eğrisi ve $\lambda : \varphi \to C$ fonksiyonu verilsin. Eğer, herhangi $t_1, t_2 \in \varphi$ için

$$\left|\lambda(t_1) - \lambda(t_2)\right| \leq K\left|t_1 - t_2\right|^{\alpha} \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $K \rangle 0$ ve $0 \langle \alpha \leq 1$ sayıları varsa, $\lambda(t)$ fonksiyonunu φ üzerinde K sabiti ve α üssü ile Hölder koşulunu sağlar diyecek ve bunu $\lambda \in KH_{\alpha}(\varphi)$ (yada $\lambda \in H_{\alpha}(\varphi)$) şeklinde göstereceğiz.

Uyarı(1): $C(\varphi), \varphi$ üzerinde sürekli bütün fonksiyonlar kümesi olsun. $H_{\alpha}(\varphi) \subset C(\varphi)$ olduğu açıktır.

uyarı(2): $\alpha \rangle 1$ halinde (2.1) bağıntısı, apaçık bir biçimde $\lambda(t)$ nin φ üzerinde türevlenebilir ve $\lambda^{'}(t) \equiv 0$ (yani φ üzerinde $\lambda(t) \equiv sabit$) olduğunu gösterir. $\alpha = 1$ ise $H_{\alpha}(\varphi)$ sınıfı φ üzerinde sabit fonksiyonlar kümesidir. Buna göre her zaman $0 \langle \alpha \leq 1$ olduğunu varsayacağız. $\alpha = 1$ hali, özel olarak Lipschitz koşulu olarak da isimlendirilmektedir [8].

Tanım 2.2.2: $\lambda : \varphi \to C$ $n.$ mertebeden türevlenebilir fonksiyon olsun $n \in N$. Eğer $\lambda^{n}(t) \in H_{\alpha}(\varphi)$ ise, $\lambda(t)$ fonksiyonu φ üzerinde $H_{\alpha}^{(n)}(\varphi)$ sınıfındandır diyeceğiz .

$$\left(H_{\alpha}^{0}(\varphi) = H_{\varphi}(\varphi)\right)$$

Hölder sınıfından olan fonksiyonların bazı özelliklerini verelim. φ C nin de herhangi bir Jordan eğrisi olduğunu varsayalım.

1. Özellik: Eğer $0 \langle \beta \leq \alpha \langle 1$ ise $H_{\alpha}(\varphi) \subset H_{\beta}(\varphi)$ dir.

2. Özellik: Eğer $\lambda : \varphi \to C, \psi : \varphi \to C$ ve $\lambda \in H_{\alpha_1}(\varphi), \psi \in H_{\alpha_2}(\varphi)$ ise $(\lambda \pm \psi)(t) = \lambda(t) \pm \psi(t)$, $(\lambda . \psi)(t) = \lambda(t) . \psi(t)$, her $t \in \varphi$ için $\varphi(t) \neq 0$ olduğunda

$(\lambda/\psi)(t)=\lambda(t)/\psi(t)$ fonksiyonları α = min(α_1,α_2) olmak üzere $H_\alpha(\varphi)$ sınıfındandır.

3. *Özellik:* $t=t(s)$, $s\in[\alpha,\beta]$ fonksiyonu $H_\alpha([\alpha,\beta])$ sınıfından, 0<α≤1 ve $\lambda : t([\alpha,\beta])\to C$ fonksiyonu $t([\alpha,\beta])$ üzerinde $H_\beta, 0\langle\beta\le 1$ sınıfındansa, $Q:([\alpha,\beta])\to C$ fonksiyonu $Q(s)=\lambda(t(s)), s\in[\alpha,\beta]$ bileşik fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ üzerinde $H_{\alpha\beta}$ sınıfındandır.

4. *Özellik:* t ve t_0 noktaları φ eğrisi üzerinde sırasıyla değişken ve sabit noktalar olsunlar. $\lambda(t)=|t-t_0|^\alpha, 0\langle\alpha\le 1$ fonksiyonu $H_\alpha(\varphi)$ sınıfındandır [8].

Teorem 2.2.1: φ, C üzerinde herhangi bir kapalı Jordan eğrisi olsun. $H_\alpha(\varphi)$ vektör uzayı $\lambda\in H_\alpha(\varphi)$ için; $\|\lambda\|_{C(\varphi)}=\max\{|\lambda(t)| : t\in\varphi\}$ ve olmak üzere $\|\lambda\|_\alpha=\|\lambda\|_{C(\varphi)}+H(\lambda,\alpha)$ normuna göre bir Banach uzayıdır [4].

2.3. Analitik Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1: Bir $B\subset C$ bölgesinde tanımlı $f : B\to C$ fonksiyonu bu bölge üzerinde sürekli bir türeve sahip (yani $f^{'}(z)\in C(B)$) ise, bu fonksiyon söz konusu bölge üzerinde analitiktir(regülerdir) denir. $B\subset C$ bölgesi üzerinde analitik bütün fonksiyonlar kümesini $A(B)$ ile göstereceğiz [8].

Tanım 2.3.2: Bir $f : C\to C$ fonksiyonu $z_0\in C$ noktasının bir $U_\varepsilon(z_0)$ komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının herhangi bir $U_\delta(z_0), \delta\le\varepsilon$ komşuluğunda düzgün yakınsak bir $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ serisi şeklinde gösterilebiliyorsa, $f(z)$ fonksiyonuna z_0 noktasında analitik bir fonksiyon denir. Kompleks düzlemin her bir noktasında analitik fonksiyona tam fonksiyon denir. İleride B nin C de bir bölge olduğunu varsayacağız [8].

Teorem 2.3.1: $f : B \to C$ fonksiyonunun $z_0 \in B$ noktasında analitik olması, onun z_0 noktasında diferansiyellenebilir olmasıdır.

Uyarı: Bir $f : B \to C$ fonksiyonunun $z_0 \in B$ noktasında analitik olması için onun z_0 noktasında diferansiyellenebilir olması yeterli değildir [8].

Tanım 2.3.3: Bir $f : C \to C$ fonksiyonu, $z_0 = \infty$ noktasının bir $U_\varepsilon(\infty) = \{z \in C : |z| \rangle \varepsilon\} \varepsilon \rangle 0$ komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer, $f(z)$ fonksiyonu $U_\delta(\infty) \subset U_\varepsilon(\infty), \delta \geq \varepsilon$ komşuluğunda yakınsak $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{-n}$ serisi şeklinde gösterilebiliyorsa, $f(z)$ fonksiyonu $z_0 = \infty$ noktasında analitiktir denir [8].

Teorem 2.3.2: Bir $f : C \to C$ fonksiyonunun $z_0 = \infty$ noktasında analitik olması için gerekli ve yeterli koşul $\phi(\xi) = f(1/\xi)$ fonksiyonunun $\xi_0 = 0$ noktasında analitik olmasıdır.

Bir kompleks fonksiyonun analitikliği için yeterli koşullar veren aşağıdaki üç teoremi verelim [8].

Teorem 2.3.3(Morera Teoremi): $f : C \to C$ fonksiyonu basit irtibatlı bir $B \subset C$ bölgesinde tanımlı ve B üzerinde sürekli olsun. Eğer, $f(z)$ fonksiyonunun B bölgesinin içinde kalan her kapalı Jordan eğrisi üzerinde integrali sıfırsa, $f(z)$, B üzerinde analitiktir [8].

Teorem 2.3.4(Weierstrass Teoremi): $f_n(z)$, $n \in N$ fonksiyonları bir $B \subset C$ bölgesinde analitik ve $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ serisi B içinde kalan her kapalı bölge üzerinde düzgün yakınsaksa, $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ tanımıyla $f(z)$, B üzerinde analitiktir [8].

Teorem 2.3.5(Cauchy-Riemann Teoremi): $f : B \to C$ fonksiyonunun B üzerinde analitik olması için gerekli ve yeterli koşul, bu fonksiyonun reel u ve sanal v kısımlarının bu bölge üzerinde birinci dereceden sürekli, $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} ve \frac{\partial v}{\partial y}$ kısmi türevlerine sahip olması ve bu türevlerin Cauchy - Riemann diferensiyel denklemler sistemi adı verilen:

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ sistemini sağlamasıdır.

Analitik fonksiyonların bazı özelliklerini verelim:

1. Bir noktada analitik fonksiyon bu noktanın belirli bir komşuluğunun her bir noktasında analitiktir.

2. $f \in A(B)$ ve $g \in A(B)$ ise

a) $\forall \alpha, \beta \in C$ için $\alpha f(z) + \beta g(z) \in A(B)$ dir.

b) $f \in a(B), g \in A(B)$ ve $\forall z \in B$ için $g(z) \neq 0$ ise

$f(z)g(z), \frac{f(z)}{g(z)} \in A(B)$ dir.

3. $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n1} + ... + a_1 z + a_0$

($a_0, a_1, ..., a_n \in C$ sabit katsayılar ve $z \in \mathrm{C}$) polinomu bir tam fonksiyondur.

4. İki analitik fonksiyonun bileşkesi de analitik bir fonksiyondur.

5. Analitik fonksiyon her mertebeden diferensiyellenebilirdir.

6. Basit irtibatlı bölge üzerinde analitik fonksiyonun ilkel fonksiyonu ve türevi de analitiktir.

7. $\mathrm{U}_\varepsilon(\mathrm{z}_0)$ üzerinde analitik $f(z)$ fonksiyonu $\mathrm{U}_\varepsilon(\mathrm{z}_0)$ üzerinde yakınsak

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0) \qquad \left(f^{(0)}(z_0) = f(z_0)\right)$$

Taylor serisinin toplamı şeklinde gösterilebilir.

