T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

KOMPLEKS POTANSİYELLİ LİNEER SCHRODİNGER DENKLEMİ İÇİN LİONS FONKSİYONELLİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Gaye KARATAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

HAZİRAN–2009
KARS

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde, Kompleks potansiyelli Lineer Schrondinger Denklemi için Lions fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemi ele alındı. Bu çalışmanın 3.1. bölümünde problemin çözümünün varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlandı ve fonksiyonun gradiyenti için olan formülü kullanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlandı.

2009, 28 sayfa

Anahtar Kelimeler: Schrodinger denklemi, Optimal Kontrol, Lions fonksiyoneli

ABSTRACT

In this thesis, i probe optimal control problem with Lions functional for complex potentail linear Schrondinger equation. In the chapter 3.1 of this thesis it proved that the results belonging to the existence and uniqueness of the solution of this problem and obtained Formula for the gradiyent of this function. It is also proved necessary condition in the shape of variation inequality fort he solution optimal control problem by using the Formula obtained for gradient. In the chapter 3.2 of this thesis the finite difference method has been applied the considered optimal control problem. The convergence of finite differences method has been proved wiht respect to functional.

2009, 28 pages

Keywords: Schrondinger equation, optimal control, Lions Functional.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda benden yardımlarını ve katkılarını esirgemeyen değerli danışmanım ''Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Prof. Dr. Gabil YAGUBOV'' hocama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kars – 2009 Gaye KARATAŞ

SİMGELERİN DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
$\overset{0}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$i = \sqrt{-1}$	Sanal birim
$\ell > 0$	Verilen sayı
$T>0$	Verilen sayı
R_2	İki boyutlu Eucliden uzayı
H	Hilbert Uzayı
B	Banach Uzayı

1.GİRİŞ

Schrodinger denklemi ile ifade edilen kuantum mekanik sistemleri için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıkar (Butkovski A.G., Samoyolenko Y.I., 1984, Landau L.D., Lifchiş E.M, 1963, Vorontsov M.A., Şmalguzen V.I., 1984). Bu nedenle böyle problemlerin incelenmesi, gerek teorik gerekse pratik anlamda öneme sahiptir. Schrodinger denklemi için optimal kontrol problemleri ilk önce farklı çalışmalarda ele alınmıştır. (Dın Nıo Hao., 1986, İskenderov A.D, Nahmudov N.M., 1995, Mahmudov N.M., 1997, Razgulin A.V., 1998, Silla N., 1991, Yagubov G. Ya., Musayeva M.A., 1995,1997, Yagubov G.Ya., 1994). Bu çalışmalardan Butkovskiy A.G., Samoilenko Y.I. , İskenderov A.D. ve Yagubov G.Y. nin çalışmalarını önemle dikkate almak gerekir. İskenderov A.D. ve Yagubov G.Y. nin çalışmalarında hem lineer, hem de lineer olmayan Schrodinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol teorisi oluşturulmuş ve geliştirilmiştir. Bu amaçla lineer olmayan Schrodinger denklemi için konulmuş optimal kontrol problemi incelenmiştir. Burada incelenen problem konulma açısından önce incelenen problemlerden farklıdır. Bu problemde amaç fonksiyoneli olarak Lions tipli fonksiyonel kullanılmıştır. Lions tipli fonksiyoneller ilk kez Fransız matematikçi Lions tarafından sunulmuştur (Lions J.L., 1971). Bu tipli fonksiyoneller kat sayı ile kontrol edilen sistemler için kontrol problemlerinde ilk kez İskenderov'un çalışmalarında sunulmuştur ve analiz edilmiştir (İskenderov A.D., 1984). Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemleri Schrodinger denklemi için önceden farklı konulmada iskenderov ve Mahmudov'un çalışmalarında incelenmiş ve problemin iyi konulmasına ve çözüm için gerek şartlara ait sonuçlar elde edilmiştir. (İskenderov A.D., Mahmudov N.M., 1995 Mahmudov N.M., 1997) Bu çalışmalarda göz önüne alınan problemlerin numerik çözümüne ait sonuçlarda var olmaktadır.

Bu tez çalışmasında kompleks potansiyelli Schrodinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Göz önüne alınan problem için önce problemin iyi konulmasına ait olan sorular cevaplandırılmıştır, yani optimal kontrolün varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlanmıştır. Sonra problemde kullanılan amaç fonksiyonelinin diferensiyellenebilmesi incelenmiş ve onun gradiyenti için formül elde edilmiştir. Gradiyent için olan formülü kullanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 [9]: $L_2(0,\ell)$ Hilbert uzayı olup elamanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi verilir:

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,\ell)} = \int_0^\ell u(x)\bar{v}(x)dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0,\ell)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,\ell)}}$$

Tanım 2.2 [9]: $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elamanları Ω bölgesinde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi verilir:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}$$

Tanım 2.3 [9]: $L_\infty(0,\ell)$ Banach uzayı olup elamanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L\infty(0,\ell)} = vrai \max_{x\in(0,\ell)} |u(x)|$$

Tanım 2.4 [9]: $C^0([0,T],B)$ Banach uzayı olup elamanları [0,T] aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\in(0,t)} \|u(t)\|_B$$

Tanım 2.5 [9]: $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobelev uzayıdır, elamanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle $\psi(x,t)$ fonksiyonlarıdır ki, ψ, $\frac{\partial\psi}{\partial x}, \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, \frac{\partial\psi}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlar. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle\psi,\phi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{\bar{\phi}(x,t)}{\partial x} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\bar{\phi}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\bar{\phi}(x,t)}{\partial t} \right] dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle\psi,\psi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}}$$

Tanım 2.6 [21]: $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup elamanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Tanım 2.7 [21]: Diyelim ki B herhangi Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\bar{o}(u,\gamma) = \{v : v \in B, \|v-u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h\rangle_B + o\langle h,u\rangle$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elamanı varsa, bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilir denir.

Tanım 2.8 [21]: Eğer B Banach uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c \in B^*$, $\lim_{k\to\infty}\langle c,u_k\rangle = \langle c,u\rangle$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir.

Tanım 2.9 [21]: U, B Banach uzayının bir kümesi olsun. Eğer $\forall\{u_k\} \in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu taktirde U kümesine B de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.10 [21]: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\lim_{k \to \infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Teorem 2.11 [21]: Diyelim ki U, B Banach uzayının alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_* = \left\{u \in U : J(u) = J_* = \inf_U J(u)\right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu taktirde $\forall u_* \in U_*$ ve $\forall u \in U$ için $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0$ şartı sağlanır.

Teorem 2.12 [21]: U, B Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan yarı sürekli olsun. Bu taktirde $J_* = \inf_U J(u) > -\infty$, $U_* = \left\{u \in U : J(u) = J_*\right\} \neq \phi$ zayıf kompakttır ve U dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar.

Teorem 2.13 [3]: Kabul edelim ki, $\widetilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\widetilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $J(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha < 0$, $\beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu taktirde $\widetilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle G alt kümesi vardır ki $\forall w \in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - w\|_{\widetilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır.

3.METARYAL VE YÖNTEM

3.1 Kompleks Potansiyelli Schrondinger Denklemi İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemlerinin İyi Konulması ve Çözüm İçin Gerek Şart.

Bu bölümde kompleks potansiyelli Schrondinger denklemi için Lions fonksiyoneli optimal kontrol probleminin çözümü için önce varlık teklik teoremleri ispatlanır.Göz önüne alınan problemde fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi incelenir ve fonksiyonelin gradiyenti için aşikar formül elde edilir. Bu formül kullanılarak varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanmıştır. Benzer problemler (İskenderov A.D, Yagubov G.Ya.,1988, 1989, İskenderov A.D.,1984, İskenderov A.D., Mahmudov N.M.,1995, Yagubov G.Ya., Musayeva M.A.,1995, Yagubov G.Ya., 1994), çalışmalarında incelemiştir.

