2.TEMEL KAVRAMLAR

2.1. Fuzzy Kümeleri ve Fuzzy Kümeleri ile ilgili işlemler

Boştan farklı bir X kümesi, üzerinde tanımlanan bağıntılara göre çeşitli isimler alır. Bunlardan bazılarını tanımlayacak olursak şöyledir:

Tanım 2.1.1. X boştan farklı bir küme olmak üzere XxX in her bir alt kümesine X de bir bağıntı denir

Tanım 2.1.2. X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerindeki bağıntı “$\lesssim$ “ olsun. Buna göre;
i) Her $a \in X$ için a $\lesssim$ a oluyorsa “$\lesssim$ “ bağıntısına yansıyan,
ii) Her a,b,c$\in$X için a $\lesssim$ b ve b $\lesssim$ c iken a=c oluyorsa “$\lesssim$ “ bağıntısına geçişken,
iii) Her a,b,c$\in$X için a $\lesssim$ b ve b $\lesssim$ a iken a=b oluyorsa “$\lesssim$ “ bağıntısına ters simetriktir denir

Tanım 2.1.3. X üzerindeki “$\lesssim$ “ bağıntısı yansıyan ve geçişken ise, “$\lesssim$ “ bağıntısına ön-sıralama (preorder) bağıntısı denir. X kümesine de “$\lesssim$ “ ön-sıralama bağıntısı ile donatılmış ön-sıralanmış küme (preordered set) denir. Eğer X önsıralanmış kümesinde ab fakat a$\neq$b ise, acb ile gösterilir. X ön-sıralanmış kümesinde iki eleman a ve b olmak üzere eğer, ab veya ba ise bu iki eleman karşılaştırılabilirdir, fakat böyle bir ilişki yoksa bu iki elemana karşılaştırılamazdır denir.

Tanım 2.1.4. X kümesi üzerindeki “$\lesssim$ “ ön-sıralama bağıntısı aynı zamanda ters simetrik bir bağıntı ise, “$\lesssim$ “ bağıntısına kısmi sıralama (partial order) bağıntısı denir. X kümesine de “$\lesssim$ “ kısmi sıralama bağıntısı ile donalmış, kısmi sıralanmış küme (partialiy ordered set) denir

Tanım 2.1.5. X kısmi sıralı bir küme olmak üzere, X’ in her eleman çifti birbiriyle karşılaştırılabilir ise, X kısmi sıralı kümesine tam sıralanmış küıne (totally ordered set) veya zincir denir

Tanım 2.1.6. X kısmi sıralı kümesinin boştan farklı bir alt kümesi A olmak üzere, her a$\in A$ için a$\lesssim$a olacak şekilde $a_o \in A$ varsa, (yani A nın bir en küçük elemanı varsa), X’ e iyi sıralanmış küme (well-ordered set) denir

Tanım 2.1.7. X bir ön-sıralanmış küme, $A \subset X$ ve a$\in A$ olsun.
i) a, A nın bir küçük elemanıdır denir, eğer b$\lesssim$a ve a$\neq$b olacak şekilde b$\subset$A yoksa.
ii) a, A nın en küçük elemanıdır denir, eğer her b$\subset$A için ab ise ve min A = a şeklinde gösterilir

Tanım 2.1.8. X bir ön-sıralanmış küme olmak üzere A$\subset$X ve a$\subset$A olsun.
i) a, A nın bir büyük elemanıdır denir. Eğer, a$\lesssim$b ve a$\neq$b olacak şekilde A nın bir b elemanı yoksa.

ii) a, A nın bir en büyük elemanıdır denir. Eğer, her b $\lesssim$ A için ba ise ve maks A = a şeklinde gösterilir

Not 1.1.9. X boştan farklı bir küme olmak üzere,

X iyi sıralanmış küme $\Rightarrow$ X bir zincir
$\Rightarrow$ X bir kısmi sıralı küme
$\Rightarrow$ X ön-sıralanmış küme

Tanım 2.1.10. X ön-sıralanmış bir küme , $A \subset X$ ve $b \in X$ ($c \in X$) olsun. Eğer her $a \in A$ için, $a \lesssim b$ ($c \lesssim a$) oluyor ise b (e) elemanına A kümesinin bir üst sınırı (alt sınırı) denir

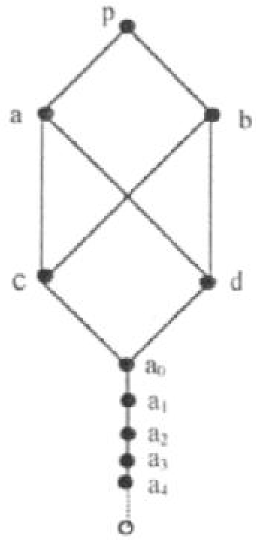
Tanım 2.1.11. X kısmi sıralı bir küme olmak üzere $A \subset X$ ve $a \in X$ olsun.
Aşağıdaki şartlar sağlanır ise a ya A nın en küçük üst sınırı veya supremumu denir ve sup A = a ile gösterilir.
i) a. A nın bir üst sınırıdır.
ii) X in bir b elemanı A nın bir üst sınırı ise, $a \lesssim b$

Tanım 2.1.12. X kısmi sıralı bir küme olmak üzere $A \subset X$ ve $a \in X$ olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanır ise aya A nın en büyük alt sınırı veya infımumu denir ve inf A = a ile gösterilir.
i) a. A nın bir alt sınırıdır.
ii) X in bir b elemanı A nın bir alt sınırı ise, $b \lesssim a$

Tanım 2.1.13. X kısmi sıralı bir küme olmak üzere, X kümesinin en büyük alt sınırı (infrimumu) ve en küçük üst sınırı (supremumu) X kümesinde ise. X kümesine Lattice denir. Bundan sonra Lattice kümesini kısaca L ile göstereceğiz

Not 2.1.14. Tanımdan da anlaşılacağı gibi L kümesi hiç bir zaman boş küme olamaz. Fakat en küçük ve en büyük elemanı aynı olduğu durumlarda tek elemandan oluşan bir küme olabilir. Bu tür Lattice kümelerine aşikar (trivial) Lattice denir. Burada biz L kümesinin en küçük ve en büyük elemanlarını sırasıyla 0_L ve 1_L olarak alacağız ve kısaca 0 ve 1 ile göstereceğiz

Örnek 2.1.15.



Şekil üzerinde her bir koyu nokta bir eleman ve şeklin altındaki koyu nokta olmayan küçük çember ise eleman olmadığını göstermektedir. Şekle göre herhangi iki elenıanın karşılaştırılabilir olması için gerek ve yeter şart elemanların aynı doğru parçası ile bağlannıış olması gerekir. Verilen elemanlar içinde en büyük olanı şeklin en yukarısında olan eleman, en küçük olanı da şeklin en aşağısındaki elemandır. Böylece yukarıdaki kısmi sıralarna bağıntısıına göre, verilen elemanlardan oluşan L kümesi kısmi sıralanmış kümedir. Ayrıca verilen bağıntıya göre, L kümesinin en büyük elemanı p elemanıdır ve sup{a,b} = p dir. Fakat burada inf{a,b} yoktur. Tersine, inf{c,d} = a_0 dır. Fakat burada sup{c,d} yoktur. L kısmi sıralanmış kümesi $\ldots \lesssim a_3 \lesssim a_2 \lesssim a \lesssim a_0$ gibi sıralanmış bir diziye sahiptir. Fakat, herhangi sonsuz alt küme için L nin en büyük alt sınırı (infimumu) ve en küçük elemanı yoktur. Özel olarak, L{ a_0,c,d,a,b,p} kümesini ve a_0=0, p=1 alırsak, L bir Lattice kümesi olur

Lattice kavramını verdikten sonra diyebiliriz ki reel sayılar kümesinin [0,1] alt kümeside özel bir Lattice' dir. Aşağıda vereceğimiz fuzzy küme kavramı, Goguen tarafından 1967 yılında L-fuzzy küme olarak genişletilmiştir. Biz bu çalışmamızda L[0, 1] alacağız. Fakat zaman zaman L-fuzzy küme kavramını da kullanacağız.

Tanım 2.1.16. X boştan farklı herhangi bir küme, l=[0,1] olmak üzere X den 1 ya tanımlanan bütün fonksiyonların kümesini 1^X ile gösterelim. 1^X in her bir elemanına X in bir fuzzy kümesi denir

Tanım 2.1. 17. X in bir A fuzzy alt kümesi. $f_A : X \to I$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilen. A={(x. f_A(x)) : x$\in$X}$\subset$Xxl kümesine denir. Bundan sonra zaman zaman f_A yerine A, f_A (x) yerine A(x) alınacaktır.

Şimdi ise, L-fuzzy küme tanımını yapacak olursak, görürüz ki fuzzy küme tanımı, L-fuzzy küme tanımının (L[0,1] için), özel bir halidir.

Tanım 2.1.18. X boştan farklı bir küme ve L bir lattice olmak üzere, X den L ye tanımlanan bütün fonksiyonların kümesini L^X (L^X e, L-fuzzy uzay denir.) ile gösterelim. L^X in her bir elemanına X in bir L-fuzzy kümesi denir. Buna göre, X in bir L-fuzzy alt kümesi, A ile gösterilmek üzere, $f_A : X \to L$ üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir

Tanım 2.1.19. X boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere, X deki $p_{x_0}^{\lambda}$ fuzzy kümesine X de fuzzy noktası denir eğer, $p_{x_0}^{\lambda} : X \to L$ üyelik fonksiyonu,

$$P_{x_0}^{\lambda} = \begin{cases} \lambda & , \quad x = x_0 \\ 0 & , \quad x \neq x_0 \end{cases} \quad , \lambda \in (0,1]$$

şeklinde tanımlı ise, burada x_0 ye $p_{x_0}^{\lambda}$ fuzzy noktasının dayanağı (support) ve λ da $p_{x_0}^{\lambda}$ fuzzy noktasının değeri denir. X deki bütün fuzzy noktalarının kümesini ile göstereceğiz. Bundan sonra $p_{x_0}^{\lambda}$ yerine p alacağız

Şimdi L-fuzzy nokta tanımını yaptığımız da yine fuzzy nokta tanımına benzediğini göreceğiz. Daha sonra bir L-fuzzy noktasının, herhangi bir L-fuzzy kümesine ait olması tanımını vereceğiz. Buradaki ait olma tanımının, lattice üzerindeki kısmi sıralama bağıntısına göre olduğuna dikkat etmeliyiz.

Tanım 2.1.20. L^X deki $p_{x_0}^{\lambda}$ L-fuzzy kümesine, L^X de bir L-fuzzy noktası denir eğer, $f_A : X \to L$ üyelik fonksiyonu,

$$P_{x_0}^{\lambda} = \begin{cases} \lambda & , \quad x = x_0 \\ 0 & , \quad x \neq x_0 \end{cases} \quad , \lambda \in (0,1]$$

şeklinde tanımlı ise. Burada x_0 noktasına L-fuzzy noktasının desteği (support), λ yada L-fuzzy noktasının değeri denir.

Tanım 2.1.21. L^X bir L-fuzzy uzay olmak üzere, L^X de kısmi sıralama “$\lesssim$“ ile gösterilir. Her A,B$\in$ L^X için,

A $\lesssim$ B $\Leftrightarrow \forall\, x \in X$ için, A(x) $\lesssim$ B(x)

şeklinde tanımlıdır. Ayrıca L-fuzzy uzayının, L-fuzzy noktaları kümesi Pt(L^X) ile gösterilmek üzere, p$\in$P$_t$ (L^X) ve A$\in$ L^X iken p $\lesssim$ A olması p, L-fuzzy noktasının, A L-fuzzy kümesine ait olması demektir. Kısaca p$\in$A ile yazılır

Tanım 2.1.22. X ve $\varnothing$ kümeleri birer fuzzy kümesi olup,

$\forall x \in X$ için, $f(x) = 1 \Rightarrow X = \{(x,1) : x \in X\} = 1(x) = f_x$

$\forall x \in X$ için, $f(x) = 0 \Rightarrow \varnothing = \{(x,0) : x \in X\} = 0(x) = f_{\varnothing}$
şeklinde ifade edilir
Kümeler teorisinde bilinen kapsama "$\subset$", eşitlik "=", birleşim "$\cup$" ve kesişim "$\cap$" işlemleri yerine fuzzy kümelerinde sırasıyla $\lesssim$, =, $\vee$, $\wedge$ işaretlerini kullanacağız.

Tanım 2.1.23. X deki herhangi iki fuzzy küme A ve B olsun. A ve B üyelik fonksiyonları sırasıyla f_A ve f_B ile gösterilsin. Bu durumda;
A $\lesssim$ B $\Leftrightarrow$ f_A (x) $\lesssim$ f_B (x) ($\forall$ x$\in$X)
A=B$\Leftrightarrow$ f_A (x)= f_B (x) ($\forall$ x$\in$X)
A$\vee$B=C $\Leftrightarrow$ f_C {x)=max { f_A,(x), f_B (x) } ($\forall$ x$\in$X)
A$\wedge$B=D = f_D (x)=min { f_A,(x), f_B (x) } ($\forall$ x$\in$X)
$A^C \Leftrightarrow f_A^C(x) = 1 -$ f_A,(x) ($\forall$ x$\in$X) şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.24. X deki fuzzy kümelerinin bir ailesi ($\{A_i\}_i \in j$ olsun. Buna göre;

$$C = \underset{i \in J}{V} A \Leftrightarrow f_C(x) \sup\{f_{A_i}(x)\}$$
$$D = \underset{i \in J}{\vee} \Leftrightarrow f_D(x) = \inf\{f_A(x)\}$$

şeklinde birleşim ve kesişim işlemlerinin genelleştirilmiş hali tanımlıdır .

Tanım 2.1.25. X in fuzzy alt kümeleri A ve B olmak üzere.
A-B=A$\wedge B^C$ = (x)=min { f_A (x), f_{B^C} (x)} ($\forall$ $x \in X$) fuzzy kümesine. A ve B fuzzy kümelerinin farkı denir .
Örnek 2.1.26. X={ $X = \{x_1, x_2\}, I = [0,1]$ } olmak üzere. X' de iki fuzzy küme A ve B
$A = \{(x_1 / x_2), (x_2 / 0,7)\}$, $B = \{(x_1 / 0,5), (x_2 / 0,3)\}$ olarak verilsin. Böylece;
A$\vee$B=? B^C=? A-B=?
4 ve B fuzzy kümelerinin x$\subset$X için üyelik fonksiyonlarının değerleri sırasıyla f_A (x) ve t(x) olsun.Buna göre;

$$x_1 \in X \text{ } için \text{ }, f_A(x_1) = 0,2 \text{ } ve \text{ } x_1 \in X \text{ } için, f_B(x_1) = 0,5$$
$$x_2 \in X \text{ } için \text{ }, f_A(x_1) = 0,7 \text{ } ve \text{ } x_2 \in X \text{ } için, f_B(x_2) = 0,3 \text{ } olur$$
$$A \wedge B = D \Leftrightarrow f_D(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\} \ (\forall x \in X)$$
$$f_D = \{(x_1 / 0,2), (x_2 / 0,3)\}$$
$$A \wedge B = \{(x_1 / 0,2), (x_2 / 0,3)\}$$
$$A \vee B = C \Leftrightarrow f_C(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\} \ (\forall x \in X)$$
$$f_C = \{(x_1 / 0,5), (x_2 / 0,7)\}$$
$$A \vee B = \{(x_1 / 0,5), (x_2 / 0,7)\}$$

$$B^c \Leftrightarrow f_{B^c}(x) = 1 - f_B(x) \ \ (\forall x \in X)$$
$$f_{B^c} = \{(x_1 / 0,5), (x_2 / 0,7)\}$$
$$B^c = \{(x_1 / 0,5), (x_2 / 0,7)\}$$
$$A - B = A \wedge B^C \Leftrightarrow f_{A-B}(x) = \min\{f_A(x), f_{B^c}(x)\} \quad (\forall x \in X)$$
$$f_{A-B} = \{(x_1 / 0,2), (x_2 / 0,7)\}$$
$$A - B = \{(x_1 / 0,2), (x_2 / 0,7)\}$$

Teorem 2.1.27. [13] X de iki fuzzy küme A ve B olsun.
i) A $\vee$ B fuzzy kümesi A ve B yi ihtiva eden en küçük fuzzy kümedir.
ii) A $\wedge$ B fuzzy kümesi A ve B fuzzy kümeleri tarafından ihtiva edilen en küçük füzzy kümesidir.

İspat: i) A ve B fuzzy kümelerini temsil eden üyelik fonksiyonları sırasıyla f_A ve olsun.
A $\vee$ B= C $\Leftrightarrow$ f_C (x) max { f_A (x) , f_B (x) } (V x$\in$X) olduğundan dolayı; A $\lesssim$ C Ve B $\lesssim$ C olduğu aşikardır.
Kabul edelim ki A ve B yi ihtiva eden en küçük fuzzy küme D olsun. O halde;

$$f_A(x) \le f_D(x) \le f_C(x) \ \ , \ \ f_B(x) \le f_D(x) \le f_C(x) \ \ ...(*)$$
$$\max\{f_A(x) \le f_B(x)\} \le f_D(x) \ \ , f_{A \vee B}(x) = f_C(x) \le f_D(x) ...(**)$$

(*) *ve* (**) *dandolayı,*

$$\Rightarrow f_C(x) = f_D \ \ (\forall x \in X)$$
$$\Rightarrow C = D$$

Böylece A ve B yi ihtiva eden en küçük fuzzy küme A $\vee$ B’ dir.

ii) (i)-şıkkına benzer ispat yapılır.

Özellikler 2.1.28. X deki fuzzy kümeler A , B ve C olmak üzere,

$i) A \vee \varnothing = A \ \ , \ \ A \wedge \varnothing = \varnothing \ \ A \vee X = X \ , A \vee X = A$

$ii) A \vee B = B \vee A \ \ , \ \ A \wedge B = B \wedge A \ \ , \ \ A \wedge A = A = A \wedge A$

$iii) A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C \ , A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$

$iv) A \le B \Rightarrow A \vee B = B \ , A \le B \Rightarrow A \vee B = A$

$v) A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \ \ , A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \wedge C) \ dir.$

Özellikler 2.1.29.

$i) A - \emptyset = A$

$ii) \emptyset^C = X \quad , \quad X^C = \emptyset \quad , \quad (A^C)^C = A$

$iii) A \leq B \Leftrightarrow B^C \leq A^C$

$iv) (A \wedge B)^C = A^C \vee B^C \ , (A \vee B)^C = A^C \wedge B^C \ dir.$

Teorem 2.1.30 X kümesinde iki fuzzy kümesi A ve B olsun.

i) A $\vee A^C = \emptyset$ olmak zorunda değildir.

ii) A $\vee A^C$ =X olmak zorunda değildir .

İspat: i) A fuzzy kümesinin üyelik fonksiyonu f_A olsun.

1- $f_A^{\ C}$ (x)-1, f_A ($\forall x \in X$) olduğunu biliyoruz. İspat için üç durum söz konusudur.

I Durum: A=X olsun.

$\Rightarrow$A=X {(x,1): x$\in$X}

$\Rightarrow A^C = X^C = \{(x,0) : x \in X\} = \emptyset$

$\Rightarrow A \wedge A^C = \emptyset$ olur.

II.Durum: A=$\emptyset$ olsun. 1. duruma benzer şekilde yapılır.

III.Durum: A=$\emptyset$ A$\neq$X olmak üzere kabul edelim ki A $\wedge$ A^C=$\emptyset$ olsun.

$f_\emptyset : X \to [0,1], (\forall x \in X)\ için\ f_\emptyset(x) = 0\ ve\ f_\emptyset(x) = \min\{f_A(x), f_C^{\ A}(x)\}$

$f_\emptyset(x) = f_A(x) \ ,(\forall x \in X) \quad olursa\ f_A(x) = 0 \Rightarrow A = \emptyset\ Bu\ bir\ çelişkidir$

$çünkü; A \neq \emptyset\ idi. Böylece\ A \wedge A^C \neq \emptyset\ olur.$

$$f_A(x) = \min\{f_A(x), f_A^{\ C}(x)\} = f_A^{\ C}(x)\ ise$$

$$f_A^{\ C}(x) = 1 \ , \ f_A\ (x) = 0\ \ (\forall x \in X)\ Böylece\ f_A\ (x) = 1\ (\forall x \in X)$$

Buradan da A= X elde edilir. Ancak bu bir çelişkidir. A $\wedge$ $A^C \neq \emptyset$ dır.

ii) (i)-şıkkına benzer ispat yapılır.

Örnek 2.1.31. X={ x_1, x_2) ve I=[0,1] olmak üzere, X de A fuzzy kümesi, A={(x_1/0,3),(x_2 /O,6)} olarak verilsin. Böylece, A $\neq \emptyset$) ve A$\neq$X dir. Acaba A$\wedge$ A^C $\neq \emptyset$ mudur?

2.2. Fuzzy Topolojik Uzaylar ve Fuzzy Topolojik Uzaylarında Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. T $\lesssim I^X$ fuzzy kümelerinin ailesi aşağıdaki şartları sağlıyorsa, τ ailesine X üzerinde Fuzzy fopolojik uzay denir.

(τ_1) $\varnothing, X \in \tau$

(τ_2) $\forall$ A,B $\in \tau$ A $\wedge$ B $\in \tau$

(τ_3) $\forall i \in J$ için $A_i \in \tau \Rightarrow \underset{i\in J}{V} A_i \in \tau$

(X. 'τ) ikilisine de fuzzy topolojik uzay denir ve kısaca f.t.u. ile yazılır. τ topolojisinin her elemanına fuzzy açık (F-açık) küme, X uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye de fuzzy kapalı (F-kapalı) küme denir. Genel topolojide olduğu gibi τ ailesi sadece X ve dan oluşuyorsa, (X, τ) fuzzy topolojik uzayına indiskret, tüm fuzzy kümelerinden oluşuyorsa (X, τ) fuzzy topolojik uzayına da diskret fuzzy topolojik uzay denir [3].