8. Bir $z_0 \neq \infty$ noktasının bu noktada analitik f fonksiyonunun m. dereceden

sıfırı olması için gerekli ve yeterli koşul $h(z)$, $z = z_0$ noktasında analitik ve $h(z_0) \neq 0$ olmak üzere $f(z) = (z - z_0)^m h(z)$ şeklinde yazılabilmesidir.

9. Eğer $z_0 \neq \infty$ noktası, bu noktada analitik bir f fonksiyonunun *m.* mertebeden sıfırı ise, z_0 noktası $F(z) = [f(z)]^p$ $(p \in N)$ fonksiyonunun *mp.* Dereceden sıfırıdır.

10. $f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(z_0)$ komşuluğunda analitik, fakat bizzat $z = z_0$ noktasında analitik değil ise, bu noktaya $f(z)$ fonksiyonunun izole

singüler (ayrık tekil) noktası adı verilir.

11. Eğer $z = z_0$ noktası komşuluğunda *f* nin Laurent serisi $a_{-n} \neq 0$ $n \in N$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{a_{-n}}{(z - z_0)} + \dfrac{a_{-n+1}}{(z - z_o)^{n+1}} + \ldots$

şeklinde ise, $z = z_0$ noktası $f(z)$ nin *n.* mertebeden bir kutbudur denir. Bu halde

$(z - z_0)^m f(z)$ fonksiyonu artık $z = z_0$ noktası komşuluğunda analitiktir.

12. Eğer, C de tanımlı bir fonksiyonun, C nin her sonlu bölgesindeki singüler noktaları yalnızca kutuplardan oluşuyorsa, bu fonksiyon meromorfiktir denir [8-9].

Teorem 2.3.6(LiouvilleTeoremi): $f : C \to C$ fonksiyonu $a_0 = \infty, a_k \in C$ $(k \in \{1,\ldots,n\})$ kutup noktaları hariç C üzerinde analitik bir fonksiyon ve f nin bu kutup noktalar komşuluğunda Laurent serisinin esas kısmı sırasıyla:

$z = a_0$ için:

$$G_0(z) = c_1^0 z + c_2^0 z^2 + \ldots + c_{n_0}^0 z^{n_0}$$

$z = a_k$ için:

$$G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right) = \frac{c_1^k}{z-a_k} + \frac{c_2^k}{(z-a_k)^2} + \ldots + \frac{c_{m_k}^k}{(z-a_k)^{m_k}} \qquad (k \in \{1,\ldots,n\})$$

olsun o halde $f(z)$ fonksiyonu:

$$f(z) = e + G_0(z) + \sum_{k=1}^{n} G_k\left(\frac{1}{z-a_k}\right)$$

şeklinde yazılabilir [8].

Sonuç 2.3.1: Bir $f : C \to C$ fonksiyonu bütün düzlemde sınırlı ve sonlu her bölgede analitik ise, bir sabitten ibarettir. Üstelik $f(\infty) = 0$ ise *C* üzerinde $f(z) = 0$ dır.

Sonuç 2.3.2: Bir $f : C \to C$ fonksiyonu C üzerinde analitik ve $z = \infty$ noktası bu fonksiyonun m. mertebeden kutup noktası ise, $f(z)$ m. dereceden bir polinomdur:
$f(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_m z^m$

Tanım 2.3.4(Analitik Devam Prensibi): $\mathrm{B}_1 \subset \mathrm{C}$ ve $\mathrm{B}_2 \subset \mathrm{C}$ bölgelerinin arakesiti düzgün bir λ eğrisi olsun. B_1 de analitik olan bir $f_1(z)$ fonksiyonu ve B_2 de analitik olan bir $f_2(z)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Eğer her $t \in \lambda$ için

$$f_1(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in B_1}} f(z) \text{ ve } f_2(t) = \lim_{\substack{z \to t \\ z \in B_2}} f(z)$$

limitleri λ üzerinde sürekli ve eşit ise $f_2(z)$ fonksiyonu $f_1(z)$ fonksiyonunun (ya da $f_1(z)$ fonksiyonu $f_2(z)$ fonksiyonunun) λ üzerinden B_2 ye (B_1 e) analitik devamıdır denilir [8].

2.4. İndis (İndeks) ve Onun Bazı Özellikleri

λ, C de kapalı düzgün Jordan eğrisi ve $G:\lambda \to C$, λ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve $\forall t \in \lambda$ için $G(t) \neq 0$ olsun .

Tanım 2.4.1: t noktası λ üzerinde pozitif yönde bir tam dönüş yaptığında $G(t)$ nin argümentinin aldığı artımın 2π ye bölümü $G(t)$ nin λ ya göre indisi olarak adlandırılır ve *indG* ile gösterilir:

$$\dot{I}ndG(\mathrm{t}) = \frac{1}{2\pi}[G(t)]_\lambda \tag{2.2}$$

$\ln \mathrm{G(t)} = \ln|G(t)| + i \arg G(t)$ olduğundan ve λ üzerinde pozitif yönde bir tam dönüş yapıldığında $|G(t)|$ fonksiyonu kendi başlangıç değerine döndüğünden $[\ln G(t)]_\lambda = i[\arg G(t)]_\lambda$, dolayısıyla

$$indG = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_\lambda = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_\lambda \tag{2.3}$$

dır. G, λ üzerinde sürekli olduğundan bu eğrinin G(λ) görüntüsünde kapalı bir eğri ve λ üzerinde pozitif yönde bir tam dönüş yapıldığında $G(t)$ nin argüment artımı 2π nin bir katı olacağından *ind*G, ya sıfırdır ya da (pozitif veya negatif) bir tam sayıdır.

İndisin bazı özelliklerini verelim. Burada, λ nın C düzleminde kapalı ve düzgün bir Jordan eğrisi, D^+ ve D^- nin de sırasıyla λ ile sınırlı iç ve dış bölgeler olduğunu düşüneceğiz.

1. $G:\lambda \to C$ fonksiyonu λ üzerinde diferensiyellenebilir ve D^+ da analitik ve $D^+ \cup \lambda$ üzerinde sürekli veya D^- de analitik ve $D^- \cup \lambda$ üzerinde sürekli olan bir fonksiyonun λ üzerindeki limit değeri ise,

$$indG = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda} d\left(\ln G(t)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\lambda} \frac{G^{'}(t)}{G(t)}dt \tag{2.4}$$

2. G_1 ve G_2 fonksiyonları λ üzerinde sürekli ve sıfırdan farklı değerler alan fonksiyonlar ise,

$$ind\left(G_1.G_2\right) = indG_1 + indG_2$$

$$ind\left(G_1 / G_2\right) = indG_1 - indG_2$$

elde edilir.

3. Sıfırları katlılıkları kadar farklı düşündüğümüzde;

a) D^+ da analitik ve $D^+ \cup \lambda$ üzerinde sürekli olan bir $G^+(z)$ fonksiyonunun D^+ daki sıfırlarının sayısı n ise $indG = n$ dir.

b) D^- de analitik ve $D^- \cup \lambda$ üzerinde sürekli olan bir $G^-(z)$ fonksiyonunun D^- deki sıfırlarının sayısı n ise, $indG = -n$ dir.

c) G^+, D^+ da analitik ve $D^+ \cup \lambda$ üzerinde sürekli, G^-, D^- de analitik ve $D^- \cup \lambda$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olsun; G^+ nın D^+ da n_+ tane, G^- nin D^- de n_- tane sıfırı bulunduğunda $ind\left(G^+ / G^-\right) = n_+ + n_- \geq 0$. Buradan $ind\left(G^+ / G^-\right) = 0$ olması için $n_+ = n_- = 0$ olması gerekir.

d) $G(z)$ nin D^+ daki singülerlikleri sadece p-tane kutup noktasından ibaret olsun (Kutuplar katlılıkları kadar farklı düşünülüyor). Bu halde, $indG = n - p$ dir. Buradaki n, $G(z)$ nin D^+ daki sıfırlarının sayısıdır [4].

2.5. İndisin (İndeksin) Hesaplanması

$t = t_1(s) + it_2(s) \quad (0 \le s \le \ell)$

L eğrisinin denklemi olsun. Kompleks koordinat t ifadesini $G(t)$ fonksiyonu ile değiştirirsek

$$G(t) = G[t_1(s) + it_2(s)] = \eta(s) + i\xi(s). \tag{2.5}$$

ifadesini elde ederiz. η, ξ yı kartezyen koordinat olarak kabul edeceğiz. Böylece

$$\eta = \eta(s), \qquad \xi = \xi(s)$$

bir Γ eğrisinin parametrik denklemini ifade eder. $G(t)$ fonksiyonunun sürekliliği ve L eğrisinin kapalı olduğu göz önüne alınırsa Γ eğrisi de kapalı olacaktır [4].

Orijin etrafındaki Γ eğrisinin spirallerinin sayısı, başka bir ifadeyle s değişkeni 0' dan ℓ' ye değişirken pozisyon vektörünün tam devrinin sayısı, açıkça, $G(t)$ fonksiyonunun indeksi olacaktır. Bu sayı bazen koordinat sisteminin orijinine göre Γ eğrisinin derecesi olarak adlandırılır.

