KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

PARABOLİK TİP DENKLEM İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN İYİ KONULMASI VE ONUN NÜMERİK ÇÖZÜMÜNÜN ALGORİTMASI

Birsen KORKMAZ ERDOĞDU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

MAYIS-2008

KARS

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

PARABOLİK TİP DENKLEM İÇİN OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN İYİ KONULMASI VE ONUN NÜMERİK ÇÖZÜMÜNÜN ALGORİTMASI

Birsen KORKMAZ ERDOĞDU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

MAYIS-2008

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Birsen KORKMAZ ERDOĞDU' nun Prof. Dr. Gabil Yagubov' un danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Parabolik Tip Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması ve Onun Nümerik Çözümünün Algoritması" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy …………….. ile kabul edilmiştir.

. ... / ..... /200.

	Adı ve Soyadı	**imza**
Başkan :	………………………	....
Üye :	………………………	....
Üye :	……………………….	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../200. gün ve ..../....................... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

………………..

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada parabolik tip denklem için optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Burada incelen problemde amaç fonksiyoneli olarak Lions Fonksiyoneli kullanılmaktadır. Bu nedenle bu çalışma problem konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden farklıdır.

Tez çalışmam sırasında bana yardım ve desteklerini esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Anabilim dalı öğretim üyesi sayın danışman hocam Prof. Dr. Gabil YAGUBOV' a ve matematik anabilim Dalı Başkanı Sayın Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA hocama en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

KARS-2008

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde parabolik tip denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Çalışmanın 3.1. bölümünde Parabolik denklem için Lions Fonksiyonelli Optimal kontrol probleminin iyi konulması, sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliği ile optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait teoremler ispatlanmıştır. Çalışmanın 3.2. bölümünde Parabolik denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminde çözüm için gerek şartlar konusu altında fonksiyonelin differansiyellenebilmesi ve optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şartların elde edilmesine ait konular ele alındı. 3.2. bölümünde son olarak optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için algoritma verildi.

2008-50 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Parabolik denklem, Optimal Kontrol Problemi, Lions Fonksiyoneli, Sınır Değer Problemi

ABSTRACT

In this thesis, optimal control problem with Lions functional was taken up for parabolic type equation. In the 3.1. section of this work, for parabolic equation, at first judgments relating to existence and uniqueness of the generalized solutions of I and II type boundary value problema and known previously were given. By using these judgments, the existences of the optimal control problem solutions were proeved. In the 3.2. section of this thesis for parabolic equation and the soluion of optimal control problem questions relating to getting conditions were analyzed. For this reason, firstly differential ağabeylity of the funciton was proeved and a formula was obtained for its gradient. By using this formula, for the solution of the problem the necessity condition, in the form of variation inequality, was proved. In this part algorithm was gievn for the numeral solution of the optimal control problem taken into consideration latest.

2008 - 50 Pages

Key Words: Parabolic Equation, Optimal Control Problems, Lions Functional, Boundary Value Problems

SİMGELER DİZİNİ

Tezde kullanılan temel simgeler aşağıda gösterilmiştir:

$\forall$		herhangi
$\overset{0}{\forall}$		hemen hemen her yerde
$\delta_{\bar{t}} v_{pj}^{k} = \left(v_{pj}^{k} - v_{pj}^{k-1}\right)/\,\tau,$	p=1,2	t'ye göre sol fark
$x \in [0,\ell]$		uzay değişkeni
$\Omega_t = (0,\ell)\times(0,t)$	$\Omega = \Omega_t$	verilen sayı
$\delta_{\bar{x}} v_{pj}^{k} = \left(v_{pj}^{k} - v_{pj-1}^{k}\right)/\,h,$	p=1,2	x'e göre sol fark
$\delta_{x} v_{pj}^{k} = \left(v_{pj+1}^{k} - v_{pj}^{k}\right)/\,h,$	p=1,2	x'e göre sağ fark
$\delta_{x\bar{x}} v_{pj}^{k} = \left(v_{pj+1}^{k} - 2v_{pj}^{k} + v_{pj-1}^{k}\right)/\,h^2,$	p=1,2	x' e göre 2. mertebeden fark
$h = \dfrac{\ell}{M}, \qquad \tau = \dfrac{T}{N},$	N>0,M>0,	verilen tam sayılar
$\ell < 0$		verilen sayı
$T > 0$		verilen sayı
$T \in [0,T]$		zaman değişkeni

1. GİRİŞ

Parabolik denklemlerle ifade edilen sistemlerin optimal kontrol teorisi dağılmış parametreli sistemlerin optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Parabolik tip denklemler için optimal kontrol problemleri difüzyon ve ısı gibi süreçler incelendiğinde ortaya çıkar [1-4]. Söz konusu denklemler için optimal kontrol problemleri ile önce [1,2,4-13] çalışmalarında farklı yazarlar tarafından ele alınmıştır. Bu çalışmalarda lineer ve lineer olmayan parabolik denklemler için optimal kontrol teorisi ciddi bir biçimde geliştirilmiştir.

Sunulan bu tezde de parabolik tip denklem için optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Ancak burada incelenen problem konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden farklıdır. Bu incelenen problemde amaç fonksiyoneli olarak Lions fonksiyoneli kullanılmaktadır. Lions fonksiyoneli tipli fonksiyoneller ilk kez Fransız matematikçisi Lions tarafından sunulmuştur[5]. Bu tipli fonksiyoneller denklemin katsayılarıyla kontrol sistemleri için optimal kontrol problemlerinde ilk kez Iskenderov' un çalışmalarında sunulmuş ve analiz edilmiştir[14]. Sonraları ise Lions fonksiyoneli tipli fonksiyoneller Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemlerinde Iskenderov ve Mahmudov' un çalışmalarından sıkça kullanılmıştır.[15-16]. Parabolik tip denklemler için optimal kontrol problemlerinde bu türlü fonksiyonellerin çok az kullanılmasından dolayı sunulan problemin incelenmesi gerek teorik, gerekse pratik açıdan önem taşır.

Tezin içeriği materyal ve yöntem bölümü olarak iki alt bölümden, yani 3.1, 3.2 bölümlerinden oluşmaktadır. 3.1. bölümünde ele alınan problemin iyi konulmasına ait sorular cevaplandırılmaktadır. Ele alınan problemi incelemek için ilk önce gereken sonuçlar olarak parabolik tip denklem için I. ve II. tip sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı ve bir tekliğini içeren sonuçlar verilmektedir. Bu sonuçları kullanarak optimal kontrol probleminin çözümünün varlığına ait teoremler ispatlanır.

Tezin 3.2. bölümünde parabolik tip denklem için optimal kontrol probleminde gerek şartlar incelenmektedir. Bunun içim önce sunulan amaç fonksiyonelinin differansiyellenebilmesi incelenmiş ve onun gradiyenti için formül ispatlanmıştır. Bu formülden yararlanarak problemin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şartlar incelenmiştir. Nihayet söz konusu bölümün sonunda ele alınan optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için algoritma verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1: $L_2(0,\ell)$ Hilbert Uzayı olup elemanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,\ell)} = \int_0^\ell u(x)v(x)dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0,\ell)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,\ell)}}$$

Tanım 2.2: L(Ω) Hilbert Uzayı olup elemanları **Ω** bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\phi(x,t)dxdt$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}$$

Tanım 2.3: $L_\infty(0,\ell)$ Banach uzayı olup, elemanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L_\infty(o,\ell)} = vrai\max_{x\in(0,\ell)}|u(x)|$$

Tanım 2.4: $L_\infty(0,T)$ Banach uzayı olup, elemanları [0,T] aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L_\infty(0,T)} = vrai\max_{t\in(0,T)}|u(t)|$$

Tanım 2.5: $C^0([0,T],B)$ Banach uzayı olup elemanları [0,T] aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_B$$

Tanım 2.6: $W_2^{1,0}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobelev uzayıdır, elemanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle fonksiyonlardır ki, $u, \dfrac{\partial u}{\partial x} \in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlar. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u,\phi\rangle_{w_2^{1,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left(u(x,t)\phi(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right) dxdt,$$

$$\|u\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}$$

Tanım 2.7: $W_2^{1,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobelev uzayıdır, elemanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle *u(x,t)* fonksiyonlarıdır ki, $u, \dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlar. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u,\phi\rangle_{w_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[u((x,t)\phi(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \phi(x,t)}{\partial x} \right] dxdt,$$

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^{1,1}(\Omega)}}$$

Tanım 2.8: $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Tanım 2.9: Diyelim ki B herhangi Banach uzayı, *J(u)* fonksiyoneli ise *u* noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma) = \{v : v\in B, \|v-u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_{B\to 0}} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h\rangle_B + o\langle h,u\rangle$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa, bu takdirde J(u) fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında differansiyellenebilir denir.

Tanım 2.10: Eğer B Banach uzayından olan *{u_k}* dizisi için $\forall c \in B^*$, $\lim_{k\to\infty}\langle c, u_k\rangle = \langle c, u\rangle$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde *{u_k}* dizisi ve $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 2.11: U, B Banach uzayının bir kümesi olsun. Eğer $\forall\{u_k\} \in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu takdirde U kümesine B de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.12: *J(u)* fonksiyoneli *B* Banach uzayının *U* alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\lim_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde *J(u)* fonksiyoneline *u* noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Teorem 2.13: ([12]) Diyelim ki *U, B* Banach uzayının konveks alt kümesi *J(u)* fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli differansiyellenebilir fonksiyonel ve $U_* = \{u \in U : J(u) = J_* = \inf_U J(u)\}$ kümesi *J(u)* fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u_* \in U_*$ ve $\forall u \in U$ için $\langle J'(u_*), u - u_*\rangle \geq 0$ şartı sağlanır.

Teorem 2.14: ([12]) *U, B* Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. *J(u)* fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan yarı sürekli olsun. Bu takdirde $J_* = \inf_u J(u) > -\infty$, $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \varnothing$ zayıf kompakttır ve U dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar.

Teorem 2.15 (Goebel [21]): Kabul edelim ki, $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, *U* kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, *I(v)* fonksiyoneli *U* kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve *a>0, β≥1* verilen sayılar olsun. Bu takdirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle G alt kümesi vardır ki, $\forall w \in G$ için

$$J_a(v) = I(v) + a\|v - w\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_a(v)$ fonksiyoneli için en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Parabolik Denklem İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması

Bu bölümde lineer parabolik denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin iyi konulması ile ilgili sorular incelenmektedir. Önce parabolik denklem için göz önüne alınan sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı ve bir tekliğine ait önceden bilinen hükümlerin ispatı gösterilir. Bu hükümleri kullanarak parabolik denklem için optimal kontrol probleminin varlığına ait teoremler ispatlanır. Benzer problemler telin titreşimi ve Schrödinger denklemleri için önceden [5,14,15,16] vs. çalışmalarında incelenmiştir.

3.1.1. Problemin Konulması

$\ell > 0$ ve $T>0$ verilen sayılar olmak üzere $x \in [0,\ell], t \in [0,T]$ $\Omega_t = (0,\ell) X (0,t)$, $\Omega = \Omega_T$ olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım:

$$J_\alpha = \|u_1 - u_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha \|v - w\|^2_{L_2(0,T)} \tag{3.1.1.1}$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \left\{ v = v(t) : v \in L_2(0,T), \|v(t)\|_{L_2(0,T)} \le b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - a_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + a(x) u_k + v(t) u_k = f_k(x,t), \ (x,t) \in \Omega \tag{3.1.1.2}$$

$$u_k(x,0) = \varphi_k(x), \quad x \in (0,\ell), \ k=1,2 \tag{3.1.1.3}$$

$$u_1(0,t) = u_1(\ell,t) = 0, \ t \in (0,T) \tag{3.1.1.4}$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u_2(\ell,t)}{\partial x} = 0, \ t \in (0,T) \tag{3.1.1.5}$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir.