3.1.1.Problemin konulması

ℓ ve T verilen pozitif sayılar olmak üzere $x \in [0,\ell]$, $t \in [0,T]$ $\Omega_t=(0,\ell)\times(0,t)$, $\Omega=\Omega_T$ olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım:

$$J_\alpha(v)=\int_\Omega |\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)|^2\,dxdt+\alpha\|v-w\|_H^2 \qquad (3.1.1.1)$$

fonksiyonelinin

$V\equiv\{v=(v_0,v_1),v_j \in \overset{0}{L}_2(0,1),\ |v_j(x)| \le b_j, j=0,1,\ \forall x \in (0,\ell)\}$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial\psi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}-\varphi(x)\psi_k-v_0(x)\psi_k-iv_1(x)\psi_k=f_k(x,t),\ k=1,2,(x,t)\in\Omega, \qquad (3.1.1.2)$$

$$\psi_k(x,0)=\varphi_k(x),\ k=1,2, x\in(0,\ell), \qquad (3.1.1.3)$$

$\psi_1(o,t)=\psi_1(\ell,t)=0, \quad t\in(0,T)$ (3.1.1.4)

$$\frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi_2(\ell,t)}{\partial x}=0,\ t\in(0,T) \qquad (3.1.1.5.)$$

şartları altında minumumunu bulmak gerekir. Burada; $i=\sqrt{-1}$, $\alpha\geq 0$, $b_0>0$, $b_1>0$, $a_0>0$, verilen sayılar, a(x) ölçülebilir sınırlı fonksiyon olup $0\leq a(x)\leq \overset{0}{\mu_0}$, $\forall x\in(0,\lambda)$ şartını sağlar. $w\in L_2(0,\ell)$ verilen eleman, $\varphi_1,\varphi_2,f_1, f_2$ fonksiyonları;

$$\varphi_1\in \overset{0}{W}{}^2{}_2(0,\ell)\ \ \varphi_2\in\ W^2{}_2(0,\ell)\frac{d\varphi_2(0)}{dx}=\frac{d\varphi_2(\ell)}{dx}=0, \qquad (3.1.1.6.)$$

$$f_k\in \overset{0}{W}{}_2{}^{0,1}(\Omega),\quad k=1,2 \qquad (3.1.1.7.)$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlardır. $H=L_2(0,\ell)\times L_2(0,\ell)$ dır. $\forall v\in V$ için (3.1.1.2.)-(3.1.1.4) şartlarından $\psi_1=\psi_1(x,t)\equiv\psi_1(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması Schrodinger denklemi için 1.tip sınır değer problemidir.(3.1.1.2), (3.1.1.3), (3.1.1.5) şartlarında $\psi_2=\psi_2(x,t)\equiv\psi_2(x,t;v)$ fonksiyonun bulunması problemi 2.çeşit başlangıç sınır değeri problemidir.

Tanım 3.1.1.1: $\forall v\in V$ için (3.1.1.2)-(3.1.1.5.) sınır değer probleminin çözümü olarak $\psi_1\in \overset{0}{W}{}_2{}^{2,1}(\Omega),\psi_2\in W_2^{2,1}(\Omega)$ olan ve $\forall(x,t)\in\overset{o}{\Omega}$ için (3.1.1.2)-(3.1.1.5) şartlarını sağlayan $\psi_1=\psi_1(x,t)\equiv\psi_1(x,t;v),\psi_2=\psi_2(x,t)\equiv\psi_2(x,t;v)$ fonksiyonlar anlaşılır.

(Yagubov G.Ya., 1994, Hakan YETİŞKİN, 2006) çalışmalarından sonuçları kullanarak $\forall v\in V$ için(3.1.1.2)-(3.1.1.5.) sınır değer probleminin bir çözüme sahip olduğu ve bu çözüm için aşağıdaki kestirimlerinin geçerli olduğu elde edilir.

$$\|\psi_1\|_{\overset{0}{W}{}^{2,1}_2(\Omega)}\leq c_1(\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}^{2}_2(0,\ell)}+\|f_1\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}, \qquad (3.1.1.8)$$

$$\|\psi_2\|_{W_2^{2,1}(\Omega)}\leq c_2(\|\varphi_2\|_{W_2^2(0,\ell)}+\|f_2\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}) \qquad (3.1.1.9)$$

burada $c_1>0$, $c_2>0$ sayılarıdır.

3.1.2.Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

(3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol problemini göz önüne alalım. Bu problem için gerekli olan çözümün varlığı ve tekliği sorularını inceleyelim. Önce $\alpha>0$ için (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin bir tek çözümünün var olmasını ispatayalım.

Teorem 3.1.2.1: H uzayında her yerde yoğun olan öyle bir G alt kümesi vardır ki, $\forall w \in G$ ve $\alpha>0$ için (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin bir tek çözümü vardır.

İspat: Önce $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım.Fonksiyonelin tanımına göre $J_0(v)$ fonksiyoneli aşağıdaki gibidir.

$$J_0(v) = \int_\Omega |\psi_1(x.t) - \psi_2(x.t)|^2 \, dxdt \qquad (3.1.2.1)$$

$\Delta v \in B, B = L_\infty(v,\ell) \times \ell_\infty(0,\ell)$ artışı $v+\Delta v$ olacak şekilde herhangi v elemanına verilen bir artış olsun.Bu taktirde (3.1.1.2)-(3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümü olan $\psi_k = \psi_k(x.t) \equiv \psi_k(x,t;v), k = 1,2$ fonksiyonları

$$\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x.t) \equiv \psi_k(x,t;v\,\Delta v) - \psi_k(x,t;v)$$

artışına sahip olur. Burada $\psi_k(x,t;v+\Delta v)$, k=1,2 (3.1.1.2)-(3.1.1.5) sınır değer probleminin $v+\Delta v$ elemanına uygun çözümdür.

(3.1.1.2)-(3.1.1.5) şartlarından $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x.t)$, k=1,2 fonksiyonlarının

$$i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi_k - (v_0(x)+\Delta v_0(x))\Delta\psi_k + i(v_1(x)+\Delta v_1(x))\Delta\psi_v$$

$$= \Delta v_0(x)\psi_k + i\,\Delta v_1(x)\psi_k, \; k=1,2, \; (x,t)\in\Omega, \qquad (3.1.2.2)$$

$$\Delta\,\psi_k(x,0) = 0, k = 1,2 \quad, x \in (0,\ell), \qquad (3.1.2.3)$$

$$\Delta\psi_1(0,t) = \Delta\psi_1(\ell,t) = 0, t \in (0,T), \qquad (3.1.2.4)$$

$$\frac{\partial\Delta\psi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial\Delta\psi_2(\ell,t)}{\partial x} = 0, t \in (0,T), \qquad (3.1.2.5)$$

Burada sınır değer probleminin çözümünün $\psi_{k\Delta} = \psi_{k\Delta}(x,t) \equiv \psi_k(x,t,v+\Delta v)$ olduğunu elde ederiz .

Şimdi $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,t), k = 1,2$ fonksiyonlarını kestirelim. Bunun için (3.1.2.2) denkleminin her iki tarafını $\Delta\overline{\psi_k}(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarına çarpıp Ω üzerinden integralliyelim. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\left[i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}\Delta\overline{\psi_k} - a_0\left|\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial x}\right|^2 - a(x)|\Delta\psi_k|^2(v_0(x)+\Delta v_0(x))|\Delta\overline{\psi_k}|^2 - \right.$$

$$\left. -<i(v_1(x)+\Delta v_1(x))|\Delta\psi_k|^2 \right]dxdt$$

$$= \int_{\Omega_t}\Delta v_0(x)\psi_k\Delta\overline{\psi_k}dxd\tau + \int_{\Omega_t} i\Delta v_1(x)\psi_k\Delta\overline{\psi_k}dxd\tau$$

$\forall t\in[0,T]$, k=1,2 . Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak, aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\|\Delta\psi_k(.,t)\|^2_{L_2(0,\ell)} = 2\int_{\Omega_t}(v_1(x)\Delta v_1(x)|\Delta\psi_k|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t} Im\left[\Delta v_0(x)\psi_k\Delta\overline{\psi_k}\right]dx\,d\tau$$

$$+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Re}\left[\Delta v_1(x)\psi_k\Delta\overline{\psi_k}\right]dxd\tau \qquad \forall t\in[0,T], k=1,2$$

Burada Koşi-Bunyakowski eşitsizliğini uygularsak , $|v_1(x)+\Delta v_1(x)| < b_1, \forall x\in(0,\ell)$ olduğunu dikkate alırsak