Benzer olarak, L-fuzzy topolojik uzay tanımını yapacak olursak şöyledir:

Tanım 2.2.2. X boştan farklı herhangi bir küme, L bir lattice ve $\tau_L \underset{0/\!\sim}{<} L^X$ olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanırsa τ_L,, ailesine, X üzerinde L-fuzzy topolojisi ve ($L^X \tau_L$) ikilisine de L-fuzzy topolojik uzay denir ve kısaca L-f.t.u. ile yazılır.

Lt_1) $0,1 \in \tau_L$ ($\varnothing, X \in \tau_L$)

Lt_2) $\forall$ A,B$\in \tau_L$ = A $\wedge$ B$\in \tau_L$

Lt_3) $\forall$ $i \in J$ için A$i \in \tau_L \Rightarrow \underset{i\in J}{\vee} A_i \in \tau_L$

τ_L topolojisinin her elemanına L^X de L-fuzzy açık küme, X uzayına göre tümleyeni açık olan kümeye de L-fuzzy kapalı küme denir. Genel topolojide olduğu gibi τ_L ailesi sadece $\varnothing$ ve X den oluşuyorsa ($L^X \in, \tau_L$) L-fuzzy topolojik uzayına indiskret, 'τ_L ailesi tüm L-fuzzy kümelerinden oluşuyorsa (L^X, τ_L) L-fuzzy topolojik uzayına da diskret L-fuzzy topolojik uzay denir.

Örnek 2.2.3. X ={a,b} olmak üzere , X kümesi üzerine bir fuzzy topolojisini oluşturalım.

$A = \{(a/0,4),(b/0,7)\}$, $f_A(a) = 0,4$, $f_A(b) = 0,7$

$B = \{(a/0,5),(b/0,2)\}$, $f_B(a) = 0,5$, $f_B(b) = 0,2$

$C = \{(a/0,4),(b/0,7)\}$, $f_C(a) = 0,4$, $f_C(b) = 0,2$

$D = \{(a/0,5),(b/0,7)\}$, $f_D(a) = 0,5$, $f_D(b) = 0,7$

$I = X = \{(a/1),(b/1)\}$, $0 = \varnothing = \{(a/0),(b/0)\}$

Fuzzy kümelerini alacak olursak, τ = { $\varnothing$,X,A,B,C,D) şeklinde tanımlanan τ ailesi X üzerinde bir fuzzy topolojisi oluşturur. Gerçekten,

τ_1) $\varnothing$ve X fuzzy kümeleri 'τ ailesine ait olduğundan $\varnothing, X \in \tau$ dur.

τ_2) τ ailesine ait her sonlu elemanın kesişimi τ ailesine aittir. Gerçekten, fuzzy kümelerinde kesişim tanımından $\varnothing$ kümesinin diğerleri ile kesişimi $\varnothing$ve X in diğerleri ile kesişimi X olduğundan sonlu arakesit sağlanır. Ayrıca,

$A \wedge B = \{(a/0,4),(b/0,2)\} C \in \tau$

$A \wedge C = \{(a/0,4),(b/0,2)\} C \in \tau$

$A \wedge D = \{(a/0,4),(b/0,2)\} A \in \tau$

$B \wedge C = \{(a/0,4),(b/0,2)\} C \in \tau$

$B \wedge D = \{(a/0,5),(b/0,2)\} B \in \tau$

fuzzy kümelerinin sonlu kesişimleri yine T ailesine aittir.

τ_3) Keyfi birleşimlerinde τ ailesine ait olduğu τ_2 dekine benzer olarak gösterilebilir. o halde, τ ailesi X üzerinde bir fuzzy topolojisidir.

Teorem 2.2.4. (X, τ) f.t.u. olmak üzere, τ üzerindeki
K= { A$\leq$X : A , F-kapalı $\Leftrightarrow$ $A^C \in \tau$ } şeklinde tanımlanan K (kapalılar) ailesi aşağıdaki şartları sağlar [3].

k_1) $\varnothing, X \in K$

k_2) $\forall\ A, B \in K \Rightarrow A \vee B \in K$

k_3) $\{A_i\}_{i\in J} \leq K \Rightarrow \underset{i\in J}{\wedge} A_i \in K$

Tanım 2.2.5. (X, τ) f.t.u. ve " $A \in I^X$ olsun.

$\overset{0}{A} = \vee\{B : B \leq A, B \in \tau\} = \sup\{B : B \leq A, B \in \tau\}$ ile tanımlanan fuzzy kümesine A fuzzy kümesinin içi denir. Tanımdan da anlaşıldığı gibi; $\overset{0}{A}$, A nın kapsadığı en geniş fuzzy açık kümedir. Üyelik fonksiyonu olarak;

$f_{A''}$(x) = sup{ $f_B(x) \leq f_A(x), B \in \tau$ $(\forall x \in X)$ şeklinde gösterilir

Teorem 2.2.6. (X, τ) f.t.u. ve $A \in I^X$ olsun.

A nın F-açık olması için gerek ve yeter şart A= $\overset{0}{A}$ olmasıdır

Sonuçlar 2.2.7. (X, τ) f.t.u. ve $A \in I^X$ olsun.

i) $\overset{0}{X}$ =X , $\emptyset = \emptyset$ ii) $\overset{0}{A} \leq$A iii) $\overset{0}{A} = \overset{0}{A}$
iv)A$\leq$B=A$\Rightarrow$ $\overset{0}{A} \leq \overset{0}{B}$) v (A$\vee$B)°= $\overset{0}{A} \wedge \overset{0}{B}$.

Tanım 2.2.8. (X, τ) f.t.u. ve $A \in I^X$ olsun.

$\overline{A}$= $\wedge$ {B:A $\leq$ B, $B^C \in \tau$ } inf{ B A$\leq$B , B'et$B^C \in \tau$ } ile tanımlanan fuzzy kümesine A fuzzy kümesinin kapanışı denir. Yani; $\overline{A}$, A yı kapsayan en küçük fuzzy kapalı kümedir. Üyelik fonksiyonu olarak;

$f_{\overline{A}}$(x) = ınf{ f_B (x): f_B (x) $\geq$ f_A (x), $B^C \in \tau$ } şeklinde tanımlanır

Teorem 2.2.9. (X, τ) f.t.u. ve $A \in I^X$ olsun.
A nın F-kapalı olması için gerek ve yeter şart A= $\overline{A}$ olmasıdır

Sonuçlar 2.2.10. (X, τ) f.t.u. ve $A \in I^X$ olsun.

i) $\overline{X}$ =X , $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ii) A$\leq \overline{A}$ iii) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$

iv) $(\overline{A \vee B}) = \overline{A} \vee \overline{B}$ v)A$\leq$B$\Rightarrow$ $\overline{A} \leq \overline{B}$

Teorem 2.2.11. (X, τ) f.t.u. ve $A \in I^X$ olsun.

i) $\overset{\overset{c}{0}}{A} = \overline{A^c}$

ii) $\overline{A^c} = A^{0_C}$

Tanım 2.2.12. (X, τ) f.t.u. ve p , X in bir fuzzy noktası olsun.
p fuzzy noktasını içeren $\forall$ A$\in \tau$ fuzzy kümesini kapsayan N fuzzy kümesine p nin fuzzy komşuluğu denir.

N, p nin fuzzy komşuluğu $\Leftrightarrow \exists A \in \tau$ var $\ni p < A \leq N$

p nin bütün fuzzy komşuluklarının ailesini N(p) ile gösterelim. Yani,
N(p)= { $N \in I^X : N, p$ nin fuzzy kornşu1uğu} ailesine p nin komşuluklar ailesi denir

Tanım 2.2.13. (X, τ) f.t.u. ve $A \in I^X$ olsun.
A yı ihtiva eden her B elemanını kapsayan $N \in I^X$ kümesine A fuzzy kümesinin bir komşuluğu denir.
A, $N \in I^X$ için, A$\leq$B$\leq$N olacak şekilde Bez varsa N ye A nın fuzzy komşuluğu denir

Teorem 2.2.14. (X, τ) f.t.u. ve $A \in I^X$ olsun.
A , F-açık $\Leftrightarrow$ B$\leq$A olacak şekilde $\forall B \in I^X$ kümesinin komşuluğu olmasıdır

Teorem 2.2.15. (X, τ) f.t.u. $p \in I^X$ ve N(p) de p nin fuzzy komşuluklar ailesi olsun. Aşağıdaki ifadeler vardır.

N^1) Her N$\in$N(p)$\Rightarrow$ p<N

N^2) $\forall$ N_1, N_2, $\in$N(p) $\Rightarrow$ $N_1 \wedge N_2$, $\in$N(p)

N^3) Herhangi bir N$\in$N(p) ve N$\leq$B$\Rightarrow$ B$\in$N(p)

N^4) Her N$\in$N(p) için A$\leq$N olacak şekilde öyle bir A$\in$N(p) vardır ki q<A şartını sağlayan her q fuzzy noktası için N$\in$N(q)

Tanım 2.2.16. (X, τ) f.t.u. , N(p) X kümesinde p nin komşuluklar ailesi ve E(p) de N(p) nin bir alt ailesi olsun. N(p) nin her N elemanına karşılık E$\leq$N olacak şekilde E(p) nin bir E elemanı varsa E(p) ailesine X üzerindeki t fuzzy topolojisi için, p fuzzy noktasının fuzzy komşuluklar tabanı denir

Tanım 2.2.17. (X, τ) f.t.u. ve $\beta \leq \tau$ olsun. Her A$\in \tau$ için A = $\underset{i\in J}{\vee} B_i$ olacak şekilde $\{B_i\}_{i\in j} \leq \beta$ alt ailesi varsa β ya τ için bir taban denir. Yani, β , τ için bir taban$\Leftrightarrow$ $\forall$ A$\in \tau$ için $\exists \beta' \leq \beta$ var $\ni A = \underset{B\in\beta}{\vee}$.

Teorem 2.2.18. (X, τ) f.t.u. ve $\beta \leq \tau$ olsun. β nın τ topolojisinin için bir tabanı olması için gerek ve yeter şart $\forall p \in X$ için E(p)={E$\in \beta$: p$\in$E} ailesinin p fuzzy noktası için bir komşuluklar tabanı olmasıdır

Tanım 2.2.19. (X, τ) f.t.u. ve $f|\tau$ olsun. $f|$ nın elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu bir kümeler sınıfı bu topoloji için bir taban oluyorsa buna alt taban denir. Yani,

$$f| \text{ , } \tau \text{ için bir alt taban } \Leftrightarrow \{ \underset{S\in\theta}{\wedge} S : \theta \leq f|, \theta = \text{sonlu}\}$$

.

Tanım 2.2.20. (X, τ) f.t.u ve β , τ için bir taban olsun. X in bir p fuzzy noktası içiıı. B_p {B: p<B ve B$\in \beta$ ailesini göz önüne alalım. p<A olmak üzere, $\forall A \in \tau$ V A$\in \tau$ için, p<B$\leq$A olacak şekilde B_p in bir elemanı varsa, B_p ailesine p fuzzy noktasına ait τ t topolojisinin yerel tabanı (lokal tabanı) denir

Tanım 2.2.21. X ve Y herhangi iki küme olsun. X den Y ye birebir ve örten bir g fonksiyonu varsa, X ve Y kümelerine elemanları sayısı bakımından denktir yada aynı kardinal sayıya sahiptir denir. Herhangi bir X kümesinin kardinal sayısı, bu kümenin kardinalitesiyle belirlenir ve $|X|$ ile gösterilir

Tanım 2.2.22. (X, τ) f.t.u ve β_τ ={ β } ailesi τ nun bütün tabanlar ailesi olsun. Her $\beta \in \beta_\tau$ için $|\beta|$kardinal sayılar kümesinin en küçük elemanına (X, τ) f.t.u. nın ağırlığı (weight) denir ve ϖ (X, τ) ile gösterilir, yani

$$\varpi(X, \tau) = \min\{|\beta| : \beta, \tau \text{ nun tabanı}\}.$$

Tanım 2.2.23. (X, τ) f.t.u p$\in$X ve {E(p)} komşuluklar tabanlarının bir ailesi olsun. E(p) komşuluklar tabanlarının $|E(p)|$kardinal sayılarının en küçük elemanına, p fuzzy noktasının karakteri denir ve χ (p,(X, τ)) ile gösterilir, yani

$$\chi(p,(X, \tau)) = \min\{|E(p)| : E(p), \text{ p nin komşuluklar tabanı}\}.$$

Bu tanımlardan sonra şimdi birinci sayılabilir fuzzy uzay ve ikinci sayılabilir fuzzy uzay tanımlarını verebiliriz.

Tanım 2.2.24. (X, τ) fuzzy topolojik uzayının her noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa, bu uzaya birinci sayılabilir fuzzy uzay denir

Tanım 2.2.25. (X, τ) fuzzy topolojik uzayı sayılabilir bir tabana,sahipse bu uzaya ikinci sayılabilir fuzzy uzayı denir.

Teorem 2.2.26 ikinci sayılabilir her fuzzy uzayı,birinci sayılabilir fuzzy uzayıdır

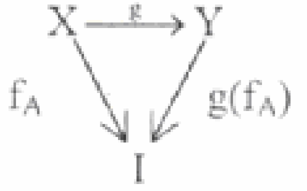
3.FUZZY SÜREKLİLİK

3.1. Fuzzy Kümelerinin Görüntü ve Ters Görüntü Kavramları

Tanım 3.1.1. X , Y iki küme olmak üzere g: X→Y bir fonksiyon ve A, X de bir fuzzy kümesi olsun. V y∈ Y için,

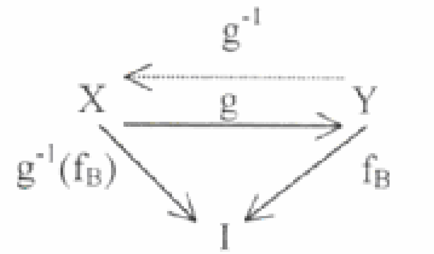
$$f_{g(A)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x\in g^{-1}(y)} \{f_A(x)\} & , g-1(y) \neq \phi \\ 0 & , g-1(y) \neq \phi \end{cases}$$

üyelik fonksiyonu ile tanımlanan g(A)g(f_A) fuzzy kümesine A nın g altındaki görüntüsü denir [3,13]. Şema ile gösterecek olursak;



Tanım 3.1.2. X , Y iki küme olmak üzere g: X→Y bir fonksiyon ve B, Y de bir fuzzy kümesi olsun. $\forall x \in X$ için,

$f_{g^{-1}(B)}(x) = f_g(g(x))$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanan g^{-1}(B)= g^{-1} (f_B) ifadesine B nin ters görüntüsü denir [3,13]. Şema ile gösterecek olursak;



Şimdi ise, L-fuzzy uzaylarında görüntü ve ters görüntü tanımlarını yapacak olursak şöyledir:

Tanım 3.1.3. X, Y herhangi iki küme olmak üzere g: X →Y bir fonksiyon olsun. Ayrıca L^X . L^Y herhangi iki L-fuzzy uzayı, g: $L^X \rightarrow L^Y$ bir L-fuzzy fonksiyonu ve A $\leq L^X$ verilsin. $\forall y \in Y$ için,

$g^{\rightarrow} : L^X \rightarrow L^Y$

$g^{\rightarrow}$ (A), L-fuzzy kümesine A nın $g^{\rightarrow}$ altındaki görüntüsü denir .

Tanım 3.1.4. X, Y herhangi iki küme olmak üzere g: X →Y bir fonksiyon olsun. Ayrıca LxL herhangi iki L-fuzzy uzayı, $g^{\leftarrow} : L^X \rightarrow L^Y$ bir L-fuzzy fonksiyonu ve

B $\leq L^X$ verilsin. $\forall x \in X$ için,

$g^{\leftarrow} : L^Y \leftarrow L^X$, $g^{\leftarrow}$ (B)(x)= B(g(x))

$g^{\leftarrow}$ (B), L-fuzzy kümesine B nin $g^{\leftarrow}$ altındaki ters görüntüsü denir .

Teorem 3.1.5. g: X→ Y bir fonksiyon, X de ve B de Y de fuzzy kümeleri olmak A üzere aşağıdaki özellikler vardır:

a) $\forall$ B$\leq$Y $\Rightarrow g^{-1}$ $(B^C) = [g^{-1}$(B)]^C

b) $\forall$ A$\leq$X $\Rightarrow g^{-1}$ $(A^C) = [g^{-1}$(A)] ^{C}

c) $\forall$ B_1 , $B_2 \leq$Y için $B_1 \leq B_2$

d) $\forall$ A_1 , $A_2 \leq$X için $A_1 \leq A_2 \Rightarrow$g(A_1)$\leq$g(A_2)

e) $\forall$ B$\leq$Y g(g^{-1} (B)) $\leq$ B

f) $\forall$ A$\leq$X $\Rightarrow$ A$\leq$ g^{-1} (g(A))

g) $\forall$ $i \in J$ için $B_i \leq$Y=g^{-1} $(\vee_{i\in J} B_i)$= $\vee_{i\in J}(B_i)$

h) $\forall$ A ,B$\leq$X$\Rightarrow$ g(A$\wedge$B) $\leq$ g(A) $\wedge$ g(B)

i) $\forall$ $i \in J$ için $B_i \leq$Y$\Rightarrow$ $g^{-1}(\wedge_{i\in J} B_i)$= $\wedge_{i\in J} g^{-1}(B_i)$

j) g: X →Y ve h: Y → Z fonksiyonları verilsin. Her C$\leq$Z fuzzy kümesi için; (hog)$^{-1}$ (C) g^{-1} (h^{-1} (C))' dir.

Tanım 3.1.6. (X, τ) (Y. τ) fuzzy topolojik uzaylar ve g:X→Y bir fonksiyon olsun. Y deki her fuzzy açık kümenin g altındaki ters görüntüsü X de fuzzy açık ise, g fonksiyonuna fuzzy sürekli denir. Yani,

g, fuzzy sürekli (F-sürekli) $\Leftrightarrow$ $\forall$ A$\in$ τ ' için g^{-1} (A) $\in \tau$ ise.

Tanım 3.1.7. $L^X\tau_L, L^Y\tau_{L'}$ L-fuzzy topolojik uzaylar ve $g^{\rightarrow} : L^X \rightarrow L^Y$ bir fuzzy fonksiyonu olsun. L^Y deki her L-fuzzy açık kümesinin $g^{\leftarrow} : L^Y \rightarrow L^X$ Lfuzzy ters fonksiyonu altındaki görüntüsü, L^X de L-fuzzy açık küme ise, $g^{\rightarrow}$ ye Lfuzzy sürekli denir. Yani,

$g^{\rightarrow}$ L-fuzzy sürekli (LF-sürekli) = $\forall A \in \tau_L$ için $g^{\leftarrow}$ (A) $\in \tau_L$ ise;

Şimdi yukarıdaki tanıma göre fuzzy sürekli olan bir fonksiyon örneği verelim.

Örnek 3.1.8. X=[0, l]=I üzerindeki fuzzy kümeleri,

$$f_A(X) = \begin{cases} 0 & ,0 \leq x \leq 1/2 \\ \\ 2x-1, 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, f_B(x) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq 1/4 \\ -4x+2 & ,1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & ,1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

I üzerindeki fuzzy topolojiler, $\tau = \{\varnothing$,X. $A^C\}$, τ'={$\varnothing$,X,A,B,A$\vee$B} ve g: (I, τ) →(I, τ) fonksiyonu , g(x)=x/2 olarak tanımlansın. Buna göre; Göstermeliyiz ki,

g , fonksiyonu E-sürekli $\Leftrightarrow \forall A \in \tau'$ için g^{-1} (A) $\in \tau$

$$f_A(X)=\begin{cases}1 & ,0\le x\le 1/2\\ \\ -2x+2 & ,1/2\le x\le 1\end{cases}\quad ,f_{A\vee B}(x)=\begin{cases}1 & ,0\le x\le 1/4\\ -4x+2 & ,1/4\le x\le 1/2\\ 2x-1 & ,1/2\le x\le 1\end{cases}$$

olduğu fuzzy kümelerinde tümleme ve birleşim tanımından açıktır.
Bir fuzzy kümesinde ters görüntü tanımından,

$\varnothing\in\tau'\Rightarrow g^{-1}(\varnothing)\in\tau\ mudur?$

$\varnothing\in\tau'\Rightarrow f_{g-1(\varnothing)}(x)=f_{\varnothing}(g(x))\quad ,\quad (\forall x\in X)$

$\Rightarrow g^{-1}(\phi)=\phi\in\tau\Rightarrow g^{-1}(\phi)\in\tau$

$X\in\tau'\Rightarrow g^{-1}(X)\in\tau\ mudur?$

$X\in\tau'\Rightarrow f_{g-1(X)}(x)f_X(g(x))\quad ,\quad (\forall x\in X)$

$\Rightarrow g^{-1}(X)=X\in\tau\Rightarrow g^{-1}(X)\in\tau$

$A\in\tau'\Rightarrow g^{-1}(A)\in\tau\ mudur?$

$$A\in\tau'\Rightarrow f_{g-1(A)}(X)=f_A(g(x))=f_A(\frac{x}{2})=\begin{cases}0 & ,0\le x\le 1\\ x-1 & ,1\le x\le 2\end{cases}$$

$I=[0,1]$ *olduğundan dolayı,*

$$f_{g-1(A)}(X)=f_A(g(x))=f_A(\frac{x}{2})=\{0\quad ,0\le x\le 1$$

$g^{-1}(A)=\varnothing\in\tau\Rightarrow g^{-1}(A)\in\tau$

$B\in\tau'\Rightarrow g^{-1}(B\in\tau)\quad mudur?$

$$B\in\tau'\Rightarrow f_{g-1(B)}(X)=f_B(g(x))=f_B(\frac{x}{2})=\begin{cases}0 & ,0\le x\le 1/2\\ -2x+1 & ,1/2\le x\le 1\\ 0 & ,1\le x\le 2\end{cases}$$

$$=\begin{cases}1 & ,0\le x\le 1/2\\ -2x+1 & ,1/2\le x\le 1\end{cases}$$

$$f_{A^C}(X)$$

$\Rightarrow f_{g-1(B)}(X)=f_{A^C}(X)\ ,\ (\forall x\in X\ için)$

$$\Rightarrow g^{-1}(B) = A^C \in \tau$$
$$\Rightarrow g^{-1}(B) \in \tau$$
$$A \vee B \in \tau' \Rightarrow g^{-1}(A \vee B) \in \tau \ \ mudur?$$

$$A \vee B \in \tau' \Rightarrow f_{g-1(A\vee B)}(g(x)) = f_B(\frac{x}{2}) = \begin{cases} 1 & ,0 \le x \le 1/2 \\ -2x+2 & ,1/2 \le x \le 1 \\ x-1 & ,1 \le x \le 2 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 1 & ,0 \le x \le 1/2 \\ -2x+1 & ,1/2 \le x \le 1 \end{cases}$$
$$= f_{A^C}(x)$$
$$\Rightarrow f_{g-1(A\vee B)}(X) = f_{A^C}(x) \quad (\forall x \in X \ için)$$
$$\Rightarrow g^{-1}(A \vee B) = A^C \in \tau$$
$$\Rightarrow g^{-1}(A \vee B) \in \tau$$

Böylece;

$\forall A \in \tau'$ için $g^{-1}(A) \in \tau$ dur. Bu demektir ki,

g:I→I , g(x) = $\frac{x}{2}$ fonksiyonu fuzzy süreklidir.