Burada *a₀>0, b₀>0* ve *α≥0* verilen sayılar, *a(x)* ölçülebilir sınırlı fonksiyon olup,

$$0 < \mu_0 \le a(x) \le \mu_1, \ \overset{0}{\forall} x \in (0,\ell), \ \mu_0, \mu_1 = sabit \qquad (3.1.1.6)$$

şartını sağlar. $w \in L_2(0,T)$ verilen eleman, $\varphi_k(x)$, $f_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları ise aşağıdaki şartları sağlar:

$$\varphi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell), \varphi_2 \in W_2^1(0,\ell) \quad \text{k=1,2} \qquad (3.1.1.7)$$

$$f_k \in L_2(\Omega), \quad \text{k=1,2} \qquad (3.1.1.8)$$

$\forall v \in V$ için (3.1.1.2) - (3.1.1.4) şartlarından $u_1 = u_1(x,t) \equiv u_1(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması parabolik denklem için 1. tip sınır değer problemi, (3.1.1.2), (3.1.1.3), (3.1.1.5) şartlarından $u_2 = u_2(x,t) \equiv u_2(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması parabolik denklem için 2. tip sınır değer problemidir.

Tanım 3.1.1.1: $\forall v \in V$ için (3.1.1.2) - (3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümü olarak $\forall \eta_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega), \forall \eta_2 \in W_2^{1,0}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left(-\frac{\partial u_k \eta_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial \eta_k}{\partial x} + a(x) u_k \eta_k + v(t) u_k \eta_k \right) dxdt =$$

$$= \int_\Omega f_k \eta_k dxdt, \ k=1,2 \qquad (3.1.1.9)$$

integral özdeşliklerini ve $u_k(x,o) = \varphi_k(x)$, $x \in (0,\ell)$ başlangıç şartlarını sağlayan $u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega), u_2 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ fonksiyonları anlaşılır.

Tanım 3.1.1.1 anlamında (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümünü $W_2^{1,1}(\Omega)$ sınıfından olan genelleştirilmiş çözümü olarak adlandıracağız.

3.1.2. Sınır Değer Problemlerinin Genelleştirilmiş Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu alt bölümde [17-19] çalışmalarından bildiğimiz (3.1.1.2) - (3.1.1.5) sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve bir tekliğine ait olan hükümleri vereceğiz. Bu amaçla önce parabolik denklem için aşağıdaki birinci tip sınır değer problemini göz önüne alalım.

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u + v(t)u = f_1(x,t),\ (x,t) \in \Omega \tag{3.1.2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi_1(x),\ \ x \in (0,\ell), \tag{3.1.2.2}$$

$$u(0,t) = u(\ell,t) = 0,\ \ t \in (0,T) \tag{3.1.2.3}$$

Burada $a_0,\ a(x),\ \varphi_1(x),\ f_1(x,t)$ verilenleri 3.1.1. alt bölümündeki şartları sağlar.

Tanım 3.1.2.1: $\forall v \in V$ için (3.1.2.1) - (3.1.2.3) sınır değer probleminin çözümü olarak $\forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\eta + a_0 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + a(x)u\eta + v(t)u\eta \right) dxdt =$$

$$= \int_\Omega f_k \eta dxdt$$

integral özdeşliğini $u(x,0) = \varphi_1(x), x \in (0,\ell)$ başlangıç şartını sağlayan $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan *u=u(x,t)=u(x,t;v)* fonksiyonu anlaşılır.

Teorem 3.1.2.1: Farz edelim ki, $a(x),\ \varphi_1(x),\ f_1(x,t)$ fonksiyonları (3.1.1.6) - (3.1.1.8) şartlarını sağlasın. Bu takdirde $\forall v \in V$ için (3.1.2.1) - (3.1.2.3) sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek genelleştirilmiş çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir.

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_0 \left(\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,\ell)} + \|f_1\|_{L_2(\Omega)} \right)$$

burada $c_0>0$ sayısı φ_1 ve f_1 den bağımsızdır.

İspat: Önce (3.1.2.1) - (3.1.2.3) sınır değer probleminin çözümünün varlığını ispatlayalım. Bu amaçla Galerkin metodunu kullanalım. Farz edelim ki; $u_k = u_k(x)$, k=1,2,… sistemi $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayında temel fonksiyonlar sistemi olsun ve $(u_k, u_m)_{L_2(0,\ell)} = \delta_{km}$ şartı sağlansın. Burada δ_{km} Kronecker sabitleridir, yani

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \quad k, m = 1,2,... \end{cases}$$

söylemek gerekir ki, $u_k=u_k(x)$, *k=1,2,…* temel fonksiyonlar sistemi olarak

$$LX = \lambda X \tag{3.1.2.6}$$

$$X(0) = X(\ell) = 0 \tag{3.1.2.7}$$

Sturm-Liouville probleminin $\lambda=\lambda_k$, *k=1,2,…* öz değerlerine karşılık gelen $X=u_k(x)$, *k=1,2,…* öz fonksiyonları sistemi kullanılabilir. Bildiğimiz gibi , $u_k=u_k(x)$, *k=1,2,…*öz fonksiyonlar sistemi $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ de

$$(Lu_k, u_m)_{L_2(0,\ell)} = \int_0^\ell \left(a_0 \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx} + a(x) u_k u_m \right) dx = \lambda_k \delta_{km}, \qquad \text{k,m=1,2,…} \tag{3.1.2.8}$$

ortogonallik şartlarını sağlar. λ_k, *k=1,2,…* sayıları ise pozitif sayılar olup

$$0< \lambda_1<\lambda_2<\ldots\ldots< \lambda_k<\ldots\ldots \tag{3.1.2.9}$$

şartlarını sağlar. Burada

$$L = -a_0 \frac{d^2}{dx^2} + a(x) \tag{3.1.2.10}$$

biçiminde olan operatördür.

(3.1.2.1) - (3.1.2.3) sınır probleminin yaklaşık çözümünü

$$u^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)u_k(x) \tag{3.1.2.11}$$

biçiminde arayalım. $C_k^N(t)$ fonksiyonlarını aşağıdaki sistemden bulalım:

$$\int_0^{\ell}\frac{\partial u^N}{\partial t}u_k(x)dx+\int_0^{\ell}a_0\frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{du_k}{dx}+\int_0^{\ell}a(x)u^N u_k(x)dx+$$

$$\int_0^{\ell}v(t)u^N u_k(x)dx=\int_0^{\ell}f_1(x,t)u_k(x)dx, \qquad k=\overline{1,N} \tag{3.1.2.12}$$

$$C_k^N(0)=\alpha_k^N, \tag{3.1.2.13}$$

Görüldüğü gibi (3.1.2.12) eşitlikleri $C_k^N(t)$ bilinmeyenlerinin t'ye göre birinci mertebeden adi diferansiyel denklemler sistemidir. Bu denklemler $\{u_k(x)\}$ sistemi ortonormallik şartını sağladığından birinci mertebeden türeve göre çözülmüş lineer diferansiyel denklemlerdir. Kabul edilen şartlar altında (3.1.2.12), (3.1.2.13) Cauchy probleminin bir tek çözümü vardır[17].

Önce $u^N(x,t)$ ve $\frac{\partial u^N}{\partial x}$ için kestirim elde edelim. Bu amaçla (3.1.2.12) eşitliklerini $C_k^N(t)$ye çarpıp k üzerinden 1' den N' e kadar toplayıp (0,t) üzerinde integralleyelim. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\int_0^t\int_0^{\ell}\left[\frac{\partial u^N}{\partial t}u^N+a_0\frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{\partial u^N}{\partial x}+a(x)\left(u^N\right)^2+\right.$$

$$\left.v(t)\left(u^N\right)^2\right]dxdt=\int_0^t\int_0^{\ell}f_1(x,t)u^N(x,t)dxdt$$

Bu eşitlikten kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(u^N(x,t)\right)^2dx+a_0\int_0^t\int_0^{\ell}\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2+\mu_0\int_0^t\int_0^{\ell}\left(u^N\right)^2+\leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^{\ell}\left(u^N(x,0)\right)^2 dx + \int_0^t\int_0^{\ell}|v(\tau)|\left(u^N\right)^2 dxd\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^{\ell}|f_1(x,\tau)|\left|u^N(x,\tau)\right|dxd\tau$$

Burada

$$u^N(x,0)=\sum_{k=1}^{N}C_k^N(0)u_k(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{N}\varphi_k u_k(x),$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\left\|u^N(x,0)\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 \leq \left\|\varphi_1\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 \tag{3.1.2.14}$$

eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz.

$$\frac{1}{2}\left\|u^N(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 + a_0\left\|\frac{\partial u^N}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \mu_0\left\|u^N\right\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left\|\varphi_1\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 + \int_0^t\int_0^{\ell}|f_1(x,\tau)|\left|u^N(x,\tau)\right|dxd\tau$$

$$+\underset{0\leq\tau\leq t}{vrai\max}\left\|u^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,\ell)}^2\int_0^t|v(\tau)|d\tau$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terime ε-Cauchy eşitsizliğini uygularsak, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\frac{1}{2}\left\|u^N(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)}^2 + a_0\left\|\frac{\partial u^N}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega_t)}^2 + \mu_0\left\|u^N\right\|_{L_2(\Omega_t)}^2 \leq$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2}\left\|u^N\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{1}{2}\left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + \frac{1}{2\varepsilon}\left\|f_1\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}$$

$$+\int_0^t |v(\tau)|d\tau \, vrai\max_{0\le\tau\le t}\left\|u^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}$$

Burada $\varepsilon = \mu_0$ seçersek kolaylıkla

$$\frac{1}{2}\left\|u^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + a_0\left\|\frac{\partial u^N}{\partial x}\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{\mu_0}{2}\left\|u^N\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + \frac{1}{2\mu_0}\left\|f_1\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} +$$

$$+\sqrt{t}\, vrai\max_{0\le\tau\le t}\left\|u^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}$$

Burada $a_0>0$, $\mu_0>0$ olduğundan sol tarafta yer alan 2. ve 3. terimleri atabiliriz. Bu takdirde sonunca eşitlikten

$$\left\|u^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le \left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{1}{\mu_0}\left\|f_1\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} +$$

$$+2\sqrt{t}b_0\, vrai\max_{0\le\tau\le t}\left\|u^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,\ell)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikten kolaylıkla

$$vrai\max_{0\le\tau\le t}\left\|u^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le$$

$$\le \left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + \frac{1}{\mu_0}\left\|f_1\right\|^2_{L_2(\Omega_t)} +$$

$$+\alpha\sqrt{t}b_0\, vrai\max_{0\le\tau\le t}\left\|u^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}$$

Burada

$$t < t_1 = \frac{1}{4b_0^{\,2}}$$

$$\underset{0\le\tau\le t}{vrai\max}\left\|u^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le$$

$$\le \left(1-2\sqrt{t}\,b_0\right)^{-1}\left(\left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + \left\|f_1\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\right) \tag{3.1.2.15}$$

[0,T] aralığını uzunluğu $\frac{1}{2}t_1$’ den büyük olmayan $\Delta_1 = \left[0, \frac{1}{2}t_1\right]$, $\Delta_2 = \left[\frac{1}{2}t_1, t_1\right], \ldots,$ Δ_N aralıklarına bölelim. Bu takdirde her bir $t \in \Delta_k$, $k = \overline{1,N}$ için

$$\underset{0\le\tau\le t}{vrai\max}\left\|u^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le$$

$$\le c(t)\left(\left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + \left\|f_1\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\right), \qquad \forall t \in [0,T] \tag{3.1.2.16}$$

$c_1 = \max\limits_{0\le t\le T} c(t)$ olsun.

$$\left\|u^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le c_1\left(\left\|\varphi_1\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + \left\|f_1\right\|^2_{L_2(\Omega_t)}\right), \qquad \forall t \in [0,T] \tag{3.1.2.17}$$

kestirimi elde edilir.