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(o,\ell)} \le (2b_1^{+2})\int_{\Omega_t}|\Delta\psi_k(x,t)|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t}(|\Delta v_0(x)|\,|\psi_k(x,t)|)^2 dxd\tau$$

$$+\int_{\Omega_t}|\Delta v_1(x)||\psi_k(x,t)|)^2 dxd\tau \qquad (3.1.2.6)$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_\infty([0,T],\overset{0}{W}{}^1{}_2(0,\ell)), W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı ise $L_\infty([0,T],W_2^1(0,\ell))$ uzayına sürekli gömdüğünden

$$\|\psi_1\|_{L\infty\left([0,T]\overset{0}{W}{}^1_2(0,\ell)\right)} \le c_3\|\psi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \qquad (3.1.2.7)$$

$$\|\psi_2\|_{L\infty\left([0,T]W_2^1(0,\ell)\right)} \le c_4\|\psi_2\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \qquad (3.1.2.8)$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada $c_3>0$, $c_4>0$ sayıları ψ_1 ve ψ_2 den bağımsızdır. Bu eşitsizliklerin yardımıyla (3.1.1.8) ve (3.1.1.9) eşitsizliklerinden aşağıdaki kestirimleri elde ederiz:

$$\|\psi_1\|_{L_\infty\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)\right)} \le c_5\left(\|\varphi_1\|_{W_2^2(0,\ell)} + \|f_1\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \qquad (3.1.2.9)$$

$$\|\psi_2\|_{L_\infty\left([0,T],W_2^1(0,\ell)\right)} \le c_6\left(\|\varphi_2\|_{W_2^2(0,\ell)} + \|f_2\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \qquad (3.1.2.10)$$

burada $c_5>0$, $c_6>0$ sayılarıdır. Bu kestirimler herhangi $v \in V$ için geçerli olduğunu $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$, $W_2^1(0,\ell)$ uzayları $L_\infty(0,\ell)$ uzayına gömdüğünden aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\|\psi_k\|_{L\infty(\Omega)} \le c_7, \|\psi_{k\Delta}\|_{L\infty(\Omega)} \le c_8, k=1,2 \qquad (3.1.2.11)$$

burada $c_7>0$, $c_8>0$ sayılarıdır.

Bu eştsizlikleri (3.1.2.6) da kullanırsak,

$$\|\Delta\psi_k(.,t)\|^2_{L_2(0,\ell)} \le c_9 \int_0^t \|\Delta\psi_k(.,\tau)\|^2_{L_2(0,\ell)} d\tau + T\left(\int_0^\ell |\Delta v_0(x)|^2 dx + \int_0^\ell |\Delta v_1(x)|^2 dx\right)$$

k=1,2 $t \in [0,T]$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada Gronwall lemmasını uygularsak aşağıdaki kestirim elde edilir:

$$\|\Delta\psi_k(.,t)\|^2_{L_2(0\ell)} \le c_{10}\|\Delta v\|_H^2 \le c_{11}\|\Delta v\|_B^2, \forall t \in [0,T], k=1,2 \qquad (3.1.2.12)$$

burada $c_{10}>0$, $c_{11}>0$ sayıları Δv den bağımsızdır.

Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin artışını hesaplayalım. (3.1.2.1) formülünü kullanırsak $\forall v \in V$ için aşağıdaki formülü kolaylıkla elde ederiz:

$$\Delta J_0(v) = J_0(v+\Delta v) - J_0(v) =$$

$$= 2\int_\Omega \mathrm{Re}\left[(\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t))(\Delta\overline{\psi}_1(x,t) - \Delta\overline{\psi}(x,t))\right] dxdt +$$

$$+ \|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\int_\Omega \mathrm{Re}(\Delta\psi_1(x,t)\Delta\overline{\psi}_2(x,t))dxdt \qquad (3.1.2.13)$$

burada Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygulayıp(3.1.1.8)-(3.1.1.9) kestirimlerini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|\Delta J_0(v)\| \le c_{12}\left(\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|_{L_2(\Omega)}\right) \qquad (3.1.2.14)$$

Burada c_{12}>0 sayısı Δv den bağımsızdır. Bu eşitliğin sağ tarafına (3.1.2.12) kestirimini kullanırsak fonksiyonelin $v \in V$ elemanı üzerinde artışı için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|\Delta J_0(v)| \le c_4\left(\|\Delta v\|_B + \|\Delta v\|^2{}_B\right) \tag{3.1.2.15}$$

Burada c_4>0 sayısı Δv den bağımsızdır.(3.1.2.15) eşitsizliğinden $\|\Delta v\|_{L_\infty(0,\ell)} \to 0$ için $\Delta J_0(v) \to 0$ olur.Dolayısıyla $J_0(v)$ fonksiyoneli v noktasında süreklidir.v noktası V kümesinin herhangi elemanı olduğundan $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu ispat edilir.Buradan da $\forall v \in V$ için $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde alttan sınırlı ve alttan yarı süreli olduğu ispatlanmış olur.Tanıma göre V kümesi H uzayında kapalı ve sınırlı kümedir.H uzayı ise Hilbert uzayı olduğunda düzgün konveks uzaydır.(Iyosida K.,1967)

$$\mathrm{I}(v)= J_0(v), \widetilde{X} = L_2(0,T), U = V$$

almış olursak kuramsal temeller bölümündeki teorem 2.13'ün şartlarının sağlandığını görürüz. Bu taktirde teorem 2.13'ün hükmünü kullanmış olursak H uzayında her yerde yoğun olan G alt kümesi bulunur ki, $\forall w \in G$ için α>0 olduğu taktirde (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol problemi bir tek çözüme sahip olur.

Teorem ispatlandı.

Şimdi(3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin en azından bir çözüme sahip olmasını ($\alpha \ge 0$ için) gösterelim.

Teorem 3.1.2.2 Kabul edelim ki $\varphi_k(x), f_k(x,t), k = 1,2$ fonksiyonları (3.1.1.6),(3.1.1.7) şartlarını sağlamış olsun. Bu taktirde (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol problemi $\alpha \ge 0$ için en azından bir çözüme sahiptir.

İspat: Herhangi $\{v^m\} \in V$ minimalleştirici dizisini ele alalım.

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = J_{\alpha*} = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) \tag{3.1.2.16}$$

Her bir $v^m \in V, m = 1,2,...$ için (3.1.1.2)-(3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümünü

$$\psi_k{}^m = \psi_k{}^m(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v^m), k = 1,2$$

gibi gösterelim. Bu taktirde (3.1.1.8)-(3.1.1.9) kestirimlerinden aşağıdaki kestirimleri elde ederiz:

$$\| \psi_1^m \|_{\overset{\circ}{W}_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_5\left(\|\varphi_1\|_{\overset{\circ}{W}_2^2(0,\ell)} + \|f_1\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) = c_{13}, \tag{3.1.2.17}$$

$$\|\psi_2\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_6\left(\|\varphi_2\|_{W_2^2(0,\ell)} + \|f_2\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) = c_{14} \tag{3.1.2.18}$$

m=1,2,... Burada $c_{13,}c_{14}$>0 sabitleri m den bağımsızdır. V kümesi B uzayında sınırlı küme olduğundan $\{v^m\} \in V$ dizisinden bu uzayda $v \in$B elemanına $(*)$-zayıf yakınsayan $\{v^{m_p}\}$alt dizisi seçilebilir. Bu alt diziyi kolaylık için $\{v^m\}$ile gösterelim. Bu taktirde

$$m \to \infty \text{ için } v^m \to v, \text{B de } (*) \text{ zayıf} \tag{3.1.2.19}$$

V kümesi B uzayında kapalı sınırlı ve konveks kümedir.Bu taktirde (Kolmogrov and Fomin (1989)) dan bildiğimiz ilgili teoreme göre V kümesi B da $(*)-$zayıf kapalı küme olur.Yani $v \in V$ dir. Buna göre de (3.1.2.19) şartından aşağıdaki limit bağıntısını elde ederiz:

$$\int_0^\ell v_p{}^m(x)q(x)dx \to \int_0^\ell v_p(x)q(x)dx, m \to \infty, \forall q \in L_1(0,\ell), p = 0,1 \tag{3.1.2.20}$$

(3.1.2.17)-(3.1.2.18) kestirimlerinden $\{\psi^m{}_k\}$,k=1,2 dizilerinin sırasıyla $W_2^{2,1}(\Omega), W_2^{2,1}(\Omega)$uzaylarının normlarında m ye göre düzgün sınırlı olduğu elde edilir. Bu taktirde $\{\psi^m{}_k\}$,k=1,2 dizilerinden $\psi_k \in W_2^{2,1}(\Omega)$ elemanlarına zayıf yakınsayan alt dizilerini seçmek mümkündür. Kolaylık için bu yakınsayan alt dizileri yinede $\{\psi^m{}_k\}$,k=1,2 ile gösterelim. Böyle olduğu taktirde aşağıdaki limit bağıntılarını elde ederiz:

$m \to \infty$ için

$$\psi_k{}^m \to \psi_k \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da} \tag{3.1.2.21}$$

$$\frac{\partial \psi^m{}_k}{\partial t} \to \frac{\partial \psi_k}{\partial t} \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da} \tag{3.1.2.22}$$

$$\frac{\partial \psi^m{}_k}{\partial x} \to \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da} \tag{3.1.2.23}$$

$$\frac{\partial^2 \psi^m{}_k}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da} \tag{3.1.2.24}$$

k=1,2 limit bağıntıları geçerlidir.

