T.C
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİ DİFERANSİYEL DENKLEM İÇİN LİONS FONKSİYONELLİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN İYİ KONULMASI ve ONUN NÜMERİK ÇÖZÜM ALGORİTMASI

Erkan DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

MAYIS 2009
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Erkan DEMİR’ in Prof. Dr. Gabil YAGUBOV’ un danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı “Adi Diferansiyel Denklem İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması ve Onun Nümerik Çözüm Algoritması ” adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy
…………….. ile kabul edilmiştir.

.... / ..... /2009

Adı ve Soyadı	imza
Başkan : Prof. Dr. Gabil YAGUBOV	....
Üye : Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV	....
Üye : Doç. Dr. Refiğ ABDULLAYEV	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../200. gün ve ..../
.... sayılı kararı ile onaylanmıştır.
………………..

Enstitü Müdürü
Abdullah DOĞAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde adi diferansiyel denklem için Lions fonksiyonelli bir optimal kontrol problemi ele alındı. Bu çalışmanın 3.1 bölümünde adi diferansiyel denklemler teorisinden bilinen Cauchy probleminin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliğine ait teoremin ispatı verildi. Bu hüküm kullanılarak göz önüne alınan optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlandı. Daha sonra amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğu gösterildi ve gradyent için bir formül elde edilerek gradyent kullanılarak çözüm için gerek ve yeterli şart ispatlandı.

Çalışmanın 3.2. bölümünde adi diferansiyel denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin çözümüne sonlu farklar yöntemi uygulandı. Önce fark şemasının çözümü için kestirim elde edildi ve fark şemasının hatası için kestirim ispatlandı. Bu kestirimi kullanarak sonlu fark yaklaşımlarının fonksiyonele göre yakınsaklığı ispatlandı. Bu bölümün sonunda optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için gradyentin izdüşümü yönteminin algoritması açıklandı.

2009, 51 sayfa

Anahtar kelimeler: Adi diferansiyel denklem, optimal kontrol problemi, Lions fonksiyoneli sonlu farklar yöntemi.

ABSTRACT

In this , for ordinary differencial eguation an optimal control problem with Lions function was argued out. At 3.1 section of this work , the existence of generalized solution of Cauchy problem known of ordinary differencial equation and confirmation of the theorem about its uniqueness were given. The existence and uniqueness of the optimal control problem solution has been confirmed by taking into account this influence. Then it was showed that the target function was able to be differenciated and a formula was generated for the gradient then necessary and sufficient conditions were confirmed for the solution using the gradient.

At 3.2 section of the work for the ordinary differencial equation , finite differences method was applied to the solution of optimal control problem with Lions function first, a forecast was obtained for the solution of difference diagram error. Using this forecast, convergence of finite difference approaches were confirmed according to the function. At the end of this section, algorithm of the gradient projection method was explained for numeric solution of optimal control problem.
2009 ,51 page

Key words: Ordinary differencial equation, optimal control problem, finite differences method with Lions function

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır. Çalışmada Adi Diferansiyel Denklem İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol probleminin İyi Konulması ve onun nümerik çözümü ele alınmıştır. Tez çalışmamda en büyük emeği geçen, yoğun çalışmalarından bana zaman ayırtarak derin bilgilerinden faydalanma fırsatı veren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum, değerli bilim adamı, Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUBOV’a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2009

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim

$\forall$	herhangi
$\overset{0}{\forall}$	hemen hemen her yerde
$T \rangle 0$	verilen sayı
$t \in [0,T]$	bağımsız değişken
$\sum$	toplam işareti
[.....]	kaynak numarası sayfa
$\{.....\}$	küme işareti
$\langle .,. \rangle$	iç çarpım işareti
$u = u(t); t \in [0,T]$	kontrol
U	olası kontrol kümesi
$[u]_N$	diskrit (ayrık) kontrol
U_n	olası diskrit kontrol kümesi
$x_p = x_p(t),\ p = 0,T$	Cauchy problemin çözümü
$\Psi_p = \Psi_p(t), p = 0,T$	eşlenik sistemin çözümü
$J_\alpha(u), u \in U, \alpha \geq 0$	fonksiyonel
$I_N\left([u]_N\right),\ [u]_N \in u_N$	fonksiyonelin diskrit aynisi