Şimdi $\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}$ için kestirim elde edelim. Bunun için (3.1.2.12) eşitliklerinden her birini $\frac{dC_k^N(t)}{dt}$ ye çarpıp k üzerinden 1’ den N’ e kadar toplayalım.

$$\int_0^\ell \frac{\partial u^N}{\partial t}\frac{\partial u^N}{\partial t}dx + \int_0^\ell a_0\frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{\partial^2 u^N}{\partial t\partial x}dx + \int_0^\ell a(x)u^N\frac{\partial u^N}{\partial t}dx =$$

$$= -\int_0^\ell v(t)u^N\frac{\partial u^N}{\partial t}dx + \int_0^\ell f_1(x,t)\frac{\partial u^N}{\partial t}(x,t)dx$$

Buradan aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\ell\left[\left(\frac{\partial u^{:N}}{\partial t}\right)^2+a_0\left(\frac{\partial u^N}{\partial x}\right)^2+a(x)\left(u^N\right)^2\right]dx=$$

$$=-\int_0^\ell v(t)u^N\frac{\partial u^N}{\partial t}dx+\int_0^\ell f_1\frac{\partial u^N}{\partial t}dx$$

bu eşitliğin her iki tarafını (0,t) aralığı üzerinden integrallemiş olursak ve *a(x)*' in sağladığı şartı kullanırsak:

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\ell\left[\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial t}\right)^2+a_0\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\mu_0\left(u^N(x,t)\right)^2\right]dxd\tau\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int_0^\ell\left[a_0\left(\frac{\partial u^N(x,0)}{\partial x}\right)^2+\mu_1\left(u^N(x,0)\right)^2\right]dx+$$

$$+\int_0^t\int_0^\ell|v(t)|\left|u^N\right|\left|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right|dxd\tau+\int_0^t\int_0^\ell|f_1(x,\tau)|\frac{\partial u^N(x,\tau)}{\partial\tau}dxd\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini sağ tarafın sonuncu terimi için uygularsak

$$\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\ell\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2dxd\tau+c_2\int_0^\ell\left[\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\left(u^N(x,t)\right)^2\right]dx\le$$

$$\le\frac{1}{2}\int_0^\ell\left[a_0\left(\frac{\partial u^N(x,t)}{\partial x}\right)^2+\mu_1\left(u^N(x,t)\right)^2dx+\right.$$

$$+\int_0^t\int_0^\ell|v(t)|\left|u^N\right|\left|\frac{\partial u^N}{\partial\tau}\right|dxd\tau+\int_0^t\int_0^\ell\left(f_1(x,\tau)\right)^2dxd\tau$$

burada $c_2=\min(1,a_0,\mu_0)$ dir.

Bu eşitliğin sol tarafının 3. terimine ε-Cauchy eşitsizliğini uygularsak bu takdirde

$$\frac{1}{2}\int_0^t \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,\ell)} d\tau + c_2\left(\left\|\frac{\partial u^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + \left\|u^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}a_0\left\|\frac{\partial u^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + \frac{1}{2}\mu_1\left\|u^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} +$$

$$+\|f_1\|^2_{L_2(\Omega_t)} + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^t \left\|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,\ell)} d\tau +$$

$$+\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t\int_0^\ell \left(|v(\tau)|\left|u^N(x,\tau)\right|\right)^2 dx d\tau$$

Burada $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$ seçersek kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\frac{1}{4}\int_0^t \left\|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,\ell)} d\tau + c_2\left(\left\|\frac{\partial u^N(.,t)}{\partial dx}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\right) + \left\|u^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}a_0\left\|\frac{\partial u^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + \frac{1}{2}\mu_1\left\|u^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + b_0^2 \times$$

$$\times vrai\max_{0\leq\tau\leq t}\left\|u^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,\ell)}, \qquad \forall t \in [0,T]$$

Burada (3.2.1.17) kestirimini kullanırsak

$$\frac{1}{4}\int_0^t \left\|\frac{\partial u^N}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,\ell)} d\tau + c_2\left(\left\|\frac{\partial u^N(.,t)}{\partial dx}\right\|^2_{L_2(0,\ell)}\right) + \left\|u^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}a_0\left\|\frac{\partial u^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,\ell)} + \frac{1}{2}\mu_1\left\|u^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,\ell)} +$$

$$b_0^2 c_1\left(\|\varphi\|^2_{L_2(0,\ell)} + \|f_1\|^2_{L_2(\Omega_t)}\right), \qquad \forall t \in [0,T] \qquad (3.1.2.18)$$

Kolaylıkla

$$\left\| \frac{\partial u^N(.,0)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le c_3 \left\| \varphi_1 \right\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,\ell)} \tag{3.1.2.19}$$

eşitsizliğini ispatlayabiliriz. Öte yandan (3.2.1.14) ve (3.2.1.19) eşitsizliğini (3.2.1.18) de dikkate alırsak bu takdirde

$$\frac{1}{4}\int_0^t \left\| \frac{\partial u^N}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,\ell)} dt + c_2 \left(\left\| \frac{\partial u^N(.,t)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,\ell)} \right) + \left\| u^N(.,t) \right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le$$

$$\le c_4 \left\| \varphi_1 \right\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,\ell)} + \left\| f_1 \right\|^2_{L_2(\Omega_t)}, \qquad \forall t \in [0,T]$$

Burada $c_5 = \min\left(\frac{1}{4}, c_2 \right)$ dir. Kolaylıkla

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u^N}{\partial t}(.,\tau) \right\|_{L_2(0,\ell)} d\tau + \left\| \frac{\partial u^N}{\partial x}(.,t) \right\|^2_{l_2(0,\ell)} + \left\| u^N(.,t) \right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le$$

$$\le c_6 \left(\left\| \varphi_1 \right\|_{\overset{0}{W}{}^1_2(0,\ell)} + \left\| f_1 \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right) \quad t \in [0,T], \ \text{N=1,2,...} \tag{3.1.2.20}$$

Buradan iki eşitlik elde ederiz.

$$\int_0^t \left\| \frac{\partial u^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,\ell)} dt \le c_6 \left(\left\| \varphi_1 \right\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2} + \left\| f_1 \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right) \tag{3.1.2.21}$$

$$\left\| \frac{\partial u^N(.,t)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,\ell)} + \left\| u^N(.,t) \right\|^2_{L_2(0,\ell)} \le c_6 \left(\left\| \varphi_1 \right\|^2_{\overset{0}{W}{}^1_2} + \left\| f_1 \right\|^2_{L_2(\Omega)} \right), \ \forall t \in [0,T] \tag{3.1.2.22}$$

(3.1.2.22) nin her iki tarafını (0,T) aralığı üzerinden integralleyip (3.1.2.22) ile taraf tarafa toplarsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz.

$$\left\|u^N\right\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \leq c_7\left(\left\|\varphi_1\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,\ell)} + \left\|f_1\right\|_{L_2(\Omega)}\right), \qquad N=1,2,\ldots \tag{3.1.2.23}$$

Burada $c_7 > 0$ sayısı N, φ_1 ve f_1' den bağımsızdır. (3.1.2.23) kestirimine göre $\{u^N\}$, N=1,2,… dizisi $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayının normunda düzgün sınırlıdır. Bu takdirde $\{u^N\}$ dizisinden $W_2^{1,1}(\Omega)$ da $u \in W_2^{1,1}(\Omega)$ elemanına zayıf yakınsayan $\{u^{N_m}\}$ alt dizisini seçebiliriz. Bu zayıf yakınsayan alt diziyi yeniden $\{u^N\}$ ile gösterelim. Bu takdirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz.

$N \to \infty$ için

$$u^N \to u \qquad \text{zayıf } L_2(\Omega) \text{ da,} \tag{3.1.2.24}$$

$$\frac{\partial u^N}{\partial x} \to \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{zayıf } L_2(\Omega) \text{ da,} \tag{3.1.2.25}$$

$$\frac{\partial u^N}{\partial t} \to \frac{\partial u}{\partial t} \qquad \text{zayıf } L_2(\Omega) \text{ da,} \tag{3.1.2.26}$$

$W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayının $C^0([0,T]L_2(0,\ell))$' e kompakt gömülmesinden $N \to \infty$ için $\forall t \in (0,T)$ için

$$u^N(.,t) \to u(.,t) \text{ kuvvetli } L_2(0,\ell) \text{ de} \tag{3.1.2.27}$$

limit bağıntısı geçerlidir; yani yakınsama t' ye göre düzgündür.

Diğer yandan $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(\Omega)$' ya kompakt gömüldüğünden $N \to \infty$ için

$$u^N \to u \text{ kuvvetli } L_2(\Omega) \text{ da} \tag{3.1.2.28}$$

limit bağıntısı geçerlidir.

Şimdi limit fonksiyonu olan $u = u(x,t)$' nin (3.1.2.1) - (3.1.2.3) probleminin genelleştirilmiş çözümü olduğunu gösterelim. Önce *u(x,t)* fonksiyonunun başlangıç şartı, yani u(x,t)=φ(x), $x \in (0,\ell)$ şartını sağladığını ispatlayalım. Gerçekten (3.1.2.27) limit bağıntısını $u^N(x,0)$' in $\varphi_1(x)$' e $L_2(0,\ell)$' de yakınsadığını ve

$$\int_0^\ell |u(x,0)-\varphi_1(x)|^2 dx \le 2\int_0^\ell |u^N(x,0)-\varphi_1(x)|^2 dx +$$

$$2\int_0^\ell |u(x,0)-u^N(x,0)|^2 dx$$

eşitsizliğini kullanırsak, kolaylıkla *u(x,t)* fonksiyonunun göz önüne alınan başlangıç şartını sağlamasını elde ederiz. Şimdi *u(x,t)* fonksiyonunun (3.1.2.4) integral özdeşliğini sağlamasını ispatlayalım. Bunun için (3.1.2.12) denklemlerinden her birini $d_k(T)=0$ şartını sağlayan $W_2^1(0,T)$ ' den olan $d_k(t)$ fonksiyonuna çarpıp, elde edilen eşitlikleri k üzerinden 1' den $N^1 \le N$ ' e kadar toplayıp- sonra (0,T) üzerinden integrallemiş olursak, kısmi integrasyon yardımıyla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_\Omega \left[-\frac{\partial u^N}{\partial t}\eta^{N^1} + a_0 \frac{\partial u^N}{\partial x}\frac{\partial \eta^{N^1}}{\partial x} + a(x)u^N\eta^{N^1} + v(t)u^N\eta^{N^1} \right] dxdt$$

$$= \int_\Omega f\eta^{N^1} dxdt \tag{3.1.2.29}$$

Burada $\eta^{N^1} = \sum_{k=1}^{N^1} d_k(t)u_k(x)$ ' dir. Görüldüğü gibi (3.1.2.29) eşitliği $\forall \eta^{N^1}$ için geçerlidir. Yani (3.1.2.21) bağıntısı özdeşliktir. Bu biçimde olan η^{N^1} ler kümesini W_N ile gösterelim. $\bigcup_{N=1}^{\infty} W_N$ kümesi $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayında her yerde yoğundur. Bu nedenle $N \to \infty$ için (3.1.2.21)' de üstte elde edilen yakınsamaları göz önüne alarak limite geçersek *u(x,t)* limit fonksiyonunun (3.1.2.4) integral özdeşliğini $\forall \eta \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ $\eta(x,T)=0$ için sağladığını ispatlamış oluyoruz.

Böylece $u=u(x,t)$ limit fonksiyonu $\forall v \in V$ için (3.1.2.1) - (3.1.2.3) sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ da genelleştirilmiş çözümü olduğunu elde ederiz. Bunun yanı sıra $c_0=c_4$ gösterip (3.1.2.15) de limite geçerek, (3.1.2.5) kestiriminin geçerli olduğu ispatlanır. (3.1.2.1) - (3.1.2.3) çözümünün bir tekliği direkt olarak (3.1.2.5) kestiriminden elde edilir.

Böylece (3.1.2.1) - (3.1.2.3) sınır değer probleminin çözümünün bir tek olduğu ispatlanmış oldu. Teorem 3.1.2.1 ispatlandı.

Şimdi parabolik denklem için aşağıdaki ikinci tip sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u + v(t)u = f_2(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \qquad (3.1.2.30)$$

$$u(x,o) = \varphi_2(x), \qquad x \in (0,\ell) \qquad (3.1.2.31)$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = 0, \qquad t \in (0,T) \qquad (3.1.2.32)$$

burada a_0, $a(x)$, $\varphi_2(x)$, $f_2(x,t)$ verileri 3.1.1. alt bölümündeki şartları sağlar.

Tanım 3.1.2.2. $\forall v \in V$ için (3.1.2.30) - (3.1.2.32) sınır değer probleminin çözümü olarak $\forall \eta \in W_2^{1,0}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left(-\frac{\partial u}{\partial t}\eta + a_0 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + a(x)u\eta + v(t)u\eta \right) dxdt =$$

$$= \int_\Omega f_2 \eta dxdt \qquad (3.1.2.33)$$

integral özdeşliğini $u(x,0)=\varphi_2(x)$, $x \in (0,\ell)$ başlangıç şartını sağlayan $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan $u=u(x,t)=u(x,t;v)$ fonksiyonu anlaşılır.