Şimdi fuzzy süreklilikle ilgili Genel Topoloji' ye paralel bazı teoremleri verelim:

Teorem 3,1.9. (X, τ) , (Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay ve g: X→Y bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:
i) g, fonksiyonu fuzzy süreklidir.
ii) τ ' ye göre kapalı her fuzzy kümesinin ters görüntüsü τ ya göre kapalıdır.

İspat: (i), (ii) Kabul edelim ki g, fuzzy sürekli olsun. κ, Y ye göre kapalılar ailesi olmak üzere her K∈ κ için göstermeliyiz ki g^{-1} (K) $\in \kappa$ dır. Burada X, X e göre kapalılar ailesidir.

$$\forall K \in \kappa' \Rightarrow K^c \in \tau$$

$$\Rightarrow g^{-1}(K^c) \in \tau \ \ (g, fuzzy\ sürekli\ olduğundan)$$
$$\Rightarrow [g^{-1}(K)]^c \in \tau \quad (Teorem\ 2.1.5(a)\ dan\ dolayı)$$

(ii)$\Rightarrow$(i) τ' ye göre her fuzzy kapalının g altındaki ters görüntüsü τ ya göre fuzzy kapalı olsun. Yani,

$\forall K \in \kappa'\ için\ g^{-1}(K) \in \kappa\ olsun. Göstermeliyiz\ ki, \forall A \in \tau'\ için\ g^{-1}(A) \in \tau$ dır.

$$\forall A \in \tau' \Rightarrow A^c \in \kappa'$$
$$\Rightarrow g^{-1}A^c \in \kappa \quad (Hipotezden)$$
$$\Rightarrow [g^{-1}(A)]^c \quad (Teorem\ 2.1.5(a) dan\ dolayı)$$
$$\Rightarrow g^{-1}(A) \in \tau\ olur$$

Fuzzy süreklilik tanımından dolayı g, fuzzy süreklidir.

Teorem 3.1.10. (X, τ) , (Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay ve g: X→Y bir fonksiyon olsun. g , fonksiyonu fuzzy sürekli ise, bu durumda A$\leq$X fuzzy kümesi için g(A) $\leq$Y kümesinin her komşuluğunun ters görüntüsü A nın bir komşuluğudur .

Teorem 3.1.11. (X, τ) , (Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay ve g: X→Y bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:
i) g. fonksiyonu fuzzy süreklidir.
ii) τ ' nin alt tabanında (yada tabanına)ait her B için $g^{-1}(B) \in \tau$ olmasıdır
Teorem 3.1.12. (X, τ),(Y, τ') iki fuzzy topolojik uzay ve g: X→Y bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:
i) g, fonksiyonu fuzzy süreklidir
ii) Her A$\leq$X fuzzy kümesi için g($\overline{A}$)$\leq$ $\overline{g(A)}$ dir
Tanım 3.1.13 Fuzzy hemeomorfizm altında değişmeyen (korunan) özelliklere, fuzzy topolojik özellik (fuzzy topolojik invaryant) denir.

Şimdi de fuzzy topolojik uzaylarda dizisel fuzzy süreklilik tanımını verelim. Fakat ilk önce fuzzy topolojik uzaylarında dizisel fuzzy süreklilik tanımı için gerekli olan fuzzy dizisi ve fuzzy yakınsaklık kavramlarını tanımlayalım.

Tanım 3.1.14. (X. τ) f.t.u. $\not\chi$ X deki fuzzy noktalarının ailesi ve IN doğal sayılar Kümesi olsun

$$g:IN\rightarrow \not\chi \quad , \quad n\rightarrow g(n)=(p_{\chi_0}^{\lambda})_0 = p_n$$

şeklinde tamamlanan fonksiyona X de Fuzzy dizisi ve A$\in I^X$ olsun.
Bu durumda
i) (p_n) fuzzy dizisinin sonunda A dadır $\Leftrightarrow \exists m \in IN$ var $\ni \forall n \geq m$ *için* $p \leq A(p_n = A)$
ii) (p_n) fuzzy dizisi bir A fuzyy kümesine (p fuzyy noktasına)yakınsıyor denir.
Eğer (p_n) dizisi sonunda A nın (p nın)her bir komşuluğunda ise.

Eğer (p_n) fuzyy dizisinin yakınsaklık tanımını p fuzyy noktasının değerine yapacak olursak , (p_n) fuzyy dizisinin yakınsaklık tanımı şöyledir.

Tanım 3.1.15. (X. τ) f.t.u, $(p_n)_{n\in IN}$ fuzzy noktalarının bir dizisi öyleki, x_n n=1,2… destekleri olsun. Ayrıca p, n_0 herhangi bir sayı olmak üzere, $\forall n \geq n_0$ için desteği x$\neq$ x_n olan bir fuzzy noktası olsun. Bu durumda, (p_n)fuzzy dizisi p fuzzy noktasına yakınsıyor denir ve $p_n \rightarrow$ p şeklinde yazılır. Eğer, $p \in \tau$ olacak şekilde τ nun her A elemanı için bir $m \in IN$ var $\ni \forall n \geq m$ *için* $p_n \in A$ dır Ya da kısaca

$$p_n \rightarrow p \Leftrightarrow \forall A \in \tau \; ve \; p \in A \; için \; \exists m \in IN \text{ var } \ni \forall n \geq m \; iken \; p_n \in A$$

Not 3.1.16. Bu fuzzy yakınsaklık tanımını desteklere kısıtlamanın gereği, tanımı daha anlamlı kılmak içindir. Ayrıca, Pn fuzzy kümesi yn değerine, p fuzzy kümeside y değerine sahipse yani. $(p_{x_n}^{x_n})$ ve $((p_x^x))$ ise. p→ p olması y→y olmasını gerektirmez. Gerçekten. $p_n \rightarrow$ p ve p, x_0 destekli, y değerli ise bu durumda, x_0 destekli ve z $\geq$y değerli bütün q fuzzy noktaları için,

$$p_n \rightarrow q \text{ dur.}$$

Şimdi de fuzzy topolojik uzaylarda , dizisel fuzzy süreklilik tanımını yapacak olursak, böylece görürüz ki genel topolojideki dizisel süreklilik tanımının tamamen benzeridir. Biz bu tez çalışmasında, sadece dizisel fuzzy süreklilik tanımını vermekle yetineceğiz. Dizisel fuzzy süreklilik kavramı üzerinde daha fazla durmayacağız. Fuzzy süreklilik ile dizisel fuzzy süreklilik arasında ne gibi ilişkiler olduğu. hangi şartlar altında birbirini gerektirdiği daha ileride araştırılabilir.

Tanım 3.1.17. (X. τ'), ve (Y, τ') iki f.t.u. ve g: X → Y herhangi bir fonksiyon olsun.
X fuzzy topolojik uzayında p$\in$X fuzzy noktasına yakınsayan her (p_n) fuzzy dizisi için, Y fuzzy topolojik uzayındaki g(p_n) fuzzy dizisi de g(p) fuzzy noktasına yakınsıyorsa, yani

$$(p_n) \rightarrow p \Rightarrow g(p_n) \rightarrow g(p)$$

ise, g fonksiyonuna p$\in$X fuzzy noktasında dizisel fuzzy süreklidir denir.

Şimdi de Azad tarafından verilen ve Bedre nin tezinde de yer alan, bazı fuzzy kümeleri ki bunlar; fuzzy yarı-açık (kapalı) küme, fuzzy regüler açık (kapalı) küme tanımlarını vereceğiz. Ayrıca, bunlarla ilgili bazı teoremlere yer verip, konuyu somutlaştırmak için, fuzzy kümelerinin şekille gösterildiği bir örnek vereceğiz.

3.2. Bazı Fuzzy Kümeleri ve Fuzzy Fonksiyonları

Tanım 3.2.1. (X, τ) f.t.u. daki bir A fuzzy kümesi için U$\leq$A$\leq \bar{U}$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ fuzzy açık kümesi bulunabiliyor ise, A ya fuzzy yarı-açık küme denir. Bunu sembolik olarak,

A, fuzzy yan-açık kümedir $\Leftrightarrow \exists U \in \tau$ var $\ni U \leq A \leq \bar{U}$ şeklinde ifade edilir .

Tanım 3.2.2. (X, τ) f.t.u. daki bir A fuzzy kümesi için $U^{c^O} \leq A \leq U^c$ olacak biçimde bir $U \in \tau$ fuzzy açık kümesi bulunabiliyor ise, A ya fuzzy yan-kapalı küme denir. Bunu sembolik olarak,

A, fuzzy yan-kapalı kümedir. $\Leftrightarrow \exists U \in \tau$ var $\ni U^{c^0} \leq A \leq U^c$ şeklinde ifade edilir

Teorem 3.2.3. (X, τ) f.t.u. daki bir A fuzzy kümesi için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) A fuzzy yarı-kapalı kümedir.
ii) A^c fuzzy yarı-açık kümedir
ispat (i) $\Rightarrow$(ii) A fuzzy yarı-kapalı küme olsun. Göstermeliyiz ki, A^c fuzzy yarı-açıktır.
A. fuzzy yarı-kapalı küme olduğundan,

$\exists U \in \tau$ var $\ni U^{c^0} \leq A \leq U^c$ dir Bu kümelenin üyelik fonksiyonları ile
$f_{U_C{}^o}(x) = f_A(x) \leq f_{U^c}(x)$ şeklinde yazılır. Buradan bir fuzzy kümesinin içi tanımından,

$$f_{U_C{}^o}(x) = \sup\{f_B(x) \leq f_{U^c}(x) f_B \in \tau \text{ dir.}$$

$K \in \kappa$ fuzzy kümesi için, B=K^c olarak alınırsa, bu durumda,

$$f_{U^{c0}} = \sup \{1 - f_K(x) : 1 - f_K(x) \leq 1 - f_U(x), K \in \kappa\} \leq f_A(x) \leq f_{U^c}(x)$$

Teorem 3.2.4. den dolayı.
$1 - inf\ \{f_K(x) f_K \geq f_U(x), K \in \kappa\} \leq f_{U^c}(x)$
$\imath nf\{f_K(x) : f_K(x) K \in K\} \geq 1 - f_A(x) \geq f_A(x)$ *Bu ise kapanış* tan*ımıdır..*
$f_{\bar{U}}(x) \geq f_{A^c}(x) \geq f_U(x) \quad (\forall x \in X için)$
demektir.O halde $U \leq A^c \leq \bar{U}$
A^c fuzzy yarı-açık küme olması demektir.

(ii)$\Rightarrow$ (i) A^c fuzzy yarı-açık küme olsun. Göstermeliyiz ki A fuzzy yarı-kapalı kümedir.
K fuzzy yarı-açık küme olduğundan, $\exists U \in \tau$ var $\ni U \leq A^c \leq \bar{U}$ dır. Bu kümelerin üyelik fonksiyonları ile

$\Rightarrow 1-f_U(x) \geq 1-f_{A^c}(x) \leq inf\{f_K(x): f_K(x) \geq f_U(x), K \in \kappa$

$\Rightarrow f_{U^c}(x) \geq f_A(x) \geq \sup\{f_K(x): f_{K^c}(x), K \in \kappa$

$\Rightarrow f_{U^c}(x) \geq f_A(x) f_{U^{c^0}}(x), (\forall x \in X için)\ O\ halde \Rightarrow U^{c^0} \leq A \leq U^c$

olur. Buda A nın fuzzy yarı-kapalı küme olması demektir.

Teorem 3.2.5. (X, τ) f.t.u. daki bir A fuzzy kümesi için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.
(i) A fuzzy yarı-kapalı kümedir.
(ii) $\overset{0}{\overline{A}} \leq$A dır .

İspat: (i),(ii) A fuzzy yan-kapalı küme olsun. Göstermeliyiz ki $\overset{0}{\overline{A}} \leq$A dır. A fuzzy yarı-kapalı küme olduğundan, $\exists U \in \tau$ var $\ni U \leq A^c \leq \overline{U}$ veya fuzzy kapalı

kümeleri kullanırsak, $\exists K \in$ K var $\ni \overset{\circ}{K} \leq A \leq K$ dır. $\overset{\circ}{K}$,K tarafından kapsanan fuzzy açık kümelerin en büyüğüdür. Buradan,
$\overset{\circ}{K} \leq \overset{\circ}{A} \leq A \leq K$ olur. Ayrıca. $\overset{\circ}{A} \leq K$ olduğundan, $\overset{\circ}{A} \leq \overset{\circ}{K}$ dir.
$\overset{\circ}{K} \leq \overset{\circ}{A} \leq A \leq K$ ve $\overset{\circ}{A} \leq \overset{\circ}{K}$ den, $\overset{\circ}{A} \leq \overset{\circ}{K} \leq A$ yazarız. Böylece $\overset{\circ}{\overline{A}} \leq A$ bulunur.

(ii)$\Rightarrow$(i) Kabul edelim ki $\overset{\circ}{\overline{A}} \leq A$ olsun. Göstermeliyiz ki, A fuzzy yarı-kapalı kümedir. Yani,
$\overset{\circ}{K} \leq A \leq K$ olacak şekilde bir $K \in \kappa$ fuzzy kapalı kürnesinin varlığını göstereceğiz. Özel olarak $\overline{A}$ = K alırsak,
$\overset{\circ}{\overline{A}} \leq A$ olmasından $\overset{\circ}{K} \leq A$ olur. $\overset{\circ}{K} \leq K$ olduğundan. $\overset{\circ}{K} \leq A \leq K$ dır.
O halde,
$\exists K \in \kappa\ için\ \overset{\circ}{K} \leq A \leq K \Rightarrow A$ fuzzy yarı-kapalı kümedir.

Not .2.5. Her bir fuzzy açık (yada fuzzy kapalı) kümenin fuzzy yarı-açık (yada fuzzy yarı-kapalı) küme olduğu açıktır. Fakat her bir fuzzy yarı-açık (yada fuzzy yarı-kapalı) küme fuzzy açık (yada fuzzy kapalı) küme değildir. Aynı zamanda herhangi iki fuzzy yarı-açık kümenin kesişimin fuzzy yarı-açık olması gerekmez. Yine. fuzzy yarı-açık küme ile fuzzy açık kümenin kesişimi fuzzy yarı-açık küme olmayabilir

Şimdi fuzzy yarı-açık olan bir kümenin fuzzy açık olmayabileceğini gösteren aşağıdaki örneği verelim.

Tanım 3.2.6. ve Tanım 2.2.8. dikkate alındığında,
$\overline{A} = B^c$, $\overline{B} = A^c$, $\overline{A \vee B} = X$, $A^{c^0} = B$, $B^{c^0} = A\ ve\ (A \vee B)^c = \emptyset$
olduğu şekil üzerinden kolaylıkla görülebilir. Buna göre,

C fuzzy kümesinin fuzzy yarı-açık küme olduğunu gösterelim:

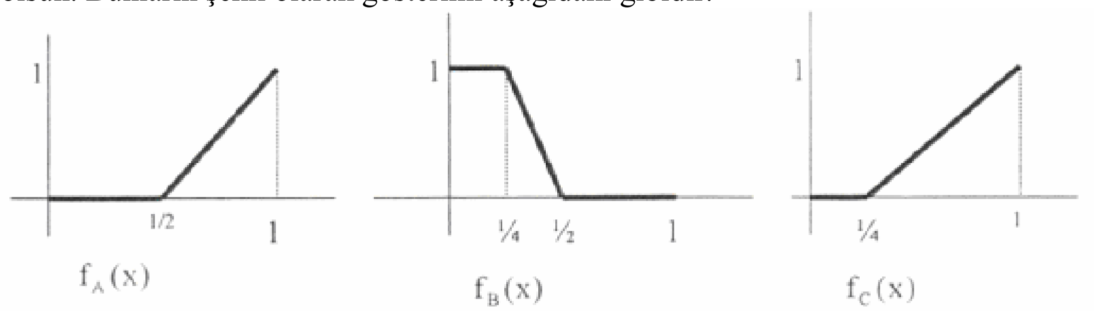
$A \in \tau$ için $f_A(x) f_C(x) \leq f_{\bar{A}}(x) = f_{B^C}(x)$ gerçeklediğinden C fuzzy yarı-açık kümedir. Fakat C fuzzy açık küme değildir. Teorem 2.2.3' e göre C^c fuzzy yarı-kapalı ve C^c fuzzy kapalı değildir. Ayrıca,
$f_\phi(x) \leq f_{B\wedge C}(x)$ koşulunu sağlayan tek fuzzy açık küme Z olduğundan
$f_\phi(x) \leq f_{B\wedge C}(x) \leq f_{\bar{\phi}}(x)$ sağlanmaz. O halde,
$B \wedge C$ fuzzy yarı-açık küme değildir. Teorem 2.2.3.' e göre $(B \wedge C)^c$
fuzzy yarı-kapalı değildir .

Örnek 3.2.6. X=[O,1] üzerindeki fuzzy kümeleri,

$$f_A(X) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq 1/2 \\ 2x-1 & ,1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, f_B(X) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq 1/4 \\ -4x+2 & ,1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 0 & ,1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_C(X) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq 1/4 \\ \frac{1}{3}(4x-1) & ,1/4 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

olsun. Bunların şekil olarak gösterimi aşağıdaki gibidir.



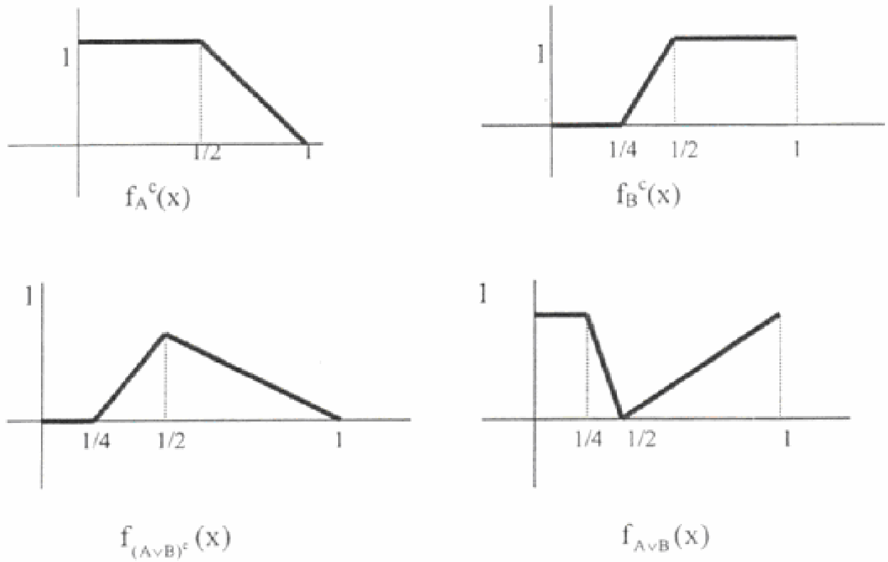
1 üzerindeki fuzzy topolojisi $\tau = \{\varnothing, X, A, B, A \vee B\}, K = \{X, \varnothing A^c, B^c, (A \vee B)^c\}$ de I üzerindeki fuzzy kapalılar ailesi olsun. A^c, B^c, $A \vee B$ ve $(A \vee B)^c$ kümelerinin üyelik fonksiyonları,

$$f_A(X) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq 1/2 \\ -2x+2 & ,1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}, f_B(X) = \begin{cases} 0 & ,0 \leq x \leq 1/4 \\ -4x+2 & ,1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 1 & ,1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_{A\vee B}(X) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq 1/4 \\ -4x+2 & ,1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 2x-1 & ,1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$f_{(A\vee B)^C}(X) = \begin{cases} 1 & ,0 \leq x \leq 1/4 \\ 4x-1 & ,1/4 \leq x \leq 1/2 \\ 2x-1 & ,1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

şeklindedir. Bunların şekille gösterimleri aşağıdaki gibidir.