1. GİRİŞ

Toplanmış parametreli sistemler için optimal kontrol teorisi optimal süreçler teorisinin ve adi diferansiyel denklemler teorisinin ana bölümlerini içermektedir. Optimal kontrol problemlerinin incelenmesi durumunda ortaya aşağıdaki sorular çıkar:

a) Optimal kontrol problemlerinin iyi konulması;
b) Gerek ve yeterli şartların elde edilmesi;
c) Optimal kontrol problemlerinin çözümü için nümerik çözüm yöntemlerinin oluşturulması. Bu sorular toplanılmış parametreli sistemler için optimal kontrol problemleri üzerine farklı yazarlarca $\left[\ 1,2,3,4,5,8,11,12,13,16\ \right]$ incelenmiştir.

Adi diferansiyel denklemlerle ifade edilen geniş sınıf optimal kontrol süreçlerinde kontrol edilen süreci başlangıç durumundan son durumuna getiren kontrolün olası kontroller kümesinden seçilmesi gerekir. Bu türlü optimal kontrol problemlerinin iyi konulması ve onların çözüm yöntemleri daha önce yukarda gösterilen kaynaklarda incelenmiştir.

Sunulan tezde de durumu adi diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri incelenmiştir. Ancak burada incelenen problem gerek problemin konulması açısından, gerekse de kullanılan amaç fonksiyoneli açısından ilk önce incelenen problemlerden farklıdır. Söylemek gerekir ki, bu tezde incelenen optimal kontrol problemlerinde yer alan amaç fonksiyoneli Lions fonksiyonelidir. Lions fonksiyoneli ilk kez $[10]$ çalışmasında ünlü Fransız matematikçisi Y.-L. Lions tarafından sunulup incelenmiştir. Dağılmış parametreli sistemlerde bilinmeyen katsayıları bulmak için ortaya çıkan ters problemlerin varyasyon konulmalarının analiz etmek için $[7]$ çalışmasında ünlü Azerbaycan matematikçisi A.D İskenderov tarafından Lions fonksiyoneli biçiminde nitelik kriterleri sunulup incelenmiştir. Daha sonra Lions fonksiyoneli biçiminde nitelik kriterleri A.D. İskenderovun öğrencileri tarafından geniş biçimde uygulanmıştır $[6]$.

Görüldüğü üzere bu tezde sunulan optimal kontrol problemlerinde Lions fonksiyoneli adi diferansiyel denklemler için optimal kontrol kullanılmaktadır. Bu açıdan tezde incelenen optimal kontrol problemi gerek teorik gerekse pratik açıdan önem taşımaktadır.

2. KURUMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen [8,10,17]tanımlar ve teoremler verilmektedir:

TANIM 2.1 : $L_2(0,T)$ uzayı Hilbert uzayı olup, elemanları (0,T) aralığında ölçülebilir ve mutlak değerin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların Lebesgue uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir.

$$< u,v >_{L_2(0,T)} = \int_0^T u(t)v(t)dt$$
$$\|u\|_{L_2(0,T)} = \sqrt{< u,v >_{L_2(0,T)}} < +\infty$$

TANIM 2.2 : $W_2^1(0,T)$ uzayı, Hilbert uzayı olup elemanları ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevi $L_2(0,T)$ uzayından olan fonksiyonların Sobolev uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$< u,v >_{L_2(0,T)} = \int_0^T (u(t)v(t)dt + \frac{du(t)}{dt}\frac{dv(t)}{dt})dt \ ,$$
$$\|u\|_{L_2(0,T)} = \sqrt{< u,v >_{W_2^1(0,T)}} < +\infty$$

TANIM 2.3 : $C[0,T]$ uzayı $[0,T]$ aralığında tanımlanan sürekli fonksiyonların Banach uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibidir:

$$\|u\|_{C[0,T]} = \max_{0\le t\le T}|u(t)| < +\infty$$

TANIM 2.4 : B herhangi Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir w(u, γ)=$\{v : v\in B, \|v-u\|\langle\gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için,

$$\lim_{\|h\|_B\to 0}\frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J^{'}(u), h\rangle_B + 0\langle h, u\rangle$ şartını sağlayan $J^{'}(u) \in B^*$ elemanı varsa, bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir. Burada B^* uzayı B 'nin eşlenik uzayıdır.[17]