Eğer, Γ eğrisi gerçekten de kurulabilirse, spirallerin sayısı direkt olarak bulunabilir. Γ eğrisinin formu gereğince indeksin belirlenebileceği bir çok örnekten bahsetmek mümkündür. Örneğin, eğer $G(t)$ fonksiyonu reel veya imajinali sıfır olan fonksiyon ise bu durumda $\Gamma(t)$ bir doğru parçasıdır (çift sayı kez hareket etmiş) ve $G(t)$ 'nin indeksi sıfırdır. Eğer, reel kısım $\eta(s)$ veya imajinal kısım $\xi(s)$ işaret değiştirmiyorsa, bu da indeksin yine sıfır olduğunun bir kanıtıdır. Eğer, $G(t)$ fonksiyonu eğrinin içinde veya dışında analitik olan fonksiyonların limit değerlerini teşkil eden fonksiyonların bir çarpımı veya bölümü ise bu durumda indeks 2,3,4 özellikleri dikkate alınarak hesaplanır.

Genel durumda indeks (2.2) formülü kullanılarak hesaplanır. Formül (2.4) uygulanırsa formül (2.5) gereğince,

$$d \arg G(t) = d \arctan \frac{\eta(s)}{\xi(s)}$$

ifadesini elde ederiz.

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\xi d\eta - \eta d\xi}{\xi^2 + \eta^2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\xi(s)\eta'(s) - \eta(s)\xi'(s)}{\xi^2(s) + \eta^2(s)} ds. \tag{2.6}$$

Bazı basit durumlarda, indeksi hesaplamak için cebirsel bir algoritma oluşturmak mümkündür.

İndeks kavramı açık eğri L' ye, ve bunun yanında $G(t)$ fonksiyonunun süreksiz olduğu veya sıfır değeri aldığı noktalar olması durumlarına da genişletilebilir.

Hatırlatma: Eğer, $G(t)$ analitik bir fonksiyonun sınır değeri ise, indeksi değiştirmeksizin, indeks geniş bir oranda çeşitli olabilir. Açıkçası, eğrinin deformasyonu ikinci (takip eden) indeksin $G(t)$ fonksiyonunun bir sıfır yada kutup noktasından geçmesi şeklinde ise indeks her zaman değişecektir.

Örnek 2.5.1: $G(t) = t^n$ fonksiyonunun orijini içeren herhangi λ kapalı ve düzgün Jordan eğrisine göre indislerini hesaplayalım.

I.Yol: t^n fonksiyonu D^+ da analitik ve n katlı sıfıra sahip t^n fonksiyonunun λ üzerinde limit değeri olduğundan $ind t^n = n$ dir.

II.Yol: $\arg t^n = n\varphi$ olacağından

$$ind t^n = \frac{1}{2\pi} \left[\arg t^n\right]_\lambda = \frac{1}{2\pi} 2\pi n = n \text{ bulunur.}$$

İndeks yüksek hızlı bilgisayarlarda nümerik metotlarla da hesaplanabilir. İndeks tam sayı olduğundan dolayı, ½ civarındaki herhangi bir yaklaşımın en yakın tamsayıya yuvarlanması kesin değeri verir.

İndeksi hesaplamanın nümerik metotlarından birini şimdi tanımlayacağız. L eğrisinin denklemini belirleyen s parametresinin değişiminin $[0,l]$ aralığını $s_0 = 0, s_1, s_2, ..., s_n = I$ noktalarında n eşit parçaya bölelim. Sonuç olarak L eğrisinin kendisi ve L' nin görüntüsü olan Γ eğrisi $G(t)$ fonksiyonu ile n tane yay 'a bölünmüş olacak. $(\xi_{i-1}, \eta_{i-1}), (\xi_i, \eta_i)$ bitiş noktaları koordinatları olmak üzere γ_i, Γ eğrisinin yukarıda tanımlandığı şekliyle herhangi bir yay'ı olsun. Burada, $\xi_i = \xi_i(s)$ ve $\eta_i = \eta_i(s)$ dir. γ_i yayının bitiş noktalarının pozisyon vektörleri arasındaki açıyı $\Delta\varphi_i$ ile göstereceğiz. Bu durumda (2.5.1) örneğinden,

$$\chi = \mathrm{IndG(t)} = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\Delta\varphi_i$$

yazılır.Yeterince büyük n için

$$\Delta\varphi_i \approx \sin\Delta\varphi_i = \frac{\xi_i\eta_{i-1} - \xi_{i-1}\eta_i}{\sqrt{\left(\xi_{i-1}^2 + \eta_{i-1}^2\right)}\sqrt{\left(\xi_i^2 + \eta_i^2\right)}},$$

ve dolayısıyla R_n hata olmak üzere,

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i\eta_{i-1} - \xi_{i-1}\eta_i}{\sqrt{\left(\xi_{i-1}^2 + \eta_{i-1}^2\right)}\sqrt{\left(\xi_i^2 + \eta_i^2\right)}} + R_n .$$

Kolayca gösterilebilir ki eğer, $G(t)$ fonksiyonu β indeksi ile Hölder şartını sağlarken $t_1(s)$ ve $t_2(s)$ fonksiyonları, L eğrisinin denkleminde ise, α indeksi ile Hölder şartını sağlıyorsa bu durumda C sabit olmak üzere,

$$\left|R_n\right| < \frac{C}{n^{3\alpha\beta-1}} \text{ olur.}$$

Bu nedenle, eğer, $\alpha.\beta > 1/3$ ve $n \to \infty$ ise bu durumda $R_n \to 0$ dır. Böylece, programlama için uygun bir formül elde ederiz:

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{\xi_i\eta_{i-1} - \xi_{i-1}\eta_i}{\sqrt{\left(\xi_{i-1}^2 + \eta_{i-1}^2\right)}\sqrt{\left(\xi_i^2 + \eta_i^2\right)}}. \tag{2.7}$$

Bu formülün kullanımı ile ilgili olarak U.S.S.R. (Sovyet) daki "strela" bilgisayarı tarafından hesaplanan bir örneği verelim. Fonksiyonun indeksi için

$$w = u + iv = \sin\frac{\pi}{2}(x+y) - \frac{9}{8(x^2 + y^2 + x) + 1} + i(x-y)$$

Birim çemberde, üçüncü kez dolandıktan sonra,

Eğer, $n = 32$ ise $x = -0.949$

Eğer, $n = 64$ ise $x = -0.983$

elde ederiz. Sonuç olarak, $\chi = -1$ dir.

Bu örnekte gösterildiği gibi, çok daha küçük bir n alınarak ta bu sonuca ulaşmak yeterli olacaktı.

Ele alına fonksiyonun reel ve imajinal kısımları analitik fonksiyonlar ile tanımlıdır ve çemberin içinde de analitikliği devam ettirilebilinir. Çemberin içinde analitikliği devam ettirilen $w(x,y)$ fonksiyonu $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ noktasında sıfıra eşittir ve $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1/8$ çemberi üzerinde sonsuza gider. Örnekten görülecektir ki analitik olmayan kompleks fonksiyonlar için, indeksin bölgede ki fonksiyonun sonsuzlukları veya sıfırları ile basit bir bağlılığı(bağlantısı) yoktur [4].

3. RİEMANN SINIR-DEĞER PROBLEMLERİ

Bu tezde, sınır-değer problemlerinden biri olan Riemann sınır-değer problemi ve çeşitleri verilecek. Önce, analitik fonksiyonların sınır değerleri için iki temel şart verilerek en basit sınır-değer problemi olan sıçrama problemini ele alacağız. Sonra, homojen problemin çözümlerini, L nin bir tek kapalı eğri olduğu basit durum ve $L=\sum_{j=1}^{n} L_j \quad (n>1)$ olduğu durumda inceleyeceğiz [4].

3.1. Analitik Fonksiyonların Sınır-Değerlerinin İncelenmesi:

L kompleks düzlemde kapalı basit bir Jordan eğrisi, D^+ bu eğrinin sınırladığı iç bölge, D^- dış bölge olsun.

Teorem 3.1.1: $f(t) \in H(L)$ fonksiyonu verilsin. f nin D^+ daki analitik bir $F(z)$ $\left(\infty \in D^+ ise F(\infty)=0\right)$ fonksiyonunun sınır-değeri olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt = 0, \qquad z \in D^- \tag{3.1}$$

olmasıdır [10].

İspat: Eğer $\infty \in D^-$ ve $f(t)=F^+(t), D^+$ daki analitik bir $F(\sigma)$ fonksiyonunun sınır-değeri ise bu durumda $z \in D^-$ için $\dfrac{F(\sigma)}{\sigma - z}$ D^+ da analitik ve L üzerinde sürekli bir fonksiyondur. Dolayısıyla, her bir bağlantılı D^+ bileşenine Cauchy teoremi uygulanırsa (3.1) geçerli olur. Eğer $\infty \in D^+$ ve $F(\infty)=0$ ise bu durumda $\dfrac{F(\sigma)}{\sigma - z}$ nin $\sigma=\infty$ da rezidüsü sıfırdır ve buradan (3.1) yine geçerlidir.

F yi

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-z}dt, \qquad z\notin L \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlayalım. Plemelj formülünden

$$F^+(t)+F^-(t)=f(t), \qquad t\in L$$

dir. Hipotezden $z\in D^-$ iken $F(z)\equiv 0$ dır. Dolayısıyla, $F^-(t)=0$ dır. Böylece, L üzerinde $f(t)=F^+(t)$ dir. $\infty\in D^+$ ise bu durumda $F(\infty)=0$ olduğu açıktır. (3.1) yi $z\in D^-$ için uygulamak çok kullanılmamaktadır, onun yerine $t_0\in L$ olan bir şart daha kullanışlı olacaktır.

Teorem 3.1.2: Bir $f(t)\in H(L)$ fonksiyonu verilsin. f nin D^+ daki analitik bir $F(z)$ $(\infty\in D^+ ise F(\infty)=0)$ fonksiyonunun sınır-değeri olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt=\frac{1}{2}f(t_0), \qquad t_0\in L \tag{3.3}$$

olmasıdır [10].