Teorem 3.1.2.2: Farz edelim ki, $a(x)$, $\varphi_2(x)$, $f_2(x,t)$ fonksiyonları (3.1.1.6) - (3.1.1.8) şartlarını sağlasın. Bu takdirde $\forall v \in V$ için (3.1.2.30) - (3.1.2.32) sınır değer probleminin $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek genelleştirilmiş çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir.

$$\|u\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{10}\left(\|\varphi_2\|_{W_2^1(0,\ell)} + \|f_2\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{3.1.2.34}$$

burada c_{10} sayısı φ_2, f_2'den bağımsızdır.

Bu teorem de Galerkin metodu yardımıyla ispatlanır. Ancak bir fark var ki,

$$u^N = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)u_k(x)$$

Galerkin yaklaşımlarının oluşturulmasında kullanılan temel fonksiyonlar sistemi $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayında yok, $W_2^1(0,\ell)$ uzayında baz oluşturması gerekir. $\{u^N\}$ yaklaşımlarının yakınsaması Teorem 3.1.2.1 de olduğu gibidir. Çözümün bir tekliği de aynı biçimde ispatlanır.

Böylece Teorem 3.1.2.1 ve Teorem 3.1.2.2' yi kullanarak (3.1.1.2) - (3.1.1.5) sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı ve bir tekliği için aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.1.2.3: Farz edelim ki, $a(x)$, $\varphi_k(x)$, $f_k(x,t)$ k=1,2 fonksiyonları (3.1.1.6) - (3.1.1.8) şartlarını sağlasın. Bu takdirde (3.1.1.2) - (3.1.1.5) sınır değer probleminin $u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $u_2 \in W_2^{1,1}(\Omega)$ olan bir tek çözümü vardır ve çözüm için bir sonraki kestirimler geçerlidir:

$$\|u_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_9\left(\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,\ell)} + \|f_1\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{3.1.2.35}$$

$$\|u_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{10}\left(\|\varphi_2\|_{W_2^{1}(0,\ell)} + \|f_2\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{3.1.2.36}$$

3.1.3. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

(3.1.1.1) - (3.1.1.5) optimal kontrol problemini göz önüne alalım. Bu problem için gerekli olan çözümün varlığı ve tekliği sorularını inceleyelim. Önce *α>0* için göz önüne alınan optimal kontrol probleminin bir tek çözümünün varlığını ispatlayalım.

Teorem 3.1.3.1: $L_2(0,T)$ uzayında her yerde yoğun olan öyle bir G alt kümesi vardır ki, $\forall w \in G$ ve *α>0* için (3.1.1.1) - (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat: Önce $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım. Fonksiyonelin tanımına göre $J_0(v)$ aşağıdaki gibidir.

$$J_0(v) = \int_\Omega |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^2 \, dxdt \tag{3.1.3.1}$$

$\Delta v \in L_2(0,T)$ artışı $v + \Delta v \in V$ olacak şekilde herhangi $v \in V$ elemanına verilen bir artış olsun. Bu takdirde (3.1.1.2)-(3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümü olan $u_k = u_k(x,t) \equiv u_k(x,t;v)$, k=1,2 fonksiyonları $\Delta u_k = \Delta u_k(x,t) \equiv u_k(x,t;v+\Delta v) - u_k(x,t;v)$ artışına sahip olacaktır. Burada $u_k(x,t;v+\Delta v)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.1.2) - (3.1.1.5) sınır değer probleminin $v + \Delta v \in V$ elemanına karşılık gelen çözümüdür. (3.1.1.2) - (3.1.1.5) şartlarından $\Delta u_k = \Delta u_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarının aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olduğunu kolaylıkla elde ederiz.

$$\frac{\partial \Delta u_k}{\partial t} - a_0 \frac{\partial^2 \Delta u_k}{\partial x^2} + a(x)\Delta u_k + (v + \Delta v)\Delta u_k =$$

$$= -\Delta v u_k, \qquad \text{k=1,2} \quad ((x,t) \in \Omega), \tag{3.1.3.2}$$

$$\Delta u_k(x,0) = 0, \qquad \text{k=1,2} \quad x \in (0,\ell) \tag{3.1.3.3}$$

$$\Delta u_1(0,t) = \Delta u_1(\ell,t) = 0, \qquad t \in (0,T) \tag{3.1.3.4}$$

$$\frac{\partial \Delta u_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \Delta u_2(\ell,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0,T) \tag{3.1.3.5}$$

Burada $u_k = u_k(x,t) \equiv u_k(x,t;v)$, *k=1,2* fonksiyonları (3.1.1.2) - (3.1.1.5) sınır değer probleminin $v \in V$ ye karşılık gelen çözümüdür. Söylemek gerekir ki, (3.1.3.2) - (3.1.3.5) sınır değer problemi (3.1.1.2) - (3.1.1.5) problemleri gibidir. Bu nedenle (3.1.1.2)-(3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümüne ait olan düşünceleri kullanarak $\Delta u_k = \Delta u_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları için aşağıdaki kestirimlerin geçerli olduğunu elde ederiz.

$$\|\Delta u_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{11}\|\Delta v u_1\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.1.3.6}$$

$$\|\Delta u_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{12}\|\Delta v u_2\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.1.3.7}$$

burada $c_{11}>0$, $c_{12}>o$ sayıları Δv 'den bağımsızdır. $u_k \in W_2^{1,1}(\Omega)$olduğunu göz önüne alırsak ve

$$\max_{0\le t\le T}\|u_k(.,t)\|_{L_2(0,\ell)} \le c_{13}\|u_k\|_{W_2^{1,1}(\Omega)}, \qquad k=1,2 \tag{3.1.3.8}$$

eşitsizliğini kullanırsak, kolaylıkla

$$\|\Delta u_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{14}\|\Delta v\|_{L_2(0,T)} \tag{3.1.3.9}$$

$$\|\Delta u_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{15}\|\Delta v\|_{L_2(0,T)} \tag{3.1.3.10}$$

kestirimlerini ispatlayabiliriz. Burada $c_{14}>0>$, $c_{15}>o$ sayıları Δv 'den bağımsızdır. Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin artışını bulalım. (3.1.3.1) formülünü kullanırsak aşağıdaki formülü kolaylıkla elde ederiz.

$$\Delta J_0(v) = J_0(v+\Delta v) - J_0(v) =$$

$$= 2\int_\Omega (u_1(x,t)) - u_2(x,t)(\Delta u_1(x,t) - \Delta u_2(x,t))dxdt +$$

$$+ \|\Delta u_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_2\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\int_\Omega \Delta u_1(x,t)\Delta u_2(x,t)dxdt \tag{3.1.3.11}$$

Burada Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayıp (3.1.2.35), (3.1.2.36) kestirimlerini kullanırsak,

$$\left|\Delta J_0(v)\right| \le c_{16}\left(\left\|\Delta u_1\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\Delta u_2\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\Delta u_1\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\Delta u_2\right\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Bu eşitsizlikte (3.1.3.9), (3.1.3.10) kestirimlerini uygularsak bir sonraki kestirim elde edilir:

$$\left|\Delta J_0(v)\right| \le c_{17}\left(\left\|\Delta v\right\|_{L_2(0,T)} + \left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,T)}\right)$$

burada $c_{17}>0$ sayısı Δv' den bağımsızdır. Bu eşitsizlikte $\left\|\Delta v\right\|_{L_2(0,T)} \to 0$ için limite geçersek $\Delta J_0(v) \to 0$ limit bağıntısı ispatlanmış olur. Dolayısıyla $J_0(v)$ fonksiyoneli herhangi $v \in V$ noktasında süreklidir, yani $J_0(v)$ V kümesi üzerinde süreklidir. Diğer yandan $J_0(v) \ge 0,\ \forall v \in V$, yani $J_0(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinden alttan sınırlıdır. Tanıma göre V kümesi $L_2(0,T)$ uzayında kapalı ve sınırlı kümedir. $L_2(0,T)$ uzayı ise Hilbert uzayı olduğundan düzgün konveks uzaydır [20].

$$I(v) = J_0(v), \quad \tilde{X} = L_2(0,T), \quad U=V$$

almış olursak kuramsal temeller bölümündeki Teorem 2.15' in şartlarının sağlandığını görürüz [21]. Bu takdirde kuramsal temellerindeki teorem 2.15' in hükmünü kullanmış olursak, $L_2(0,T)$ uzayında her yerde yoğun olan G alt kümesi bulunur ki, $\forall w \in G$ için $\alpha > 0$ olduğu takdirde (3.1.1.1) - (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğu elde edilir. Teorem 3.1.3.1. ispatlandı.

Şimdi (3.1.1.1) - (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin en azından bir çözüme sahip olmasını gösterelim.

Teorem 3.1.3.2: Farz edelim ki, $a(x)$, $\varphi_k(x)$, $f_k(x,t)$, $k=1,2$ fonksiyonları (3.1.1.6) - (3.1.1.8) şartlarını sağlasın. $w \in L_2(0,T)$ verilen eleman olsun. Bu takdirde (3.1.1.1) - (3.1.1.5) optimal kontrol problemi $\alpha \ge 0$ için en azından bir çözüme sahiptir.

İspat: Herhangi $\{v^m\} \in V$ minimalleştirici dizisini alalım:

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha\left(v^m\right) = J_{\alpha^*} = \inf_{v\in V} J_\alpha(v)$$

her bir $v^m \in V$, *m=1,2,…* için (3.1.1.2) - (3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümünü

$$u_k^m = u_k^m(x,t) \equiv u_k\left(x,t;v^m\right),\ k=1,2$$

gibi gösterelim. Teroem 3.1.2.3' e göre her bir $v^m \in V$, *m=1,2,…* için (3.1.1.2) - (3.1.1.5) sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirimler geçerlidir.

$$\left\|u_1^m\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_9\left(\left\|\varphi_1\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,\ell)} + \left\|\psi_1\right\|_{L_2(0,\ell)} + \left\|f_1\right\|_{L_2(\Omega)}\right) = c_{18},\ \text{m=1,2,…} \tag{3.1.3.12}$$

$$\left\|u_2^m\right\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{10}\left(\left\|\varphi_2\right\|_{W_2^{1}(0,\ell)} + \left\|\psi_2\right\|_{L_2(0,\ell)} + \left\|f_2\right\|_{L_2(\Omega)}\right) = c_{19},\ \text{m=1,2,…} \tag{3.1.3.13}$$

Burada $c_{18}>0$, $c_{19}>0$ sabitleri *m*' den bağımsızdır. V kümesi $L_2(0,T)$ uzayında kapalı sınırlı konveks küme olduğundan $\{v^m\} \in V$ dizisinden bu uzayda $v \in L_2(0,T)$ elemanına zayıf yakınsayan $\{v^{m_k}\}$ alt dizisi seçilebilir. Bu alt diziyi kolaylık için yeniden $\{v^m\}$ ile gösterelim. Bu takdirde $m \to \infty$ için

$$v^m \to v,\ L_2(0,T)\text{' de zayıf .} \tag{3.1.3.14}$$

V kümesi $L_2(0,T)$ uzayında kapalı sınırlı ve konveks kümedir. Bu takdirde [22] çalışmasından bildiğimiz ilgili teoreme göre V kümesi $L_2(0,T)$' de zayıf kapalı küme olur. Yani $v \in V$ ' dir bu nedenle (3.1.3.14) limit bağıntısından aşağıdaki limit bağıntısını elde ederiz:

$m \to \infty$ için

$$\int_0^T v^m(t)q(t)dt \to \int_0^T v(t)q(t)dt,\ \ \forall q \in L_2(0,T). \tag{3.1.3.15}$$

(3.1.3.12) - (3.1.3.13) kestirimlerinden görüldüğü üzere $\{u_k^m\}$, k=1,2 dizileri sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzaylarının normlarında m' ye göre düzgün sınırlıdırlar. Bu takdirde

$\{u_k^m\}$, $k=1,2$ dizilerinden $\varphi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $\varphi_2 W_2^{1,1}(\Omega)$ elemanlarına zayıf yakınsayan alt diziler seçmek mümkündür. Kolaylık olsun diye yakınsayan alt dizileri yeniden $\{u_k^m\}$, $k=1,2$ ile gösterelim. Böyle olduğu takdirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz. $m \to \infty$ için

$$u_k^m \to u_k, \qquad L_2(\Omega)\text{'da zayıf} \tag{3.1.3.16}$$

$$\frac{\partial u_k^m}{\partial x} \to \frac{\partial u_k}{\partial x}, \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf} \tag{3.1.3.17}$$

$$\frac{\partial u_k^m}{\partial t} \to \frac{\partial u_k}{\partial t}, \quad L_2(\Omega)\text{'da zayıf} \tag{3.1.3.18}$$

k=1,2 limit bağıntıları geçerlidir. $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayları $L_2(\Omega)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$u_k^m \to u_k, \qquad L_2(\Omega) \text{ kuvvetli } k=1,2 \tag{3.1.3.19}$$

limit bağıntısını elde ederiz..