Teorem 3.2.7 $A, B \le X$ *ve* $\overset{\circ}{A} \le B \le \overline{A}$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler vardır.
i) A, fuzzy yarı-açık küme ise, B' de fuzzy yarı-açık kümedir.
ii) A, fuzzy yarı-kapalı küme ise, B de fuzzy yarı-kapalı kümedir

Tanım 3.2.8. $A \le X$ fuzyy kümesi için $\overset{\circ}{\overline{A}} = A$ ise A ya fuzyy kapalı küme denir.Eğer; $\overset{\circ}{\overline{A}} = A$ ise, A ya fuzzy regüler kapalı küme denir

Teorem 3.2.9. X' deki bir A fuzzy kümesinin fuzzy regüler açık olabilmesi için gerek ve yeter koşul, A^C fuzzy regüler kapalı olmasıdır .

Örnek 3.2.10. Örnek 2.2.6. da ki bir fuzzy topolojik uzayındaki A ve B fuzzy kümeleri için $\overset{\circ}{\overline{A}} = A$ *ve* $\overset{\circ}{\overline{B}} = B$ olduğunu gösterelim.Bir fuzzy kümesinin kapanışı tanımıdır.

$f_{\overline{A}}(x) = inf\{f_K(x) : f_K(x) \ge f_A(x), K \in \kappa\}$

$= inf\{f_X(x), f_{B^c}(x), f(A \vee B)^C(x)\}$

$= f_{B^c}(x)$

$= f_{\overline{A}}(x) = f_{B^c} \quad (\forall x \in Xiçin)$

$f_{\overset{\circ}{\overline{A}}}(x) = f_{B^{c0}} = \sup\{f_U(x) : f_U(x) \le f_{B^c}(x), U \in \tau$

$\Rightarrow f_{\overset{\circ}{\overline{A}}}(x) = f_A(x) \quad (\forall x \in Xiçin)$

$\Rightarrow \overset{\circ}{\overline{A}} = A$

olur.Buradan fuzzy regüler açık olduğu görülür.Aynı zaman şekilde $\overset{\circ}{\overline{B}} = B$ sağlandığından B de fuzzy regüler açıktır.Fakat $\overset{\circ}{\overline{(A \vee B)}} = X$ elde edildiğinden $A \vee B$ fuzzy regüler açık değil.Ayrıca Teorem 2.2.9.' dan $(A \vee B)^{C}$ fuzzy regüler kapalı değildir. Sonuçta;
iki ftızzy regüler açık (yada kapalı) kümenin birleşiminin ftızzy regüler açık (yada kapalı) olması gerekmez.

Teorem 3.2.11. X de iki fuzzy regüler açık (yada kapalı) küme için aşağıdaki ifadeler vardır.

i) İki fuzzy regüler açık kümenin kesişimi fuzzy regüler açık kümedir.
ii) İki fuzzy regüler kapalı kümenin birleşimi fuzzy regüler kapalı kümedir .

İspat : i) X de iki fuzzy regüler açık küme A ve B olsun. Her bir fuzzy regüler açık küme aynı zamanda fuzzy açık küme olduğundan, A ve B fuzzy açık kümedir. Fuzzy topoloji olma şartlarından A $\wedge$ B fuzzy açıktır.

$$A \wedge B \le \overset{\circ}{\overline{A \wedge B}} \Rightarrow (A \wedge B)^{\circ} = A \wedge B \le \overset{\circ}{\overline{A \wedge B}} ...(*)$$

Buradan,
$\overset{\circ}{\overline{A \wedge B}} \le \overline{A} \wedge \overline{B})^{\circ} = \overset{\circ}{\overline{A}} \wedge \overset{\circ}{\overline{B}} \le \overset{\circ}{\overline{A}} = A$ elde edilir. Benzer şekilde, $\overset{\circ}{\overline{A \wedge B}} \le B$ olduğundan,

$$\overset{\circ}{\overline{A \wedge B}} \le A \wedge B ...(*)$$

olur. (*) ve (**) dan $A \wedge B = \overset{\circ}{\overline{A \wedge B}}$ bulunur ki buda A$\le$B fuzzy kümesinin fuzzy regüler açık olduğunu gösterir.

ii, i şıkkına benzer ispat yapılır.

Teorem 3.2.12. X deki A fuzzy açık kümesi ve B fuzzy kapalı kümesi için aşağıdaki ifadeler vardır.

i) A fuzzy açık kümesinin kapanışı, fuzzy regüler kapalı kümedir.
ii) B fuzzy kapalı kümesinin içi, fuzzy regüler açık kümedir .

İspat: i) X fuzzy uzayının fuzzy açık kümesi A olsun.
$\overset{\circ}{\overline{A}} \le \overline{A} \Rightarrow \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}} \le \overline{A}$ ve $A \le \overline{A} \Rightarrow \overset{\circ}{A} \le A \le \overset{\circ}{\overline{A}} \Rightarrow \overset{\circ}{\overline{A}} \le \overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ olduğundan,
$\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}} = \overline{A}$ elde edilir. O halde,
A fuzzy regüler kapalıdır.

ii) X fuzzy uzayının fuzzy kapalı kümesi B olsun.
$\overset{\circ}{B} \le B^{\overset{C}{\circ}} \Rightarrow \overset{\circ}{B} \le B^{\overset{\circ}{\overline{\circ}}}$ ve $\overline{\overset{\circ}{B}} \le \overline{B} = B \Rightarrow B^{\overset{\circ}{\overline{\circ}}} \le \overset{\circ}{B}$

$\Rightarrow \overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{B}}} = \overset{\circ}{B}$ olur. Buda B nin fuzzy regüler açık küme olması demektir.

Tanım 3.2.13. (X, τ) , (Y, τ') iki f.t.u. olmak üzere, g: X → Y bir fonksiyon olsun. g fonksiyonu X deki her fuzzy açık kümeyi, Y de fuzzy açık kümeye dönüştürüyorsa, g ye fuzzy açık fonksiyon denir. Benzer olarak, g fonksiyonu X deki her fuzzy kapalı kümeyi. Y de fuzzy kapalı kümeye dönüştürüyorsa, g ye fuzzy kapalı fonksiyon denir.

Tanım 3.2.14 (X, τ), (Y, τ') iki f.t.u. olmak üzere, g: X → Y bir fonksiyon olsun. g fonksiyonu X in her bir fuzzy açığını , Y nin bir fuzzy yarı-açık kümesine dönüştürüyorsa, g ye fuzzy yarı-açık fonksiyon denir. Benzer olarak, g fonksiyonu X in her bir fuzzy kapalısını, Y nin bir fuzzy yarı-kapalı kümesine dönüştürüyorsa, g ye fuzzy yarı-kapalı fonksiyon denir .

Aşağıdaki örnekte fuzzy yarı-açık olan bir fonksiyonun fuzzy açık fonksiyon olmadığını gösterelim.

Örnek 3.2.15. (X, τ) olarak örnek 2.2.6.' da ki fuzzy topolojisini alalım. g: X → X fonksiyonu g(x)= min{2x,1} ile tanımlansın. Böylece g, 1-1 ve üzerine olduğundan fonksiyonun tersi, g^{-1}(y) = min{$\frac{y}{2}$,1} olur. X=[O,1] kümesi göz önüne alınırsa, g'(y) = $\frac{y}{2}$,1 olacaktır.

$g(\varnothing) = \varnothing \ ve \ g(x) = x$ olduğu açıktır.

$$f_{g(A)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{X \in g^{-1}(y)} \{f_A(X)\} & , g^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & , g^{-1}(y) \neq \phi \end{cases} = \begin{cases} \sup \begin{cases} 0 & , 0 \leq y \leq 1 \\ y-1 & , 1 \leq y \leq 2 \end{cases} & , g^{-1}(y) \neq \phi \\ 0 & , g^{-1}(y) \neq \phi \end{cases}$$

$f_{g(A)}(y) = \{0 \ , \ 0 \leq y \leq 1 = f_\phi(x) \Rightarrow g(A) = \phi$

bulunur. Benzer olarak, $g(B) = A^C \quad ve \quad g(A \vee B) = A^C$ elde edilir. Şimdi g nin fuzzy yarı-açık fonksiyon olduğunu gösterelim.

$A \in \tau \ için \ \mathrm{U} = \varnothing \in \tau$ alındığında $\phi \leq g(A) = \phi \leq \overline{\phi} = \phi$ sağlanır.

$A \vee B \in \tau$ için g($A \vee B$)= A^C olduğundan $\mathrm{B} \in \tau$ için $g(B) = A^C \notin \tau$ dur. Böylece diyebiliriz ki, fuzzy yarı-açık olan bir fonksiyon fuzzy açık fonksiyon olmak zorunda değildir .

Fuzzy açık fonksiyon $\Rightarrow$ Fuzzy yarı-açık fonksiyon

4.TOPOLOJİK UZAY İŞLEVLERİ

4.1 Alt Uzaylar

Tanım 4.1.1 L^X in fuzzy uzayında $Y \leq X$, $Y \neq \varnothing$, $A \subset L^X$ olduğunun farz edelim. $A|y = \{A|y \ : \ A \in A\}$ gösterdim.Özellikle her fuzzy topolojik uzay için $(L^X \delta)$, $\delta|y = \{^U|y \ : \ U \in \delta\}$ için tanım uygundur.

Önerme 3.1.2 $L^X \delta$ in L fuzzy topolojik uzay ve $z \subset y \subset x$, $y \neq \varnothing$, $z \neq \varnothing$ $\{A_+ \ : \ \in T\} \subset L^X$
$A \in L^X$ olduğunu farz edelim sonra;

i) $(\vee_{+\in T} A_t)|y = (\vee_{+\in T} A_y)$
ii) $(\vee_{+\in T} A_t)|y = (\vee_{+\in T} A_y)$
iii) $^{A'}|y = (^{A}|y)'$
iV) $(^{A}|y)|_z = {}^{A}|_z$

Tanım 4.1.3. $L^X \delta$ 'in L fuzzy topolojik uzay $y \subset x$, $y \neq \varnothing$ olduğunu farz edelim $\delta|y$ i y'nin üzerindeki δ 'nin bir elemanı olara adlandıralım;

$L^X \delta$ 'in L fuzzy alt uzayları kısaltma alt uzayı olsun
Eğer $\vee_y \in \delta$ ise $(L^X, \delta|y)$ 'i L^X, δ nin açık uzayı olarak adlandıralım.
Eğer $\vee_y \in \delta$' ise $(L^X, \delta|y)$ 'i L^X, δ nin kapalı uzayı olarak adlandıralım.
Eğer $|\delta(X_y) = X_x$ ise $(L^X, \delta|y)$: L^X, δ nin yoğun alt uzayı olarak adlandıralım.

Önerme 3.1.4 L^X, δ nin bir fuzzy topolojik uzay olduğunu farz edelim sonra
Her alt uzayda L^X, δ nin $(L^y, \delta|y)$ 'si bir L fuzzy topolojik uzaydır.

Teorem 3.1.5. $(L^x, \delta), (L^y, M)$ L fuzzy topolojik uzay olduğunu
$f^{\rightarrow} : (L^x, \delta) \rightarrow (L^y, M)$ için $x_0 \subset x$, $y_0 \subset y$ ve L fuzzy eşleştirme olduğunu farzedelim.

i) $f^{\rightarrow} : (L^x, \delta) \rightarrow (L^y, M)$ süreklidir ve $f[x_0] \subset y_0 \Rightarrow$
$(F|^{y_0}_{x_0})^{\rightarrow} : (L^{x0}, \delta|x_0) \rightarrow (L^{yo}, M|y_0)$ süreklidir.

ii) $f^{\rightarrow} : (L^x, \delta) \rightarrow (L^y, M)$ açıktır ve $f[x_0] \subset y_0 \Rightarrow$
$(F^{|y0})^{\rightarrow} : (L^x, \delta) \rightarrow (L^{yo}, M|y_0)$ açıktır.

iii) $f^{\rightarrow} : (L^x, \delta) \rightarrow (L^y, M)$ kapalıdır ve $f[x_0] \subset y_0 \Rightarrow$
$(F^{|y0})^{\rightarrow} : (L^x, \delta) \rightarrow (L^{yo}, M|y_0)$ kapalıdır.

İspat

i) $U =^{V} \Big|_{y0}$ *için* $\forall U \in M \big| y_0$, $\exists \vee \in M$ dir.Çünkü

$f[x_0] \subset y_0$ ve $f^{\rightarrow}$ süreklidir.Bu yüzden;

$(f \big|_{x_0}^{y_0})\,(u)\ \mathrm{U}\circ (f \big|_{x_0}^{y_0}) = (\vee \big| y_0)^{\circ}(f \big|_{x_0}^{y_0}) \vee {}^{\circ}F \big| x_0$

$= (\vee\ {}^{\circ}F)\big|x_0 = f(\vee)\big|x_0 \in \delta x_0\ ise\ (f \big|_{x_0}^{y_0})$

Süreklidir.

ii) $(f \big| y^0)\,(\mathrm{U})\,(y) = \vee\{\mathrm{U}(x) : x \in x, f \big| y^0\,(x) y_0\}$

$= \vee\{\mathrm{U}(x) : x \in x, f(x) = y\}$

$= (F(\mathrm{U})\big|y_0)\,(y)$

Çünkü f açıksa $(f \big| y^0)\,(\mathrm{U}) = f(\mathrm{U}\big|y_0) \in M \big| y_0, (f \big| y^0)$ açıktır.

4.2 ÇARPIM UZAY

4.2.1 Tanım: $\delta = \{(L^x, \delta_t) : t \in T\}$ L fuzzy topolojik uzayın bir kümesi ise her $t \in T$ için $A_t \in L^{xt}$ olduğu yerde $A = \{A_t : t \in T\}$ yi L fuzzy alt kümelerinin alt kümesi olduğunu farz edelim .Her $t \in T$ için $p_t : x \rightarrow x_t$ yi sıradan iz düşüm olarak varsayalım. İzdüşüm L fuzzy uzayda L^x den L fuzzy uzayına ; $p_t : L^x \rightarrow L^{xt}$ olarak tanıyalım.

L fuzzy topolojilerinin çarpım topolojisini x'in üzerinde $\{\delta : t \in T\}$, tarafından x üzerinde L fuzzy topoloji olarak ifade edilen alttaban tarafından $\pi_{t\in T}\delta_t$ şeklinde ifade edilir.

Teorem 3.2.2: $\delta = \{(L^{Xt}, \delta_1) : t \in T\}$ yi Lfuzzy topolojik uzayın bir ailesi olduğunu, (L^{Xt}, δ) ninde bunların çarpım uzayı olduğunu farz eldim. Sonra;

i)Her t$\in$p için, izdüşüm $p_t : (L^x, \delta) \rightarrow (L^{xt}, \delta_t)$ süreklidir.

ii) δ çarpım topolojisi sadece her izdüşüm p_t 'yi sürekli yapan x üzerinde bir L fuzzy topolojisidir.

İspat: i) $\forall\ U_t \in \ldots$, $P_t(U_t)$ sadece çarpım uzayının doğal tabanının bir elemanıdır. Bu yüzden p_t süreklidir.

ii) eğer m her izdüşümü sürekli yapan x üzerinde L fuzzy topolojiyse, böylece $\forall \in T, \in U, \in \ldots$'de M, $P_t(U_t)$ içermelidir ve sonra sonlukları kesişir. Böylece

M,δ'nin doğal alt tabanının ve sonra δ in kendini içerir δ her izdüşümü sürekli yapan x üzeri L fuzzy topolojiden daha büyüktür.(i) ilk sonuç geçerli olur.

Bir L fuzzy çarpım uzayındaki izdüşümler çarpımı bileşenleriyle birleştirilir. Her kenarın özelliklerini diğerine yansıtmak için olasılık yaratır.

Teorem 4.2.3 δ: $\left\{\left(L^{xt},\delta_t\right):t\in T\right\}$'yi L fuzzy topolojik uzayın bir ailesi olduğunu; $\left(L^x,\delta_t\right)$nin onların uzay çarpımı olduğunu farzedelim. Sadece ve sadece$\left(p_t f\right),\forall t\in T,\forall u_t\in\delta_t$ sürekliyse her L fuzzy topolojik uzayda $\left(L^y,M\right)$ve her L fuzzy F: $\left(L^y,M\right)\to\left(L^x,\delta\right)$, f eşlemesi süreklidir.

Her izdüşümün açık eşleme olması, sıradan topolojide izdüşümlerin başka bir benzer özelliğidir. Ama genelde bu hala L fuzzy uzay çarpımında doğru değildir. Bu aşağıdaki örnekte gösterilmiştir:

Örnek: $x_0=x_1=\{I,y\}$, L=$\{0,a,1\}$'yi bir zincir olarak alalım. δ_0=$\{\underline{o},\underline{1}\}$, $\delta_1=\{\underline{o},x_a,\underline{1}\}$, sonra, $\left(L^{xo},s_o\right)$ve $\left(L^x:\delta_1\right)$ L fuzzy topolojik uzay olur. Uzay çarpımlarını $\left(L^1,\delta\right)$ ile ifade edelim. Böylece U=$P_1(xa)$, $\left(L^x,s\right)$de açık bir alt kümedir. $x_0=\{x,y\}$'deki iki nokta x ve y için;

$$p_o\left(p_1(xa)\right)(x)=\forall\left\{x_a\left(p_1(z)\right):z\in x_0xx_1,p_0(z)=x\right\}$$
$$=x_a(x)\vee x_a(y)=a$$
$$p_o\left(p_1(xa)\right)(y)=\vee\left\{x_a\left(p_1(z)\right):z\in x_oxx_{1,}p_{0=y}\right\}$$
$$=x_a(x)\vee x_a(y)=a$$

Böylece $p_o=\left(L^x,f\right)\to\left(L^{xo},\delta_o\right)$ izdüşümü $p_o\left(p_1(xa)\right)=\underline{a}\notin\delta_o$da açık değildir.

Teorem 4.2.4: $\left\{\left(L^{xt},\delta_t\right):t\in T\right\}$yi L fuzzy topolojik uzayının bir ailesi olduğunu,$\left(L^x,\delta\right)$'nın onların uzay çarpımı, s $\in$T olduğunu farz edelim. Böylece aşağıdaki durumlar eşittir.

i) izdüşüm $p_\delta:\left(L^x,\delta\right)\to\left(L^{x\delta},\delta_\delta\right)$ açık bir eşlemedir.

ii) Her bir paralel parça x_s'e ve a = $\vee_{x\in x}u_{(x)}$ için a.x_s tabakası $\left(L^{x\delta},\delta_\delta\right)$ de açık bir altkümedir.

Teorem 4.2.5:$\left\{\left(L^{xt},\delta_1\right):t\in T\right\}$'nin L fuzzy topolojik uzayının bir ailesi olduğunu, uzay çarpımları s$\in$ T, $\left(L^{xs},\delta_\delta\right)$ nin katmanlaştırıldığını farz edelim. Böylece;

i)x paralel x_δ'deki her parça için $\dot{X}_\delta$ bir L fuzzy hemeomorfizmdir.

ii)x paralel $\overline{x_\delta}$ deki eşlemesindeki her parça $\dot{X}_\delta$ için

$\dot{X}_\delta\to$ x$\left(L^{x\delta},\delta_\delta\right)\to\left(L^x,\delta\right)$

bir gömmedir.

Teorem 4.2.6: $\{(L^{xt},\delta_t):t\in T\}$ yi L fuzzy topolojik uzayda, (L^{x},δ)nin bir ailesi; $\delta\in$T yi uzg çarpımları olduğunu farz edelim. Eğer (L^{xs},δ_s) katmanlaştırdıysa, o zaman $(L^{x\delta},\delta_\delta),(L^{x},\delta)$yi paralel (L^{x},δ)deki her L fuzzy parçasına hemeomorfiktir.

4.3 TOPLAM UZAYLAR

Tanım 4.3.1: Farzedelim ki $\{(L^{xt},\delta_t):t\in T\}$yi L fuzzy topolojik uzay ailesindendir, farklı x_t'ler ayrıktır. X=$U_t\in T$ dir.$\{s_t:t\in T\}$yi L^x üstünden toplam topolojisini tanımlarsak$\oplus_{t\in T}s_t$ tarafından ifade edilişi şöyledir;

$$\forall U\in L^x, U\in\bigoplus_{t\in T}\delta_t\Leftrightarrow\forall_{t\in T},U\,|X_t\in\delta_t$$

Burada L fuzzy topolojik uzayda $(L^x,\oplus_{t\in T},s_t)$ diyelim.

$\{(L^{xt},\delta_t)\}$nin uzay toplamı,$\oplus_{t\in T}(L^{xt},\delta_t)$ ile ifade edilir.

L fuzzy topolojik uzayda sonlu olan sayı durumunda, ayrıca topoloji toplam ve uzay toplam $s_0\oplus......\oplus s_n$ ve $(L^{xo},\delta_0)\oplus.....\oplus(L^{xn},\delta_n)$ olarak her biri ayrı ayrı ifade edilir.

Teorem 4.3.2: Farz edelim ki $\{(L^{xt},\delta_t):t\in T\}$, L fuzzy topolojik uzayının ailesinden farklı x_t'nin ayrık, $(L^x,\delta)=\oplus_{t\in T}(L^{xt},\delta_t)$dir. O halde her bir $A\in L^x$, A,(L^x,δ)'in içinde kapalı altkümedir. Sadece ve sadece$A|x_t$ ise her bir $t\in T$ de (L^{xt},δ^t) de (L^{xt},δ^t)bir kapalı altkümedir.

Teorem 4.3.3: Farzedelim ki,$\{(L^{xt},\delta_t):t\in T\}$, L fuzzy topolojik uzayının bir üyesidir. Farklı x_t ayrıktır.

$(L^x,\delta)=\oplus_{t\in T}(L^{xt})$dir. O halde her bir $t\in T$ için (L^x,δ)nin açık ve kapalı L fuzzy altuzayı (L^{xt},δ_t)dir ve içerik için $i_t:x_t\to x,i_t:(l^{xt},\delta_t)\to(L^x,\delta)$bir gömmedir.