$\{\psi_1{}^m\}, \{\psi_2{}^m\}$ dizilerinin elemanları (3.1.1.2)-(3.1.1.5) sınır değer probleminin sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ ve $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarına ait çözümü olduğundan her bir m=1,2,... için aşağıdaki integral özdeşliklerini elde ederiz:

$$\int_\Omega \left[i\frac{\partial \psi^m{}_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi^m{}_k}{\partial x^2} - a(x)\psi^m{}_k - v_k{}^m(x)\psi^m{}_k - iv_1{}^m(x)\psi^m{}_k \right] \bar{\eta}_k \, dxdt$$

$$= \int_\Omega f_k \, \bar{\eta}_k(x,t) dxdt, \ \text{k=1,2}, \ m = 1,2,... \qquad (3.1.2.25)$$

$\forall \eta_k = \eta_k(x,t) \in L_2(\Omega)$ bundan başka aşağıdaki şartlar sağlanır:

$$\psi_k{}^m(x,0) = \varphi_k(x).\overset{0}{\forall} \in (0,\ell), \qquad \text{k=1,2} \qquad (3.1.2.26)$$

$$\psi_1{}^m(0,t) = \psi_1{}^m(\ell,t) = 0, \frac{\partial \psi_2{}^m(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2{}^m(\ell,t)}{\partial x} = \overset{0}{0}\forall \, t \in (0,T) \qquad (3.1.2.27)$$

(3.1.2.21)-(3.1.2.24) limit bağıntılarını kullanırsak, $\forall \eta_k \in L_2(\Omega)$, k=1,2 için

$$\int_\Omega \left[i\frac{\partial \psi_k{}^m}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k{}^m}{\partial x^2} - a(x)\psi_k{}^m \right] \bar{\eta}_k \, dxdt \to$$

$$\to \int_\Omega [\, i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} - a(x)\psi_k \,] \bar{\eta}_k \, dxdt \qquad \text{k=1,2} \qquad (3.1.2.28)$$

limit bağıntıları elde edilir. Şimdi aşağıdaki limit bağıntılarının geçerli olduğunu ispatlayalım: $m \to \infty$ için

$$\int_\Omega v_0{}^m(x)\psi_k{}^m(x,t)\bar{\eta}_k(x,t)dxdt \to$$

$$\to \int_\Omega v_0(x)\psi_k(x,t)\bar{\eta}_k(x,t)dxdt, \ \text{k=1,2} \qquad (3.1.2.29)$$

$$i\int_\Omega v_1{}^m(x)\psi_k{}^m \, \bar{\eta}_k \, dxdt \to$$

$$\to i\int_\Omega v_1(x)\psi_k \, \bar{\eta}_k dxdt, \ \text{k=1,2} \qquad (3.1.2.30)$$

Kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\int_{\Omega} v_p{}^m \psi_k{}^m \bar{\eta}_k \, dxdt = \int_{\Omega} (v_p{}^m - v_p)\psi_k \bar{\eta}_k dxdt +$$

$$+ \int_{\Omega} v_p{}^m (\psi_k{}^m - \psi_k)\bar{\eta}_k \, dxdt + \int_{\Omega} v_p \psi_k \bar{\eta}_k dxdt, \text{k=1,2 ,p=0,1} \qquad (3.1.2.31)$$

$\psi_1 \in W_2{}^{2,1}(\Omega), \psi_2 \in W_2{}^{2,1}(\Omega)$, $\eta_k \in L_2(\Omega)$,k=1,2 şartları sağlandığından

$\psi_k \bar{\eta}_k \in L_1(\Omega)$ olur.Bu taktirde (3.1.2.20) limit bağıntısını kullanırsak $m \to \infty$ için

$$\int_{\Omega} (v_p{}^m - v_p)\psi_k \bar{\eta}_k \, dxdt \to 0, \text{ k=1,2 , p=0,1} \qquad (3.1.2.32)$$

bağıntısını elde ederiz.

Şimdi (3.1.2.3) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terimi kestirelim. Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini kulanıp $v^m \in V$ olduğunu göz önüne alırsak:

$$\left| \int_{\Omega} v_p{}^m (\psi_k{}^m - \psi_k)\bar{\eta}_k \, dxdt \right| \le c_{15} \left\| \psi_k{}^m - \psi_k \right\|_{L_2(\Omega)}, \text{ k=1,2, p=0,1} \qquad (3.1.2.33)$$

Eşitsizliğini elde ederiz. Burada c_{15}>0 sabiti m den bağımsızdır. $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega), W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayları $L_2(\Omega)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$\psi_k{}^m \to \psi_k \text{ kuvvetli } L_2(\Omega) \text{ da , k=1,2} \qquad (3.1.2.34)$$

limit bağıntısını kolaylıkla elde ederiz.Bu limit bağıntısını göz önüne alıp (3.1.2.33) eşitsizliğinin her iki tarafında limite geçersek aşağıdaki limit bağıntısının geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\int_{\Omega} v_p{}^m (\psi_k{}^m - \psi_k)\bar{\eta}_k \, dxdt \to 0 \text{ ,k=1,2 ,p=0,1} \qquad (3.1.2.35)$$

(3.1.2.32) ve (3.1.2.34) limit bağıntılarını kullanıp (3.1.2.31) eşitliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçersek (3.1.2.29)(3.1.2.30) limit bağıntısının geçerli olduğunu elde ederiz.

(3.1.2.28)-(3.1.2.30) limit bağıntılarını kullanıp (3.1.2.25) de $m \to \infty$ için limite geçersek aşağıdaki özdeşliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\int_{\Omega} \left[i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} - a(x)\varphi_k - v_0(x)\psi_k - iv_1(x)\psi_k \right] \bar{\eta}_k \, dxdt$$

$$= \int_{\Omega} f_k \, \tilde{\eta}_k \, dxdt \quad , \forall \eta_k \in L_2(\Omega) \qquad (3.1.2.36)$$

Bu özdeşlikten $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan $\varphi_k = \varphi_k(x,t)$, k=1,2 limit fonksiyonlarının (3.1.1.2) denklemini sağladığını görüyoruz.

Şimdi $\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarının (3.1.1.3) başlangıç şartlarını sağladığını ispatlayalım.

Gömme teoremlerine göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega), W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayları $L_2(0,\ell)$ uzayına kompakt gömülürler. Bu nedenle $m \to \infty$ için

$$\psi_k^m(x,0) \to \psi_k(x,0), \text{ k=1,2} \quad , L_2(0,\ell) \text{ de kuvvetli} \qquad (3.1.2.37)$$

limit bağıntısı geçerlidir. Diğer taraftan aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$\int_0^{\ell} \left|\psi_k(x,0) - \varphi_k(x)\right|^2 dx \le 2\int_0^{\ell} \left|\psi_k^m(x,0) - \psi_k(x,0)\right|^2 dx +$$

$$+2\int_0^{\ell} \left|\psi_k^m(x,0) - \varphi_k(x)\right|^2 dx, \text{ k=1,2} \qquad (3.1.2.38)$$

(3.1.2.26) şartlarını ve (3.1.2.37) limit bağıntısını kullanarak (3.1.2.38) her iki tarafında limite geçip

$$\int_0^{\ell} \left|\psi_k(x,0) - \varphi_k(x)\right|^2 dx = 0, \text{ k=1,2}$$

Eşitsizliği elde ederiz. Burada kolaylıkla $\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarının (3.1.1.3) başlangıç şartını sağladığı elde edilir.