$\{u_1^m\}$, $\{u_2^m\}$ dizilerinin elemanları (3.1.1.2)-(3.1.1.5) sınır değer probleminin sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzaylarına ait genelleştirilmiş çözümleri olduğundan her bir m=1,2,… için aşağıdaki integral özdeşliklerinin sağlandığını elde ederiz:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[-\frac{\partial u_k^m}{\partial t}\eta_k + \frac{\partial u_k^m}{\partial x}\frac{\partial \eta_k}{\partial x} + a(x)u_k^m\eta_k + v^m(t)u_k^m\eta_k \right] dxdt = \\ &\quad = \int_0^\ell \varphi(x)\eta_k(x,0)dx + \int_\Omega f_k(x,t)\eta_k(x,t)dxdt, k=1,2,\end{aligned} \tag{3.1.3.20}$$

$\forall \eta_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$, $\forall \eta_2 \in W_2^{1,0}(\Omega)$,

Bunun yanı sıra

$$u_k^m(x,0)=\varphi_k(x),\ \text{k=1,2} \tag{3.1.3.21}$$

şartlarını da sağlamaktadır. (3.1.3.16) - (3.1.3.18) limit bağıntılarını kullanarak, $m\to\infty$ için

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\left(-\frac{\partial u_k^m}{\partial t}\eta_k+a_0\frac{\partial u_{p,k}^m}{\partial x}\frac{\partial \eta_k}{\partial x}+a(x)u_k^m\eta_k\right)dxdt\\ &\to\int_\Omega\left(-\frac{\partial u_k}{\partial t}\eta_k+a_0\frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial \eta_k}{\partial x}+a(x)u_k\eta_k\right)dxdt\end{aligned} \tag{3.1.3.22}$$

k=1,2 $\forall\eta_1\in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$, $\forall\eta_2\in W_2^{1,0}(\Omega)$, limit bağıntılarını elde ederiz.

Şimdi aşağıdaki limit bağıntılarının geçerli olduğunu ispatlayalım. $m\to\infty$ için

$$\begin{aligned}&\int_\Omega v^m(t)u_k^m(x,t)\eta_k(x,t)dxdt\to\\ &\to\int_\Omega v\ \ (t)u_k(x,t)\eta_k(x,t)dxdt, k=1,2\end{aligned} \tag{3.1.3.23}$$

Kolaylıkla aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega v^m u_k^m\eta_k dxdt=\int\left(v^m-v\right)u_k\eta_k dxdt\\ &+\int_\Omega v^m\left(u_k^m-u_k\right)\eta_k dxdt+\int_\Omega vu_k\eta_k dxdt, k=1,2\end{aligned} \tag{3.1.3.24}$$

$u_1\in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $u_2\in W_2^{1,1}(\Omega)$, $\eta_1\in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $\eta_2\in W_2^{1,1}(\Omega)$olduğundan (3.1.3.8) eşitsizliğine göre $\psi_k\eta_k\in L_2((0,T);L_1(0,\ell))$, k=1,2 şartı sağlanır. Bu takdirde (3.1.1.15) limit bağıntısını kullanarak $m\to\infty$ için

$$\int_\Omega\left(v^m-v\right)u_k\eta_k dxdt\to 0,\qquad \text{k=1,2} \tag{3.1.3.25}$$

bağıntısı ispatlanır. (3.1.3.24) eşitliğinin sağ tarafından ikinci terimi değerlendirelim. Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini kullanıp $v^m\in V$ olduğunu göz önüne alırsak:

$$\left| \int_{\Omega} v^m \left(u_k^m - u_k\right)\eta_k \, dxdt \right| \le$$

$$\le b_0 \left\| \eta_k \right\|_{L_2(\Omega)} \max_{0 \le t \le T} \left\| u_k^m(.,t) - u_k(.,t) \right\|_{L_2(0,\ell)}, \text{ k=1,2, m=1,2,\ldots}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayları $C^0\left((0,T), L_2(0,\ell)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünden t' ye göre düzgün olarak $m \to \infty$ için

$$\left\| u_k^m(.,t) - u_k(.,t) \right\|_{L_2(0,\ell)} \to 0 \qquad (3.1.3.26)$$

limit bağıntısı geçerlidir. Bu limit bağıntısını üstteki eşitsizlikte dikkate alıp, $m \to \infty$ için limite geçersek

$$\lim_{m \to \infty} \int_{\Omega} v^m \left(u_k^m - u_k\right)\eta_k \, dxdt = 0, \text{ k=1,2} \qquad (3.1.3.27)$$

elde edilir. Böylece (3.1.3.25) ve (3.1.3.27) limit bağıntılarını dikkate alıp, (3.1.3.24) eşitliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçersek, (3.1.3.23) limit bağıntısının geçerli olduğunu ispatlamış oluyoruz.

(3.1.3.22) ve (3.1.3.23) limit bağıntılarını dikkate alarak (3.1.3.20) integral özdeşliklerinde limite geçersek

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \left[-\frac{\partial u_k}{\partial t}\eta_k + a_0 \frac{\partial u_k}{\partial x}\frac{\partial \eta_k}{\partial x} + a(x)u_k\eta_k + v(t)u_k\eta_k \right] dxdt = \\ &\int_0^{\ell} \psi_k(x)\eta_k(x,0)dx + \int_{\Omega} f_k(x,t)\eta_k(x,t)dxdt, k = 1,2 \end{aligned} \qquad (3.1.3.28)$$

$\forall \eta_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$, $\forall \eta_2 \in W_2^{1,0}(\Omega)$, integral özdeşliklerinin geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece $\left\{u_k^m\right\}$, k=1,2 dizilerinin limit fonksiyonları olan *u_k, k=1,2* fonksiyonlarının (3.1.3.28) integral özdeşliklerini sağladığını elde ediyoruz. İspatı tamam erdirmek için; *$u_k(x,t)$, k=1,2* fonksiyonlarının *$u_k(x,0)=\varphi_k(x,0)$, k=1,2* şartlarını sağlamasını göstermek yeterlidir.

(3.1.3.26) limit bağıntılarını ve

$$u_k^m(x,0)=\varphi_k(x),\ \text{k=1,2,} \qquad \text{m=1,2,}\ldots \tag{3.1.3.29}$$

başlangıç şartlarını kullanırsak,

$$\int_0^\ell |u_k(x,0)-\varphi_k(x)|^2\,dx \le 2\int_0^\ell |u_k(x,0)-u_k^m(x,0)|^2\,dx +$$

$$\int_0^\ell |u_k^m(x,0)-\varphi_k(x)|^2\,dx,\ \text{k=1,2}$$

eşitsizliğinde limite geçersek,

$$u_k(x,0)=\varphi_k(x),\ \text{k=1,2,} \qquad \overset{0}{\forall}\, x\in(0,\ell) \tag{3.1.3.30}$$

başlangıç şartlarını elde ederiz.

Böylece $\{u_k^m\}$, k=1,2 fonksiyonlar dizisinin limit fonksiyonları olan $u_k=u_k(x,t),\ k=1,2$ fonksiyonları (3.1.1.2) - (3.1.1.5) sınır değer probleminin $\{v^m\}\in V$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v=v(t)\in V$ e karşılık gelen ve sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzaylarına ait olan (3.1.3.28) integral özdeşliklerini, (3.1.3.20) başlangıç şartlarını sağlayan çözümlerdir, yani $u_k=u_k(x,t;v)$, k=1,2 dir. $\{v^m\}\in V$ dizisi $v\in V$ elemanına zayıf yakınsadığında $\{u_k^m\}$, k=1,2 dizileri $u_k(x,t),\ k=1,2$ fonksiyonlarına zayıf yakınsar. Bu nedenle $\|u_1-u_2\|^2_{L_2(\Omega)}$, $\|v-w\|^2_{L_2(0,T)}$ normlarının alttan zayıf yarı sürekli olduğunu ve $\alpha\ge 0$ olduğunu göz önüne alırsak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz.

$$J_{\alpha^*}\le J_\alpha(v)\le \lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m)=J_{\alpha^*}$$

Bu bağıntıdan $J_{\alpha^*}=J_\alpha(v)$ olduğu ispatlanır. Yani $v\in V$ elemanı $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde minimum noktasıdır. Böylece $\alpha\ge 0$ olduğunda (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olması ispatlanmış olur. Teorem 3.1.3.2 ispatlandı.

3.2. Parabolik Denklem İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminde Çözüm İçin Gerek Şartlar

Bu bölümde parabolik denklemler için optimal kontrol probleminin çözünme ait gerek şartlarla ilgili sorular incelenmektedir. Bu nedenle önce göz önüne alınan problemde fonksiyonelin differansiyellenebilmesi incelenip, onun gradiyenti için formül elde edilir. Bu formülün yardımıyla varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanır. Nihayet bu bölümde göz önüne alınan optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için algoritma verilmektedir.

3.2.1. Fonksiyonelin Differansiyellenebilmesi

Bu alt bölümde (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminde amaç fonksiyonelin differansiyellenebilmesi incelenir ve onun gradiyenti için formül ispatlanır.

Farz edelim ki, $\phi_k = \phi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları aşağıdaki eşlenik problem denilen sınır değer probleminin çözümü olsun:

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial t} - a_0 \frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} + a(x)\phi_k + v(t)\phi_k = \tag{3.2.1.1}$$

$$= (-1)^k 2\left(u_1(x,t) - u_2(x,t)\right), \text{ k=1,2}$$

$$\phi_k(x,T) = 0, \quad x \in (0,\ell), \text{ k=1,2} \tag{3.2.1.2}$$

$$\phi_1(0,t) = \phi_1(\ell,t) = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3.2.1.3}$$

$$\frac{\partial \phi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2(\ell,t)}{\partial x} = 0, \quad t \in (0,T), \tag{3.2.1.4}$$

Burada $u_k = u_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.1.2) - (3.1.1.5) sınır değer probleminin $v \in V$ için çözümüdür.

Tanım 3.2.1.1: (3.2.11) – (3.2.1.4) eşlenik sınır değer probleminin çözümü denilirken $\forall \tilde{\eta}_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega), \forall \tilde{\eta}_2 \in W_2^{1,0}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \left[-\frac{\partial \phi_k}{\partial t}\tilde{\eta}_k + a_0 \frac{\partial \phi_k}{\partial x}\frac{\partial \tilde{\eta}_k}{\partial x} + a(x)\phi_k\tilde{\eta}_k + v(t)\phi_k\tilde{\eta}_k \right] dxdt = \\ = \int_\Omega \left((-1)^k 2(u_1(x,t) - u_2(x,t))\tilde{\eta}_p(x,t)\right) dxdt, k = 1,2 \tag{3.2.1.5}$$

integral özdeşliğini ve (3.2.1.2) şartlarını sağlayan $\phi_2 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $\phi_2 \in W_2^{1,1}(\Omega)$ fonksiyonları anlaşılmaktadır.