Teorem 4.3.4: Farz edelim ki (L^x,δ) bir L fuzzy topolojik uzaydır. c x'in dolu alt kümesi olarak $\{x_t:t\in T\}$c ailesinden ayrık bileşen olarak x verilebilir. O halde (L^x,δ) her bir $t\in T$ için sadece ve sadece $x_{xt}\in s$ olduğundan $\{(L^{xt},s|_{xt}):t\in T\}$toplam uzay ailesinden farzedilebilir. F ile uyum sa

4.4 BÖLÜM UZAYLARI

Tanım 4.4.1.: Farzedelim ki L fuzzy eşlemesinde bir örten olan $f : L^x \to L^y, L^x$ bir L fuzzy uzayıdır. Belirli bir L fuzzy topoloji bölümünü F ile …. Uyum sağlatma;

$\delta\big|_f = \{\vee \in L^y : F^t(\vee) \in s\}$ file uyum zağlayarak (L^x, δ) un L fuzzy uzay bölümü $(L^y, \delta|_F)$ diyelim.Bir L fuzzy eşleme bölümü $f : (L^x, \delta) \to (L^y, \delta|f)$ diyelim.

Teorem 4.4.2. Farzedelim ki (x.T) bir basit topoloji uzayıdır.Y de dolu bir basit küme f:x→y bir basit eşleşmedir. $T|f$ tarafından f,y ile uyumlu basit bir topoloji bölümüyle belirtilir.

Teorem 4.4.3. Farzedelim ki (L^x, δ) L fuzzy topolojik uzay L^y bir l fuzzy uzayı $f : L^x \to L^y$ bir fuzzy eşleşmesi örtenidir.O halde f sürekliliği yapmak için y üstündeki Lfuzzy topolojisinin en iyisi $\delta\big|_f$ dir.

Teorem 4.4.4. $(L^x, \delta), (L^z, M)$ ye L fuzzy topolojik uzay dersek L^y bir L fuzzy uzay olsun $f : L^x \to L^y$ bir fuzzy eşleşmesi örtenidir. $g : L^y \to L^z$ de bir L fuzzy eşleşmesidir. O halde $g \circ f : (L^x, \delta) \to (L^z, M)$ sadece ve sadece eğer bir devamsızlıksa $g : (L^y, \delta_{|F}) \to (L^z, M)$ bir devamlılıktır.

Teorem 4.4.5 $(L^x, \delta), (L^y, M)$ l2 ye L fuzzy topolojik uzay dersek $f : (L^x, \delta) \to (L^y, M)$, L fuzzy süreklilik eşleşmesi örten dir.

i) F açık bir eşlemedir $\Rightarrow f, L$ fuzzy bir eşleme bölümüdür.

ii) F kapalı bir eşlemedir →f bir fuzzy eşleme bölümüdür.

Sonuç 4.4.6. $\{(L^{Xt}, \delta_t) : t \in T\}$ ye bir L fuzzy topolojik uzayının bir ailesi dersek (L^x, δ) onların uzay çarpımı olur. $\delta \in T$ olsun o halde;

i) (L^x, δ_δ) ise P_δ bir L fuzzy eşleme bölümüdür.

ii) $(L^{x\delta}, \delta_\delta)$ katmanlaştırılmış $\Rightarrow$ P_δ bir fuzzy eşleme bölümüdür

5.1 TOPOLOJİK UZAYLARIN TERS ve DÜZ SPEKTRLERİ

Tanım 5.1.1. A yönlendirilmiş bir küme, her $\alpha \in A$ için X$^{\alpha}$ bir topolojik uzay ve her α p $\alpha' \in A$ için $P_\alpha^\alpha : X_\alpha \to X_\alpha$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer

1) Her $\alpha \in A$ için $P_\alpha^\alpha = 1_{X_\alpha} : X_\alpha \to X_\alpha$;

2) Her α p α' p α' p α'' için $P_\alpha^{\alpha''} = P_\alpha^{\alpha'} \circ P_{\alpha'}^{\alpha''}$ koşulları sağlanırsa

$\underline{X} = (\{X_\alpha\}_{\alpha \in A'} \{P_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha\}_{\alpha \mathrm{p} \alpha' \in A})$ ailesine topolojik uzayların ters spektri denir.

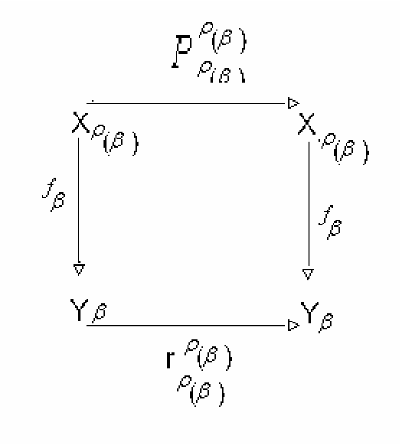
Taıım 5.1.2. A yönlendirilmiş bir küme, her $\alpha' \in A$ için X^α bir topolojik uzay ve her α p $\alpha' \in A$ için $q_\alpha^{\alpha'} : X^\alpha \to X^{\alpha'}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer

1)Her $\alpha' \in A$ için $q_\alpha^\alpha = 1_{X_\alpha} : X^\alpha \to X^\alpha$;

2) Her α p α' p α'' için $q_\alpha^{\alpha''} = q_{\alpha'}^{\alpha''} \circ q_{\alpha'}^{\alpha'}$ koşulları sağlanırsan

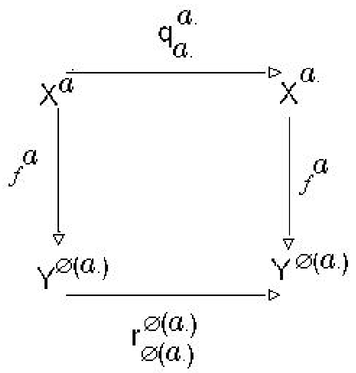
$\overline{X} = (\{X^\alpha\}_{\alpha \in A'} \{q_\alpha^{\alpha'} : X^\alpha \to X^{\alpha'}\}_{\alpha \mathrm{p} \alpha' \in A})$ ailesine topolojik uzayların düz spektri denir.

Tanım 5.1.3 $\underline{X} = (\{X_\alpha\}_{\alpha \in A'} \{P_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha \mathrm{p} \alpha' \in A}), \underline{Y} = \{(Y_\beta\}_{\beta \in B'} \{r_\beta^{\beta'}\}_{\beta \mathrm{p} \beta' \in B})$ topolojik uzayların ters spektrleri, $\varphi : B \to A$ izoton örten dönüşüm ve her $\beta \in B$ için $f_\beta : X_{\varphi(\beta)} \to Y_\varphi$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her β p $\beta' \in B$ için



Diyagramı komutatif ise $\underline{f} = (\varphi : B \to A, \{f_\beta : X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta \in B})$ ailesine $\underline{X}$ ters spektrinden $\underline{Y}$ ters spektrine giden dönüşüm denir.

α p $\alpha \in A$ için



diyagramı komutatif ise $\overline{f} = (\phi : A \to B,)\{f^\alpha : X^\alpha \to Y^{\phi(\alpha)}\}_{\alpha \in A})$ ailesine $\overline{X}$ düz spektrinden $\overline{Y}$ düz spektrine giden dönüşüm denir.

Tanım 5.1.5. $\underline{X} = (\{X_\alpha\}_{\alpha \in A'} \{P_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha\}_{\alpha \mathrm{p} \alpha' \in A})$ topolojik uzayların ters spektri olsun. $\prod_{\alpha\in A} X\alpha$ topolojik çarpım uzayının $\{\{x_\alpha\}\in\prod_{\alpha\in A} X_\alpha : \forall\alpha \prec \alpha'\in A \text{ için } P_\alpha^{\alpha'}:(x_{\alpha'})=x_\alpha\}$ alt uzayına $\underline{X}$ ters spektrinin limiti denir ve $\varprojlim \underline{X}$ ile gösterilir.

Tanım 5.1.6. $\overline{X}:(\{X^\alpha\})_{\alpha\in A'}\{q_\alpha^{\alpha'}:X^\alpha\to X^{\alpha'}\}_{\alpha<\alpha'\in A})$ topolojik uzayların düz spektri. $X=\bigoplus_{\alpha\in A} X^\alpha$ topolojik toplam ve $\{i_\alpha X^\alpha\to\bigoplus_{\alpha\in A} X^\alpha\}$ gömme fonksiyonları olsun. X uzayında denklik bağıntısı. $x^\alpha\in X^\alpha, x^{\alpha'}\in X^{\alpha'}$ için;

$x^\alpha : x^{\alpha'} \Leftrightarrow q_\alpha^{\alpha''}(x^\alpha)=q_{\alpha'}^{\alpha''}(x^{\alpha'})$ koşulunu sağlayan $\alpha''\succ\alpha, \alpha''\succ\alpha', \alpha''\in A$ vardır seklinde verilsin. X uzayının bu denklik bağıntısına göre bölüm uzayına $\overline{X}$ düz spektrinin limiti denir ve $\varinjlim \overline{X}$ ile gösterilir.

Örnek 5.1.7. M keyfi bir küme ve her $m\in M$ için X_m bir topolojik uzay olsun. M nin tüm sonlu alt kümeler kümesi $A, \alpha \prec \alpha'\in A \Leftrightarrow \alpha\subset\alpha'$ bağıntısı ile yönlendirilmiş bir kümedir. Her $\alpha\in A$ $X\alpha=\prod_{i\in\alpha} X_i$ ve her $\alpha\prec\alpha'\in A$ için $P_\alpha^{\alpha'}:X_{\alpha'}\to X_\alpha$ projeksiyon dönüşümü ise $\underline{X}=(\{X_\alpha\})_{\alpha\in A'}\{P_\alpha^{\alpha'}:X_{\alpha'}\to X_\alpha\}_{\alpha\prec\alpha'\in A})$ topolojik uzaylarının ters spektridir ve $\varprojlim \underline{X}=\prod_{m\in M} X_m$ dir.

Örnek 5.1.8. M ve A kümeleri Örnek 4.5.1 deki gibi tanımlansın.

Her $\alpha\in A$ için $X^\alpha=\bigoplus_{i\in\alpha} X_i$ *ve her* $\alpha\prec\alpha'\in A$ *için* $q:X^\alpha\to X^{\alpha'}$ gömme fonksiyonu ise

$\underline{X}=(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A'}\{P_\alpha^{\alpha'}:X_{\alpha'}\to X_\alpha\}_{\alpha\prec\alpha'\in a})$ topolojik uzayların düz spektridir ve

$\varinjlim\overline{X}=\bigoplus_{m\in M} X_m$ dir.

$\underline{X}=(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A'}\{P_\alpha^{\alpha'}:X_{\alpha'}\to X_\alpha\}_{\alpha\prec\alpha'\in A})$ topolojik uzayların ters spektri

için $\varprojlim\underline{X}\subset\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ olduğundan $P_\alpha:\prod_{\alpha\in A} X_\alpha\to X_\alpha$ projeksiyon dönüşümünün $P_\alpha\big|\varprojlim\underline{x}$ daraltılmasını ele alabiliriz. Bu daraltılmayı $\pi_\alpha:\varprojlim\underline{X}\to X_\alpha$ ile gösterelim. Her $\alpha\in A$ için π_α süreklidir ve her $\alpha\prec\alpha'$ *için* $\pi_\alpha=P_\alpha^{\alpha'}\circ\pi_\alpha$ sağlanır.

$\overline{X}=(\{X^\alpha\}_{\alpha\in A'}\{q_\alpha^{\alpha'}:X^\alpha\to X^{\alpha'}\}_{\alpha\prec\alpha'\in A})$ topolojik uzayların düz spektri için $q:\bigoplus_{\alpha\in A} X^\alpha\to\varinjlim\overline{X}$ kanonik örten fonksiyon ise her $\alpha\in A$ için $\pi_\alpha=q\circ i_\alpha : X^\alpha\to\varinjlim\overline{X}$ fonksiyonu süreklidir ve her $\alpha\prec\alpha'$ için

$\pi^\alpha=\pi^\alpha\circ q_\alpha^{\alpha'}$ sağlanır.

$\pi^\alpha:\varprojlim\underline{X}\to X_\alpha, \pi_\alpha:X^\alpha\to\varinjlim\overline{X}$ fonksiyonlarda projeksiyon adı verelim.

Teorem 5.1.9. $\underline{X} = (\{x_a\}_{a\in A}\ ,\ \{P_a^{a'} : X_{a'} \to X_a\}_{a \prec a' \in A})$ topolojik uzayların ters spektri olsun.

$$B=\{\pi_a^{-1}(U) : a \in A,\ U \in \tau_a\}$$

ailesi $X=\underleftarrow{\lim}\ \underline{X}$ uzayının topolojisinin bir tabanıdır.

İspat. Her $a \in A$ için $X_A : \underleftarrow{\lim}\underline{X} \to X_a$ sürekli olduğundan B ailesinin kümeleri açıktır. B nin bir taban olduğunu göstermek için her açık $U \subset \underleftarrow{\lim}\underline{X}$ kümesi ve her $X \in U$ noktası için $X \in \pi_{a_0}^{-1}(U_{a_o}) \subset U$ koşulunu sağlayan $a_0 \in A$ ve $U_{a_0} \in \tau_{a_0}$ bulunması gerekir.

$U \subset \underleftarrow{\lim}\underline{X}$ keyfi açık küme, $X = \{x_a\} \in U$ herhangi bir nokta olsun. Alt uzay topolojisinin tanımından $U=\underleftarrow{\lim}\underline{X} \cap v$ sağlanacak biçimde $v \subset \prod_{a\in A} x_a$ açık kümesi vardır. Çarpım topolojisinin tanımından ise

$$x \in p_{a_1}^{-1}(U_{a_1}) \cap \cdots \cap p_{a_k}^{-1}(U_{\sigma_X}) \subset V$$

koşulunu sağlayan $\alpha_1 ... \alpha_k \in A$ elemanları ve $U_{\alpha_1} \in \tau_{\alpha_1}$ kümeleri mevcuttur. Şimdi A yönlendirilmiş küme olduğundan $\alpha_0 \succ \alpha_1, ..., \alpha_0 \succ \alpha_k$ koşulunu sağlayan $\alpha_0 \in A$ vardır.

$P_{\alpha_1}^{\alpha_0} : X_{\alpha_0} \to X_{\alpha_1}, i=\overline{1,k}$ sürekli fonksiyonlar için $(P_{\alpha_1}^{\alpha_0})^1(U_{\alpha_1})$ kümeleri ve onların sonlu ara kesiti $\bigcap_{i=1}^{k}(P_{\alpha_1}^{\alpha_0})^1(U_{\alpha_1}) = U_\alpha, X_{\alpha_0}$ uzayında açıktır. $P_{\alpha_1}^{\alpha_0}(x_{\alpha_0}) = x_{\alpha_1}$ olduğu için $x_{\alpha_0} \in U_{\alpha_0}$ dır ve

$x = \{x_\alpha\} \in \pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$ dır. Buradan

$$\pi_{\alpha_0}^{-1}(P_{\alpha_1}^{\alpha_0})^1(U_{\alpha_1}) = \pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_1}) = X \cap P_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})$$

Dir. Böylece

$$x \in \pi_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_1}) = \pi_{\alpha_0}^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k}(P_{\alpha_1}^{\alpha_0})^1(U_{\alpha_1})\right) = \bigcap_{i=1}^{k}\pi_{\alpha_0}^{-1}(P_{\alpha_1}^{\alpha_0})^1(U_{\alpha_1}) =$$

$$\bigcap_{i=1}^{k}(X \cap P_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})) = X \cap (\bigcap_{i=1}^{k} P_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1})) \subset X \cap V = U$$

dur. •

Teorem 5.1.10. $\underline{X} = (\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{\overline{P}_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'}\}_{\alpha\prec\alpha'\in A})$ topolojik *ise* $\underline{B} = (\{B_\alpha^C\}_{\alpha\in A}, \{\overline{P}_\alpha^{\alpha'} : B_{\alpha'}^C \to B_\alpha^C\}_{\alpha\prec\alpha'\in A})$ uzayların ters spektri, $B \subset \underleftarrow{\lim}\underline{X}$ alt uzay, $\pi_\alpha(B) = B_\alpha$ *ve* $\overline{P}_\alpha^{\alpha'} = P_\alpha^{\alpha'}\Big|_{B_\alpha^C}$

topolojik uzayların ters spektri

ve $\underleftarrow{\lim}\underline{B} = B^C \to \underleftarrow{\lim}\underline{X}$ dir.

İspat. Her $x \in B$ *ve* $\alpha \prec \alpha' \in A$ *için* $\pi_\alpha(x) = \overline{P}_\alpha^{\alpha'}(\pi_\alpha(x))$ olduğundan $\overline{P}_\alpha^{\alpha'}(B_{\alpha'}^C) = \overline{P}_\alpha^{\alpha'}((\pi_{\alpha'}(B))^C) \subset (\overline{P}_\alpha^{\alpha'} \circ \pi_{\alpha'}(B))^C = B_\alpha^C$ dır, yani $\underline{B}$ ters spektrdir ve $\underleftarrow{\lim}\underline{B} \subset \underleftarrow{\lim}\underline{X}$ dir.

$\varprojlim \underline{B}$ nin kapalı alt uzay olduğunu gösterelim. Her

$x=\{x_\alpha\} \in \varprojlim \underline{X} \setminus \varprojlim \underline{B}$ için $x_{\alpha(x)} \in X_{\alpha(x)} \setminus B^C_{\alpha(x)}$ koşulunu sağlayan

$\alpha(x) \in A$ vardır. 0 zaman $\pi^{-1}_{\alpha(x)}(X_{\alpha(x)} \setminus B^C_{\alpha(x)})$ kümesi x noktasının açık bir komşuluğudur ve $\varprojlim \underline{B}$ kümesi ile arakesiti boş kümedir. Böylece diğer yanda her $x=\{x_\alpha\} \in \varprojlim \underline{B}$ için teorem 4.5.1 den

$(\pi^{-1}_\alpha(\mathrm{U}_\alpha) : \alpha \in A, \mathrm{U}_\alpha \in \tau_{\alpha'} \in \mathrm{U}_\alpha\}$ ailesi $\varprojlim \underline{X}$ uzayının topolojisinin bir tabanıdır.Her U_α için $x_\alpha \in \mathrm{U}_\alpha \cap B^C_\alpha$

olduğundan $\mathrm{U}_\alpha \cap B_\alpha \neq \varnothing$ dır ve $B \cap \pi^{-1}_\alpha(\mathrm{U}_\alpha) \neq \varnothing$ dır.

yani $x \in B^C$ dir. Böylece $\varprojlim \underline{B} \subset B^C$ elde edilir. O halde $B^C = \varprojlim \underline{B}$ bulunur.

Sonuç 5.1.11. $\underline{X} = (\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{P^{\alpha'}_\alpha : X_{\alpha'} \to X_\alpha\}_{\alpha \prec \alpha' \in A})$ topolojik uzayların ters spektri $B \subset \varprojlim \underline{X}$ bir kapalı alt uzay ise B uzayı, X_α uzaylarının kapalı alt uzaylarından oluşan

$$\underline{B} = (\{B^C_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{\overline{P}^{\alpha'}_\alpha : B^C_{\alpha'} \to B^C_\alpha\}_{\alpha \prec \alpha' \in A})$$

ters spektrinin limitine eşittir.

Teorem 5.1.12. $\underline{X} = (\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{P^{\alpha'}_\alpha : X_{\alpha'} \to X_\alpha\}_{\alpha \prec \alpha' \in A})$ topolojik uzayların ters spektri olsun.

a) Eğer her $P^{\alpha'}_\alpha : X_{\alpha'} \to X_\alpha$ birebir ise her $\pi_\alpha : \varprojlim \underline{X} \to X_\alpha$ fonksiyonu da birebirdir.

b) Eğer her $P^{\alpha'}_\alpha : X_{\alpha'} \to X_\alpha$ birebir ve örten ise her $\pi_\alpha : \varprojlim \underline{X} \to X_\alpha$ fonksiyonda birebir ve örtendir.

İspat. a) $x=\{x_\alpha\} \neq y=\{y_\alpha\} \in \varprojlim \underline{X}$ noktaları için

$$\pi_{\alpha_1}(x) = x_{\alpha_1} = y_{\alpha_1} = \pi_{\alpha_1}(y)$$

olsun. Her $\alpha' \succ \alpha_1$ *için* $P^{\alpha'}_{\alpha_1} : X_{\alpha'} \to X_{\alpha_1}$ x_α için birebir ve

$$P^{\alpha'}_{\alpha_1}(x_{\alpha'}) = x_{\alpha_1} = y_{\alpha_1} = P^{\alpha'}_{\alpha_1}(y_{\alpha'})$$

olduğundan $x_{\alpha_1} = y_{\alpha_1}$ dür. Keyfi $\alpha \in A$ için 4 yönlendirilmiş küme olduğundan α, α_1 için

$\alpha' \succ \alpha, \alpha' \succ \alpha_1$ koşulunu sağlayan $\alpha' \in A$ mevcuttur.O halde $x_{\alpha_1} = y_{\alpha_1}$ olduğu için $x_{\alpha_1} = y_{\alpha_1}$ dür. Buradan da

$x_\alpha = P^{\alpha'}_\alpha(x_{\alpha'}) = P^{\alpha'}_\alpha(y_{\alpha'})$ dır, yani $x = y$ dir.

b) π_{α_1} fonksiyonunun birebir olduğu a) şıkkında ispatlandı. Şimdi π_{α_1} in örten olduğunu gösterelim. $x_{\alpha_1} \in X_{\alpha_1}$ keyfi bir eleman olsun. Her $\alpha' \succ \alpha_1$ için $(P^{\alpha'}_{\alpha'})^1(x_{\alpha_1}) = x_{\alpha'}$ alalım. Her $\alpha \in A$ için $\alpha' \succ \alpha, \alpha' \succ \alpha_1$ koşulunu sağlayan $\alpha' \in A$ vardır. O zaman

$x_\alpha = P^{\alpha'}_\alpha(x_{\alpha'}) = P^{\alpha'}_\alpha((P^{\alpha'}_{\alpha_1})^1(x_{\alpha_1})$ alalım. $x=\{x_\alpha\}$ elemanının $\varprojlim \underline{X}$ ye ait olduğunu gösterelim. Her $\alpha' \prec \overline{\alpha}'$ için $\alpha'' \succ \alpha', \alpha'' \succ \overline{\alpha}$ ve $\overline{\alpha}' \succ \overline{\alpha}, \overline{\alpha}' \alpha_1$ olsun. Bu durumda

$x_\alpha = P_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'}) = P_\alpha^{\alpha'}((P_{\alpha_1}^{\alpha'})^1(x_{\alpha_1})), x_{\overline{\alpha}} = P_{\overline{\alpha}}^{\overline{\alpha}'}(x_{\overline{\alpha}'}) = P_{\overline{\alpha}}^{\overline{\alpha}'}\left(\left(P_{\overline{\alpha}}^{\overline{\alpha}'}\right)^{-1}(x_{\alpha_1})\right)$ dir.