İspat: Kabul edelim ki, $f(t)=F^+(t)$ dir, Bu durumda, (3.1) sağlanır. Burada Plemelj formülünü kullanarak

$$-\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt=0, \quad t_0\in L$$

elde ederiz ki bu (3.3) dir. D^+ da analitik olan (3.2) ile tanımlı F yi göz önüne alalım $(\infty\in D^+ ise F(\infty)=0)$. Bu durumda F ye Plemelj formülünü uygularsak

$$-\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)}{t-t_0}dt=0, \quad t_0\in L$$

elde ederiz. Böylece, hipotezden dolayı $f(t) = F^{+}(t)$ olduğu görülür [10].

3.2. Riemann Sınır-Değer Problemlerine Giriş

Tanım 3.2.1: Riemann sınır-değer problemi veya kısaca R problemi: L sıçrama eğrili bir parçalı analitik f fonksiyonu bulma problemidir öyle ki

$$f^{+}(t) = G(t)f^{-}(t) + g(t), \quad t \in L \tag{3.4}$$

sınır-değer şartı sağlanır, burada $G(t)$ ve $g(t)$, L üzerinde tanımlı Hölder şartını sağlayan iki fonksiyondur. Eğer $f(z)$ sonsuzda en fazla m. mertebeden olursa bu durumda problem R_m ile gösterilir. En önemli problemler, R_0 ve R_{-1} dir ki onlar için $f(\infty)$, sırasıyla, sonlu ve sıfıra eşittir. Eğer L üzerinde her yerde $G(t) \neq 0$ ise bu durumda R problemi normal tiptendir aksi takdirde normal olmayan tiptendir denir [10].

3.3. Sıçrama Problemleri ve Çözümleri

Tanım 3.3.1: (3.4) te $G(t) \equiv 1$ alınarak elde edilen

$$f^{+}(t) - f^{-}(t) = g(t), \quad t \in L \tag{3.5}$$

problemine sıçrama problemi denir.

Bu sıçrama problemini R_m de çözeceğiz: $g(t) \in H(L)$ olduğundan ve Plemelj formülünden kolayca görülür ki,

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{t-z}dt, \qquad z \notin L \tag{3.6}$$

(3.5) şartını sağlar, yani,

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = g(t), \quad t \in L \tag{3.7}$$

dir. Bu durumda, (3.5) ve (3.7) den

$$f^+(t) - \varphi^+(t) = f^-(t) - \varphi^-(t), \quad t \in L$$

dir. Yani, $F(z) = f(z) - \varphi(z)$ hem de D^+ hem de D^- de analitiktir öyle ki L nin farklı taraflarında aynı sınır-değerlere sahiptir. Dolayısıyla, analitik devam ilkesinden, F bir tam fonksiyondur.

İlk olarak $m \rangle 0$ olsun, $\varphi(\infty) = 0$ olduğundan F nin $z = \infty$ da aynı f gibi en fazla $m.$ mertebeden bir kutbu vardır. Liouville teoreminden F en fazla $m.$ mertebeden bir polinom olmalıdır. Buradan, (3.5) in R_m deki genel çözümü

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{t-z}dt + P_m(z) \tag{3.8}$$

dir, burada P_m, $m.$ dereceden bir keyfi polinomdur, buradaki $m.$ dereceden bir keyfi polinom, aslında derecesi m yi geçmeyen ve sıfır sabitini de içeren bir keyfi polinom anlamındadır. Genel çözümde $m+1$ keyfi (kompleks) sabit vardır. Yani, çözümün bağımsızlık derecesi $m+1$ dir.

Eğer (3.5) R_0 da çözülürse, yani, $f(\infty)$ un sonlu ($z = \infty$ da analitik) olması istenirse bu durumda (3.8) deki $P_0(z) \equiv sabit$ tir ve çözümün bağımsızlık derecesi 1 dir.

Eğer (3.5) R_{-1} de çözülürse, yani, $f(\infty)=0$ alınırsa bu durumda problem φ tek çözümüne sahiptir (veya (3.8) de $P_{-1}(z)\equiv 0$ alınır). Bu durumda, çözümün bağımsızlık derecesi sıfırdır.

Eğer (3.5), R_{-r} de çözülürse bu durumda (3.8) deki $P_{-r}(z)\equiv 0$ alınsa bile $f(z)$ nin sonsuzda en az r. mertebeden bir sıfıra sahip olduğu garanti edilemez.

(3.6) integralindeki $\frac{1}{(t-z)}$ terimi $z=\infty$ da $\left(|z|\rangle|t| \quad için\right)$ Laurent serisine açılırsa

$$f(z)=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_L g(t)t^k dt\,\frac{1}{z^{k+1}}$$

bulunur ve buradan görülür ki, f nin $z=\infty$ da en az r. mertebeden bir sıfıra sahip olması için gerek ve yeter şart

$$\int_L g(t)t^k dt=0,\quad k=0,1,\ldots,r-2 \tag{3.9}$$

olmasıdır. Bu demektir ki; $R_{-r}\quad (m=-r)$ deki (3.5) sıçrama problemi çözülebilirdir ve bu durumda onun (3.8) tek çözümüne sahip olması ($P_{-r}(z)\equiv 0$ olması durumu) için gerek ve yeter şart g nin bu $(r-1)$ tane şartı sağlamasıdır. Yani, $m\leq 2$ ise (3.5) R_m problemi, $g, r-1=-(m+1)$ şartı sağladığında tek çözüme sahiptir. Bu durumda, çözümün bağımsızlık derecesi $(m+1)$ (negatif tamsayı) dir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.1: (3.5) sıçrama probleminin R_m deki genel çözümü, $(m+1)$ bağımsızlık derecesine sahiptir. Daha açık olarak, $m\geq 0$ olduğunda onun çözümü (3.8) ile verilir, burada $P_m(z)$, m. dereceden bir keyfi polinomdur; $m=-1$ olduğunda $P_0(z\equiv 0)$ olmak üzere (3.8) tek çözüme sahiptir; $m\leq -2$ olduğunda onun (3.8) tek çözümüne sahip olması için gerek ve yeter şart (3.9) deki $-(m+1)$ tane çözülebilirlik şartlarının sağlanmasıdır $(r=-m)$. Üstelik, Privalov teoreminden dolayı $f^{\pm}(t)\in H(L)$ dir. Bundan sonra, negatif dereceden bir $P_m(m\langle 0)$ polinomunun daima sıfıra özdeş olduğunu kabul edeceğiz. Bu durumda, (3.5) nin R_m deki çözümü herhangi bir durumda ($m\leq -2$ için çözülebiliyorsa) (3.8) olarak yazılabilir. Şimdi, sıçrama problemine bir örnek verelim [10].

Örnek 3.3.1: L, $|t|=1$ pozitif yönde yönlendirilmiş birim çember olmak üzere parçalı analitik bir f fonksiyonu bulunuz öyle ki,

$$f^{+}(t)=f^{-}(t)+\cos\theta,\quad t=e^{i\theta},\quad 0\leq\theta\leq 2\pi$$

ve $f(\infty)$ sonlu olsun.

Çözüm: $t=e^{i\theta}$ dan

$$\cos\theta=\frac{t+t^{-1}}{2}=\frac{t^2+1}{2t}$$

olur. $f(\infty)$ un sonlu olması istendiğinden problem R_0 da çözülecektir. Buradan, (3.8) genel çözümü

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\frac{t^2+1}{2t}}{t-z}dt+c$$

halini alır. Bu integralin değeri, $|z|\rangle 1$ için Cauchy integral formülünden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\frac{t^2+1}{2t}}{t-z}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\frac{t^2+1}{2(t-z)}}{t}dt=\int_L\frac{f(t)}{t}dt=f(0)=-\frac{1}{2z}$$

dir. $|z|\langle 1$ için, sırasıyla, $t=0$ ve $t=z$ merkezli, birbirlerini kesmeyen ve tamamen L içinde kalan L_1 ve L_2 çemberlerini seçelim. Cauchy integral formülünden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\frac{t^2+1}{2t}}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\frac{t^2+1}{2(t-z)}}{t}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\frac{t^2+1}{2t}}{(t-z)}\,dt = \frac{t^2+1}{2(t-z)}\Big|_{t=0} + \frac{t^2+1}{2t}\Big|_{t=z}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{z}+\frac{z^2+1}{z}\right) = \frac{1}{2}z$$

dir. Böylece, istenen çözüm

$$f(z)=\begin{cases} \frac{1}{2}z+c, & |z|\langle 1 \\ -\frac{1}{2z}+c, & |z|\rangle 1 \end{cases}$$

olarak elde edilir [10].

.

4. BASİT-BAĞLANTILI BİR BÖLGE İÇİN RİEMANN SINIR DEĞER PROBLEMİ

4.1. Problemin Formülasyonu

Kompleks düzlemi iç bölge D^+ ve dış bölge D^- bölgelerine bölen basit düzgün kapalı bir L eğrisinin verildiğini ve Hölder şartını sağlayan eğri üzerinde iki tane $G(t)$ ($G(t)$ eğri üzerinde sıfır değeri almayan bir fonksiyon) ve $g(t)$ pozisyon fonksiyonları verilsin. İki tane fonksiyon bulmak gereklidir: $z=\infty$ dahil olmak üzere, D^+ bölgesinde analitik olan $\Phi^+(z)$, D^- bölgesinde analitik olan $\Phi^-(z)$, öyle ki bu fonksiyonlar L eğrisi üzerinde aşağıda verilen her iki lineer ifadelerden birini sağlarlar

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t) \text{ (homojen problem)} \tag{4.1}$$

veya

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+\mathrm{g(t)} \text{ (homojen olmayan problem)} \tag{4.2}$$

$G(t)$ fonksiyonuna Reimann probleminin katsayısı; $g(t)$ fonksiyonuna da serbest terim denir.