(3.2.1.1) – (3.2.1.4) eşlenik probleminin (3.1.1.2) – (3.1.1.5) sınır değer problemi ile aynı tipli olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten $t = T - \tau$ değişken dönüşümü yapılırsa, $\tilde{\phi}_k(x,t) = \phi_k(x, T - \tau)$, k=1,2 gösterimi kullanılırsa, (3.2.1.1) – (3.2.1.4) probleminden aşağıdaki problemi elde edebiliriz:

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_k}{\partial \tau} - a_0 \frac{\partial^2 \tilde{\phi}_k}{\partial x^2} + a(x)\tilde{\phi}_k + \tilde{v}(\tau)\tilde{\phi}_k = \\ = (-1)^k 2(\tilde{u}_1(x,\tau) - \tilde{u}_2(x,\tau)), k = 1,2 \tag{3.2.1.6}$$

$$\tilde{\phi}_k(x,0) = 0, \ x \in (0,\ell), \ \text{k=1,2} \tag{3.2.1.7}$$

$$\tilde{\phi}_1(0,\tau) = \tilde{\phi}_1(\ell,\tau) = 0, \ \tau \in (0,T), \tag{3.2.1.8}$$

$$\frac{\partial \tilde{\phi}_2(0,\tau)}{\partial x} = \frac{\partial \tilde{\phi}_2(\ell,\tau)}{\partial x} = 0, \ \tau \in (0,T) \tag{3.2.1.9}$$

Burada $\tilde{v}(\tau) = v(T-\tau) = v(t)$, $\tilde{u}_k(x,\tau) = u_k(x, T-\tau) = u_k(x,t)$, k=1,2 dir. Görüldüğü üzere (3.2.1.6) – (3.2.1.9) sınır değer problemi (3.1.1.2) – (3.1.1.5) tipli aynı sınır değer problemidir. Bu problem (3.2.1.1) – (3.2.1.4) eşlenik probleme denk olduğundan istenen hükme varmış oluyoruz. Bu nedenle $u_1 - u_2 \in W_2^{1,1}(\Omega)$ olduğundan teorem 3.1.2.3 hükmünü kullanarak (3.2.1.1) – (3.2.1.4) eşlenik probleminin bir tek çözümüne sahip olduğunu ve çözüm için

$$\|\phi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{20}\|u_1 - u_2\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.2.1.10}$$

$$\|\phi_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{21}\|u_1 - u_2\|_{L_2(\Omega)}, \tag{3.2.1.11}$$

kestirimlerinin geçerli olduğunu elde ederiz. Burada $c_{20}>0$, $c_{21}>0$ sabitlerdir.

Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$H(t, u_1(.,t), u_2(.,t), v, \phi_1(.,t), \phi_2(.,t)) =$$

$$-\int_0^\ell (u_1(x,t)\phi_1(x,t) + u_2(x,t)\phi_2(x,t))dx - \tag{3.2.1.12}$$

$$-\alpha(v(t) - w(t))^2$$

Bu fonksiyona (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol problemi için Hamilton – Pontryagin Fonksiyonu denir.

Teorem 3.2.1.1: Farz edelim ki, teorem 3.1.2.3' ün şartları sağlanmış olsun ve $w \in L_2(0,T)$ verilen eleman olsun. Bu takdirde $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında differansiyellenebilirdir ve onun gradiyenti için

$$J_\alpha^{'}(v) = -\frac{\partial H}{\partial v} \tag{3.2.1.13}$$

formülü geçerlidir. Burada $H = H(t, u_1, u_2, v, \phi_1, \phi_2)$ fonksiyonu (3.2.1.12) formülü ile tanımlanır.

İspat: $\forall v \in V$ elemanını alalım ve bu eleman üzerinde $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışını bulalım. (3.1.1.1) ve (3.1.3.10) formüllerini kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki formülü yazabiliriz;

$$\Delta J_\alpha(\alpha) = J_\alpha(v + \Delta v) - J_\alpha(v) =$$

$$= 2\int_\Omega (u_1(x,t) - u_2(x,t))(\Delta u_1(x,t) - \Delta u_2(x,t))dxdt +$$

$$+2\alpha\int_0^T (v(t)-w(t))\Delta v(t)dt$$

$$+\|\Delta u_1\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\Delta u_2\|^2_{L_2(\Omega)}-2\int_\Omega \Delta u_1(x,t)\Delta u_2(x,t)dxdt+$$

$$+\alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)} \tag{3.2.1.14}$$

Burada $\Delta u_k=\Delta u_k(x,t)=u_k(x,t;v+\Delta v)-u_k(x,t;v)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.3.2) - (3.1.3.5) sınır değer probleminin çözümüdür.

$u_1\in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$, $u_2\in W_2^{1,1}(\Omega)$ fonksiyonları (3.1.1.2) - (3.1.1.5) sınır değer problemini genelleştirilmiş çözümü olduğundan (3.1.3.27) özdeşliklerini kullanarak (3.1.3.2) - (3.1.3.5) sınır değer probleminin çözümü olan $\Delta u_k=\Delta u_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları için aşağıdaki özdeşlikleri yazabiliriz:

$$\int_\Omega\left[\frac{\partial \Delta u_k}{\partial t}\eta_k+a_0\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x}\frac{\partial \eta_k}{\partial x}+a(x)\Delta u_k\eta_k+(v+\Delta v)\Delta u_k\eta_k\right]dxdt=$$

$$-\int_\Omega \Delta v(t)u_k(x,t)\eta_k(x,t)dxdt,\ \text{k=1,2} \tag{3.2.1.15}$$

$$\forall\eta_1\in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega),\ \forall\eta_2\in W_2^{1,0}(\Omega),$$

Bu integral özdeşliklerinde $\eta_1(x,t)\in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$, $\eta_2(x,t)\in W_2^{1,0}(\Omega)$ fonksiyonlarının yerine $\phi_1(x,t)\in \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$, $\phi_2(x,t)\in W_2^{1,0}(\Omega)$ fonksiyonlarını alabiliriz. Bu takdirde

$$\int_\Omega\left[\frac{\partial \Delta u_k}{\partial t}\phi_k+a_0\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x}\frac{\partial \phi_k}{\partial x}+a(x)\Delta u_k\phi_k+(v+\Delta v)\Delta u_k\phi_k\right]dxdt=$$

$$=-\int_\Omega \Delta v(t)u_k(x,t)\phi_k(x,t)dxdt,\ \text{k=1,2} \tag{3.2.1.16}$$

eşitliğini elde edebiliriz.

$\Delta u_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega), \quad \Delta u_2 \in W_2^{1,1}(\Omega)$ olduğundan (3.2.1.2) - (3.2.1.5) özdeşliklerinde $\tilde{\eta}_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarının yerine $\Delta u_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarını alalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\int_\Omega \left[-\frac{\partial \phi_k}{\partial t}\Delta u_k + a_0 \frac{\partial \Delta \phi_k}{\partial x}\frac{\partial \Delta u_k}{\partial x} + a(x)\phi_k \Delta u_k + v\phi_k \Delta u_k \right] dxdt =$$

$$= (-1)^k 2\int_\Omega (u_1(x,t) - u_2(x,t))\Delta u_k(x,t)dxdt, \text{ k=1,2}$$

Bu eşitliğin sol tarafında yer alan birinci terimde kısmi integrasyon formülünü kullanalım. Bu takdirde $\Delta u_k(x,0) = 0$, k=1,2, $\phi_k(x,T) = 0$, k=1,2

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial \Delta u_k}{\partial t}\phi_k + a_0 \frac{\partial \Delta u_k}{\partial x}\frac{\partial \phi_k}{\partial x} + a(x)\Delta u_k \phi_k + v\Delta u_k \phi_k \right) dxdt =$$

$$= (-1)^k 2\int_\Omega (u_1(x,t) - u_2(x,t))\Delta u_k(x,t)dxdt. \quad \text{k=1,2} \qquad (3.2.1.17)$$

(3.2.1.16), (3.2.1.17) eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak, bir sonraki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\int_\Omega \Delta v(t)\Delta u_k \phi_k(x,t)dxdt = -\int_\Omega \Delta v(t)\Delta u_k \phi_k(x,t)dxdt -$$

$$-(-1)^k 2\int_\Omega (u_1(x,t) - u_2(x,t))\Delta u_k(x,t)dxdt, \text{ k=1,2}$$

k=1 ve k=2 için bu eşitsizlikler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$2\int_\Omega (u_1(x,t) - u_2(x,t))\Delta u_1(x,t)dxdt = \int_\Omega \Delta v(t)\Delta u_1\phi_1 dxdt + \int_\Omega \Delta v(t)\Delta u_1\phi_1 dxdt \text{ J}$$

$$-2\int_\Omega (u_1(x,t) - u_2(x,t))\Delta u_2(x,t)dxdt = \int_\Omega \Delta v(t)\Delta u_2\phi_2 dxdt + \int_\Omega \Delta v(t)\Delta u_2\phi_2 dxdt$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu elde ederiz.:

$$2\int_{\Omega}(u_1(x,t)-u_2(x,t))(\Delta u_1(x,t)-\Delta u_2(x,t))dxdt=$$

$$\int_{\Omega}\Delta v(x)(u_1\phi_1+u_2\phi_2)dxdt+\int_{\Omega}\Delta v(x)(\Delta u_1\phi_1+\Delta u_2\phi_2)dxdt \tag{3.2.1.18}$$

bu eşitliği fonksiyonelin artışı için olan (3.2.1.14) formülünde dikkate alarak

$$\Delta J_{\alpha}(v)=\int_{\Omega}(u_1(x,t)\phi_1(x,t)+u_2(x,t)\phi_2(x,t))\Delta v(x)dxdt+$$

$$+2\int_0^T(v(t)-w(t))\Delta v(t)dt+R \tag{3.2.1.19}$$

formülünü elde ederiz. Burada R kalanı aşağıdaki formül ile tanımlanmaktadır.

$$R=\int_{\Omega}(\Delta u_1(x,t)\phi_1(x,t)+\Delta u_2(x,t)\phi_2(x,t))\Delta v(t)dxdt+$$

$$\|\Delta u_1\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\Delta u_2\|^2_{L_2(\Omega)}-2\int_{\Omega}\Delta u_1(x,t)\Delta u_2(x,t)dxdt+\alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)} \tag{3.2.1.20}$$

(3.1.3.9) – (3.1.3.10), (3.2.1.10) – (3.2.1.11) kestirimlerini kullanarak Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinin yardımıyla R kalanını aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$|R|\le c_{22}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)}, \tag{3.2.1.21}$$

burada $c_{22}>0$ sayısı Δv’ den bağımsızdır. Buradan

$$R=o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,T)}\right) \qquad ((3.2.1.22)$$

olduğu elde edilir. Yani R kalanı $\|\Delta v\|_{L_2(0,T)}$’ ye göre sonsuz küçüktür. Bu eşitliğin yardımıyla (3.2.1.19) formülünü aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\Delta J_{\alpha}(v)=\int_0^T\left[\int_0^{\ell}(u_1(x,t)\phi_1(x,t)+u_2(x,t)\phi_2(x,t))dx+2\alpha(v(t)-w(t))\right]\Delta v(t)dt+$$

$$+o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,T)}\right) \qquad (3.2.1.23)$$

Fonksiyonellerinin Frechet anlamında türevinin tanımını kullanırsak (3.2.1.23) formülünden yola çıkarak $J_\alpha(v)$ fonksiyonellerinin $\forall v \in V$ elemanı üzerinde differansiyellenebilir olduğunu ve onun gradiyenti için

$$\Delta J'_\alpha(v) = \int_0^\ell \left(u_1(x,t)\phi_1(x,t) + u_2(x,t)\phi_2(x,t)\right)dxdt + 2\alpha\left(v(t) - w(t)\right) \qquad (3.2.1.24)$$

formülünü elde ederiz. Hamilton-Pontryagin fonksiyonu için olan formülü dikkate alırsak teoremin hükmünün geçerli olduğu elde edilir. Teorem (3.2.1.1) ispatlandı.

3.2.2 Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Varyasyon Eşitsizliği Şeklinde Gerek Şart

Bu alt bölümde optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanacaktır.

Teorem 3.2.2.1: Farz edelim ki, Teorem 3.2.1.1' in şartları sağlanmış olsun ve $v^* \in V$ kontrolü (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü olsun. Bu takdirde $\forall v \in V$ için

$$\int_0^T \left[\int_0^\ell \left(u_1^*(x,t)\phi_1^*(x,t) + u_2^*(x,t)\phi_2^*(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v^*(t) - w(t)\right)\right]\left[v(t) - v^*(t)\right]dt \geq 0 \quad (3.2.2.1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $u_k^*(x,t) \equiv u_k(x,t;v^*)$, $\phi_k^*(x,t) \equiv \phi_k(x,t;v^*)$, k=1,2 sırasıyla (3.1.1.2) – (3.1.1.5) ve (3.2.1.1) – (3.2.1.4) sınır değer problemlerinin çözümleridir.