$\alpha', \overline{\alpha}'$ elemanları için $\alpha'' \succ \alpha', \alpha'' \succ \overline{\alpha}'$ koşulunu sağlayan $\alpha'' \in A$ elemanım seçelim. 0 zaman

$$x_{\alpha_1} = P_{\alpha_1}^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = (P_{\alpha_1}^{\alpha'} \circ P_{\alpha_1}^{\alpha''}(x_{\alpha''})) = (P_{\alpha_1}^{\overline{\alpha}'} \circ P_{\overline{\alpha}_1}^{\alpha''}(x_{\alpha''})) \text{ ve}$$

$$x_{\alpha_1} = P_{\alpha_1}^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = P_{\alpha_1}^{\overline{\alpha}'}(x_{\overline{\alpha}'})$$

dır, $P_{\alpha_1}^{\alpha'}, P_{\alpha_1}^{\overline{\alpha}'}$ fonksiyonları birebir, örten oldukları için $P_{\alpha_1}^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = x_{\alpha'}$

$P_\alpha^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = (P_\alpha^{\alpha'} \circ P_{\alpha'}^{\alpha''})(x_{\alpha''}) = x_\alpha, P_{\overline{\alpha}}^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = \left(P_{\overline{\alpha}}^{\overline{\alpha}'} \circ P_{\overline{\alpha}'}^{\alpha''}\right)\left(x_{\alpha''}\right) = x_{\overline{\alpha}}$ dır.

Sonuç 5.1.13. Eğer $\underline{X} = \left(\left\{X_\alpha\right\}_{\alpha \in A}, \left\{P_\alpha^{\alpha'} : x_{a^1} \to x_a\right\}_{a p a' \in a}\right)$ topolojik uzayların ters spektrinde her $P_\alpha^{\overline{\alpha}}\left(x_{\overline{\alpha}}\right) = P_\alpha^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = x_\alpha$ bir homeomorfizma ise $\pi_\alpha : \varprojlim \underline{X} \to X_\alpha$ fonksiyonu da bir homeomorfizmadır.

İspat. Teorem 4.5.3 ten π_α fonksiyonu birebir, örten ve süreklidir. Teorem 4.5.1 den $\{\pi_\alpha^{-1}(\mathrm{U}_\alpha) : \alpha \in A, \mathrm{U}_\alpha \in \tau_\alpha\}$ ailesi $\varprojlim \underline{X}$ uzayının bir tabanıdır. O halde $\pi_\alpha(\pi_\alpha^{-1}(\mathrm{U}_\alpha)) = \mathrm{U}_\alpha$ olduğundan π_α açık bir fonksiyondur ve dolayısıyla bir homeomorfizmadır.

Teorem 5.1.14. $\overline{X} = (\{X^\alpha\}_{\alpha \in A}, \{q_\alpha^{\alpha'} : X^\alpha \to X^{\alpha'}$ topolojik uzayların düz spektri olsun.

a) Eğer her $q_\alpha^{\alpha'} : X^\alpha \to X^{\alpha'}$ fonksiyonu birebir ise her $\pi^\alpha : X^\alpha \to \varinjlim \overline{X}$ fonksiyonu da birebirdir.

b) Her $q_\alpha^{\alpha'} : X^\alpha \to X^{\alpha'}$ fonksiyonu birebir, örten ise her $\pi^\alpha : X^\alpha \to \varinjlim \overline{X}$ fonksiyonu da birebir ve örtendir.

İspat.

a) $x^\alpha, y^\alpha \in X^\alpha, x^\alpha \neq y^\alpha, \pi^\alpha(x^\alpha) = \pi^\alpha(y^\alpha)$ olsun. Bu durumda x^α, y^α elemanları denktir, yani $q_\alpha^\beta(x^\alpha) = q_\alpha^\beta(y^\alpha)$ koşulunu sağlayan $\beta \succ \alpha$ olacak şekilde $\beta \in A$ eleman' vardır. q_α^β fonksiyonu birebir olduğundan $x^\alpha = y^\alpha$. yani π^α fonksiyonu birebirdir.

b) $[x] \in \varinjlim \overline{X}$ keyfi bir eleman olsun. $q : \bigoplus_{\alpha \in A} X^\alpha \to \varinjlim \overline{X}$ fonksiyonu örten olduğundan

$q(\overline{x})) = [x]$ koşulunu sağlayan $x = x^{\alpha'} \in X^{\alpha'}$ emanı vardır. Topolojik toplam tanımı gereği $\overline{x} \in X^\alpha$ dür. Bu elemanı $\tilde{x} = x^{\alpha'} \in x^{\alpha'}$ ile gösterelim. Böylece her $[x] \in \varinjlim \overline{X}$ *için* $\pi^{\alpha'}(x^{\alpha'}) = [x]$

koşulunu sağlayan $\alpha' \in A$ *ve* $x^{\alpha'} X^{\alpha'}$ mevcuttur. $\alpha, \alpha \in A$ için $\alpha'' \succ \alpha, \alpha'' \succ \alpha'$ koşulu altında $\alpha'' \in \mathrm{A}$ elemanını seçelim.

$q_{\alpha}^{\alpha''} : X^{\alpha} \to X^{\alpha''}$ örten olduğundan $q_{\alpha'}^{\alpha''}(x^{\alpha'}) \in X^{\alpha''}$ elemanı için $q_{\alpha}^{\alpha''}(x^{\alpha}) = q_{\alpha'}^{\alpha''}(x^{\alpha'})$ sağlanacak biçimde $x^{\alpha} \in X^{\alpha}$ elemanı vardır. O halde $x^{\alpha} \in X^{\alpha}, x^{\alpha'} \in X^{\alpha'}$ elemanları denktir ve

$\pi^{\alpha}(x^{\alpha}) = x^{\alpha'}(\pi^{\alpha'}) = [x]$ = [x] dir, yani π^{α} fonksiyonu örtendir.

Sonuç 5.1.15. Eğer $\overline{X} : (\{X^{\alpha}\}_{\alpha \in A}, \{q_{\alpha}^{\alpha'} : X^{\alpha} \to X^{\alpha'}\} \alpha \prec \alpha \in A)$ topolojik uzayların düz spektrinde her $q_{\alpha}^{\alpha'} : X^{\alpha} \to X^{\alpha'}$ homeomorfizma ve

$q : \bigoplus_{\alpha \in A} X^{\alpha} \to \varinjlim \overline{X}$ açık fonksiyon ise her $\pi^{\alpha} : X^{\alpha} \to \varinjlim \overline{X}$ fonksiyonuda bir homeomorfizmadır

Sonucun ispatı açıktır.

$\underline{X} = (\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}, \{P_{\alpha}^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}), \underline{Y} = (\{Y_{\beta}\}_{\beta \in B}, \{r_{\beta}^{\beta'}\}_{\beta \prec \beta' \in B})$ topolojik uzaylarının ters spektrleri $\underline{f} = (\varphi : B \to A, \{f_{\beta} : X_{\varphi(\beta)} \to Y_{\beta}\}_{\beta \in B}) : \underline{X} \to \underline{Y}$ bu ters spektrlerin bir dönüşümü olsun.

Her $x = \{x_{\alpha}\} \in \varprojlim \underline{X}$ ve her $\beta \in B$ için

$y_{\beta} = f_{\beta}(x_{\varphi(\beta)})$ alalım. $y = \{y_{\beta}\}$ elemanının $\varprojlim \underline{Y}$ uzayına ait olduğunu gösterelim. Her $\beta' \succ \beta \in B$ için

$q_{\beta}^{\beta'}(y_{\beta}) = q_{\beta}^{\beta'}(f_{\beta'}(x_{\varphi(\beta')}) = f_{\beta}(P_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\beta')}(x_{\varphi(\beta')})) = f_{\beta}(x_{\varphi(\beta')}) y_{\beta}$

olduğundan $y = \{y_{\beta}\}$ elemanı $\varprojlim \underline{Y}$ uzayına aittir, Böylece her $x = \{x_{\alpha}\} \in \varprojlim \underline{X}$ elemanına karşı $y = \{y_{\beta}\} = \{f_{\beta'}(x_{\varphi(\beta)})\} \in \varprojlim \underline{Y}$ elemanı karşı gelir. Buradan $\varprojlim \underline{X}$ den $\varprojlim \underline{Y}$ ye giden bir fonksiyon tamamlanır. Bu fonksiyonu $\varprojlim \underline{f} : \varprojlim \underline{X} \to \varprojlim \underline{Y}$ ile gösterelim.

Tanım 5.1.16. $\varprojlim \underline{f} : \varprojlim \underline{X} \to \varprojlim \underline{Y}$ fonksiyonuna $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ dönüşümünün limiti denir.

Tamamdan açıkça gözüküyor ki her $\beta \in B$ için

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim \underline{X} \arrow[r, "\pi_{\varphi(\beta)}"] \arrow[d, "\varprojlim"'] & X_{\varphi(\beta)} \arrow[d, "f_{\beta}"] \\
\varprojlim \underline{Y} \arrow[r, "\pi_{\beta}"'] & Y_{\beta}
\end{tikzcd}$$

diyagramı komütatiftir.

$\varprojlim f$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için ise Teorem 4.5.1 den yararlanarak $\pi_\beta^{-1}(\mathrm{U}_\beta)$ kümelerinin $\varprojlim f$ altında ters görüntülerinin açık olduğunu göstermek yeterlidir.

$$(\varprojlim f)^{-1}(\pi_\beta^{-1}(\mathrm{U}_\beta)) = (\pi_\beta \circ \varprojlim f)^{-1}(\mathrm{U}_\beta) =$$
$$(f_\beta \circ \pi_{\varphi(\beta)})^{-1}(\mathrm{U}_\beta) = (\pi_{\varphi(\beta)})^{-1}(f_\beta^{-1}(\mathrm{U}_\beta))$$

ve $f_\beta, \pi_{\varphi(\beta)}$ fonksiyonları sürekli olduğundan dolayı $\varprojlim f$ fonksiyonu süreklidir.

$\underline{X} = (\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{P_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}), \underline{Y} = (\{Y_\beta\}_{\beta\in B}, \{r_\beta^{\beta'}\}_{\beta \prec \beta' \in B})$ topolojik uzayların düz spektrleri , $\overline{f} = (\varnothing : A \to B, \{f^\alpha : X^\alpha \to Y^{\varnothing(\alpha)}\}_{\alpha\in A}) : \overline{X} \to \overline{Y}$ bu spektrlerin bir dönüşümü olsun. $\{f^\alpha : X^\alpha \to Y^{\varnothing(\alpha)}\}_{\alpha\in A}$ fonksiyonlarından yararlanarak

$$f = \bigoplus_{\alpha\in A} f^\alpha : \bigoplus_{\alpha\in A} X^\alpha \to \bigoplus_{\alpha\in A} Y^{\varnothing(\alpha)}$$

fonksiyonunu verelim. f fonksiyonunun denklik bağıntısını koruduğunu gösterelim. $x^\alpha \in X^\alpha, x^{\alpha'} \in X^{\alpha'}$ elemanları denk olsunlar.O zaman $q_\alpha^{\alpha''}(x^\alpha) = q_{\alpha'}^{\alpha''}(x^{\alpha'})$ve $\alpha'' \succ \alpha, \alpha'' \succ \alpha'$ sağlanacak şekilde $\alpha'' \in A$ elemanı vardır. $\varnothing : A \to B$ izoton dönüşüm olduğundan $\varnothing(\alpha'') \varnothing \succ \alpha, \varnothing(\alpha'') \succ (\alpha')$ dür.O halde

$$r_{\varnothing(\alpha)}^{\varnothing(\alpha'')}\left(f^\alpha(x^\alpha)\right) = f^{\alpha''}\left(q_\alpha^{\alpha''}(x^\alpha)\right) =$$
$$f^{\alpha''}\left(q_{\alpha'}^{\alpha''}(x^{\alpha'})\right) = r_{\varnothing(\alpha)}^{\varnothing(\alpha'')}\left(f^{\alpha'}(x^{\alpha'})\right)$$

olduğundan $f^\alpha(x^\alpha), f^{\alpha'}(x^{\alpha'})$ elemanları denktir. Böylece $f : \bigoplus_{\alpha\in A} X^\alpha \to \bigoplus_{\alpha\in A} Y^{\varnothing(\alpha)}$) fonksiyonu denklik sınıfını denklik sınıfına götürdüğü için bölüm uzaylarının

$$\varprojlim \overline{f} : \varprojlim \overline{X} \to \varprojlim \overline{Y}$$

sürekli fonksiyonunu tanımlar,

Tanım 5.1.17. $\varprojlim \overline{f} : \varprojlim \overline{X} \to \varprojlim \overline{Y}$ fonksiyonuna $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$ dönüşümünün limiti denir.

Her $\alpha \in A$ için

$$\begin{tikzcd} X^{\alpha} \arrow[r, "\pi^{\alpha}"] \arrow[d, "f^{\alpha}"'] & \varprojlim \bar{X} \arrow[d, "\varprojlim \bar{f}"] \\ Y^{\varphi(\alpha)} \arrow[r, "\pi^{\varphi(\alpha)}"'] & \varprojlim \bar{Y} \end{tikzcd}$$

diyagramının komutatif olduğu açıktır.

Teorem5.1.18. $\underline{X} = (\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{P_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}), \underline{Y} = (\{Y_\beta\}_{\beta\in B}, \{r_\beta^{\beta'}\}_{\beta \prec \beta' \in B})$ topolojik uzayların ters spekirleri. $\underline{f} = (\varphi : B \to A, \{f_\beta : X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta\in B}):$ $\underline{X} \to \underline{Y}$ bu ters spektrilerin bir dönüşüm olsun. Eğer her $\beta \in B$ için $f_\beta : X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta$ fonksiyonu bir homeomorfizma ise $\varprojlim \underline{f} : \varprojlim \underline{X} \to \varprojlim \underline{X}$ fonksiyonu da bir homeomorfizmadır.

İspat: Önce $\varprojlim \underline{f}$ fonksiyonunun birebir olduğunu gösterelim.

$x = \{x_\alpha\}, z = \{z_\alpha\} \in \varprojlim \underline{X}, x \neq z$ *ise* $x_{\alpha_0} \neq z_{\alpha_0}$ sağlanacak biçimde $\alpha_0 \in A$ vardır. $\varphi(\beta) \succ \alpha_0$ koşulu altında $\beta \in B$ elemanını seçelim.

$$P_{\alpha_0}^{\varphi(\beta)}(x_{\varphi(\beta)}) = x_{\alpha_0} \neq z_{\alpha_0} = P_{\alpha_0}^{\varphi(\beta)}(z_{\varphi(\beta)})$$

olduğu için $x_{\varphi(\beta)} \neq z_{\varphi(\beta)}$ dır. f_β fonksiyonu birebir olduğundan $f_\beta(x_{\varphi(\beta)}) \neq f_\beta(z_{\varphi(\beta)})$ dır. Dolayısıyla $\varprojlim \underline{f}$ fonksiyonu birebirdir.Şimdi $\varprojlim \underline{f}$ örten olduğunu gösterelim. $y = \{y_\beta\} \in \varprojlim \underline{Y}$ keyfi eleman olsun. Her $\beta \in B$ için $f_\beta : X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta$ örten olduğundan

$f_\beta(Z_{\varphi(\beta)}) = y_\beta$ sağlanacak şekilde $Z_{\varphi(\beta)} \in X_{\varphi(\beta)}$ elemanı bulunabilir. Her $\alpha \in A$ *için* $\varphi(\beta) \succ \alpha$ koşulunu sağlayan $\beta \in B$ elemanını alalım ve $x_\alpha = P_\alpha^{\varphi(\beta)}(Z_{\varphi(\beta)})$ olsun.

O halde kolayca gösterebiliriz ki . x_α elemanı $\beta \in B$ elemanından bağımsızdır,

$x = \{x_\alpha\} \in \varprojlim \underline{X}$ *ve* $(\varprojlim \underline{f})(x) = y$ dir. Teoremin ispatını tamamlamak için $\varprojlim \underline{f}$ nin açık olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için Teorem 4.5.1 den yararlanarak her $\beta\in B$ ve her açık $\mathrm{U} \subset X_{\varphi(\beta)}$ kümesi için $\pi_{\varphi(\beta)}^{-1}(\mathrm{U}) \subset \varprojlim \underline{X}$ kümesinin $\varprojlim \underline{f}$ altında görüntüsünün açık olduğunu göstermek yeterlidir. Her $\beta \in B$ *için* $f_\beta \mathrm{o} \pi_{\varphi(\beta)} = \pi_\beta \mathrm{o} \varprojlim \underline{f}$ olduğundan

$$\left((\pi_{\varphi(\beta)})^{-1} \mathrm{o} (f_\beta)_{-1} = (\varprojlim \underline{f})^{-1} \mathrm{o} (\pi_\beta)^{-1} \right.$$

dir. $A = f_\beta(\mathrm{U})$ olsun. $f_\beta : X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta$

homeomorfizma olduğundan

$$\pi^{-1}_{\varphi(\beta)}(\mathrm{U}) = \pi^{-1}_{\varphi(\beta)} \circ f^{-1}_{\beta}(f_{\beta}(\mathrm{U})) = (\varprojlim f)^{-1}\pi^{-1}_{\beta}(f_{\beta}(\mathrm{U}))$$

dur. Buradan ise

$$(\varprojlim f)(\pi^{-1}_{\varphi(\beta)}(\mathrm{U})) = (\varprojlim f)\circ(\varprojlim f)^{-1}(\pi^{-1}_{\beta}(f_{\beta}(\mathrm{U}))) = \pi^{-1}_{\beta}(f_{\beta}(\mathrm{U}))$$

dur. $\pi^{-1}_{\beta}(f_{\beta}(\mathrm{U}))$ kümesi ise $\varprojlim Y$ uzayında açıktır.•

6. IFTS FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARIN TERS LİMİTİ

Bu bölümde Ift'de bazı tanımlar ve işlemler verilecek ve ilerde ters limitin tanımında kullanılacak.

$\left\{\left(X_t, \tau_t, \tau^*_t\right)\right\}_{t\in T}$ ayrık IFST uzaylar ailesi olsun

$X = \bigcup_{t\in T} X_t$ ve keyfi $\forall t \in T$, $j_t : X_t \to X$ doğal gömme dönüşümü olsun

$$\forall B \in X,\ \sigma(B) = \underset{t\in T}{\wedge}\tau_t\left(j_t^{-1}(B)\right),\ \sigma^*(B) = \underset{t\in T}{\vee}\tau^*_t\left(j_t^{-1}(B)\right)$$

Formülüyle x fuzzy kümesinde σ ve σ^* derece fonksiyonlarını tanımlayalım. (σ, σ^*), $\sum\left(\tau_t, \tau^*_t\right)$ ile gösterelim.

Tanım 6.1 $\left(X, \sum\left(\tau_t, \tau^*_t\right)\right)$ ıfts uzayını $\left\{\left(X_t, \tau_t, \tau^*_t\right)\right\}_{t\in T}$ ailesinin toplamı denir.Kısaca $\sum\left(X_t, \tau_t, \tau^*_t\right)$ ile gösterilir.

Açıktırki keyfi + için $j_t : \left(X_t, \tau_t, \tau^*_t\right) \to \sum\left(X_t, \tau_t, \tau^*_t\right)$ bir qp dönüşümdür.önce σ derece fonksiyonu için aşağıdaki ispatlanmıştır.

$\forall A \in X,\ \sigma(A) = \underset{t\in T}{\wedge}\tau_t\left(A|X_t\right),\ \sigma|X_t = \tau_t$ ve $Y_t \subset X_t$ için $\sigma|Y = \sum \tau_t|Y_t$ burada $Y = \bigcup_{t\in T} Y_t$ dir.İkili olarak σ^* derece fonksiyonu için aşağıdaki koşulların sağladığı gösteriebilir.

$\left\{\left(X_t, \tau_t, \tau^*_t\right)\right\}_{t\in T}, \left\{\left(Y_t, \sigma_t, \sigma^*_t\right)\right\}_{t\in T}$ iki ayrı uzaylar ailesi ve keyfi +için $f_t : \left(X_t, \tau_t, \tau^*_t\right) \to \left(Y_t, \sigma_t, \sigma^*_t\right)$ qp dönüşüm olsun.