İlk olarak özel tipte bir Riemann problemini ele alalım. Kapalı bir L eğrisi üzerinde Hölder şartını sağlayan bir $G(t)$ fonksiyonunun verildiğini kabul edelim. Sonsuzda sıfır değeri alan ve bir $\varphi(t)$ atlamasında L eğrisi boyunca geçen bölgesel olarak analitik olan bir $\Phi(z)$ ($z\in D^+$ için $\Phi(z)=\Phi^+(z), z\in D^-$ için $\Phi(z)=\Phi^-(z)$) fonksiyonunun, diğer bir ifadeyle, aşağıdaki koşulu sağlayan bir fonksiyonun bulunması gerekir [4].

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t) \tag{4.3}$$

Problemin çözümünün

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \tag{4.4}$$

olduğu (4.3) formülünden açıktır. Bu çözümün tekliğini ispatlamak kolaydır. Aslında, iki çözümün varlığını kabul ederek ve çözümler arasındaki farkı ele alırsak L doğrusu üzerindeki bu fark atlamasının sıfır olduğunu buluruz. Sonuç olarak, bu fonksiyon tüm düzlemde analitiktir ve sonsuzda sıfır değerini alır. Dolayısıyla, Liouville Teoremi aynı şekilde sıfır değerini aldığını ifade eder.

Yukardaki problemin çözümü aşağıdaki şekilde olduğu gibi de formüle edilebilir:

Kapalı bir eğri üzerinde verilen ve Hölder şartını sağlayan keyfi bir $\varphi(t)$ fonksiyonu, $\Phi^-(\infty) = 0$ şartı altında, $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ analitik fonksiyonlarının sınır değerlerini oluşturan $\Phi^+(t), \Phi^-(t)$ fonksiyonlarının farkının formunda tek bir biçimde ifade edilebilir.

Eğer $\Phi^-(\infty) = 0$ ek şartı göz ardı edilirse, problemin çözümünün aşağıdaki formülle verilebileceği kolaylıkla görülür

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau + sabit \tag{4.4'}$$

4.2 Homojen Problemin Çözümü

(4.1) homojen probleminin çözülebilir olduğunu kabul edelim, ve $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonları çözüm olsunlar. $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ fonksiyonlarının tanımlanan D^+, D^- bölgelerindeki sıfır sayılarını, sırasıyla, N^+ ve N^- ile gösterelim. (4.1) eşitliğinin her iki tarafındaki indeksi hesaplarsak ve 2.4. ‘ ün 2. ve 3. özelliklerini kullanırsak:

$N^+ + N^- = IndG(t) = x$

eşitliğini elde ederiz.

Reimann probleminin katsayısının x indeksi, problemin indeksi olarak adlandırılır. Açıkçası, son eşitliğin sol tarafı negatif olmayan bir sayıdır. Dolayısıyla,

1. Homojen Reimann sınır değer probleminin çözülebilir olması için problemin x indeksinin negatif olmayan bir sayı olması gerekir (kabulden $\Phi^+(z)$ ve $\Phi^-(z)$ fonksiyonlarının kutup noktaları yoktur).
2. Eğer $x > 0$ ise $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ fonksiyonları ikisinin de indeksi sıfır olmak üzere problemin çözümünü teşkil ederler.
3. Eğer $x = 0$ ise $\Phi^+(z), \Phi^-(z)$ fonksiyonlarının sıfır değeri aldığı nokta yoktur.

1. $x = 0$ durumu. Burada, $\ln G(t)$ tek-değerli bir fonksiyondur, ve $\ln \Phi^+(z)$, $\ln \Phi^-(z)$ fonksiyonları analitiktir. (4.1) sınır şartında her iki tarafın logaritmasını alırsak

$$\ln \Phi^+(t) - \ln \Phi^-(t) = \ln G(t) \tag{4.3`}$$

ifadesini elde ederiz.
$\ln G(t)$ hangi dal değerini alırsa alsın, en son sonucun bu dalın seçiminden bağımsız olduğu kolayca gösterilebilir.

Böylece, L eğrisi üzerinde verilen atlama miktarına bağlı olarak bölgesel bir analitik $\ln \Phi(z)$ fonksiyonunun belirlenmesinin problemine ulaşmış oluruz. Bu problemin $\ln \Phi^-(\infty) = 0$ ek şartı altındaki çözümü aşağıdaki formülle verilir

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \tag{4.5}$$

Kısa olması için

$$\ln \Phi(z) = \Gamma(z) \tag{4.6}$$

olarak alalım.

Sokhotski formülünün direk bir sonucu olarak $\Phi^{-}(\infty)=1$ şartını sağlayan (4.1) sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki fonksiyonlardır:

$$\Phi^{+}(z)=e^{\Gamma^{+}(z)}\ ,\ \Phi^{-}(z)=e^{\Gamma^{-}(z)} \tag{4.7}$$

Eğer $\Phi^{-}(\infty)=1$ ek şartı göz ardı edilirse, (4.5) formülü herhangi keyfi bir sabit terimle tamamlanmalıdır ve problemin çözümünü aşağıdaki forma sahiptir:

$$\Phi^{+}(z)=Ae^{\Gamma^{+}(z)}\ ,\ \Phi^{-}(z)=Ae^{\Gamma^{-}(z)} \tag{4.8}$$

burada A keyfi bir sabittir. $\Gamma^{-}(\infty)=0$ olduğundan, A sayısı $\Phi^{-}(z)$' nin sonsuzda aldığı değerdir.

Böylece, $x=0$ olduğu durumda ve $\Phi^{-}(\infty)\neq 0$ şartı altında çözüm keyfi bir sabit içerir, diğer bir ifadeyle bir tane lineer bağımsız çözüm vardır. Eğer $\Phi^{-}(\infty)=0$ ise, bu durumda $A=0$ dır ve problemin sadece sıfıra özdeş olan alışılmış çözümü vardır. Yukardaki ifadeler önemli bir sonuca işaret eder. L eğrisi üzerinde Hölder şartını sağlayan ve sıfır indeksine sahip verilen herhangi bir $G(t)$ fonksiyonu, D^{+} ve D^{-} bölgelerinde analitik olan ve bu bölgelerde sıfırı olmayan fonksiyonların sınır değerlerini teşkil eden $\Phi^{+}(t),\Phi^{-}(t)$ fonksiyonlarının bir oranıyla temsil edilebilir. Bu tür fonksiyonlar keyfi sabit bir faktör ile belirlenir ve (4.8) formülü ile ifade edilir.

2. $x>0$ durumu. Özel olarak koordinat sisteminin orijinin D^{+} bölgesinde kaldığını kabul edelim. t^{x} fonksiyonu x indeksine sahiptir (2.5.1. de ki örnek). Sınır şartını aşağıdaki formda yazalım:

$$\Phi^{+}(t)=t^{x}\left[t^{-x}G(t)\right]\Phi^{-}(t)$$

Açıkça, $G_1(t)=t^{-x}G(t)$ sıfır indeksine sahiptir.

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln\left[t^{-x}G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau, \tag{4.9}$$

olmak üzere $G_1(t)$ fonksiyonu oran formunda temsil edersek $G_1(t)=\dfrac{e^{\Gamma^+(i)}}{e^{\Gamma^-(i)}}$ elde ederiz. Sınır şartları aynı zamanda aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}}=t^x\frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}}$$

Son eşitlik $\dfrac{\Phi^+(z)}{e^{\Gamma+(z)}}$ fonksiyonunun, x' den büyük olmayan mertebeden bir kutup noktasına sahip olabileceği sonsuzluklar hariç D^+ bölgesinde ve $z^x\dfrac{\Phi^-(z)}{e^{\Gamma^-(z)}}$ fonksiyonunun D^- bölgesinde analitik olduğunu ve bu fonksiyonların L eğrisi boyunca birbirlerinin analitik devamlarını oluşturduğunu belirtiyor. Sonuç olarak, bu fonksiyonlar, sonsuzlukta x' den büyük mertebeden bir kutup noktasında, tüm düzlemde sadece bir singülariteye sahip olan tek bir analitik fonksiyonun dallarıdır. Genelleştirilmiş Liouville teoremine göre bu fonksiyon keyfi kompleks sabitli derecesi x' den büyük olmayan bir polinomdur.

Dolayısıyla, aşağıda verilen problemin genel çözümünü elde ederiz

$$\Phi^+(z)=e^{\Gamma^+(z)}P_x(z),\ \Phi^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}z^{-x}P_x(z) \tag{4.10}$$

Şimdi son sonucu ifade edebiliriz.

4.2.1.Teorem : Eğer Riemann sınır değer probleminin x indeksi pozitif ise, bu durumda problem x+1 tane lineer bağımsız çözüme sahiptir

$$\Phi_k^+(z)=z^k.e^{\Gamma^+(z)},\ \Phi_k^-(z)=z^{k-x}.e^{\Gamma^-(z)}\quad (k=0,1,...,x)$$

genel çözümü x+1 tane keyfi sabit içerir ve (4.10) formülü ile verilir.

Sıfır indekse sahip olma durumu son teoremin özel bir durumu olarak daha önce incelendi. Eğer $x < 0$ ise homojen problemin çözümsüz olduğu henüz gözlemlendi.