Şimdi $\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarının (3.1.1.4)-(3.1.1.5) sınır şartlarını sağladığını ispatlayalım. $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(0,T)$ uzayına kompakt gömülür. Yani $m \to \infty$ için

$$\psi_1^m(0,t) \to \psi_1(0,t), L_2(0,T) \text{ de kuvvetli} \qquad (3.1.2.39)$$

$$\psi_1^m(\ell,t) \to \psi_1(\ell,t), L_2(0,T) \text{ de kuvvetli} \qquad (3.1.2.40)$$

limit bağıntıları geçerlidir. Bu taktirde (3.1.2.27) şartlarının birincisini kullanırsak üstteki (3.1.2.39)-(3.1.2.40) limit bağıntılarından ve

$$\int_0^T |\psi_1(0,t)|^2 dt \le 2\int_0^T \left|\psi_1^m(0,t)-\psi_1(0,t)\right|^2 dt + 2\int_0^T \left|\psi_1^m(0,t)\right|^2 dt \quad (3.1.2.41)$$

$$\int_0^T \left|\psi_1(\ell,t)\right|^2 dt \le 2\int_0^T \left|\psi_1^m(\ell,t)-\psi_1(\ell,t)\right|^2 dt + 2\int_0^T \left|\psi_1^m(\ell,t)\right|^2 dt \quad (3.1.2.42)$$

eşitsizliklerinden bir sonraki eşitlikleri elde ediyoruz:

$$\int_0^T \left|\psi_1(0,t)\right|^2 dt = 0, \quad \int_0^T \left|\psi_1(\ell,t)\right|^2 dt = 0 \quad (3.1.2.43)$$

Bu eşitlikler $\psi_1(x,t)$ fonksiyonunun x=0, x=ℓ noktalarında $\overset{0}{\forall} t \in (0,T)$ için sınır şartlarının sağlandığını ispatlanmış olur.

Şimdi $\psi_2(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.1.5) sınır şartlarını sağladığını gösterelim:

$\psi_2^m \in W_2^{2,1}(\Omega)$ olduğundan gömme teoremine göre aşağıdaki limit bağıntılarının geçerli olduğu kolaylıkla elde ederiz: $m \to \infty$

$$\frac{\partial \psi_2^m(0,t)}{\partial x} \to \frac{\partial \psi_2(0,t)}{\partial x}, L_2(0,T) \text{ de zayıf} \quad (3.1.2.44)$$

$$\frac{\partial \psi_2^m(\ell,t)}{\partial x} \to \frac{\partial \psi_2(\ell,t)}{\partial x}, L_2(0,T) \text{ de zayıf} \quad (3.1.2.45)$$

dır. Bu taktirde (3.1.2.27) deki ikinci şartı kullanırsak $\forall \eta \in L_2(0,T)$ için

$$\left|\int_0^T \frac{\partial \psi_2(0,t)}{\partial x}\bar{\eta}(t)dt\right| \le \left|\int_0^T \left(\frac{\partial \psi_2^m(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2(0,t)}{\partial x}\right)\bar{\eta}(t)dt\right| +$$
$$+\left|\int_0^T \frac{\partial \psi_2^m(0,t)}{\partial x}\bar{\eta}(t)dt\right| \quad (3.1.2.46)$$

$$\left|\int_0^T \frac{\partial \psi_2(\ell,t)}{\partial x}\bar{\eta}(t)dt\right| \le \left|\int_0^T \left(\frac{\partial \psi_2^m(\ell,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2(\ell,t)}{\partial x}\right)\bar{\eta}(t)dt\right| +$$
$$+\left|\int_0^T \frac{\partial \psi_2^m(\ell,t)}{\partial x}\bar{\eta}(t)dt\right| \quad (3.1.2.47)$$

eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\int_0^T \frac{\partial \psi_2(0,t)}{\partial x} \bar{\eta}(t)dt = 0 \quad , \qquad \int_0^T \frac{\partial \psi_2(\ell,t)}{\partial x} \bar{\eta}(t)dt = 0 \qquad (3.1.2.48)$$

Bu şartlar $\forall \eta \in L_2(0,T)$ için sağlandığından, buradan kolaylıkla $\psi_2(x,t)$ fonksiyonunun $x = 0, x = \ell$ noktalarında 2.tip sınır şartlarını sağladığı görülür.

Böylece $\{\psi_k{}^m\}$,k=1,2 fonksiyonlar dizilerinin limit fonksiyonları olan $\psi_k = \psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.1.2)-(3.1.1.5) sınır değer probleminin $\{v^m\} \in V$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v = v(x) \in V$ ye karşılık gelen çözümüdür ve bu çözümler sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarına ait olan hemen hemen her yerde çözümleridir.

Yani

$$\psi_k = \psi_k(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v), \text{k=1,2}$$

Bilindiği gibi $L_2(\Omega)$, H uzaylarının normları alttan zayıf, yarı sürekli fonksiyonellerdir. Bu taktirde $\{v^m\} \in V$ dizisinin $v \in V$ elemanına $(*)$-zayıf yakınsadığında $\{\psi_k{}^m\}$,k=1,2 dizilerinin ψ_k, k=1,2 fonksiyonlarına $L_2(\Omega)$ uzayında kuvvetli yakınsamasını, aynı zamanda zayıf yakınsamasını göz önüne alarak $\alpha \geq 0$ için aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$J_{\alpha^*} \leq J_\alpha(v) \leq \lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = \inf_{v \in V} J_\alpha(v) = J_{\alpha^*}$$

Bu bağıntıdan $J_{\alpha^*} = J_\alpha(v)$ olduğu ispatlanır. Yani $v \in V$ elemanı $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin minumum noktasıdır. Böylece (3.1.1.2)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin en azından bir çözüme sahip olması ispatlanmış olur. Teorem ispatlandı.

3.1.3. Fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi

Bu kısımda (3.1.1.2)-(3.1.1.5) optimal kontrol problemi için amaç fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi incelenir ve onun gradiyenti için formül ispatlanır. Kabul edelim ki; $\phi_k = \phi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları aşağıdaki eşlenik problem denilen sınır değer probleminin çözümü olsun:

$$i\frac{\partial\phi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi_k}{\partial x^2}-a(x)\phi_k-v(x)\phi_k+iv_1(x)\phi_k=2(-1)^k\left(\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)\right),$$

$$(x,t)\in\Omega \tag{3.1.3.1}$$

$$\phi_k(x,T)=0,\ k=1,2,\quad x\in(0,\ell), \tag{3.1.3.2}$$

$$\phi_1(0,t)=\phi_1(\ell,t)=0,\quad t\in(0,T), \tag{3.1.3.3}$$

$$\frac{\partial\phi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\phi_2(\ell,t)}{\partial x}=0,\ t\in(0,T), \tag{3.1.3.4}$$

Burada $\psi_k=\psi_k(x,t)$, k=1,2 (3.1.1.2)-(3.1.1.5) sınır değer probleminin $v\in V$ ye karşılık gelen çözümüdür.

Tanım 3.1.3.1:(3.1.3.1)-(3.1.3.4) eşlenik sınır değer probleminin çözümü denilirken $C^0([0,T], L_2(0,\ell))$uzayına ait olan $\frac{\partial\eta_{12}(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\eta_{12}(\ell,t)}{\partial x}=0$ şartlarını sağlayan $\forall\eta_{11}\in\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega),\forall\eta_{12}\in W_2^{2,1}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega\phi_k\left[-i\frac{\partial\bar{\eta}_{1k}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\bar{\eta}_{1k}}{\partial x^2}-a(x)\bar{\eta}_{1k}-v_0(x)\bar{\eta}_{1k}+iv_1(x)\bar{\eta}_{1k}\right]dxdt=$$

$$=(-1)^k2\int_\Omega\left(\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)\right)\bar{\eta}_{1k}(x,t)dxdt+i\int_0^\ell\phi_k(x,0)\bar{\eta}_{1k}(x,0)dx,$$

$$k=1,2 \tag{3.1.3.5}$$

İntegral özdeşliğini sağlayan $\phi_k=\phi_k(x,t)$, k=1,2 fonksyonları anlaşılmaktadır.

(Yagubov G.Ya.,1994), (Hakan Yetişkin,2006) çalışmalarındaki sonuçlardan faydalanarak (3.1.3.1)-(3.1.3.4) sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve bir tekliğine ait olan hükmü elde edebiliriz. Bundan başka bu sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki kestirimin geçerli olduğu da söyleyebiliriz:

$\forall t\in[0,T]$ için

$$\|\phi_k(.,t)\|_{L_2(0,\ell)}\le c_{17}\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2(\Omega)},\quad k=1,2 \tag{3.1.3.6}$$

dır. Burada $c_{17}>0$ sayısı t den bağımsızdır.

Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$\mathrm{H}\left(x,\varphi_1(x,.),\varphi_2(x,.),v_0{}^{(x)},v_1{}^{(\alpha)},\bar{\phi}_1(x,.),\bar{\phi}_2(x,.) \right)=$$

$$=\int_0^T \mathrm{Re}\left(\varphi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t)+\varphi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) \right)dt.v_0(x)-$$

$$-\int_0^T \mathrm{Im}\left(\varphi_1(x,t),\bar{\phi}_1(x,t)+\varphi_2(x,t)\bar{\phi}(x,t) \right)dt.v_1(x)-$$

$$-\ \alpha\left[(v_0(x)-w_0(x))^2+(v_1(x)-w_1(x))^2\right] \tag{3.1.3.7}$$

Bu fonksiyona (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol problemi için Hamilton-Pontryagin fonksiyonu denir.

Teorem 3.1.3.2: Kabul edelim ki teorem 3.1.2.2'nin şartları sağlanmış olsun. Bu taktirde (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin amaç fonksiyoneli olan $j_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onun gradiyenti için

$$J'_\alpha(v)=-\frac{\partial H}{\partial v} \tag{3.1.3.8}$$

Formülü geçerlidir. Burada $\mathrm{H}=\mathrm{H}\left(t,\psi_1,\psi_2 v,v_1,\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2 \right)$ fonksiyonu (3.1.3.7) formülü ile tanımlanır.

İspat: $\forall v\in V$ elemanını alalım ve bu eleman üzerinde $J_\alpha(v)$ fonsiyonelinin artışını hesaplayalım.(3.1.1.1) ve (3.1.2.8) formüllerini kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki formülü elde ederiz.

$$\Delta J_\alpha(v)=J_\alpha(v+\Delta v)-J_\alpha(v)=$$

$$=2\int_\Omega \mathrm{Re}\left[(\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t))\left(\Delta\bar{\psi}_1(x,t)-\Delta\bar{\psi}_2(x,t) \right) \right]dxdt+$$

$$+2\alpha\int_0^\ell (v_0(x)-w_0(x))\Delta v_0(x)dx+$$

$$2\alpha\int_0^\ell (v_1(x)-w_1(x))\Delta v_1(x)dx+\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$-2\int_{\Omega}\mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1(x,t)\Delta\bar{\psi}_2(x,t)dxdt+\alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,\ell)}\right) \qquad (3.1.3.9)$$

Burada $\Delta\psi_k=\Delta\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.2.3)-(3.1.2.5) sınır değer probleminin çözümüdür. Teoremin şartına göre teorem 3.1.2.2'nin şartları sağlanıyor. Bu nedenle (3.1.1.2)-(3.1.1.5) sınır değer probleminin çözümü olan $\psi_1(x,t)$ ve $\psi_2(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ ve $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarının elemanıdır ve problemin hemen hemen her yerde çözümüdür. Buna göre de $\Delta\psi_k=\Delta\psi_k(x,t)=\psi_k(x,t;v+\Delta v)-\psi_k(x,t;v)$ k=1,2 fonksiyonları için aşağıdaki integral özdeşlikleri yazılabilr:

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2}-a(x)\Delta\psi_k-(v+\Delta v_0)\Delta\psi_k-i(v_1+\Delta v_1)\Delta\psi_k\right)\bar{\eta}_k\,dxdt=$$

$$=\int_{\Omega}\Delta v_0\psi_k\,\bar{\eta}_k\,dxdt+i\int_{\Omega}\Delta v_1\psi_k\,\bar{\eta}_k dxdt \qquad (3.1.3.10)$$

$\forall\eta_k=\eta_k(x,t)\in L_2(\Omega)$, k=1,2 $\qquad \phi_k\in C^0([0,T],L_2(0,\ell))$ olduğundan bu integral özdeşliğinde $\bar{\eta}_k=\bar{\phi}_k$ alalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2}-a(x)\Delta\psi_k-(v_0+\Delta v_0)\Delta\psi_k-i(v_1+\Delta v_1)\Delta\psi_k\right)\bar{\phi}_k(x,t)dxdt$$

$$=\int_{\Omega}\Delta v_0(x)\psi_k(x,t)\bar{\phi}_k(x,t)dxdt+i\int_{\Omega}\Delta v_1(x)\psi_k(x,t)\bar{\phi}_k(x,t)dxdt \qquad (3.1.3.11)$$

Bu eşleniğin kompleks eşleniğini yazmış olursak

$$\int_{\Omega}\left(-i\frac{\partial\Delta\bar{\psi}_k}{\partial t}a_0\frac{\partial^2\Delta\bar{\psi}_k}{\partial x^2}-a(x)\Delta\bar{\psi}_k-(v_0+\Delta v_0)\Delta\bar{\psi}_k-i(v_1+\Delta v_1)\Delta\bar{\phi}_k\right)\phi_k(x,t)dxdt$$

$$=\int_{\Omega}\Delta v_0(x)\bar{\psi}_k(x,t)\phi_k(x,t)dxdt-i\int_{\Omega}\Delta v_1(x)\bar{\psi}_k(x,t)\phi_k(x,t) \qquad (3.1.3.12)$$

elde edilir.

Şimdi (3.1.3.5) integral özdeşliğinde $\bar{\eta}_{1,k}=\Delta\bar{\psi}_k$, k=1,2 alalım ve $\Delta\psi_k(x,0)=0$ şartını kullanalım. Bu taktirde (3.1.3.5) özdeşliğinden aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega}\phi_k\left(-i\frac{\partial\bar{\psi}_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\bar{\psi}_k}{\partial x^2}-a(x)\Delta\bar{\psi}_k-v_0(x)\Delta\bar{\psi}_k+iv_1(x)\Delta\bar{\psi}_k\right)dxdt=$$

$$=(-1)^k 2\int_{\Omega}(\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t))\Delta\bar{\psi}_k\,dxdt \qquad (3.1.3.13)$$

Aynı şekilde bu eşitliğin kompleks eşleniğini yazarsak;

$$\int_{\Omega}\bar{\phi}_k\left(+i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2}-a_0x)\Delta\psi_k-v_0(x)\Delta\psi_k-iv_1(x)\Delta\psi_k\right)dxdt$$

$$=(-1)^k 2\int_{\Omega}\left(\bar{\psi}_1(x,t)-\bar{\psi}_2(x,t)\right)\Delta\psi_k(x,t)dxdt \qquad (3.1.3.14)$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi (3.1.3.11) eşitliğinden (3.1.3.14) eşitliğini ve (3.1.3.12) eşitliğinden (3.1.3.11) eşitliğini taraf tarafa çıkarmış olursak ve dönüşümler yaparsak kolaylıkla aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu elde edilir.

$$2\int_{\Omega}\mathrm{Re}\left[(\psi_1-\psi_2)\left(\Delta\bar{\psi}_1-\Delta\bar{\psi}_2\right)\right]dxdt=$$

$$=-\int_{\Omega}\mathrm{Re}\left(\psi_1\bar{\phi}_1+\psi_2\bar{\phi}_2\right)\Delta v_0(x)dxdt-\int_{\Omega}\mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1+\Delta\psi_2\bar{\phi}_2\right)\Delta v_0(x)dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\mathrm{Im}(\varphi_1\bar{\phi}_1+\varphi_2\bar{\phi}_2)\Delta v_1(x)dxdt+\int_{\Omega}\mathrm{Im}\left(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1+\Delta\psi_2\bar{\phi}_2\right)\Delta v_1(x)dxdt \qquad (3.1.3.15)$$

Bu eşitliği (3.1.3.9) formülünden dikkate alırsak fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v)=\int_0^{\ell}\left[-\int_0^T\mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t)+\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)dt+2\alpha(v_0(x)-w_0(x))\right]\Delta v_0(x)dx+$$

$$+\int_0^{\ell}\left[\int_0^T\mathrm{Im}\left(\varphi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t)+\varphi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)dt+2\alpha(v_1(x)-w_1(x))\right]\Delta v_1(x)dt+R$$

$$(3.1.3.16)$$

burada R kalanı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$R=\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}+\alpha\|\Delta v\|^2_H-2\int_{\Omega}\mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1\Delta\bar{\psi}_2\right)dxdt-$$

$$-\int_{\Omega}\mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1+\Delta\psi_2\bar{\phi}_2\right)\Delta v_0(x)dxdt+\int_{\Omega}\mathrm{Im}\left(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1+\Delta\psi_2\bar{\phi}_2\right)\Delta v_1(x)dxdt \qquad (3.1.3.17)$$

Şimdi önce R kalanını kestirelim.