TANIM 2.5 : Eğer B Banach uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi ve $\forall c \in B^*$ için $\lim\limits_{k\to\infty}\langle c, u_k\rangle = \langle c, u\rangle$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir. Burada B^* uzayı B 'nin eşlik uzayıdır.[17]

TANIM 2.6 : U , B Banach uzayının bir kümesi olsun. Eğer, $\forall\{u_k\} \in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkünse bu takdirde U kümesine B de zayıf kompakt küme denir.[17]

TANIM 2.7 : $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer, $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\lim\limits_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.[17]

TEOREM 2.8 : Diyelim ki U , B Banach uzayının bir alt kümesi $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_* = \left\{u \in U : J(u) = J_* = \inf\limits_U J(u)\right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun.Bu takdirde $\forall u_* \in U_*$ için $\langle J^{'}(u_*), u - u_*\rangle \geq 0$ şartı sağlanır. [17]

TEOREM 2.9 : U , B Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerler sahip ve alttan zayıf yarı sürekli olsun bu takdirde $J_* = \inf\limits_U J(u) > -\infty$, $U_*, = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$ zayıf kompakttır ve U ' dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar [17].

TEOREM 2.10 : Refleksif Banach uzayında kapalı sınırlı konveks küme zayıf kompakttır [17].

LEMMA 2.11 [17] (GRONWALL LEMMASI) : Farz edelim ki, $\varphi(t), b(t)$ negatif olmayan ve $[t_0, T]$ aralığında tanımlı sürekli fonksiyonlar $a = sabit$ sabit olsun. Bunların yanı sıra $\varphi(t) \leq a\int_{t_0}^{t} \varphi(t)d\tau + b(t), t_0 \leq t \leq T$ şartı sağlansın. Bu taktirde

$$0 \leq \varphi(t) \leq a\int_{t_0}^{t} b(t)e^{a(t-\tau)} + b(t)$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer $b(t) = b = sabit \geq 0$ ise

$$0 \leq \varphi(t) \leq be^{a(t-\tau)}, t_0 \leq t \leq T$$

geçerlidir.

Eğer ;

$$\varphi(t) \leq a\int_{t}^{T} \varphi(t)d\tau + b(t), t_0 \leq t \leq T$$

şartı sağlanıyor ise , bu taktirde ;

$$0 \leq \varphi(t) \leq a\int_{t}^{T} b(t)e^{a(t-\tau)} + b(t), t_0 \leq t \leq T$$

eşitsizliği geçerlidir. Eğer $b(t) = b = sabit \geq 0$ ise

$$0 \leq \varphi(t) \leq be^{a(\tau-t)}, t_0 \leq t \leq T$$

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Adi Diferansiyel Denklem İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması Ve Çözüm İçin Gerek Ve Yeterli Şart :

Bu alt bölümde lineer adi diferansiyel denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin iyi konulması ile ilgili sorular incelenmektedir. Önce adi diferansiyel denklem için Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait bilinen hükmün ispatı verilir. Bu hükmü kullanarak adi diferansiyel denklem için optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait olan teorem ispatlanır. Daha sonra ise bu bölümde söz konusu optimal kontrol probleminin çözümü için gerek ve yeterli şart elde edilir. Benzer problemler kısmi türevli denklemler için önceden $[6,14]$ çalışmalarından incelenmiştir.

3.1.1 Probleminin Konulması:

$$J_\alpha = \|x_o(.,u) - x_T(.,u)\|^2_{L_2(0,T)} + \alpha\|u - u_0\|^2_{L_2(0,T)} \qquad (3.1.1.1)$$

fonksiyonelinin

$$U \equiv \left\{ u = u(t) : u \in L_2(0,T), \|u\|_{L_2(0,T)} \le b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = a(t)x_p(t) + b(t)u(t) + f(t), \, p = 0, T, \qquad (3.1.1.2)$$

$$x_0(0) = x_0, x_T(T) = x_T \qquad (3.1.1.3)$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Burada $T > 0$, $b_0 > 0$, $\alpha \ge 0$, x_0, x_T verilen sayılar, $u \in L_2(0,T)$ verilen eleman, $a(t), b(t)$ fonksiyonları $(0,T)$ aralığında ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup

$$|a(t)| \le a_{\max} \ , \ |b(t)| \le b_{\max} \quad , \quad a_{\max}, b_{\max} = sabit > 0 \qquad (3.1.1.4)$$