İspat: Tanımında görüldüğü gibi V kümesi, $L_2(0,T)$ uzayının konveks kümesidir. Diğer yandan $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesinde teorem 3.2.1.1' e göre Frechet anlamında differansiyellenebilir fonksiyoneldir ve onu gradiyenti için

$$J'_\alpha(v)=\int_0^\ell \left(u_1(x,t)\phi_1(x,t)+u_2(x,t)\phi_2(x,t)\right)dx+2\alpha\left(v(t)-w(t)\right) \qquad (3.2.2.2)$$

formülü geçerlidir. Onu $J'_\alpha(v)$' nin V kümesi üzerinde sürekli oluğunu ispatlayalım. Bu amaçla $J'_\alpha(v)$' nin $\forall v\in V$ için artışını bulalım. (3.2.2.2) formülünden yararlanarak

$$\Delta J'_\alpha(v)=J'_\alpha(v+\Delta v)-J'_\alpha(v)=$$

$$=\int_0^\ell [\Delta u_1(x,t)\phi_1(x,t)+u_1(x,t)\Delta\phi_1(x,t)+\Delta u_1(x,t)\Delta\phi_1(x,t)+$$

$$+\Delta u_2(x,t)\phi_2(x,t)+u_2(x,t)\Delta\phi_2(x,t)+\Delta u_2(x,t)\Delta\phi_2(x,t)]dx$$

$$+2\alpha\Delta v(t) \qquad (3.2.2.3)$$

Burada $\Delta u_k=\Delta u_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.3.2) – (3.1.3.5) sınır değer probleminin çözümü $\Delta\phi_k=\Delta\phi_k(x,t)\equiv\phi_k(x,t;v+\Delta v)-\phi_k(x,t;v)$, 1,2 fonksiyonları için aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$-\frac{\partial\Delta\phi_k}{\partial t}-a_0\frac{\partial^2\Delta\phi_k}{\partial x^2}+a(x)\Delta\phi_k+(v(t)+\Delta v(t))\Delta\phi_k=$$

$$=-\Delta v(t)\phi_k(x,t)+2(-1)^k(\Delta u_1-\Delta u_2)\quad (x,t)\in\Omega\text{, k=1,2} \qquad (3.2.2.4)$$

$$\Delta\phi_k(x,T)=0,\quad x\in(0,\ell) \qquad (3.2.2.5)$$

$$\Delta\phi_1(x,t)=\Delta\phi_1(\ell,t)=0,\qquad t\in(0,T) \qquad (3.2.2.6)$$

$$\frac{\partial\Delta\phi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\Delta\phi_2(\ell,t)}{\partial x}=0,\quad t\in(0,T) \qquad (3.2.2.7)$$

Görüldüğü gibi (3.2.2.4) – (3.2.2.5) sınır değer problemi (3.2.1.1) – (3.2.1.4) gibi aynı tipli sınır değer problemidir. Bu nedenle (3.2.1.10), (3.2.1.11) kestirimlerine benzer olarak aşağıdaki kestirimlerin geçerli olduğunu yazabiliriz:

$$\|\Delta\phi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{23}\left(\|\Delta v \phi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_1 - \Delta u_2\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{3.2.2.8}$$

$$\|\Delta\phi_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{24}\left(\|\Delta v \phi_2\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta u_1 - \Delta u_2\|_{L_2(\Omega)}\right) \tag{3.2.2.9}$$

Burada $c_{23}>0$, $c_{24}>0$ sabitleri Δv ' den bağımsızdır. (3.2.1.10), (3.2.1.11), (3.1.3.8) – (3.1.3.9) kestirimlerini ve

$$\max_{0\le t\le T}\|\phi_1(.,t)\|^2_{L_2(0,\ell)} \le c_{25}\|\phi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}}(\Omega),$$

$$\max_{0\le t\le T}\|\phi_2(.,t)\|^2_{L_2(0,\ell)} \le c_{26}\|\phi_1\|^2_{W_2^{1,1}}(\Omega)$$

eşitsizliklerini (3.2.2.8) – (3.2.2.9) eşitsizliklerinde kullanırsak;

$$\|\Delta\phi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{27}\|\Delta v\|_{L_2(0,T)} \tag{3.2.2.10}$$

$$\|\Delta\phi_2\|_{W_2^{1,1}(\Omega)} \le c_{28}\|\Delta v\|_{L_2(0,T)} \tag{3.2.2.11}$$

kestirimlerini elde ederiz, burada $c_{27}>0$, $c_{28}>0$ sayıları Δv ' den bağımsızdır.

Şimdi bu kestirimleri kullanarak $\Delta J'_\alpha(v)$' ni kestirelim. Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğinden yararlanarak $\Delta J'_\alpha(v)$ için aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\|\Delta J_\alpha(v)\|_{L_2(0,T)} \le c_{29}\Big(\max_{0\le t\le T}\|\Delta u_1(.,t)\|_{L_2(0,\ell)}\|\phi_1\|_{L_2(\Omega)} + \max_{0\le t\le T}\|u_1(.,t)\|_{L_2(0,\ell)}\|\Delta\phi_1\|_{L_2(\Omega)} +$$

$$\max_{0\le t\le T}\|\Delta u_1(.,t)\|_{L_2(0,\ell)}\|\Delta\phi_1\|_{L_2(\Omega)} + \max_{0\le t\le T}\|\Delta u_2(.,t)\|_{L_2(0,\ell)}\|\phi_2\|_{L_2(\Omega)} +$$

$$+\max_{0\le t\le T}\|u_2(.,t)\|_{L_2(0,\ell)}\|\Delta\phi_2\|_{L_2(\Omega)} + \max_{0\le t\le T}\|\Delta u_2(.,t)\|_{L_2(0,\ell)}\|\Delta\phi_2\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta v\|_{L_2(0,T)}\Big)$$

Bu eşitsizlikte (3.1.2.35), (3.1.2.36), (3.1.3.9), (3.1.3.10), (3.2.1.10), (3.2.1.11), (3.2.2.10) ve (3.2.2.11) kestirimlerinden ve (3.1.3.8) biçiminde $u_k(x,t)$, $\Delta u_k(x,t)$ fonksiyonları için eşitsizliklerden yararlanarak

$$\|J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)\|_{L_2(0,T)} \le c_{21}\|\Delta v\|_{L_2(0,T)}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu ispatlamış oluyoruz. Bu eşitsizlik her hangi $v \in V$ için geçerli olduğundan $J_\alpha^{'}(v)$ gradiyentinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu elde edilir. Böylece $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli differansiyellenebilir fonksiyon olduğu ispatlanmış oldu. Şunları dikkate alırsak, [15] çalışmasından bildiğimiz teoremin şartlarını sağladığı görülür. (kuramsal temeller, teorem 2.13) Bu takdirde söz konusu teoreme göre $v^* \in V$ çözümü için

$$\left\langle J_\alpha^{'}(v^*), v - v^* \right\rangle_{L_2(0,T)} \geq 0, \qquad \forall v \in V$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu ispatlanır. Bu eşitsizlikte $J_\alpha^{'}(v)$ gradiyenti ifadesinin yerine yazarsak teoremin hükmünün, yani (3.2.2.1) eşitsizliğinin geçerli olduğu ispatlanır. Teorem 3.2.2.1 ispatlandı.

3.2.3 Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözümü İçin Algoritma

Bu alt Bölümde (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin çözümü için algoritmayı vereceğiz. Bu nedenle (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol problemini özel hal olarak içeren aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım:

$$J_\alpha(v) = \|u_1 - u_2\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha \|v - w\|_{L_2(0,T)}^2 \qquad (3.2.3.1)$$

fonksiyonelinin $V \equiv \left\{ v = v(t) : v \in L_2(0,T), \|v\|_{L_2(0,T)} \leq b_0 \right\}$ kümesi üzerinde

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} - a_0 \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} + a(x) u_k + v(t) u_k = f_k(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega, \ \text{k=1,2} \qquad (3.2.3.2)$$

$$u_k(x,0) = \varphi_k(x), \qquad x \in (0,\ell), \ \text{k=1,2} \qquad (3.2.3.3)$$

$$u_1(0,t) = g_{10}(t), \qquad u_2(\ell,t) = g_{11}(t), \quad t \in (0,T) \qquad (3.2.3.4)$$

$$\frac{\partial u_2(0,t)}{\partial x} = g_{20}(t), \qquad \frac{\partial u_2(\ell,t)}{\partial x} = g_{21}(t), \quad t \in (0,T) \qquad (3.2.3.5)$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Burada $\alpha \geq 0,\ b_0 > 0,\ a_0 > 0,\ \ell > 0,$ $T > 0$ verilen sayılar, $w(t),\ a(x),\ \varphi_k(x),\ f_k(x,t),$ p=1,2 fonksiyonları 3.1 bölümündeki şartları sağlar. $g_{mp}(t),$ p=1,2, m=0,1 fonksiyonları ise [0,T] aralığında tanımlanan sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır.

Görüldüğü gibi (3.2.3.1) – (3.2.3.5) optimal kontrol probleminde $g_{mp}(t) = 0,$ p=1,2, m=0,1 alırsak (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin elde ederiz. Burada amacımız (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol problemi için uygulana çözüm algoritmasının daha genel biçimde olmasıdır.

(3.2.3.1) – (3.2.3.5) optimal kontrol problemini bir sonsuz boyutlu ekstremal problem olarak çözmek için gradiyentin izdüşümü metodunu kullanacağız.

Farz edelim ki, $v_0 = v_0(t) \in V$ elemanı verilsin. Gradiyentin izdüşümü yöntemine göre $v_m = v_m(t),$ m=1,2,… dizisi aşağıdaki şema ile tanımlanmaktadır. [12,24]:

$$v_{m+1}(t) = P_V\left(v_m(t) - \beta_m J'_\alpha(v_m)\right),\ \text{m=0,1,2,…} \tag{3.2.3.6}$$

Burada $P_V(z)$ ifadesi $z = z(t)$noktasının V kümesi üzerinde izdüşümüdür. [15,30] çalışmasından bildiğimiz formüle göre $v_{m+1}(t)$ için

$$v_{m+1}(t) = b_0 \frac{v_m(t) - \beta_m J'_\alpha(v_m)}{\left\| v_m(t) - \beta_m J'_\alpha(v_m) \right\|_{L_2(0,T)}} \tag{3.2.3.7}$$

formülünü elde ederiz. Burada $\beta_m > 0$ sayısı bilinmeyen sayı olup çeşitli yöntemlerle bulunabilir. Mesela $\beta_m > 0$ sayısını

$$J_\alpha(v_{m+1}) < J_\alpha(v_m) \tag{3.2.3.8}$$

şartından bulabiliriz. (3.2.3.7) formülünde yer alan $J'_\alpha(v_m)$ miktarı (3.2.3.1) fonksiyonelinin gradiyentinin $v_m \in V$ noktasındaki ifadesidir. (3.2.1.24) formülünü kullanırsak $J'_\alpha(v_m)$ için aşağıdaki formülü yazabiliriz.

$$J_\alpha(v_m) = \int_0^\ell (u_{1m}(x,t)\phi_{1m}(x,t) + u_{2m}(x,t)\phi_{2m}(x,t))dx +$$

$$+2\alpha(v_m(t) - w(t)), \quad \text{m=0,1,2,}\ldots \tag{3.2.3.9}$$

burada $u_{pm} = u_{pm}(x,t) = u_p(x,t;v_m)$, p=1,2 fonksiyonları (3.2.3.2) – (3.2.3.5) sınır değer probleminin $v_m \in V$ için karşılık gelen çözümüdür.

Şimdi (3.2.3.1) – (3.2.3.5) optimal kontrol probleminin nümerik çözüm algoritmasını açıklayalım. Bunun için önce (3.2.3.1) – (3.2.3.5) problemine sonlu farklar metodunu uygulayalım ve problemin sonlu farklar aynısını yazalım. [0,T] aralığını $\overline{w}_t \equiv \left\{ t = t_k : t_k = k_\tau, k = \overline{0,N}, \tau = \dfrac{T}{N} \right\}$ ile $[0,\ell]$ aralığını ise $\overline{w}_h \equiv \left\{ x = x_j : x_j = jh, j = \overline{0,M}, h = \dfrac{\ell}{N} \right\}$ ile değiştirelim. Sonuçta $\overline{\Omega} = [0,\ell] \times [0,T]$ bölgesinin yerine $\overline{w}_{h\tau} = \overline{w}_h \times \overline{w}_\tau$ aralığını elde ediyoruz.