$\Phi^{+}(z), \Phi^{-}(z)$ fonksiyonları üzerine x+1 tane bağımsız şart uygulanırsa problemin çözümü tamamen belirlenebilir. Ek şartlar birçok farklı yolla tanımlanabilir. Örneğin, x+1 inci mertebeden lineer bir diferansiyel denklem için Cauchy probleminin durumuna benzer olarak, (Φ^{+} veya Φ^{-}) fonksiyonlarının değerlerini ve bazı noktalardaki(örneğin, koordinat sisteminin orijininde) ilk x türevlerini verebiliriz. Bu durumda tüm keyfi sabitler x+1 tane tutarlı lineer denklemden oluşan bir sistemden belirlenirler.
Takip eden kısımda, singüler integral denklemlerin çözümü ile ilgili Reimann probleminin uygulamalarında, problemin çözümünü $\Phi^{-}(\infty) = 0$ ek şartı altında arayacağız.
(4.10) formülünden $\Phi^{-}(\infty)$ 'un $P_x(z)$ polinomunda z^x ' in katsayısına eşit olduğunu elde ederiz.

Sonsuzda çözümün olmaması şartında, problemin çözümünü aşağıdaki formla ifade edebiliriz.

$$\Phi^{+}(z) = e^{\Gamma^{+}(z)} P_{x-1}(z); \Phi^{-}(z) = e^{\Gamma^{-}(z)} z^{-x} P_{x-1}(z) \tag{4.11}$$

burada P_{x-1}, (x-1)inci dereceden keyfi katsayılı bir polinomdur. Böylece, bu durumda problem x tane lineer bağımsız çözüme sahiptir [4].

4.3. Homojen Problemin Kanonik Fonksiyonu

Homojen olmayan problemin çözümünü elde etmek için halen incelemeye devam ettiğimiz homojen problemin özel bir durumunu kullanmak uygun olur.

4.3.1. Tanım: z_0 noktasında $\varphi(z)$ analitik fonksiyonunun derecesinden $\varphi(z)$'nin $(z-z_0)$ kuvvet serisine açılımındaki en düşük kuvvetinin üssünü anlıyoruz.

Bu tanım z_0 noktasında $\varphi(z)$'nin m. dereceden bir sıfıra sahip olduğunu gösterir, bu durumda bu m sayısı fonksiyonun derecesidir. m. dereceden bir kutuba negatif dereceli (-m) karşılık gelir. Eğer bir fonksiyon z_0 noktasında analitik ise ve bu noktada sıfır değilse bu durumda fonksiyonun derecesi sıfırdır.

Sonsuzluk civarında açılımı $1/z$ ‘ nin kuvvetleri formunda ifade ediyoruz; buna göre, sonsuzda bir fonksiyonun derecesi, fonksiyonun açılımındaki $1/z$ ‘ nin en küçük kuvvetinin üssüdür, diğer bir ifadeyle pozitif bir derece fonksiyonun bir sıfırına ve negatif bir kutbuna karşılık gelir.

Bir analitik fonksiyonun tanım bölgesindeki tüm noktalardaki derecelerinin cebirsel toplamına toplam derece diyeceğiz. Sonuç olarak, toplam derece fonksiyonun kutup noktaları ile sıfır sayısı arasındaki farka eşittir.

Eğer, (4.3)‘ün tersine, Riemann problemi fonksiyonlarının çözümünün kutup noktalarına sahip olduğunu kabul edersek bu durumda (4.4) eşitliklerini türetmede kullanılan benzer bir mantıkla homojen Riemann probleminin çözümünün toplam derecesinin problemin indeksine eşit olduğunu ispatlarız.

Tüm düzlemde, derecenin indekse eşit olduğu tek bir nokta hariç sıfır dereceye sahip bir çözüm arıyoruz. Bu istisnai nokta, takip eden bölümlerde, sonsuzlukta bir nokta olacaktır [4].

4.3.2. Tanım: (4.1) sınır şartını sağlayan ve düzlemin sonlu kısmındaki her yerde sıfır dereceye sahip bölgesel analitik bir fonksiyona homojen Riemann probleminin kanonik fonksiyonu diyeceğiz. Dolayısıyla, Sonsuzluktaki noktada fonksiyonun derecesi x indeksine eşit olacaktır. Sıfır indekse sahip olma durumu son teoremin özel bir durumu olarak daha önce incelendi. Eğer $x < 0$ ise homojen problemin çözümsüz olduğu henüz gözlemlendi.

$x \geq 0$ için kanonik fonksiyonun hiçbir kutup noktası yoktur ve sınır değer probleminin bir çözümünü teşkil eder.

$x < 0$ için kanonik fonksiyonun sonsuzda bir kutup noktası vardır ve dolayısıyla homojen Riemann probleminin bir çözümü değildir (4.1 bağlamında). Bunun yanında, homojen olmayan problemi çözmek için yardımcı bir fonksiyon olarak kullanılabilir.

Eğer Riemann probleminin sınır şartını aşağıdaki şekilde yazarsak

$$\Phi^{+}(t) = t^{x}\left[t^{-x}G(t)\right]\Phi^{-}(t),$$

herhangi keyfi bir x için $X(z)$ probleminin kanonik fonksiyonunun aşağıdaki eşitliklerle verilebileceğini kolaylıkla bulabiliriz

$$X^{+}(z) = e^{\Gamma+(z)}, \quad X^{-}(z) = z^{-x}e^{\Gamma-(z)} \qquad (4.12)$$

Burada $\Gamma(z)$ (4.9) formülünde verilen ifadedir.

$x \geq 0$ için homojen problemin genel çözümü kanonik fonksiyonlarla aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$\Phi(z) = X(z).P_{x}(z). \qquad (4.13)$$

olarak yazılır [4].

4.4 Homojen Olmayan Problemin Çözümü

Sınır şartının $G(t)$ katsayısını,

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t) \tag{4.2}$$

homojen problemin kanonik fonksiyonunun sınır değerinin oranı, $G(t) = \dfrac{X^{+}(t)}{X^{-}(t)}$ ile değiştirirsek bu durumda aşağıdaki kısaltılmış formu elde ederiz

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)} = \frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)} + \frac{g(t)}{X^{+}(t)}.$$

Birbirlerine yeterince yakın keyfi t_1, t_2 için

$$\left|\psi(t_2) - \psi(t_1)\right| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_L \left\{\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_2)}{\tau - t_2} - \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_1)}{\tau - t_1}\right\} d\tau\right|$$

eşitliği geçerlidir.

Yukarda ki eşitlik gereğince $\dfrac{g(t)}{X^{+}(t)}$ fonksiyonu Hölder şartını sağlar. (4.2)' ye bağlı olarak $\dfrac{g(t)}{X^{+}(t)}$ fonksiyonunu analitik fonksiyonların sınır değerlerinin farkı ile ifade edelim:

$$\frac{g(t)}{X^{+}(t)} = \Psi^{+}(t) - \Psi^{-}(t),$$

buradan

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{4.14}$$

yazılır. Bu durumda sınır şartı aşağıdaki formda yazılabilir:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t).$$

$\dfrac{\Phi^-(z)}{X^-(z)}$ fonksiyonu $x \geq 0$ için sonsuzda bir kutba, ve $x < 0$ için x. dereceden bir sıfıra sahip olduğunu gözlemleyelim.

(4.3)'dekine benzer bir çıkarımla (homojen problemin çözümünde kullanılan) aşağıdaki sonuçlara ulaşırız:

1. $x \geq 0$. Bu durumda

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \Psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \Psi^-(z) = P_x(z).$$

$X(z), \Psi(z)$ (4.12), (4.14) formüllerinde verilmiş ve P_x keyfi katsayılı x. dereceden bir polinom olmak üzere aşağıdaki çözümü elde ederiz

$$\Phi(z) = X(z)\left[\Psi(z) + P_x(z)\right] \tag{4.15}$$

(4.15) formülünün homojen olmayan problemin genel çözümünü ürettiğini gözlemliyoruz; çünkü homojen problemin çözümü olan bir terimi, $X(z).P_x(z)$ yi içeriyor.

2. $x < 0$. Bu durumda $\dfrac{\Phi^-(z)}{X^+(z)}$ sonsuzda sıfır değerlerini alır ve

$$\Phi(z) = X(z)\Psi(z) \tag{4.16}$$

olmak üzere

$$\frac{\Phi^+(z)}{X^+(z)} - \Psi^+(z) = \frac{\Phi^-(z)}{X^-(z)} - \Psi^-(z) = 0$$

dır.

$\Phi^-(z)$ fonksiyonunun ifadesinde ilk faktör (4.12) formülünde olduğu gibi sonsuzda –x. dereceden bir kutba sahiptir, diğer taraftan ikinci terim, (4.14) Cauchy tipi bir integral olarak, $\Phi^-(z)$ fonksiyonu sonsuzda –x-1' i aşmayan dereceden bir kutba sahiptir. Böylece, eğer $x < -1$ ise genel olarak homojen olmayan problem çözümsüzdür. Sadece serbest terim belli bazı ek şartları taşıdığı zaman çözülebilirdir. Çözülebilir yapmak için, (4.14) Cauchy tipi integralini sonsuzluk etrafında seriye açalım.

$$\Psi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k},$$

burada

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau.$$

Sonsuzda $\Phi^-(z)$'nin analitikliği için $\Psi^-(z)$' nin açılımındaki ilk $-x-1$ katsayılarının sıfır olması gereklidir. dolayısıyla, ($x < -1$) negatif indeksin olması durumunda homojen olmayan problemin çözülebilir olması için gerekli ve yeterli şart aşağıdaki $-x-1$ şartlarının sağlanmasıdır:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0 \quad (k = 1,2,...,-x-1). \tag{4.17}$$

Yukardaki incelemelerden aşağıdaki sonucu ifade etmek mümkündür.