R için alan formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$|R| \le 2\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\|\Delta v\|^2_H + \int\limits_{\Omega}|\Delta v_0(x)|\left(|\Delta\psi_1\||\phi_1| + |\Delta\psi_2\||\phi_2|\right)dxdt +$$

$$+ \int\limits_{\Omega}|\Delta v_1(x)|\left(|\Delta\psi_1\||\phi_1| + |\Delta\psi_2\||\phi_2|\right)dxdt$$

Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini uygularsak ve $\Delta v \in B$ $\phi_k \in C^0([0,T], L_2(0,\ell))$ olduğunu ve (3.1.3.6),(3.1.1.8),(3.1.1.9) kestirimlerini dikkate alırsak sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|R| \le c_{18}\left(\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta v\|^2_B\right) \qquad (3.1.3.18)$$

burada c_{18} >0 sabiti Δv den bağımsızdır. Bu eşitsizlikte $\Delta\psi_1$ ve $\Delta\psi_2$ için olan (3.1.2.12) kestirimlerini kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$|R| \le c_{19}\left(\|\Delta v\|^2_B\right) \qquad (3.1.3.19)$$

burada c_{19} sabiti Δv den bağımsızdır. Böylece (3.1.3.18) kestirimini kullanırsak

$$R = 0\left(\|\Delta v\|_B\right) \qquad (3.1.3.20)$$

bağıntısı elde edilir; yani R kalanı $\|\Delta v\|_B$ normuna göre yüksek mertebeden sonsuz küçüktür.

(3.1.3.20) bağıntısını kullanırsak fonksiyonelin artışı için olan ifadeyi aşağıdaki biçimde yazabiliriz.

$$\Delta J_\alpha(v) = \int\limits_0^\ell\left[-\int\limits_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)dt + 2\alpha\left(v_0(x) - w_0(x)\right)\right)\right]\Delta v_0(x)dx$$

$$+ \int\limits_0^\ell\left[\int\limits_0^T \mathrm{Im}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)dt + 2\alpha(v_1(x) - w_1(x)\right]\Delta v_1(x)dx +$$

$$+0\left(\|\Delta v\|_B\right) \qquad (3.1.3.21)$$

Fonksiyonellerin frechet anlamında diferansiyellenebilirliğinin tanımını sonuncu formülde uygularsak ve Hamilton Pontryagen fonksiyonunun ifadesini dikkate alırsak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz.

$$\Delta J_\alpha(v) = -\int\limits_0^\ell \frac{\partial H\left(H_x\psi_1(x,.),\psi_2(x,.),v_0(x),v_1(x),\bar{\phi}_1(x,.)\bar{\phi}_2(x,.)\right)\Delta v_0(x)dx}{\partial v_0} -$$

$$-\int_0^{\ell}\frac{\partial H\left(x,\psi_1(x,.),\psi_2(x,.),v_0(x),v_1(x),\bar{\phi}_1(x,.)\bar{\phi}_2(x,.)\right)}{\partial v_1}\Delta v_1(x)dx+0\left(\|\Delta v\|_B\right)$$

Buradan da kolaylıkla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\Delta J_\alpha(x)=-\int_0^{\ell}\langle\frac{\partial H\left(x,\psi_1(x,.),\psi_2(x,.),v_0(x),v_1(x),\bar{\phi}_1(x,.),\bar{\phi}_2(x,.)\right)}{\partial v},$$

$$\Delta v>_{R^2}dx+0\left(\|\Delta v\|_B\right) \qquad (3.1.3.22)$$

Diğer yandan;

$$\Delta J_\alpha(v)=\int_0^{\ell}\left\langle J_\alpha'(v),\Delta v(x)\right\rangle_{R^2}dx+0(\|\Delta v\|)_B \qquad (3.1.3.23)$$

dir. (3.1.3.22) ve (3.1.3.23)'ü karşılaştırırsak teoremin hükmünü elde ederiz. Teorem (3.1.3.2) ispatlandı.

3.1.4.Optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart

Bu kısımda bakılan (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanacaktır.

Teorem 3.1.4.1: Kabul edelim ki teorem 3.1.3.2 in şartları sağlanmış olsun. Farz edelim ki $v^*\in V$ kontrolü (3.1.1.1)-(3.1.1.5) probleminin çözümü olsun. Bu taktirde $\forall v\in V$ için

$$\int_0^{\ell}\left[\int_0^{T}\mathrm{Re}\left(\psi_1^*(x,t)\bar{\phi}_1^*(x,t)+\psi^*{}_2(x,t)\bar{\phi}_2^*(x,t)\right)dt-2\alpha\left(v_0^*(x)-w_0(x)\right)\right]\times$$

$$\times\left[v_0(x)-v_0^*(x)\right]dx-\int_0^{\ell}\left[\int_0^{T}\mathrm{Im}\left(\psi_1^*(x,t)\bar{\phi}_1^*(x,t)+\psi_2^*(x,t)\bar{\phi}_2^*(x,t)\right)dt+\right.$$

$$\left.+2\alpha\left(v_1^*(x)-w_1(x)\right)\right]\left(v_1(x)-v_1^*(x)\right)dt\le 0 \qquad (3.1.4.1)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\psi_k^*(x,t)\equiv\psi_k(x,t;v^*),\phi_k^*(x,t)\equiv\phi_k(x,t;v^*)$, k=1,2 sırasıyla (3.1.1.2)-(3.1.1.5) ve (3.1.3.1)-(3.1.3.4) sınır değer probleminin çözümleridir.

İspat: V kümesinin tanımından gözüktüğü gibi bu küme konveks kümedir. Diğer yandan $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesinde teorem 3.1.3.2'ye göre Frechet anlamında diferansiyellenebilir fonksiyonellerdir ve onun gradiyenti için;

$$J_\alpha' = -\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) \right)dt + 2\alpha\left(v_0(x) - w(x)\right) +$$

$$+ \int_0^T \mathrm{Im}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) \right)dt + 2\alpha\left(v_1(x) - w(x)\right) \qquad (3.1.4.2)$$

Formülü geçerlidir. Önce $J_\alpha'(v)$ gradiyentinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla $J_\alpha'(v)$ gradiyentinin $\forall v \in V$ için artışını hesaplayalım.(3.1.4.2) formülünü kullanmış olursak fonksiyonelin gradiyentinin v elemanı üzerinde artışı için bir sonraki formülü elde ederiz:

$$\Delta J_\alpha'(v) = J_\alpha'(v + \Delta v) - J_\alpha'(v) =$$

$$= -\int_0^T \mathrm{Re}\Big(\Delta\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_1(x,t)\Delta\bar{\phi}_1(x,t) + \Delta\psi_1(x,t)\Delta\bar{\phi}_2(x,t) +$$

$$+ \Delta\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) + \psi_2(x,t)\Delta\bar{\phi}_2(x,t) + \Delta\psi_2(x,t)\Delta\bar{\phi}(x,t) \Big)dt +$$

$$+ 2\alpha\Delta v_0(x) + \int_0^T \mathrm{Im}\Big(\Delta\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_1(x,t)\Delta\bar{\phi}_1(x,t) + \Delta\psi_1(x,t)\Delta\bar{\phi}_2(x,t) +$$

$$+ \Delta\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) + \psi_2(x,t)\Delta\bar{\phi}_2(x,t) + \Delta\psi_2(x,t)\Delta\bar{\phi}_2(x,t) \Big)dt +$$

$$+ 2\alpha\Delta v_1(x) \qquad (3.1.4.3)$$

burada $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.2.2)-(3.1.2.5) sınır değer probleminin çözümü ,$\Delta\phi_k = \Delta\phi_k(x,t) \equiv \phi_k(x,t;v+\Delta v) - \phi_k(x,t;v)$, k=1,2 fonksiyonları aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$i\frac{\partial\Delta\phi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\phi_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\phi_k - \left(v_0 + \Delta v_0\right)\Delta\phi_k - i\left(v_1 + \Delta v_1\right)\Delta\phi_k =$$

$$= \Delta v_0\phi_k(x,t;v) + i\Delta v_1\phi_k(x,t;v) + 2(-1)^k\left[\Delta\psi_1(x,t) - \Delta\psi_2(x,t)\right] \qquad (3.1.4.4)$$

$$\Delta\phi_k(x,T)=0 \qquad k=1,2 \quad x\in(0,\ell) \tag{3.1.4.5}$$

$$\Delta\phi_1(0,t)=\Delta\phi_1(\ell,t)=0, \quad t\in(0,T) \tag{3.1.4.6}$$

$$\frac{\partial\Delta\phi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\Delta\phi_2(\ell,t)}{\partial x}=0, \quad t\in(0,T) \tag{3.1.4.7}$$

Kolaylıkla denilebilir ki, (3.1.4.4)-(3.1.4.7) sınır değer problemi (3.1.3.1)-(3.1.3.4) sınır değer problemi gibi (3.1.1.2)-(3.1.1.5) sınır değer problemi ile aynı tiplidir.Buna göre aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\Delta\phi_k(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)} \le c_{20}\left(\left\|\Delta\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)}+\left\|\Delta\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)}+\left\|\Delta v\right\|_B\right) \tag{3.1.4.8}$$

$\forall t\in[0,T]$, k=1,2 Burada c_{20}>0 sabiti Δv ve $\Delta\psi_k$, k=1,2 den bağımsızdır. Bu taktirde (3.1.2.15) kestirimini dikkate alırsak, (3.1.4.8) eşitsizliğinde aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\Delta\phi_k(.,t)\right\|_{L_2(0,\ell)} \le c_{27}\left\|\Delta v\right\|_B \tag{3.1.4.9}$$

Burada c_{27}>0 sabiti Δv den bağımsızdır.