$f = \sum f_t : \sum\left(X_t, \tau_t, \tau^*_t\right) \to \sum\left(Y_t, \sigma_t, \sigma^*_t\right)$ dönüşünü

Herbir

$$\mu \in \sum\left(Y_t, \sigma_t, \sigma_t^*\right)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}\left(f^{-1}(\mu)\right) &= \tilde{\tau}\left(\left(\sum f_t\right)^{-1}(\mu)\right) = \tilde{\tau}\left(\sum f_t^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) \\
&= \wedge_t \tau_t\left(j_t^{-1}\left(\sum f_t^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right)\right) = \wedge_t \tau_t\left(j_t^{-1} f_t^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) \\
&= \wedge_t \tau_t\left(\left(f_t j_t\right)^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) \geq \wedge_t \sigma_t\left(\mu|Y_t\right) = \tilde{\sigma}(\mu),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}^*\left(f^{-1}(\mu)\right) &= \tilde{\tau}^*\left(\left(\sum f_t\right)^{-1}(\mu)\right) = \vee_t \tau_t^*\left(j_t^{-1}\left(\sum f_t^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right)\right) \\
&= \vee_t \tau_t^*\left(j_t^{-1} f_t^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) = \vee_t \tau_t^*\left(\left(f_t j_t\right)^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) \\
&\leq \vee_t \sigma_t^*\left(\mu|Y_t\right) = \tilde{\sigma}^*(\mu).
\end{aligned}$$

Buradan $f = \sum f_t$ qp dönüşümdür.

b.) Eğer $g : \sum\left(X_t, \tau_t, \tau_t^*\right) \to \left(Y, \sigma, \sigma^*\right)$ qp dönüşümse o zaman $g \circ j_t$ qp dönüşümlerin bileşkesi gibi qp dönüşümdür.Tersine $g \circ j_t$ qp dönüşüm olsun.Keyfi $\mu \in Y$ için;

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}\left(g^{-1}(\mu)\right) &= \wedge_t \tau_t\left(j_t^{-1}\left(g^{-1}(\mu)\right)\right) = \wedge_t \tau_t\left(\left(g \circ j_t\right)^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) \\
&\geq \wedge_t \sigma_t\left(\mu|Y_t\right) = \sigma(\mu),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}^*\left(g^{-1}(\mu)\right) &= \vee_t \tau_t^*\left(j_t^{-1}\left(g^{-1}(\mu)\right)\right) = \vee_t \tau_t^*\left(\left(g_t \circ j_t\right)^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) \\
&\leq \vee_t \sigma_t^*\left(\mu|Y_t\right) = \sigma^*(\mu),
\end{aligned}$$

Açıktırki Σ ,funktor'dur.(Burada q,qp dönüşümdür.)

Tanım 6.3. $\left(X, \tau, \tau^*\right)$ *IFTS* ve $f : X \to Y$ örten dönüşüm olsun. Y fuuzy küresinde $\tilde{\tau}, \tilde{\tau}^* : Y \to I$ derece fonksiyonların $\tilde{\tau}^*(\mu) = \tau^*\left(f^{-1}(\mu)\right)$ formülüyle verelim.

$\left(Y, \tilde{\tau}, \tilde{\tau}^*\right)$ uzayına $\left(X, \tau, \tau^*\right)$ uzayının intinustik fuzzy bölüm uzayı adı veriliyor.Açıktırki $f : \left(X, \tau, \tau^*\right) \to \left(Y, \tilde{\tau}, \tilde{\tau}^*\right)$ qp dönüşümdür.

$\left(X, \tau, \tau^*\right)$ ve $\left(Y, \sigma, \sigma^*\right)$ iki *IFTSs* $f : \left(X, \tau, \tau^*\right) \to \left(Y, \sigma, \sigma^*\right)$ qp dönüşüm olsun. '$\sim$' ve '$\sim_1$' uygun x' te ve y 'de denklik bağlantıları olsun.Ve f de nklik bağlantısını korusun o zaman $\tilde{f} : X/\sim \to Y/\sim_1$ dönüşümünü $\tilde{f}\left(\left[x_\lambda\right]_\sim\right) = \left[f\left(x_\lambda\right)\right]_{\sim_1}$ ile tanılayalım.

Lemma 6.4. Eğer f qp dönüşümünde $\tilde{f}$ qp dönüşümdür.

$\forall x_\lambda \in \bigcup_{t\in T} X_t$, $\left(\sum f_t\right)(x_\lambda) = f_{t_0}(x_\lambda)$ formülüyle tanımlayalım.Burada x_λ fuzzy noktası ancak tek bir X_{t_0} 'a ait olabilir.

Lemma 6.2

$\sum f_t : \sum\left(X_t, \tau_t, \tau_t^*\right) \to \sum\left(Y_t, \sigma_t, \sigma_t^*\right)$ qp dönüşümdür.

$g : \sum\left(X_t, \tau_t, \tau_t^*\right) \to \left(Y, \sigma, \sigma^*\right)$ qp dönüşümdür ancak ve ancak $g \circ j_t : \left(X_t, \tau_t, \tau_t^*\right) \to \left(Y, \sigma, \sigma^*\right)$ dönüşümü qp dönüşümdür.

İspat : Aşağıdaki işaretleri kabul edelim

$\left(\tilde{\tau}, \tilde{\tau}^*\right) = \sum\left(\tau_t, \tau_t^*\right)$ ve $\left(\tilde{\sigma}, \tilde{\sigma}^*\right) = \sum\left(\sigma_t, \sigma_t^*\right)$

Herbir

$$\mu \in \sum\left(Y_t, \sigma_t, \sigma_t^*\right)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}\left(f^{-1}(\mu)\right) &= \tilde{\tau}\left(\left(\sum f_t\right)^{-1}(\mu)\right) = \tilde{\tau}\left(\sum f_t^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) \\
&= \wedge_t \tau_t\left(j_t^{-1}\left(\sum f_t^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right)\right) = \wedge_t \tau_t\left(j_t^{-1} f_t^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) \\
&= \wedge_t \tau_t\left(\left(f_t j_t\right)^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) \geq \wedge_t \sigma_t\left(\mu|Y_t\right) = \tilde{\sigma}(\mu),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}^*\left(f^{-1}(\mu)\right) &= \tilde{\tau}^*\left(\left(\sum f_t\right)^{-1}(\mu)\right) = \vee_t \tau_t^*\left(j_t^{-1}\left(\sum f_t^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right)\right) \\
&= \vee_t \tau_t^*\left(j_t^{-1} f_t^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) = \vee_t \tau_t^*\left(\left(f_t j_t\right)^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) \\
&\leq \vee_t \sigma_t^*\left(\mu|Y_t\right) = \tilde{\sigma}^*(\mu).
\end{aligned}$$

Buradan $f = \sum f_t$ qp dönüşümdür.

b.) Eğer $g : \sum\left(X_t, \tau_t, \tau_t^*\right) \to \left(Y, \sigma, \sigma^*\right)$ qp dönüşümse o zaman $g \circ j_t$ qp dönüşümlerin bileşkesi gibi qp dönüşümdür.Tersine $g \circ j_t$ qp dönüşüm olsun.Keyfi $\mu \in Y$ için;

$$\begin{aligned}
\tilde{\tau}\left(g^{-1}(\mu)\right) &= \wedge_t \tau_t\left(j_t^{-1}\left(g^{-1}(\mu)\right)\right) = \wedge_t \tau_t\left(\left(g \circ j_t\right)^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right) \\
&\geq \wedge_t \sigma_t\left(\mu|Y_t\right) = \sigma(\mu),
\end{aligned}$$

$$\tilde{\tau}^*\left(g^{-1}(\mu)\right) = \underset{t}{\vee}\tau_t^*\left(j_t^{-1}\left(g^{-1}(\mu)\right)\right) = \underset{t}{\vee}\tau_t^*\left(\left(g_t \circ j_t\right)^{-1}\left(\mu|Y_t\right)\right)$$
$$\le \underset{t}{\vee}\sigma_t^*\left(\mu|Y_t\right) = \sigma^*(\mu),$$

Açıktırki Σ ,funktor'dur.(Burada q,qp dönüşümdür.)

Tanım 6.3. $\left(X,\tau,\tau^*\right)$ *IFTS* ve $f : X \to Y$ örten dönüşüm olsun. Y fuuzy küresinde $\tilde{\tau},\tilde{\tau}^* : Y \to I$ derece fonksiyonların $\tilde{\tau}^*(\mu) = \tau^*\left(f^{-1}(\mu)\right)$ formülüyle verelim. $\left(Y,\tilde{\tau},\tilde{\tau}^*\right)$ uzayına $\left(X,\tau,\tau^*\right)$ uzayının intinustik fuzzy bölüm uzayı adı veriliyor.Açıktırki $f : \left(X,\tau,\tau^*\right) \to \left(Y,\tilde{\tau},\tilde{\tau}^*\right)$ qp dönüşümdür.

$\left(X,\tau,\tau^*\right)$ ve $\left(Y,\sigma,\sigma^*\right)$ iki *IFTSs* $f : \left(X,\tau,\tau^*\right) \to \left(Y,\sigma,\sigma^*\right)$ qp dönüşüm olsun. '$\sim$' ve '$\sim_1$' uygun x' te ve y 'de denklik bağlantıları olsun.Ve f de nklik bağlantısını korusun o zaman $\tilde{f} : X/\sim \to Y/\sim_1$ dönüşümünü $\tilde{f}\left([x_\lambda]_\sim\right) = \left[f(x_\lambda)\right]_{\sim_1}$ ile tanılayalım.

Lemma 6.4. Eğer f qp dönüşümünde $\tilde{f}$ qp dönüşümdür.

İspat: p ve q kanonik dönüşümler ise onlar qp dönüşümdür. Ve aşağıdaki diagram komutatiftir.

$$\begin{tikzcd}
\left(X,\tau,\tau^*\right) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & \left(Y,\sigma,\sigma^*\right) \arrow[d, "q"] \\
\left(X/\sim,\tilde{\tau},\tilde{\tau}^*\right) \arrow[r, "\tilde{f}"] & \left(Y/\sim,\tilde{\sigma},\tilde{\sigma}^*\right)
\end{tikzcd}$$

Keyfi $\mu \in Y/\sim_1$ için

$$\tilde{\tau}\left(\tilde{f}^{-1}(\mu)\right) = \tau\left(p^{-1}\left(\tilde{f}^{-1}(\mu)\right)\right) = \tau\left(\left(\tilde{f} \circ p\right)^{-1}(\mu)\right)$$
$$= \tau\left(\left(q \circ f\right)^{-1}(\mu)\right) = \tau\left(f^{-1}\left(q^{-1}(\mu)\right)\right) \ge \sigma\left(q^{-1}(\mu)\right) = \tilde{\sigma}(\mu),$$

Lemma 6.4 'ten bölüm işleminin bir funktor olduğunu söyleyebiliriz.

Tanım 5.5 $\left(X,\tau,\tau^*\right)$ *IFTS* olsun.

(1)

$\mathrm{B},\mathrm{B}^*:X\to I$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa τ ve τ^* tabanı denir. $\mathrm{B}^{(\mathrm{C})}\left(A\right)$ ve $\mathrm{B}^{*(\mathrm{C})}\left(A\right)$ gösterelim.

(2)

$\phi,\phi^*:X\to I$ alttabandır denir.Eğer τ ve τ^* taban ise burada $\phi^{(\Pi)}\left(A\right)=\underset{(\Pi)_{\lambda\in J}B_\lambda=A}{\vee}\underset{\lambda\in J}{\wedge}\phi\left(B_\lambda\right),\ \phi^{*(\Pi)}\left(A\right)=\underset{(\Pi)_{\lambda\in J}B_\lambda=A}{\wedge}\underset{\lambda\in J}{\vee}\phi^*\left(B_\lambda\right)$

Tanım 5.6 $\left\{\left(X_t,\tau_t,\tau_t^*\right)\right\}_{t\in T}$ *IFTSs* ailesi ve $P_t:\prod_{t\in T}X_t\to X_t$ projeksiyon olsun. $\prod_{t\in T}X_t$ uzayında alt taban $\forall A\in\prod_{t\in T}X_t$,

$\phi\left(A\right)=\underset{t\in T}{\vee}\underset{P_t^{-1}(B)=A}{\vee}\tau_t\left(B\right),\ \phi^*\left(A\right)=\underset{t\in T}{\wedge}\underset{P_t^{-1}(B)=A}{\wedge}\tau_t^*\left(B\right)$

Formülüyle tanımlansın.Bu uzaya $\prod_{t\in T}\left(X_t,\tau_t,\tau_t^*\right)$ çarpım uzayı adı verelim.

$\prod_{t\in T}\tau_t=\tau,\prod_{t\in T}\tau_t^*=\tau^*$ Olsun. Gösterelimki $P_t:\prod_{t\in T}X_t\to X_t$ qp map'tir.

$$\tau\left(P_t^{-1}\left(B\right)\right)=\underset{t\in T}{\vee}\underset{P_t^{-1}(B)=P_t^{-1}(B)}{\vee}\tau_t\left(B\right)\geq\tau_t\left(B\right)\qquad\text{ve}$$

$$\tau^*\left(P_t^{-1}\left(B\right)\right)=\underset{t\in T}{\wedge}\underset{P_t^{-1}(B)=P_t^{-1}(B)}{\wedge}\tau_t^*\left(B\right)\leq\tau_t^*\left(B\right)$$

Olduğunda $P_t:\prod_{t\in T}\left(X_t,\tau_t,\tau_t^*\right)\to\left(X_t,\tau_t,\tau_t^*\right)$ gerçekten qp map'tir.

Lemma 6.7. Eğer $\left\{f_t:\left(X_t,\tau_t,\tau_t^*\right)\to\left(Y_t,\sigma_t,\sigma_t^*\right)\right\}_{t\in T}$ qp dönüşümler ailesi ise

$$f=\prod f_t:\prod_{t\in T}\left(X_t,\tau_t,\tau_t^*\right)\to\prod_{t\in T}\left(Y_t,\sigma_t,\sigma_t^*\right)\text{ qp dönüşümdür.}$$

İspat : Lemmayı alt taban için ispatlayalım $\forall A\in\prod_{t\in T}Y_t$

$$\begin{aligned}\phi\left(f^{-1}\left(A\right)\right)&=\underset{t\in T}{\vee}\underset{P_t^{-1}(B)=f^{-1}(A)}{\vee}\tau_t\left(B\right)=\underset{t\in T}{\vee}\underset{P_t^{-1}(B)=\prod f_t^{-1}(A|Y_t)}{\vee}\tau_t\left(B\right)\\&=\underset{t\in T}{\vee}\underset{B=f_t^{-1}(A|Y_t)}{\vee}\tau_t\left(B\right)=\underset{t\in T}{\vee}\underset{f_t^{-1}(A|Y_t)}{\vee}\tau_t\left(f_t^{-1}\left(A|Y_t\right)\right)\\&\geq\underset{t\in T}{\vee}\underset{f_t^{-1}(A|Y_t)}{\vee}\sigma_t\left(A|Y_t\right)\\&=\underset{t\in T}{\vee}\underset{P_t^{-1}(A|Y_t)=A}{\vee}\sigma_t\left(A|Y_t\right)=\phi'\left(A\right)\end{aligned}$$

İçin $\phi^*\left(f^{-1}\left(A\right)\right)\leq\phi^{*'}\left(A\right)$ gösterilebilir.Çarpım uzayında z türlü derece fonksiyonları verilmektedir.Bunları karşılaştıralım $\phi,\phi^*:X\to I$ alt tabandan yararlanıp tanımladığımız $\phi,\phi^*: X \to I$ derece fonksiyonları aşağıdaki gibi verilmektedir.

$$\forall A \in \prod_{t\in T} X_t,\ \phi(A) = \underset{t\in T}{\vee}\ \underset{P_t^{-1}(B)=A}{\vee} \tau_t(B),\ \phi^*(A) = \underset{t\in T}{\wedge}\ \underset{P_t^{-1}(B)=A}{\wedge} \tau_t^*(B)$$

Derece fonksiyonlarının 2.Tanımı $\phi,\phi^*: X \to I$ tabanından yararlanılarak aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$$\tau(A) = \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee}\left(\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} C_{\lambda,j}\right)=A}{\vee} \left(\underset{\substack{\lambda\in J\\ j\in J_\lambda}}{\wedge} \left(\underset{t\in T}{\vee}\ \underset{P_t^{-1}(D_{\lambda,j})=C_{\lambda,j}}{\vee} \tau_t(D_{\lambda,j}) \right) \right)$$

$$= \underset{t\in T}{\vee}\ \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee}\left(\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(D_{\lambda,j})\right)=A}{\vee} \left(\underset{\substack{\lambda\in J\\ j\in J_\lambda}}{\wedge} \tau_t(D_{\lambda,j}) \right),$$

$$\tau^*(A) = \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee}\left(\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} C_{\lambda,j}\right)=A}{\wedge} \left(\underset{\substack{\lambda\in J\\ j\in J_\lambda}}{\vee} \left(\underset{t\in T}{\wedge}\ \underset{P_t^{-1}(D_{\lambda,j})=C_{\lambda,j}}{\wedge} \tau_t^*(D_{\lambda,j}) \right) \right)$$

$$= \underset{t\in T}{\wedge}\ \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee}\left(\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} C_{\lambda,j}\right)=A}{\wedge}\ \underset{P_t^{-1}(D_{\lambda,j})=C_{\lambda,j}}{\wedge} \left(\underset{\substack{\lambda\in J\\ j\in J_\lambda}}{\vee} \tau_t^*(D_{\lambda,j}) \right)$$

$$= \underset{t\in T}{\wedge}\ \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee}\left(\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(D_{\lambda,j})\right)=A}{\wedge} \left(\underset{\substack{\lambda\in J\\ j\in J_\lambda}}{\vee} \tau_t^*(D_{\lambda,j}) \right).$$

O zaman r seviyeli topolojiler;

$$\tau^r = \left\{ A : \underset{t\in T}{\vee}\ \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee}\left(\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(D_{\lambda,j})\right)=A}{\vee} \left(\underset{\substack{\lambda\in J\\ j\in J_\lambda}}{\wedge} \tau_t(D_{\lambda,j}) \right) \geq r \right\}$$

$$\tau^{*r} = \left\{ A : \underset{t\in T}{\wedge}\ \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee}\left(\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(D_{\lambda,j})\right)=A}{\wedge} \left(\underset{\substack{\lambda\in J\\ j\in J_\lambda}}{\vee} \tau_t^*(D_{\lambda,j}) \right) \leq 1-r \right\}$$

Şeklindedir.

τ_1^r, τ_1^{*r} topolojilerin tabanı ve alt tabanı uygun olarak

$$S^r = \left\{ P_t^{-1}(B_t) : \tau_t(B_t) \geq r \right\},\ B^r = \left\{ \underset{t\in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(B_t) : \tau_t(B_t) \geq r \right\}$$

$$S_1^{*r} = \left\{ P_t^{-1}(B_t) : \tau_t^*(B_t) \leq 1-r \right\},\ B_1^{*r} = \left\{ \underset{t\in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(B_t) : \tau_t^*(B_t) \leq 1-r \right\} \text{ dır.}$$

$$\tau_1^r = \left\{ \underset{J_\lambda}{\vee}\ \underset{t\in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(B_t) : \tau_t(B_t) \geq r \right\},\ \tau_1^{*r} = \left\{ \underset{J_\lambda}{\vee}\ \underset{t\in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(B_t) : \tau_t^*(B_t) \leq 1-r \right\}$$

aşağıdaki şekildedir.

Keyfi $A \in \tau_1^r$, için $A = \vee_{J_\lambda} \wedge_{t \in J_\lambda} P_t^{-1}(B_t)$ $\tau_t(B_t) \geq r$ buradan $A \in \tau^r$ dir.Böylece $\tau_1^r \subset \tau^r$ olduğundan $\tau_1 \leq \tau$ sağlanır. $\tau_1^{*r} \subset \tau^{*r}$, $\tau^* \leq \tau_1^*$ sağlanır.Böylece çarpım uzayının iki tanımı birbirine denk değildir. $IFTS$ intinuistik fuzzy topolojik üzeyler kategorisi , J yönlendirilmiş bir küme olsun.

Tanım 6.8 Her $D : J^{op} \to IFTS$ funktoruna $IFTS$'te ters sistem bu funktorun limitine ise ters limit denir.

Tanım 6.9. $IFTS$ katagorisinde her ters sistemin limiti vardır ve tektir.

İspat :

$$\underline{X} = \left(\left\{ \left(X_i, \tau_i, \tau_i^* \right) \right\}_{i \in J}, \left\{ p_i^{i'} : \left(X_{i'}, \tau_{i'}, \tau_{i'}^* \right) \to \left(X_i, \tau_i, \tau_i^* \right) \right\}_{i \prec i'} \right) \quad (1)$$

Her hangi bir ters sistem olsun.Her bir $r \in I_0$ için

$$\underline{X}^{(r)} = \left(\left\{ \left(X_i, \tau_i^r, \tau_i^{*r} \right) \right\}_{i \in J}, \left\{ p_i^{i'} : \left(X_{i'}, \tau_{i'}^r, \tau_{i'}^{*r} \right) \to \left(X_i, \tau_i^r, \tau_i^{*r} \right) \right\}_{i \prec i'} \right) \quad (2)$$

Fuzzy tipolojik uzayların ters sistemidir.Böylece

$$\left(\left\{ \left(X_i, \tau_i^r \right) \right\}_{i \in J}, \left\{ p_i^{i'} : \left(X_{i'}, \tau_{i'}^r \right) \to \left(X_i, \tau_i^r \right) \right\}_{i \prec i'} \right) \quad (3)$$

$$\left(\left\{ \left(X_i, \tau_i^{*r} \right) \right\}_{i \in J}, \left\{ p_i^{i'} : \left(X_{i'}, \tau_{i'}^{*r} \right) \to \left(X_i, \tau_i^{*r} \right) \right\}_{i \prec i'} \right) \quad (4)$$

Fuzzy topolojik uzayların iki ters sistemi olamaktadır.(3) ve (4) sitemleri fuzzy topolojik uzaylar katagorisinde limiti vardır.Bu limitlerin $\left(\lim_{\leftarrow} X_i, \tau^r \right), \left(\lim_{\leftarrow} X_i, \tau^{*r} \right)$ ile gösterelim.Buarada τ^r $\left(\tau^{*r} \right)$ fuzzy topalojik çarpım topolojisinin $Y = \lim_{\leftarrow} X_i \subset \prod_{i \in J} X_i$ alt uzayına daralmasıdır.