4.4.1. Teorem: $x \geq 0$ olduğu durumda homojen olmayan Reimann problemi keyfi bir serbest terim için çözülebilirdir ve genel çözümü aşağıdaki eşitlikle ifade edilir

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + X(z).P_x(z) \tag{4.18}$$

burada kanonik fonksiyon $X(z)$ (4.12) ile tanımlanmıştır ve $P_x(z)$ keyfi kompleks katsayılı x. dereceden bir polinomdur. Eğer $x = -1$ ise homojen olamayan problem yine çözülebilirdir ve tek bir çözüme sahiptir.

$x < -1$ olduğu durumda genel olarak homojen olmayan problem çözülebilir değildir. Çözülebilir olması için gerekli ve yeterli şart problemin serbest teriminin $-x-1$ şartlarını sağlamasıdır (4.17). Eğer bu şartlar sağlanıyorsa problemin tek çözümü $P(z) \equiv 0$ olmak üzere (4.18) ile verilen eşitliktir.

Bilinmeyen çözüm üzerine, sonsuzda sıfır olmanın getirdiği ek şartı uygulanmak istenilmesi durumunda, x. dereceden polinom $x-1$ dereceden polinomla değiştirilmelidir. Negatif indeks söz konusu olduğunda problemin çözülebilir olması için c_{-x} katsayısının sıfır olması gereklidir.

Sonuç olarak, $x \geq 0$ için $\Phi^-(\infty) = 0$ şartı altındaki çözüm aşağıdaki formülle ifade edilir:

$$\Phi(z) = X(z)\left[\Psi(z) + P_{x-1}(z)\right] \tag{4.18'}$$

(Eğer $x = 0$ ise $P(z) \equiv 0$ olarak alınır.)

$x < 0$ ise $P(z) \equiv 0$ olmak üzere çözüm daha önce olduğu gibi yine (4.18) ile ifade edilir ve çözülebilirlik için aşağıdaki –x şartın sağlanması gereklidir:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\tau^{k-1}d\tau = 0 \quad (k = 1,2,...,-x). \tag{4.19}$$

Dolayısıyla, homojen olmayan problemin çözülebilirliği üzerine olan teorem daha simetrik bir formu kabul eder lineer olarak x keyfi sabitlerine bağlıdır:

$x \geq 0$ için homojen olmayan problemin genel çözümü lineer olarak x keyfi sabitlerine bağlıdır;

$x < 0$ için çözülebilirliğin şartlarının sayısı $-x$' dir.

$x = 0$ için problem mutlak olarak çözülebilirdir ve çözüm tektir [4].

4.5. Örnekler

Reimann probleminin çözümü temel olarak iki operasyona indirgenir:

1. D^{+} ve D^{-} bölgelerinde analitik fonksiyonların sınır değerlerinin formunda eğri üzerinde belirlenen keyfi fonksiyonun temsili
2. Yine aynı fonksiyonun sınır değerlerin oranı formunda temsili.

İkinci operasyon logaritma alınarak birinci operasyona indirgenebilir. İndeksin sıfır olmadığı durumlardaki ortaya çıkan zorluklar sadece logaritmanın çok-değerliliğine bağlıdır. Keyfi fonksiyon için ilk operasyon Cauchy tipinde bir integralin hesaplanmasına denktir. Bundan dolayı, (4.9), (4.14), (4.16) formülleri ile verilen problemin çözümü Cauchy tipi integrallerle(veya daha bilindik bir ifadeyle-kapalı bir formda) açık olarak ifade edilmiştir.

Genel durumda böyle integralleri hesaplamak için basit bir algoritma yoktur. Çok ağır(sıkıcı) hesaplamalara yol açan yaklaşım metotlarından birini uygulamak gerekir. Biz burada kendimizi problemin katsayı ve serbest teriminin, kompleks düzlem üzerindeki eğri tarafından analitik olarak tamamlanabilecek olması durumu ile sınırlayacağız. Bu durum söz konusu olduğunda 1. ve 2. operasyonlar basitleşir. Eğer L integre edilen eğri (tamlama yapan eğri) çeşitlenirse, çözüm sadece eğriye bağlı olarak $G(z)$ katsayısının sıfır ve singüler noktalarının pozisyonunda bir değişme olursa değişir.

Dikkat edersek rasyonel katsayılarla problemin çözümü için sunulan metodun önemi örneğin ötesindedir; çünkü keyfi sürekli bir fonksiyona (Hölder şartını sağlayan) rasyonel fonksiyonlarla herhangi bir doğruluk derecesinde yaklaşılabilinir ve rasyonel katsayılarla problemin çözümü genel durumda ki yaklaşık bir çözüm için temel teşkil edilebilir.

Reimann sınır değer problemini sonlu sayıda basit eğrilerden oluşan bir eğri için çözeceğiz, rasyonel bir fonksiyon olarak problemin katsayılarının eğri üzerinde sıfırı veya kutbu olmayacak:

$$\Phi^{+}(t) = \frac{P(t)}{q(t)}\Phi^{-}(t) + g(t)\,. \tag{4.20}$$

$p_{+}(z), q_{+}(z)$ ve $p_{-}(z), q_{-}(z)$ nin çarpımları olarak $p(z), q(z)$ polinomlarını açarsak

$$p(z) = p_{+}(z)p_{-}(z), \quad q(z) = q_{+}(z)q_{-}(z) \tag{4.21}$$

burada $p_{+}(z), q_{+}(z)$ D^{+} bölgesinde kökleri olan ve $p_{-}(z), q_{-}(z)$ D^{-} bölgesinde kökleri olan polinomlardır. İndeksin (2.3) eşitliğinden $m_{+}, n_{+},$ $p_{+}(z)$ ve $q_{+}(z)$ polinomlarının sıfırlarının sayısını göstermek üzere $x = m_{+} - n_{+}$ olduğu kolayca bulunabilir.

Katsayı, $D^{\pm}$ bölgesinde analitik olarak tamamlanabilir bir fonksiyon olduğundan, genel formülden yararlanmak tavsiye edilmez; fakat analitik tamlamadan direkt olarak katsayıyı elde edebiliriz. Sınır şartlarını aşağıdaki gibi alırsak

$$\Phi^{+}(t) = \frac{q_{-}(t)}{p_{-}(t)}\Phi^{+} - \frac{p_{+}(t)}{q_{+}(t)}\Phi^{-}(t) = \frac{q_{-}(t)}{p_{-}(t)}g(t),$$

(4.5) ‘te olduğuna benzer bir şekilde, çözüm

$$\left.\begin{aligned} \Phi^{+}(z) &= \frac{p_{-}(z)}{q_{-}(z)}\left[\Psi(z)+X_{-1}(z)\right], \\ \Phi^{-}(z) &= \frac{q_{+}(z)}{p_{-}(z)}\left[\Psi(z)+X_{-1}(z)\right], \\ \Psi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{q_{-}(\tau)}{p_{-}(\tau)}g(\tau)\frac{d\tau}{\tau-z}, \\ &\left(\Phi^{-}(\infty)=0\right). \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

Eğer indeks negatif ise, $P_{x-1}=0$ olarak almak ve çözülebilirlik şartını eklemek gereklidir:

$$\int_{L}\frac{q_{-}(\tau)}{p_{-}(\tau)}g(\tau)d\tau=0, \qquad (k=1,2,\ldots,-x) \tag{4.23}$$

Bu ifade eğer kanonik fonksiyon $X^{+}=\frac{p_{-}}{q_{-}}$, $X^{-}=\frac{q_{+}}{p_{+}}$ olduğu dikkate alınırsa (4.14) ve (4.15) genel formülü ile uyumludur. ikinci ifade yani $X^{-}=\frac{q_{+}}{p_{+}}$ (4.4)‘ de tanımlanan kanonik fonksiyondan elde edilebilir.

Genel durumda Riemann probleminin pratik bir çözümü için katsayıların $G=\frac{p_{+}p_{-}}{q_{+}q_{-}}$ olarak tanımlanmasının faydalı olacağına dikkat ediniz. Burada, p_{+} ve q_{+} katsayısının tipine bağlı olarak seçilmek üzere G sıfır indeksli bir fonksiyondur. Çözüm de çoğunlukla bu katsayılar uygun seçilirse elde edilir.

Bir örnek olarak, L keyfi düzgün kapalı bir eğri olmak üzere ve $\Phi(\infty)=0$ şartı altında aşağıda verilen Riemann problemini verilen formlarda çözelim:

$$\Phi^+(t)=\frac{t}{t^2-1}\Phi^-(t)+\frac{t^3-t^2+1}{t^2-t}$$

a) L eğrisi $z_1=0$ noktasını içeriyor ve $z_2=1$, $z_3=-1$ noktalarını içermiyor.

b) L eğrisi $z_1=0$ ve $z_2=1$ noktalarını içeriyor $z_3=-1$ noktasını içermiyor.

c) L eğrisi $z_1=0$, $z_2=1$, $z_3=-1$ noktalarını içeriyor .

d) L eğrisi $z_2=1$ ve $z_3=-1$ noktalarını içeriyor $z_1=0$ noktasını içermiyor.

Problemi çözmek için homojen problemin ((4.12), (4.13) formülleri) $X(z)$ kanonik fonksiyonu bulmak ve homojen olmayan problemin ((4.14) formülü) $\Psi(z)$ özel çözümünü bulmak yeterlidir. Önceki sonuçlar kullanılarak $X(z)$ fonksiyonu Cauchy tipi integralleri hesaplamadan direkt olarak bulunabilir.