Şimdi $\Delta J_\alpha'(v)$ artışını kestirelim.(3.1.4.3) formülünde Cauchy-Bunyakovsky eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\Delta J_\alpha'(v)\right\|^2_{L_1^{(2)}(0,T)} \le 2\left\|\Delta\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\phi_1\right\|_{L_2(\Omega)}+2\left\|\Delta\phi_1\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)}+$$

$$+2\left\|\Delta\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\phi_2\right\|_{L_2(\Omega)}+2\left\|\Delta\phi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)}+$$

$$+2+2\left\|\Delta\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\Delta\phi_1\right\|_{L_2(\Omega)}+2\left\|\Delta\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\Delta\phi_2\right\|_{L_2(\Omega)}+4\alpha\sqrt{\ell}\left\|\Delta v\right\|_B$$

Burada $L_1^{(2)}(0,T)=L_1(0,T)\times L_1(0,T)$ dir. (3.1.1.8),(3.1.1.9),(3.1.2.15) ve (3.1.4.9) kestirimlerini kullanıp $\Delta v\in B$ olduğunu dikkate alırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz.

$$\left\|\Delta J_\alpha'(v)\right\|^2_{L_1(0,\ell)} \le c_{28}\left\|\Delta v\right\|_B \tag{3.1.4.10}$$

Burada c_{28} sayısı Δv den bağımsızdır. Bu eşitlikten $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin gradiyentinin $\forall v\in V$ elemanı üzerinde sürekli olduğu görülür. Buradan $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde Frechet anlamında sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonel olduğu ispatlanmış olur. Böylece (Vasilyev F.P., 1981), sayfa (22)deki teoremin şartlarının sağlandığını gördük. Bu taktirde söz konusu teoreme göre $v^* \in V$ çözümü için ;

$$\left\langle J_\alpha'(v^*), v - v^* \right\rangle_B \geq 0, \ \forall v \in V$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu ispat edilir. Burada $J_\alpha'(v)$ fonksiyonelinin gradiyenti için formülü dikkate alırsak elde edilen bağıntıyı (-1) ile çarparsak teoremin hükmünün geçerli olduğu ispatlanmış olur.

KAYNAKLAR

[1] Butkovski, A.G., SamoylenkoY.I. Kuantum Mekanik Süreçlerin Kontrolü. M. Nauka-1984-s.256 (Rusça)

[2] Dın Nıo Hao, Kuantum Objektlerinin Optimal Kontrolü// Otomatik ve Telemekanik. 1986, No 2, s. 1420 (Rusça)

[3] Goebel, M., On Existence Of Optimal Control// Math. Nacr-1979, Vol. 53 s.67-73

[4] İskenderov, A.D., Yagubov, G. Ya., Kuantum Mekanik Potansiyelin Bulunması Ters Problemin Çözümü İçin Varyasyon Yöntemi// DAN SSSR, 1988, c.303, No:5, s.1044-1048, Lineer Olmayan Kuantum Mekanik Sistemlerin Optimal Kontrolü// Otomatik ve Telemekanik. 1989, no:12-s.27-38 (Rusça).

[5] İskenderov, A.D., Matematiksel Fiziğin Çok Boyutlu Ters Problemlerinin Varyasyon Konumları Hakkında DAN SSSR-1984-c.274-No:3-s. 531-533, Durgun Olmayan Schrodinger Denkleminde Potansiyelin Bulunması// Matematik Modellemenin ve Optimal Kontrolün Problemleri-Bakü,2001-s.6-36 (Rusça)

[6] İskenderov, A.D., Mahmudov, N.M., Kuantum Mekanik Sistemler İçin Lions Kriterli Optimal Kontrol// AMEA'nın Haberleri Fizik Teknik Matematik Bilimleri Serisi-1995, c.16, No:5-6-30-35 (Rusça)

[7] Iyosida, K., Functional Analysis-M,:Mir, 1967-s. 624 (Rusça)

[8] Kolmogorov, A.N., Formin S.V., Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları. M. Nauka. 1989-s. 624 (Rusça)

[9] Ladijenskaya O.A., Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri- M: Nauka, 1973 (Rusça)

[10] Ladijenskaya, O.A., Parabolik Tip Lineer ve Kuazilineer Denklemler. Moskova, Nauka, 1976

[11] Landau, L.D., Lifşis E.M. Kuantum Mekaniği Cilt 3-M-1963-s. 702 (Rusça)

[12] Lions, J.L., Optimal Control of Systems Governed By Partial Differential Equations. Springer-Verlog Berlin Heidelberg New York-1971-s. 400

[13] Mikhaylov, Kismi Türevli Diferansiyel Denklemler.- Moskova, Nauka, 1983

[14] Mahmudov, N.M, Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri-1997-c.7.s. 392 (Rusça)

[15] Potapov, M.M., Razgulin A.V., Şameeva T.Y., Schrodinger Tipli Optimal Kontrol Probleminin Yaklaşımı ve Regülarizasyonu. Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri 15 (Nümerik Analiz ve Sibernetik) 1987. No:1s.8-13(Rusça)

[16] Razgulin, A.V., Lineer Olmayan Schrodinger Denklemi için Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri 15 (Nümerik Analiz ve Sibernetik) 1998. No:2-s.28-33 (Rusça)

[17] Samarskiy, A.A., Andreev V.B., Eliptik Denklemler İçin Fark Metodları. M. Nauka. 1976 (Rusça)

[18] Samarskiy, A.A., Lazarov R.D., Makarov V.L. Genelleşmiş Çözümlü Diferansiyel Denklemler İçin Fark Şemaları. M. Vısşaya Şkola 1987, s.296(Rusça)

[19] Silla, N., Schrodinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü . Doktora Tezi. Bakü. 1991, s. 165 (Rusça)

[20] Tikonov, A.N., Arsenin, V. Ya., III- Posed Problemlerin Çözüm Metodları. Moskova-Nauka. 1979, s. 288 (Rusça)

[21] Vasilyev, F.P., Extremal Problemlerin Çözüm Metodları.-M: Nauka. 1981-s.400 (Rusça)

[22] Vorontsov, M.A., Şmalqauzen, V.I., Adaptiv Optiğin Prensipleri. Moskova, Nauka,1984

[23] Yagubov, G. Ya., Musayeva, M.A., Lineer Olmayan Schrodinger Denklemi İçin Bir İnvers Probleminin Varyasyon Konulmasının Farklar Metoduyla Çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisinin Haberleri. Seri: Fizik-Teknik ve Matematik Bilimleri. 1995, Cilt: 16, No:1-2, s. 46-51, M.A. Lineer Olmayan Schrodinger Denklemi İçin İdentifikasyon Problemi Hakkında // Diferansiyel Denklemler-1997, c.33, No:12 s.1691-1698 (Rusça)

[24] Yagubov, G.Ya.,Kuazi, Lineer Schrodinger Denkleminin Katsayı İle Optimal Kontrol. Bilimler Doktoru Tezi. Kiyev. 1994, s. 318 (Rusça)

[25] Yetişkin, H., "Kompleks Potansiyelli Schrodinger Denklemi İçin Optimal Kontrol Problemi Ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı", Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, 2005

ÖZGEÇMİŞ

1975 yılında Erzurum'da doğdu. Ortaöğretimini Kahramanmaraş da tamamlayıp 1996 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi Matematik Bölümünden 2000 yılında mezun oldu. 2000 yılında başladığı öğretmenlik hayatına halen devam etmektedir.