şartlarını sağlar. $f(t)$ verilen fonksiyon olup

$$f \in L_2(0,T) \qquad (3.1.1.5)$$

şartını sağlar. Her bir $u \in U$ için (3.1.1.2) , (3.1.1.3) şartlarından $x_p = x_p(t)$, $p = 0, T$ fonksiyonlarının bulunması problemi adi diferansiyel denklem için Cauchy problemidir.

TANIM 3.1.1.1 : her bir $u \in U$ için (3.1.1.2),(3.1.1.3) Cauchy problemin çözümü olarak $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve $\forall t \in [0,T]$ için

$$x_0(t) \equiv x_0 + \int_0^t \left[a(\tau)x_0(\tau) + b(\tau)u(\tau) + f(\tau) \right] d\tau \tag{3.1.1.6}$$

$$x_T(t) \equiv x_T - \int_t^T \left[a(\tau)x_T(\tau) + b(\tau)u(\tau) + f(\tau) \right] d\tau \tag{3.1.1.7}$$

integral özdeşliklerine sağlayan $x_p = x_p(t)$, $p = 0, T$ fonksiyonları anlaşılır.

3.1.2 Adi Diferansiyel Denklem için Cauchy Probleminin İyi Konulması :

Bu alt bölümde her bir $u \in U$ için (3.1.12) (3.1.1.3) Cauchy problemlerini ele alalım:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t) + b(t)u(t) + f(t), \qquad 0 \le t \le T \tag{3.1.2.1}$$

$$x(0) = x_0 \tag{3.1.2.2}$$

Burada $a(t), b(t)$ fonksiyonları ölçülebilir fonksiyonlar olup (3.1.1.4) şartlarını sağlar. $u(t), f(t)$ fonksiyonları ise aşağıdaki şartları sağlar.

$$u \in L_2(0,T),\ f \in L_2(0,T) \tag{3.1.2.3}$$

$T > 0$, x_0 verilen sayılardır.

TANIM 3.1.2.1 : (3.1.2.1) , (3.1.2.2) Cauchy probleminin çözümü olarak $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve $\forall t \in [0,T]$ için

$$x_o(t) \equiv x_o + \int_0^t \left[a(\tau)x_o(\tau) + b(\tau)u(\tau) + f(\tau) \right] d\tau \tag{3.1.2.4}$$

integral özdeşliğini sağlayan $x = x(t)$ fonksiyonu anlaşılır.

TEOREM 3.1.2.1 : Farz edelim ki $a(t), b(t)$ fonksiyonları $[0,T]$ aralığında ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup (3.1.1.4) şartlarını; $u(t), f(t)$ fonksiyonlar ise (3.1.2.3) şartlarını sağlasın ve x_0 herhangi bir sayı olsun. Bu takdirde (3.1.2.1) (3.1.1.3) Cauchy probleminin Tanım 3.1.2.1 anlamında tek çözümü vardır. Bu çözüm $[0,T]$ aralığında hemen hemen her yerde olan ve $L_2(0,T)$ uzayınana ait genelleştirilmiş türevine sahiptir. Bu çözüm (3.1.2.1) denklemini $[0,T]$ aralığında her yerde sağlar.