Çözüm için aşağıda verilen metod kullanılacaktır.

a) Şekil.4.1'de verilen durumda

$$\begin{array}{lll} p_+(t)=t, & p_-(t)=1, & \mathrm{m}_+=1, \\ q_+(t)=1, & q_-(t)=t^2-1, & \mathrm{n}_+(t)=0,\quad x=m_+-n_+=1 \end{array}$$

Sınır değer problemini aşağıdaki gibi yazarsak:

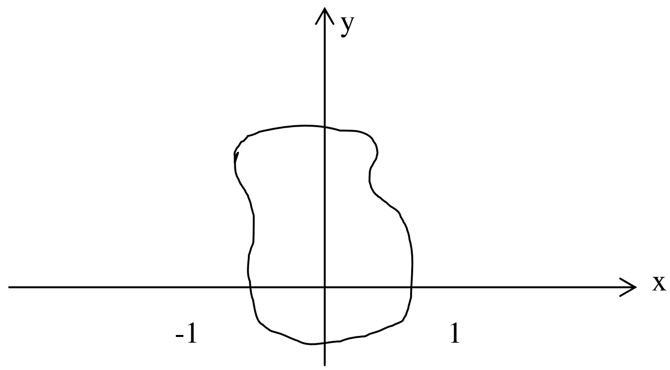
$$(t^2-1)\Phi^+(t)-t\Phi^-(t)=\frac{1}{t}\left(t^3-t^2+1\right)\left(t+1\right)$$

dolayısıyla,

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{q_-(\tau)}{p_-(\tau)}g(\tau)\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tau^3-\tau+1}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{1/\tau}{\tau-z}d\tau,$$

formül (4.22) ve (4.23) ' ten

$\Psi^+(z) = z^3 - z + 1, \quad \Psi^-(z) = -\frac{1}{z}.$ olur.



Şekil 4.1. *L* kapalı eğrisinin gösterimi

Problemin genel çözümü keyfi bir sabit içerir. (4.22) ‘den

$$\varphi^+(z) = \frac{1}{z^2-1}\left[\left(z^3 - z + 1\right)\right] = \frac{z^3 - z + 1}{z^2-1} + \frac{\mathrm{c}}{z^2-1},$$

$$\varphi^-(z) = z + \frac{c}{z^2-1}, \quad \varphi^-(z) = \frac{1}{z}\left[-\frac{1}{z} + c\right] = -\frac{1}{z^2} + \frac{c}{z},$$

elde ederiz. Burada c keyfi bir sabittir. c yerine $c-1$ alırsak, çözüm aşağıdaki gibide yazılabilir:

$$\varphi^+(z) = z + \frac{\mathrm{c}}{z^2-1}, \quad \varphi^-(z) = -\frac{z+1}{z^2} + \frac{c}{z}.$$

b)

$$p_+(t) = t, \quad p_-(t) = 1; \qquad q_+(t) = t-1, \quad q_-(t) = t+1,$$
$$m_+ = n_+ = 1, \quad x = 0;$$

$$(t+1)\Phi^{+}(t)-\frac{t}{t-1}\Phi^{-}(t)=\frac{(t+1)(t^{3}-t^{2}+1)}{t(t+1)};$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\tau^{2}+\tau}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\frac{\tau+1}{\tau(\tau-1)}}{\tau-z}d\tau=\begin{cases} z^{2}+z & \mathrm{z}\in \mathrm{D}^{+} \text{ ise} \\ -\dfrac{z+1}{z(z-1)} & \mathrm{z}\in \mathrm{D}^{-} \text{ ise.}\end{cases}$$

Problem tek bir çözüme sahiptir.

$$\varphi^{+}(z)=\frac{p_{-}(z)}{q_{-}(z)}\Psi^{+}(z)=\frac{1}{z+1}(z^{2}+z)=z,$$

$$\varphi^{-}(z)=\frac{q_{+}(z)}{p_{+}(z)}\Psi^{-}(z)=\frac{z-1}{z}\left[-\frac{z+1}{z(z-1)}\right]=-\frac{z+1}{z^{2}}.$$

c) Bu durumda

$$p_{+}(t)=t,\quad p_{-}(t)=1;\qquad q_{+}(t)=t^{2}-1,\quad q_{-}(t)=1,$$
$$m_{+}=1,\quad n_{+}=2,\qquad x=-1;$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi .i}\int_{L}\frac{\tau}{\tau-z}d\tau+\frac{1}{2\pi .i}\int_{L}\frac{\frac{1}{\tau(\tau-1)}}{\tau-z}d\tau=\begin{cases} z & \mathrm{z}\in \mathrm{D}^{+} \text{ ise} \\ -\dfrac{1}{z(z-1)} & \mathrm{z}\in \mathrm{D}^{-} \text{ ise.}\end{cases}$$

Problemin çözümü sadece (4.23) çözülebilirlik şartları sağlandığında veya bu durumda, aşağıdaki şart sağlandığında vardır.

$$\int_{L}\frac{q_{-}(t)}{p_{-}(t)}g(\tau)d\tau=0.$$

bu integrali hesaplarsak,

$$\int_L \frac{\tau^3-\tau^2+1}{\tau^2-\tau}d\tau=\int_L \tau d\tau+\int_L \frac{d\tau}{\tau-1}-\frac{d\tau}{\tau}=0+2\pi i-2\pi i=0$$

böylece çözülebilirlik şartı sağlanır ve problemin tek çözümü

$$\varphi^+(z)=z, \varphi^-(z)=-\frac{z+1}{z^2}.$$

d) Bu durumda

$$p_+(t)=1, \quad p_-(t)=1; \qquad q_+(t)=t^2-1, \quad q_-(t)=1,$$
$$x=m_+-n_+=-2<0.$$

Problemin çözülebilirliği için, iki koşulun sağlanmalıdır:

$$\int_L \frac{q_-(t)}{p_-(t)}g(\tau)\tau^{k-1}d\tau=0 \quad (k=1,2).$$

$k=1$ için bu integrali hesaplarsak,

$$\int_L \frac{\tau^3-\tau^2+1}{\tau(\tau^2-\tau)}d\tau=\int_L\left(1-\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau^2}+\frac{1}{\tau-1}\right)d\tau=2\pi i\neq 0.$$

Böylece, çözülebilirlik şartı sağlanmadığından problemin çözümü yoktur.

Formel olarak $\Phi(z)$ fonksiyonunu hesaplasaydık, sonsuzda bir kutbu olacaktı ve dolayısıyla, $\Phi(z)$ problemin bir çözümü olamayacaktı.

5. TARTIŞMA VE BULGULAR

Tezin ikinci bölümünde çalışmamızda gerekli temel tanım ve teoremler verilmiş, üçüncü ve dördüncü bölümde ise Riemann sınır değer problemleri ve çeşitleri tanıtılarak çözümleri araştırılmıştır

Çalışmada basit bağlantılı bölgelerde analitik fonksiyonların Riemann sınır değer problemleri ele alınmış, holomorfik fonksiyonların sınır değerleri için temel koşullar verilerek problemin özel koşullar altında çözümleri incelenmiştir.

6. SONUÇ

Temel bilim dallarında önemli bir yeri olan Cauchy integral denklemlerin analitik fonksiyonlarını Riemann sınır değer problemlerinde inceledik. Basit irtibatlı bölgelerde Riemann sınır değer problemlerini analitik fonksiyonlar üzerindeki çözümlerinde indis kavramı önem kazanır. İndisin pozitif, negatif tamsayılar veya sıfır olmasına göre aynı problemin çözümünün varlığı ve tekliği değişir.

Tüm bu incelemeler analitik fonksiyonlar sınıfında yapılmış olup bu çalışmaların analitik olmayan fonksiyonlar üzerinde de yapılarak genelleştirilmesi mümkündür.

KAYNAKLAR

[1] Gılbarg, D.and Trudınger, N.S,''Elliptic Partıal differential Equations of second order'',second edition, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg,New York,Tokyo,(1983).

[2] Akın.Ü.,''On a boundary value Problem for generalized analytic functions'',Master thesis,Metu,(2000).

[3] Du, J.,On simple proofs of generalized Privalov theorem and Plemelj formulas, Math.Res. Reports, (Wuhan Univ.), Vol .5,43-50, (1980).

[4] Gakhov,F.D.,''Boundary value Problems'',translation edited by Sneddon,I.N., Dover Publications Inc. New York, (1992).

[5] Vekua. I. N., '' On a linear boundary problem of Riemann'' 16. Vol. 11 (1942).

[6] Erkoç.Z.,''Genelleştirilmiş analitik fonksiyonlar için bir sınır değer problemi'',Yüksek Lisans Tezi, Kırıkkale Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, (2005).

[7] Begehr,H.,''Approximate solution of Periodic Riemann boundary value problem for analytic functions'', Journal of computatıonal and Applied Mathematics,134,85-93, (2001).

[8] Başkan, T., ''Kompleks fonksiyonlar teorisi'', Uludağ Üniversitesi, (1998).

[9] İdemen, M., ''Kompleks değişkenli fonksiyonlar teorisi'', literatür yayıncılık, İstanbul, (1999).

[10] Lu, J.,''Boundary value problems for analytic founctions,World Scientific, series in pure Mathematics,Vol.16, Singapore, (1993).

ÖZGEÇMİŞ

1980 yılında Kars ili Selim ilçesinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Selim'de tamamladı. 1996 yılında kazandığı Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden 2000 yılında mezun olarak aynı yıl Kars GAMP Anadolu Teknik, Teknik ve Endüstri Meslek Lisesinde Matematik öğretmeni olarak göreve başladı. Şu an Kars Cumhuriyet Lisesinde Matematik öğretmeni olarak görevini sürdürmektedir.