$\tau_i^r \subset \tau_i^{*r}$ olduğunda $\prod_{i \in J} \tau_i^r \subset \prod_{i \in J} \tau_i^{*r}$ sağlanır.Buradanda $\tau^r \subset \tau^{*r}$ dir.Böylece $\left(\lim_{\leftarrow} X_i, \tau^r, \tau^{*r} \right)$ fuuzy bi topoloji uzayı (2) sistemin ters limitidir.Eğer $r \succ r' \in I_0$ için keyfi $i \in J$ için $\tau_i^r \subset \tau_i^{r'}$ ve

$\tau_i^{*r} \subset \tau_i^{*r'}$ sağlanır.Buradan $\prod_{i \in J} \tau_i^r \subset \prod_{i \in J} \tau_i^{r'}$ ve $\prod_{i \in J} \tau_i^{*r} \subset \prod_{i \in J} \tau_i^{*r'}$ böylece

$\tau^r = \prod_{i \in J} \tau_i^r \big|_Y \subset \prod_{i \in J} \tau_i^{r'} \big|_Y = \tau^{r'}$ and $\tau^{*r} = \prod_{i \in J} \tau_i^{*r} \big|_Y \subset \prod_{i \in J} \tau_i^{*r'} \big|_Y = \tau^{*r'}$.

$\left\{ \left(\tau^r, \tau^{*r} \right) \right\}_{r \in I_0}$ azalan fuzzy bitopolojik ailesi olduğundan $\tau : Y \to I$, $\tau^* : Y \to I$ derece fonksiyonlarını

$\tau(\mu) = \vee \left\{ r \in I_0 : \mu \in \tau^r \right\}$, $\tau^*(\mu) = \wedge \left\{ 1 - r : \mu \in \tau^{*r} \right\}$ [13].

Şeklinde tanımlayalım.

$$\left\{P_i : \left(Y,\tau,\tau^*\right) \to \left(X_i,\tau_i,\tau_i^*\right)\right\}_{i\in J} \qquad (5)$$

Fonksiyonlar ailesi olsun.

$P_i : \left(Y,\tau,\tau^*\right) \to \left(X_i,\tau_i,\tau_i^*\right)$

Fuzzy sürekli dönüşüm olduğunda (5) ailesi qp dönüşümler ailesidir. $\left\{\left(Y,\tau,\tau^*\right),P_i\right\}$ (1) ters sistemin limiti olduğunu gösterelim. Kefyi $\left(Z,\sigma,\sigma^*\right)$ *IFTS* uzayı ve $q_i = P_i^{i'} \mathrm{o} q_{i'}, \forall i \text{ p } i',$ koşulu sağlayan $\left\{q_i : \left(Z,\sigma,\sigma^*\right) \to \left(X_i,\tau_i,\tau_i^*\right)\right\}_{i\in J}$ ailesi için

$P_i \mathrm{o} \psi = q_i$ sağlayacak şekilde tek bir $\psi : \left(Z,\sigma,\sigma^*\right) \to \left(Y,\tau,\tau^*\right)$ qp dönüşümü vardır.Keyif $r \in I_0$ için $\left\{q_i : \left(Z,\sigma,\sigma^*\right) \to \left(X_i,\tau_i,\tau_i^*\right)\right\}_{i\in J}$ fuzzy sürekli dönüşümler ailesidir. (3), (4) Ters sistemlerin limiti var olduğunda öyle tek fuzzy sürekli $\psi : \left(Z,\sigma^r,\sigma^{*r}\right) \to \left(Y,\tau^r,\tau^{*r}\right)$ dönüşümü vardırki aşağıda diagram komutatiftir.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "q_i"] \arrow[d, "\psi"'] & X_i \\ Y \arrow[ur, "P_i"'] & \end{tikzcd}$$

$\psi : \left(Z,\sigma^r,\sigma^{*r}\right) \to \left(Y,\tau^r,\tau^{*r}\right)$ dönüşümü her $r \in I_0$ fuzzy sürekli olduğundan $\psi : \left(Z,\sigma,\sigma^*\right) \to \left(Y,\tau,\tau^*\right)$ qp dönüşümdür ve $P_i \mathrm{o} \psi = q_i$ kosulu sağlanır.Bununla teorem ispatlanır.

Gösterelimki ters limit işlemi *IFTS* katagorisinde bir funktordur.Bunu için ters sistemlerin morfizmasını limitini tanımlayalım.

$$\underline{f} : \left(\varphi : \overline{J} \to J, \left\{f_{\bar i} : I^{X_{\varphi(\bar i)}} \to I^{Y_{\bar i}}\right\}_{\bar i \in \overline{J}}\right)$$ (1) ters sisteminde

$$\underline{Y} = \left(\left\{\left(Y_{\bar i},\overline{\tau}_{\bar i},\overline{\tau}^*_{\bar i}\right)\right\}_{\bar i\in\overline{J}}, \left\{q_{\bar i}^{\bar i'} : \left(Y_{\bar i'},\overline{\tau}_{\bar i'},\overline{\tau}^*_{\bar i'}\right) \to \left(Y_{\bar i},\overline{\tau}_{\bar i},\overline{\tau}^*_{\bar i}\right)\right\}_{\bar i \text{ p } \bar i'}\right)$$ ters sistemine giden

bir morfizma olsun.Her $r \in I_0$ için

$$\underline{f}^{(r)} : \left(\varphi : \overline{J} \to J, \left\{f_{\bar i} : \left(X_{\varphi(\bar i)},\tau^r_{\varphi(\bar i)},\tau^{*r}_{\varphi(\bar i)}\right) \to \left(Y_{\bar i},\overline{\tau}^r_{\bar i},\overline{\tau}^{*r}_{\bar i}\right)\right\}_{\bar i\in\overline{J}}\right)$$

Bitopolojik üzeylerin ters sistemlerinin morgizmasıdır.

Bu morgizma ters limit uzaylarını

$$\varprojlim \underline{f}^{(r)} : \varprojlim\left(X_i,\tau_i^r\right) \to \varprojlim\left(Y_{\bar i},\overline{\tau}^r_{\bar i}\right)$$

$$\varprojlim \underline{f}^{(r)} : \varprojlim\left(X_i,\tau_i^{*r}\right) \to \varprojlim\left(Y_{\bar i},\overline{\tau}^{*r}_{\bar i}\right)$$

Fuzzy sürekli dönüşümlerini varmaktedir. Burdan her bir $r \in I_0$ için $\varprojlim f^{(r)}$ puzzy sürekli olduğundan

$\varprojlim f : \left(\varprojlim X_i, \tau, \tau^* \right) \to \left(\varprojlim Y_{\bar{i}}, \bar{\tau}, \bar{\tau}^* \right)$ qp dönüşümüdür.

Teorem 6.10 $Inv(IFTS)$, $IFTS$ de ters sistemler katagorisi olsun.O zaman $\varprojlim$ işlemi $Inv(IFTS)$ katagorisinde $IFTS$ katagorisine giden bir funktur.

Teorem 6.11 Ters sistemlerinin çarpımının limiti bu sistemlerin limitlerinin çarpımına eşittir.

Lemma 6.12 $f : \left(X, \tau, \tau^* \right) \to \left(Y, \sigma, \sigma^* \right)$ $IFTS$ 'de bir dönüşüm olsun.

a.) f intinustik fuuzy açık qp dönüşümdür.Ancak ve ancak $f : \left(X, \tau^r, \tau^{*r} \right) \to \left(Y, \sigma^r, \sigma^{*r} \right)$ fuzzy bitopolojik uzaylarını fuzzy açık dönüşümüdür.

b.) f intinustik fuzzy kapalı qp dönüşümüdür.Ancak ve ancak $f : \left(X, \tau^r, \tau^{*r} \right) \to \left(Y, \sigma^r, \sigma^{*r} \right)$ fuzzy bitopolojik uzayların fuzzy kapalı dönüşümüdür.

Lemma 6.13 $f : \left(X, \tau, \tau^* \right) \to \left(Y, \sigma, \sigma^* \right)$ bir dönüşüm olsun.

Aşağıdaki koşullar birbirine denktir.

a.) f intinuistik fuzzy homeorfizmadır.

b.) f bijektif intinuistik fuzzy açık qp dönüşümüdür.

c.) f bijektif intinuistik fuzzy kapalı qp dönüşümdür.

Teorem 6.14 $\underline{f} : \left(\varphi : \bar{J} \to J, \left\{ f_{\bar{i}} : X_{\varphi(\bar{i})} \to Y_{\bar{i}} \right\}_{\bar{i} \in \bar{J}} \right)$ morfizması $\underline{X} = \left\{ X_i \right\}_{i \in J}$ ters sisteminden $\underline{Y} = \left\{ Y_{\bar{i}} \right\}_{\bar{i} \in \bar{J}}$ ters sistemine bir dönüşüm olsun eğer $f_{\bar{i}}$ injektif (bijektif) qp dönüşümse $\varprojlim \underline{f} : \varprojlim \underline{X} \to \varprojlim \underline{Y}$ dönüşümde injektif (bijektif) qp dönüşümdür.

İspat :

Her $r \in I_0$ için $\underline{f}_r : \left(\varphi : \bar{J} \to J, \left\{ f_{\bar{i},r} : \left(X_{\varphi(\bar{i})}, \tau^r_{\varphi(\bar{i})}, \tau^{*r}_{\varphi(\bar{i})} \right) \to \left(Y_{\bar{i}}, \sigma^r_{\bar{i}}, \sigma^{*r}_{\bar{i}} \right) \right\}_{\bar{i} \in \bar{J}} \right)$ bitopolojik uzayların ters sisteminin morfizmasıdır.

$f_{\bar{i},r}$ her $\bar{i} \in \bar{J}$ viçin injektif (bijektif) olduğundan $\varprojlim \underline{f}_r$ injektif (bijektif) fuzzy sürekli dönüşümdür.

Sonuç 6.15 Eğer teorem 3.14'de her $f_{\bar{i}}$ intinuistik fuzzy homeomorfizma ise $\varprojlim \underline{f} : \varprojlim \underline{X} \to \varprojlim \underline{Y}$ intinuistik fuzzy homeomorfizmadır.

Teorem 6.16 $\underline{X}$, $IFTS$ katagorisinde ters sistem olsun.

a) Eğer $p_i^{i'} : \left(X_{i'}, \tau_{i'}, \tau_{i'}^* \right) \to \left(X_i, \tau_i, \tau_i^* \right) \quad \left(i \prec i' \right)$ injektif qp dönüşümü ise her $\pi_i : \left(\underleftarrow{\lim} X, \tau, \tau^* \right) \to \left(X_i, \tau_i, \tau_i^* \right)$ dönüşümünde injektif qp dönüşümdür.

b) Eğer $p_i^{i'} : \left(X_{i'}, \tau_{i'}, \tau_{i'}^* \right) \to \left(X_i, \tau_i, \tau_i^* \right) \quad \left(i \prec i' \right)$ bijektif qp dönüşümü ise her $\pi_i : \left(\underleftarrow{\lim} X, \tau, \tau^* \right) \to \left(X_i, \tau_i, \tau_i^* \right)$ de bijektif qp dönüşümüdür.

İspat :

a) Keyfi iki fuzzy noktaları $x_\lambda = \left\{ x_{\lambda_i}^i \right\} \neq \left\{ y_{\mu_i}^i \right\} = y_\mu$ için

$$\pi_{i_1}(x_\lambda) = x_{\lambda_{i_1}}^{i_1} = y_{\mu_{i_1}}^{i_1} = \pi_{i_1}(y_\mu) \text{ buradan}$$

$$x_{\lambda_{i_1}}^{i_1} = y_{\mu_{i_1}}^{i_1} \Leftrightarrow x^{i_1} = y^{i_1} \quad \text{ve} \quad \lambda_{i_1} = \mu_{i_1}$$

$p_i^{i'} : \left(X_{i'}, \tau_{i'}, \tau_{i'}^* \right) \to \left(X_i, \tau_i, \tau_i^* \right)$ injektif olduğundan her $i' \succ i_1$ için

$$p_{i_1}^{i'}\left(x_{\lambda_{i'}}^{i'} \right) = x_{\lambda_{i_1}}^{i_1} = p_{i_1}^{i'}\left(y_{\mu_{i'}}^{i'} \right) = y_{\mu_{i_1}}^{i_1}$$

$x_{\lambda_{i'}}^{i'} = y_{\mu_{i'}}^{i'}$ eşittir. J yönlendirilmiş küme olduğu için her $i \in J$ için $i' \succ i$ ve $i' \succ i_1$ sağlanacak şekilde $i, i_1 \in J$ vardır.

$x_{\lambda_{i'}}^{i'} = y_{\mu_{i'}}^{i'}$, olduğundan $x_{\lambda_i}^i = p_i^{i'}\left(x_{\lambda_{i'}}^{i'} \right) = p_i^{i'}\left(y_{\mu_{i'}}^{i'} \right) = y_{\mu_i}^i$

Buradan $x_\lambda = y_\mu$ ‘dür.

b) π_{i_1} bir surjektif dönüşüm olsun ve $x_{\lambda_{i_1}}^{i_1} \in I^{X_i}$ keyfi fuzzy nokta olsun.Her $i' \succ i_1$ için $p_{i_1}^{i'}\left(x_{\lambda_{i'}}^{i'} \right) = x_{\lambda_{i_1}}^{i_1}$ sağlanacak şekilde $x_{\lambda_{i'}}^{i'}$ fuzzy noktası vardır.Her $i \in J$ için $i' \succ i$ ve

$i' \succ i_1$ sağlanacak şekilde $i \in J$ vardır.Buradan $p_i^{i'}\left(x_{\lambda_{i'}}^{i'} \right) = x_{\lambda_i}^i$ dır.Gösterelimki $x_\lambda = \left\{ x_{\lambda_i}^i \right\}$ nokta $\underleftarrow{\lim} X$ uzayına aittir.

$i' \succ i, i' \succ i_1$ ve $\tilde{i}' \succ \tilde{i}, \tilde{i}' \succ i_1$ keyfi $\tilde{i} \succ i'$ için o zaman $x_{\lambda_i}^i = p_i^{i'}\left(x_{\lambda_{i'}}^{i'} \right)$, $x_{\lambda_{\tilde{i}}}^{\tilde{i}} = p_{\tilde{i}}^{\tilde{i}'}\left(x_{\lambda_{\tilde{i}'}}^{\tilde{i}'} \right)$ dir.

O halde $i'' \succ i', i'' \succ \tilde{i}'$ sağlanacak şekilde $i', \tilde{i}' \in J$ olsur.Buradan

$$x_{\lambda_{i_1}}^{i_1} = p_{i_1}^{i''}\left(x_{\lambda_{i''}}^{i''} \right) = \left(p_{i_1}^{i'} \circ p_{i'}^{i''}\left(x_{\lambda_{i''}}^{i''} \right) \right) = \left(p_{i_1}^{\tilde{i}'} \circ p_{\tilde{i}'}^{i''}\left(x_{\lambda_{i''}}^{i''} \right) \right)$$

Ve

$$x_{\lambda_{i_1}}^{i_1} = p_{i_1}^{i'}\left(x_{\lambda_{i'}}^{i'} \right) = p_{i_1}^{\tilde{i}'}\left(x_{\lambda_{\tilde{i}'}}^{\tilde{i}'} \right)$$

$p_{i_1}^{i'}, p_{i_1}^{\tilde{i}'}$ bijektif olduğundan

$$p_{i'}^{i''}\left(x_{\lambda_{i''}}^{i''} \right) = x_{\lambda_{i'}}^{i'} \quad \text{ve} \quad p_{\tilde{i}'}^{i''}\left(x_{\lambda_{i''}}^{i''} \right) = x_{\lambda_{\tilde{i}'}}^{\tilde{i}'} \quad \text{olur.}$$

Burdan $p_i^{i''}\left(x_{\lambda_{i''}}^{i''}\right)=\left(p_i^{i'}\,\mathrm{o}\,p_{i'}^{i''}\left(x_{\lambda_{i''}}^{i''}\right)\right)=x_{\lambda_i}^{i}$, $p_{\tilde{i}}^{i''}\left(x_{\lambda_{i''}}^{i''}\right)=\left(p_{\tilde{i}}^{\tilde{i'}}\,\mathrm{o}\,p_{\tilde{i'}}^{i''}\left(x_{\lambda_{i''}}^{i''}\right)\right)=x_{\lambda_{\tilde{i}}}^{\tilde{i}}$ ve bu yüzden $p_i^{\tilde{i}}\left(x_{\lambda_{\tilde{i}}}^{\tilde{i}}\right)=p_i^{i''}\left(x_{\lambda_{i''}}^{i''}\right)=x_{\lambda_i}^{i}$ sağlanır.Bunlar $\pi_{i_1}\left(x_\lambda\right)=x_{\lambda_{i_1}}^{i_1}$ ispatlanır.

Sonuç :

Eğer $p_i^{i'}:\left(X_{i'},\tau_{i'},\tau_{i'}^*\right)\rightarrow\left(X_i,\tau_i,\tau_i^*\right)$ intinuistik fuzzy homeomorfizm ise $\pi_i:\left(\underleftarrow{\lim}\,X,\tau,\tau^*\right)\rightarrow\left(X_i,\tau_i,\tau_i^*\right)$ de intinuistik fuzzy homeomorfizmadır

KAYNAKLAR

[1] Liu Yİng-Ming and Luo Mao-Kang, Fuzzy Topology, World Scientific Publishing. Vol 9 147-177 (1998)

[2] Goguen, J.A;L-fuzzy sets, J.Math.Anal.Appl. 18 145-174 (1967)

[3] Yıldız, C, Genel Topoloji, Gazi Üni.Basımevi. Ankara 27-71 (1999)

[4] Pu Pao-Ming and Liu Ying-Ming, Fuzzy topology I Neighbourhood Structure of a fuzzy point and Moore-Smith convergence, J.Math Anal. Appl. 76 571-599 (1980)

[5]Chang,C.L, Fuzzy topological spaces, J.Math. Anal. Appl. 24 182- 190 (1968).

[6] Yıldız , C., Fuzzy Uzayları I Ders Notları Ankara 5-35 (2000)

[7] Wong, C.K, Fuzzy Points and Local properties of fuzzy toplogy,, J.Math.Anal.Appl. 46,316-328 (1974)

[8] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. And control 8 338-353 (1965)

[9]De Parada Vicente, M.A, Fuzzy filters J.Math. Anal Appl.129, 560-568 (1988)

[10]De Parada Vicente, M.A and Stadler , M.M On N-convergence of Fuzzy Sets, Fuzzy Sets and Systems, 51 203-217 (1992)

[11]Bedre, O. ; Yüksek Lisans Tezi, Ege üni Fen Bil. Enst. 11-80 (1989)

[12] Alaca, C, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üni. Fen. Bil. Enst. 31-40 (2001)

[13]Zheng, C.Y ;1982, On Connectedness of fuzzy Topological Spaces Fuzzy Mathematics , 3 , 59-66 (1982).

[14] Wuyts, P.; Fuzzy Paths and Fuzzy Connectedness , Fuzzy Sets and

Systems, 24 127-128 (1987).

[15] Azad K.K. On fuzzy semi-continuity, fuzzy almost continuity and fuzzy

Weakly continuity J.Math.Anal.Appl.82 14-32 (1981).

[16]Ghosh B;Semi continuous and semi –closed mapping and semi-

Connectedness in fuzzy settings. Fuzzy sets and systems 35345-355 (1990)
[17] M.N mukherjee S.P Sinha Irresolute and almost open functions between fuzzy

Topological, Fuzzy sets an Systems 29 381-388(1989).

[18] Nanda S. On fuzzy topological spaces Fuzzy sets and Systems 19 193-197

[19] Ganguly S. And Saha S. On seperation axioms and seperation of cannectedsets

İn fuzzy topological spaces Bull Calcutta Math.Soc. 79 215-225 (1987)

[20]Crossley S.G and Hildebrand S.K semi- Closed and semi-continuity in topogical spaces

Texas J. Sci. 22 123-126 (1971)

[21] Das P. Note on semi-connectedness Indian J. Mech. MAth.12(1): 31-34)1974)

[22] Dorsett C. semi-connectedness Indian J. Mech. MAth. 17(1) 57-61 (1979)

[23] Ganguly S. And saha S. On seperation aximos and T-fuzzy contnuity

Fuzzy sets and Systems 16 265-257 (1985).

[24] Liu Yİng-Ming and Liu Ying-Ming Fuzzy topology II.Product and quotient

Spaces J.Math.Anal.Applç 77 20-37 (1980)

[25] M.N Mukherjee S.P Sinha On some weaker forms of fuzzy continuous and fuzzy almost

Open functions on fuzzy topological spaces Fuzzy Sets an systems 32 103-114 (1989).

[26] T. Noiri On semi spaces Ann.Soc.Sci.Bruxelles 90 215-220 (1976).

[27] Mukherjee A.Bhaumik R.N; Fuzzy Connectedness Fuzzy Sets And Systems

56 243-246 (1993).

[28] Zheng C.Y Fuzzy Paths and fuzzy Connectedness Fuzzy Sets And Systems

14, 273-280 (1984).

[29] Klawon F. Fuzzy topology Kluwer Acedemic Publishers 17-25 (1992)

[30] Wuyts P. Fuzzy and and fuzzy Connectedness spaces Fuzzy Sets an systems
24 127-128 (1987).
[31] Genel Topoloji, Doç.Dr. Sadi BAYRAMOV

ÖZGEÇMİŞ

1983 yılında Iğdır'da doğdum. İlkokul öğrenimimi Iğdır İnönü ilköğretim okulunda, orta ve lise öğrenimimi Iğdır Anadolu Lisesinde tamamladım. 2004 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldum. 2005 yılında özel bir dershanede göreve başladım. Halen bu görevime devam etmekteyim