İSPAT : C$[0,T]$ uzayını C$[0,T]$ uzayına yansıtan A operatörünü tanımlayalım:

$$Z(t) = A_x = \int_0^t [a(\tau)x_0(\tau) + b(\tau)u(\tau) + f(\tau)]d\tau \qquad 0 \le t \le T \tag{3.1.2.5}$$

önce A operatörünün m'inci derecesi olan A^m operatörünün m-in yeter kadar büyük değerleri için daralma operatörü olduğunu gösterelim. Bu amaçla matematiksel tümevarım yöntemiyle $\forall x, y \in$ C$[0,T]$ için $\forall t \in [0,T]$ için ve m=1,2,…için

$$\left|A^m x(t) - A^m y(t)\right| \le \tfrac{1}{m!} \max_{0\le\tau\le t} |x(\tau) - y(\tau)| \times \left(\int_0^t |a(\tau)|\, d\tau \right)^m \tag{3.1.2.6}$$

olduğunu ispatlayalım (3.1.2.5) formülüne göre aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|A^m x(t) - A^m y(t)\right| = \left| \int_0^t \Big[\big(a(\tau)x_0(\tau) + b(\tau)u(\tau) + f(\tau) - a(\tau)x_0(\tau) + b(\tau)u(\tau) + f(\tau) \big) \Big] dt \right| =$$

$$= \left| \int_0^t a(\tau)\big(x(\tau) - y(\tau)\big)\, d\tau \right| \le \int_0^t |a(\tau)| |x(\tau) - y(\tau)|\, d\tau \le$$

$$\le \max_{0\le\tau\le t} |x(\tau) - y(\tau)| \left(\int_0^t |a(\tau)|\, d\tau \right)^m , \tag{3.1.2.7}$$

Böylece (3.1.2.4) eşitsizliği $m = 1$ için ispatlandı.Şimdi farz edelim ki (3.1.2.6) eşitsizliği tespit edilmiş $m \ge 1$ için geçerli olsun. (3.1.2.4) eşitsizliğini $m+1$ için ispatlayalım:

$$\left|A^{m+1}x(t) - A^{m+1}y(t)\right| = \left|A(A^m x(t) - A(A^m y(t)\right| \le$$

$$\left| \int_0^t \Big[\big(a(\tau)(A^m x(\tau) + b(\tau)u(\tau) + f(\tau) \big) - \big(a(\tau)(A^m y(\tau)) + b(\tau)u(t) + f(t) \quad \big) \Big] dt \right| =$$

$$=\left|\int_0^t |a(\tau)|\left(A^m x(\tau)-A^m y(\tau)\right)d\tau\right| \le \left|\int_0^t |a(\tau)|\left|A^m x(\tau)-A^m y(\tau)\right|d\tau\right|$$

Burada $m\ge 1$ için olan varsayımı, yani tespit edilmiş $m\ge 1$ için (3.1.2.6) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|A^{m+1}x(t)-A^{m+1}y(t)\right| \le$$

$$\le \int_0^t |a(\tau)|\frac{1}{m!}\max_{0\le\lambda\le T}|x(\varsigma)-y(\varsigma)|\left(\int_0^T |a(\varsigma)|\,d\varsigma\right)^m d\tau \le$$

$$\le \frac{1}{m!}\max_{0\le\lambda\le T}|x(\varsigma)-y(\varsigma)|\int_0^t |a(\tau)|\left(\int_0^\tau |a(\varsigma)|\,d\varsigma\right)^m d\tau =$$

$$\frac{1}{(m+1)!}\max_{0\le\tau\le T}|x(\tau)-y(\tau)|\times\int_0^t \frac{d}{dx}\left(\int_0^\tau |a(\varsigma)|d\varsigma\right)^{m+1} d\tau =$$

$$=\frac{1}{(m+1)!}\max_{0\le\tau\le t}|x(\tau)-y(\tau)|\left(\int_0^t |a(\tau)|d\tau\right)^{m+1} \quad \forall t\in[0,T]\ .$$

Böylece matematik tümevarım yönteminin hükmüne göre (3.1.2.6) eşitsizliğinin herhangi $m=1,2,...$ için geçerli olduğunu elde ederiz. (3.1.2.6) eşitsizliğini kullanarak,

$$\left\|A^m x - A^m y\right\|_{C[0,T]} \le \frac{1}{m!}\left(\int_0^T |a(\tau)|\,d\tau\right)^m \times \|x-y\|_{C[0,T]} \tag{3.1.2.8}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz .

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m!}\left(\int_0^T |a(\tau)|\,d\tau\right)^m = 0$$

olduğundan m’nin yeteri kadar büyük değerlerinde

$$\frac{1}{m!}\left(\int_0^T |a(\tau)|\,d\tau\right)^m < 1 \tag{3.1.2.9}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu görülür. Sonuncu eşitsizlik A^m operatörünün daralma operatörü olduğu ispatlanmış oluyor. $[9, sayfa 82]$ çalışmasından olan bildiğimiz teoreme göre $x = Ax$ şartını sağlayan bir tek $x\in C[0,T]$ fonksiyonu vardır. Buradan ve (3.1.2.5) eşitsizliğinden (3.1.2.4) integral özdeşliğinin geçerli olduğu ispatlanır. Böylece(3.1.2.1), (3.1.2.2 Cauchy probleminin Tanım 3.1.2.1 anlamında bir tek çözüme sahip olduğu ispatlandı.

Üst sınırı değişken olan Lebesgue integralinin özelliğinden ve (3.1.2.4) integral özdeşliğinden $x(t)$ fonksiyonunun $[0,T]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olduğu ve bu fonksiyonun $L_2(0,T)$ ‘den olan $x(t)$ türevine sahip olduğu elde edilir. Bu türev $[0,T]$ aralığında hemen hemen her yerde tanımlıdır. Bu nedenle $x = x(t)$ fonksiyonu (3.1.2.1) denklemini hemen hemen $t \in [0,T]$ için sağlar. Teorem 3.1.2.1 ispatlandı.

Şimdi aşağıdaki probleme bakalım:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t) + b(t)u(t) + f(t), 0 \le t \le T \qquad (3.1.2.10)$$

$$x(T) = x_T \qquad (3.1.2.11)$$

Burada $a(t), b(t), u(t), f(t)$ fonksiyonları yukarıdaki şartları sağlar, x_T verilen sayıdır bu problemde $\tau = T - t$ değişken dönüşümü yapalım bu takdirde $x(t) = x(T-\tau) = \tilde{x}(\tau)$ gösterirsek

$$\frac{d\tilde{x}(\tau)}{d\tau} = -\left(\tilde{a}(\tau)\tilde{x}(\tau) + \tilde{b}(\tau)\tilde{u}(\tau) + \tilde{f}(\tau)\right), 0 \le \tau \le T \qquad (3.1.2.12)$$

$$\tilde{x}(0) = x_T \qquad (3.1.2.13)$$

Cauchy problemini elde ederiz. Burada

$$\tilde{a}(\tau) = a(T-\tau) = a(t), \tilde{b}(\tau) = b(T-\tau) = b(t),$$

$$\tilde{u}(\tau) = u(T-\tau) = u(t), \tilde{f}(\tau) = (T-\tau) = f(t)$$

dir. Görüldüğü üzere (3.1.2.12) (3.1.2.13) Cauchy problemi (3.1.2.1) (3.1.2.2) ile aynıdır. Sadece sağ tarafların işareti farklıdır.

TANIM 3.1.2.2 : (3.1.2.12) , (3.1.2.13) Cauchy probleminin çözümü olarak $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve $\forall \tau \in [0,T]$ için

$$\tilde{x}(\tau) \equiv x_T - \int_0^\tau \left(\tilde{a}(\xi)\tilde{x}(\xi) + \tilde{b}(\xi)\tilde{u}(\xi) + \tilde{f}(\xi)\right), \forall \tau \in [0,T] \quad \forall \tau \in [0,T] \qquad (3.1.2.14)$$

integral özdeşliğini sağlayan $\tilde{x} = \tilde{x}(t)$ fonksiyona anlaşılır.

$\tilde{a}(\tau),\tilde{b}(\tau),\tilde{u}(\tau),\tilde{f}(\tau)$ fonksiyonları Teorem 3.1.2.1 in şartlarını sağladığından (3.1.2.12) (3.1.2.13) Cauchy probleminin tanım 3.1.2.2 anlamında $[0,T]$ aralığında sürekli olan $\tilde{x}=\tilde{x}(\tau)$ çözümüne sahip olduğu ve bu çözümün $[0,T]$ aralığında hemen hemen her yerde $\tilde{x}=\tilde{x}(\tau)$ türevine sahip olduğu elde edilir. Bunun yanı sıra $\tilde{x}(\tau)\in L_2[0,T]$ olduğu da elde edilir,yani $\tilde{x}=\tilde{x}(\tau)$ fonksiyonu (3.1.2.12)denklemini hemen hemen $t\in[0,T]$ için sağlar.