Fonksiyonelin kontroller kümesinin ve sınır değer probleminin sonlu farklı aynısını da yazarak aşağıdaki problemi elde ederiz.

$$I_\alpha([v]_N) = \tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| u_{1j}^k - u_{2j}^k \right|^2 + \alpha\tau \sum_{k=1}^{N-1} \left| u_k - w_k \right|^2 \tag{3.2.3.10}$$

fonksiyonunun $V_N \equiv \left\{ [v]_N : [v]_N = (u_1, \ldots, u_N), \left(\tau \sum_{k=1}^{N} v_k^{\,2} \right)^{1/2} \le b_0 \right\}$ kümesi üzerinde

$$\delta_{\bar t} u_{pj}^k - a_0 \delta_{\bar{x}x} u_{pj}^k + a_j u_{pj}^k + v_k u_{pj}^k = f_{pj}^k,$$

$$j = \overline{1, M-1}, \quad k = \overline{1,N}, \quad \text{p=1,2} \tag{3.2.3.11}$$

$$u_{pj}^0 = \varphi_{pj}, \quad j = \overline{0,M}, \quad \text{p=1,2} \tag{3.2.3.12}$$

$$u_{10}^k = g_{10}^k, \quad u_{1M}^k = g_{11}^k, \quad k = \overline{1,N}, \tag{3.2.3.13}$$

$$\delta_{\bar{x}} u_{21}^k = g_{20}^k, \ \delta_{\bar{x}} u_{2M}^k = g_{21}^k, \ k = \overline{1,N}, \tag{3.2.3.14}$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Burada N,M verilen pozitif tam sayılardır ve

$$a_j = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} a(x) dx, \ \ j = \overline{1, M-1}, \tag{3.2.3.15}$$

$$\varphi_{pj} = \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_p(x) dx, \ \ j = \overline{1, M-1}, \ \varphi_{10} = \varphi_{1M} = 0,$$

$$\varphi_{20} = \varphi_{21} \ \varphi_{2M} = \varphi_{2M-1} \tag{3.2.3.16}$$

$$g_{pm}^k = g_{pm}(t_k), \text{ p=1,2, m=0,1, } k = \overline{1,N}, \tag{3.2.3.17}$$

$$f_{pj}^k = \frac{1}{\tau h} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j}^{x_{j+1}} f_p(x,t) dx dt, \ j = \overline{1, M-1}, \qquad k = \overline{1,N}, \text{ p=1,2} \tag{3.2.3.18}$$

$$w_k = \frac{1}{\tau} \int_{t_{k-1}}^{t_k} w(t) dt, \ k = \overline{1,N} \tag{3.2.3.19}$$

dır.

Görüldüğü gibi (3.2.3.10) – (3.2.3.14) problemi (3.2.3.1) – (3.2.3.5) optimal kontrol probleminin sonlu farklar aynısıdır ve sadece sonlu boyutlu ekstremal problemdir. Bu problemin çözümünü bulmak için gradiyentin izdüşümünü kullanabiliriz.

Farz edelim ki, $[v_0] \in V_N$ verilen kontrol olsun. $\{[v_m]\}$ dizisinin elemanlarını bulmak için

$$[v_{m+1}] = P_{V_N}\left([v_m] - \beta_m I'_\alpha([v_m])\right), \text{ m=0,1,2,…} \tag{3.2.3.20}$$

Yineleme formülünü kullanabiliriz [15,30] burada $\beta_m > 0$ bilinmeyen sayı olup

$$I_\alpha([v_{m+1}]) < I_\alpha([v_m]) \tag{3.2.3.21}$$

şartından seçilebilir. $I'_\alpha([v_m])$ türevi $I_\alpha([v])$ fonksiyonunun gradiyentinin $[v_m]$ noktasındaki değeridir ve bu vektörün bileşenleri aşağıdaki formül ile tanımlanmaktadır.

$$\left(I'_\alpha([v])\right)_k = h\sum_{j=1}^{M-1}\left(u_{1j}^k([v])\phi_{1j}^k([v]) + u_{2j}^k([v])\phi_{2j}^k([v])\right) +$$

$$+2\alpha(v_k - w_k),\ k = \overline{1, N-1}, \tag{3.2.3.22}$$

burada $u_{pj}^k([v])$, p=1,2 ağ fonksiyonları $[v]\in V_k$ için (3.2.3.11) – (3.2.3.14) fark şemasının çözümüdür. $\phi_{pj}^k[v]$, p=1,2 ise aşağıdaki eşlenik problemin $[v]\in V_k$ için çözümüdür.

$$\delta_t\phi_{pj}^k - a_0\delta_{\bar{x}x}\phi_{pj}^{k-1} + a_j\phi_{pj}^{k-1} + v_k\phi_{pj}^{k-1} =$$

$$=(-1)^p 2\left(u_{1j}^{k-1} - u_{2j}^{k-1}\right),\quad j=\overline{1, M-1},\ \ k = N-1,...,1 \ \text{p=1,2} \tag{3.2.3.23}$$

$$\phi_{pj}^N = 0,\quad j=\overline{0, M},\quad \text{p=1,2} \tag{3.2.3.24}$$

$$\phi_{10}^{k-1} = 0,\ \ \phi_{1M}^{k-1} = 0,\ \text{k=N,…,1} \tag{3.2.3.25}$$

$$\delta_{\bar{x}}\phi_{21}^{k-1} = 0,\ \ \delta_{\bar{x}}\phi_{2M}^{k-1} = 0,\ \text{k=N,…,1} \tag{3.2.3.26}$$

(3.2.3.20) formülünde yer alan β_m parametresi üstte söylediğimiz gibi (3.2.3.21) biçiminde olan ve monotonluk şartı denilen şartın yardımıyla geçilebilir. Bunun için $\beta_m = \beta = sabit$ alıp (3.2.3.21) şartının sağlanıp sağlanmadığını kontrol ediyoruz. Eğer (3.2.3.21) şartı sağlanıyor ise, bu takdirde (3.2.3.20) formülünde $\beta_m = \beta = sabit$ olarak bulunan parametre olur. Aksi halde, yani (3.2.3.21) şartı sağlanamadığından β sayısını 1'den büyük sayıya o zaman kadar bölüyorlar ki, $\beta_m = \beta$ için (3.2.3.21) şartı sağlanmış olsun.

(3.2.3.20) yineleme formülünde iterasyonların bulunması süreci

$$\left(\tau\sum_{k=1}^{N-1}\left|v_{km+1}-v_{km}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon \tag{3.2.3.27}$$

şartının sağlanması halinde durdurulur. Burada $\varepsilon < 0$ sayısı önceden bilinen sayıdır.

Fonksiyonelin gradiyenti için olan formülünden görüldüğü gibi, bir adımda bulmak için iki tane (3.2.3.11) – (3.2.3.14) ve (3.2.3.22) – (3.2.3.25) fark şemalarının çözümlerini bulmak gerekir. Bu şemaların çözümünü bulmak için kovma metodunu kullanabiliriz. [3]

Böylece (3.1.1.1) – (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin nümerik çözüm algoritması açıklanmış oldu.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 3.1. bölümünde parabolik denklem için Lions Fonksiyonelli optimal kontrol probleminin çözümünün varlığına ait teoremler ispatlandı.

Tezin 3.2. bölümünde ise göz önüne alınan optimal kontrol probleminde amaç fonksiyonelin differansiyellenebilir olduğu ispatlandı ve onun gradiyenti için formül elde edildi. Bunların yanı sıra ele alınan optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şartlar ispatlandı. Tezin sonunda problemin çözümü için algoritma verildi.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezde ele alınan optimal kontrol problemi konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden ciddi biçimde farklılaşmaktadır. Parabolik tip denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemleri çok az ele alındığından tez çalışması gerek teorik, gerekse pratik önem taşır. Bu tezde Lions Fonksiyonelli optimal kontrol problemleri için elde edilen araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar, önceki çalışmalardaki sonuçlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

6. KAYNAKLAR

[1] Butkovskiy A.G., "Dağılmış Parametreli Sistemlerin Optimal Kontrolü", Moskova, Nauka, 1975 (Rusça)

[2] Sirazettinov T.K., "Dağılmış Parametreli Sistemlerin Optimal Kontrolü", Moskova, Nauka, 1977 (Rusça)

[3] Tikhonov H.N., Samarskiy A.A., "Matematiksel Fiziğin Denklemleri", Moskova, Nauka, 1972 (Rusça)

[4] Yegorov A.D., Isı ve Diffüzyon Süreçlerin Optimal Kontrolü", M.: Nauka,1978, 468 Sayfa

[5] Lions J.L., "Optimal Control Systems Governed by Partial Differential Equations", Springe-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972

[6] Lions J.L., "Optimal des systemes Distribues Singuliers. Gauthier Villars. (singüler Dağılmış Parametreli Sistemlerin Kontrolü)", Moskova, Nauka, 1987 (Rusça)

[7] Lurye K.A., "Matematiksel Fizik Problemlerinde Optimal Kontrol" Moskova, Nauka, 1975 (Rusça)

[8] Iskenderov A.D., Tagiyev R.G., "Durgun Olmayan Kuazilineer Denklemlerin Katsayılarında Kontrol Varolan Optimizasyon Problemleri", DAN Az. SSR, 1981, No:8 S.G-11 (Rusça)

[9] Iskenderov A.D., Tagiyev R.G., "Parabolik Denklemlerin Katsayılarında Kontrol Olan Optimizasyon Problemi. Dif. Denklemler", 1983, Cilt 19, No. 8, s. 1324-1334.

[10] Iskenderov A.D., Nittiyev A.A., "Kuazilineer Evolasyon Denklemler için Optimal Kontrol Problemi" DAN Az. SSR, 1986, 42 No:5 s.7-10, (Rusça)

[11] Yegorov Yu. V., "Banach Uzayında Optimal Kontrol", DAN, R, 1963, T.150, No:2 S.241-244 (Rusça)

[12] Vasilyev F.P., "Ekstramal Problemlerin Çözüm Metodları", Moskova, Nauka, 1981, (Rusça)

[13] Emanuilov D. Yu., "Singuler Dağılmış Sistemlerin kontrol Problemlerinin Çözümünün Varlık Teoremleri. – Matem", Sbornik, 1990, 181, No:3 s. 321-333. (Rusça)

[14] Iskenderov A.D., "Matematiksel Fiziğin Çok Boyutlu Ters Problemlerin Varyasyon Konulmaları Hakkında.", DAN SSR, 1984, 274, No:3 s. 531-533 (Rusça)

[15] Iskenderov A.D., Mahmudov N.M., “Kuantum Mekanik Sistemler İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol”, AMBA’ nin Haberleri, Fizik Teknik, Matematik Bilimleri Serisi 1915, 18 No:5-6 s.30-35 /Rusça)

[16] Mahmudov N.M., “Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü” ABA’ nın Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri, 1997, 7, s.79-82

[17] Ladijenskaya O.A., “Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri.”, Moskova, Nauka, 1973 (Rusça)

[18] Lions J.L., Magenes E. “Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications” Vol 1., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1972

[19] Lions J.L., Magenes E. “Non Homogeneous Boundary Value Problems and Applications” Vol 2., Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 1972

[20] Iyosido K., “Functional Analisys”, M. Miv, 1967.

[21] Gobel M., “On Existence of Optimal Control Math. Nacr”, 1979, Vol.93, pp.67-73

[22] Kalmogorov A.N., Fomin S.v., “Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları”, Moskova, Nauka, 1989

[23] Pontryagin L.S., B., “Optimal Süreçlerin Matematik Teorisi.-M.”, Nauka, 1969

[24] Iskenderov A.D., Tagiyev R.G., Yagubov G., Ya. “Optimizasyon Metotları”, Bakü, 2001

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Birsen KORKMAZ ERDOĞDU

Doğum Yeri: Ardahan

Doğum Tarihi: 20.05.1972

Medeni Hali: Evli

Yabancı Dili: Almanca

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Ardahan Lisesi -1989

Lisans: Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Astronomi ve Uzay Bilimleri - 1997

Yüksek Lisans:

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl:

BİLSA Bilgisayar Yazılım Ltd. Şti./1998

ASLI200 Eğitim Kurumları / 1999

Kafkas Üniversitesi Kars Meslek Yüksek Okulu / 2000

Yayınları (SCI ve diğer)