İşaretlemeye göre $\tilde{x}(\tau)=\tilde{x}(T-\tau)=x(t)$ olduğundan $x(t)$ fonksiyonunun (3.1.2.10),(3.1.2.11) Cauchy probleminin çözümü olduğu görülür.Eğer (3.1.2.14) de geriye dönük işaretleme yaparsak $\forall\ t\in[0,T]$ için gereken integral özdeşliğini elde ederiz:

Sonuç olarak (3.1.2.10),(3.1.2.11) Cauchy probleminin çözümünün varlığına ve tekliğine ait aşağıdaki teoremi elde ederiz.

TEOREM 3.1.2.2 : Farz edelim ki , $a(t),b(t),u(t),f(t)$ fonksiyonları teorem 3.1.2.1 şartlarını sağlasın ve x_T herhangi bir sayı olsun. Bu taktirde (3.1.2.10),(3.1.2.11)Cauchy probleminin $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve herhangi $t\in[0,T]$ için (3.1.2.15) integral özdeşliğini sağlayan bir tek çözümü vardır. Bu çözüm $L_2(0,T)$ uzayına ait genelleştirilmiş $x'(t)$ türevine sahiptir ve bu çözüm (3.1.2.10) denklemini $[0,T]$ aralığında hemen hemen her yerde sağlar

Teorem 3.1.2.1 ve teorem 3.1.2.2'nin hükümlerinin birleştirerek (3.1.12),(3.1.2.3) Cauchy probleminin çözümünü varlığı ve tekliğine ait olan aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

TEOREM 3.1.2.3 : Farz edelim ki $a(t),b(t)$ fonksiyonlar (3.1.2.1) şartlarını, $u(t),f(t)$ fonksiyonları ise (3.1.2.3) şartlarını sağlasın ve x_0,x_T herhangi sayılar olsun.Bu taktirde (3.1.2.1), (3.1.2.3) Cauchy probleminin Tanım 3.1.1.1 anlamında bir tek çözümü vardır.Bu $x_p = x_p(t), p = 0,T$ çözümleri $[0,T]$ aralığında hemen hemen her yerde olan ve $L_2(0,T)$ uzayına ait olan $x_p^{'}(t), p = 0,T$ türevine sahiptir. Ve bu çözümler (3.1.1.1) denklemini $[0,T]$ aralığında hemen hemen her yerde sağlar.

3.1.3 Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

(3.1.1.1) – (3.1.1.3) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini inceleyelim.

TEOREM 3.1.3.1 : Farz edelim ki ; teorem 3.1.2.3'ün şartları sağlansın.Bu taktirde $\alpha \geq 0$ ve herhangi $u_0 \in L_2(0,T)$ için (3.1.2.2), (3.1.2.3) Optimal Kontrol Problemin en az bir çözüme sahiptir. Eğer $\alpha > 0$ ise optimal kontrol problemin bir tek çözümü vardır.

İSPAT : Önce $J_0(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim.Herhangi $u \in U$ elemanlarını alalım ve ona $u + \Delta u \in U$ olacak biçimde $\Delta u \in L_2(0,T)$ artışını verelim.Farz edelim ki,

$x_p(t) \equiv x_p(t;u)$, $x_{p\Delta}(t) = x_p(t;u + \Delta u)$, p=0,T fonksiyonları (3.1.2.2), (3.1.2.3) Cauchy probleminin sırasıyla $u \in U$, $u + \Delta u \in U$ ya karşılık gelen çözümleri olsun. Bu taktirde (3.1.2.2), (3.1.2.3) şartlarından $\Delta x_p(t) \equiv x_p(t;u + \Delta u) - x_p(t;u)$, $p = 0,T$ fonksiyonlarının aşağıdaki Cauchy probleminin çözümü olduğu görülür:

$$\frac{d\Delta x_p(t)}{dt} = a(t)\Delta x_p(t) + b(t)\Delta u(t) \text{ , p=0,T} \qquad 0 \leq t \leq T \tag{3.1.3.1}$$

$$\Delta x_0(0) = 0 \text{ ,} \quad \Delta x_T(T) = 0 \tag{3.1.3.2}$$

(3.1.16) , (3.1.17) özdeşliklerinden (3.1.3.1) , (3.1.3.2) Cauchy probleminin çözümü için aşağıdaki integral özdeşliklerini elde ederiz:

$$\Delta x_0(t) = \int_0^t a(\tau)\Delta x_0(\tau)d\tau + \int_0^t b(\tau)\Delta u(\tau)d\tau \text{ ,} \tag{3.1.3.3}$$

$$\Delta x_T(t) = -\int_t^T a(\tau)\Delta x_T(\tau)d\tau - \int_t^T b(\tau)\Delta u(\tau)d\tau \tag{3.1.3.4}$$

$\forall t \in [0,T]$ bu özdeşliklerinden aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$|\Delta x_0(t)| \le \int_0^t |a(\tau)||\Delta x_0(\tau)|\,d\tau + \int_0^t |b(\tau)||\Delta u(\tau)|\,d\tau \quad ,$$

$$|\Delta x_p(t)| \le \int_0^t |a(\tau)||\Delta x_T(\tau)|\,d\tau + \int_0^t |b(\tau)||\Delta u(\tau)|\,d\tau$$

$\forall t \in [0,T]$ $a(t), b(t)$ fonksiyonları için (3.1.1.4) şartlarını kullanarak ve Cauchy Bunyakovski eşitsizliğini uygularsak bir sonraki eşitsizlikleri yazabiliriz.

$$|\Delta x_0(t)| \le a_{\max}\int_0^t |\Delta x_0(\tau)|\,d\tau + b_{\max}\sqrt{\tau}\,\|u\|_{L_2(0,T)} \tag{3.1.3.5}$$

$$|\Delta x_T(t)| \le a_{\max}\int_t^T |\Delta x_T(\tau)|\,d\tau + b_{\max}\sqrt{\tau}\,\|\Delta u\|_{L_2(0,T)}, \forall t \in [0,T] \tag{3.1.3.6}$$

Bu eşitsizliklere $[16]$ çalışmasından bildiğimiz Gronwall Lemmasını uygularsak , (3.1.3.1) , (3.1.3.2) problemin çözümü için aşağıdaki kestirimi elde ederiz.

$$|\Delta x_P(t)| \le c_1\|\Delta u\|_{L_2(0,T)}, \qquad \text{p=0,T} \quad , \forall t \in [0,T] \tag{3.1.3.7}$$

Burada $c > 0$ sayısı t , Δu 'dan bağımsızdır.

Şimdi $J_0(u)$ fonksiyonelinin artışını herhangi $a \in U$ üzerinde bulalım.

(3.1.1.1) formülünü $\alpha = 0$ için kullanırsak fonksiyonelin artışı için aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\Delta J_0(u) = J_0(u+\Delta u) - J_0(u) = 2\int_0^T \left(x_0(t) - x_T(t)\right)\left(\Delta x_0(t) - x_T(T)\right)dt +$$

$$+\|\Delta x_0\|^2_{L_2(0,T)} + \|\Delta x_T\|^2_{L_2(0,T)} - 2\int_0^T \left(\Delta x_0(t)\Delta x_T(t)\right)dt \tag{3.1.3.8}$$

Bu eşitsizliklerden aşağıdaki eşitsizliği yaza biliriz:

$$|\Delta J_0(u)| \le 2\Big(\|\Delta x_0\|_{L_2(0,T)} + \|\Delta x_T\|_{L_2(0,T)}\Big)\Big(\|\Delta x_0\|_{L_2(0,T)} + \|\Delta x_T\|_{L_2(0,T)} +$$

$$+2\|\Delta x_0\|^2_{L_2(0,T)} + 2\|\Delta x_T\|^2_{L_2(0,T)}\Big) \tag{3.1.1.9}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Bu eşitsizlikte yer alan $\|\Delta x_p\|_{L_2(0,T)}$, $\|\Delta x_p\|_{L_2(0,T)}$ P=0,T normlarını değerlendirelim. Bu amaçla önce (3.1.1.6) , (3.1.1.7) özdeşliklerini kullanalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$|x_0(t)| \le |x_0| + \int_0^t |a(\tau)||x_0(\tau)|\,d\tau + \int_0^t |b(\tau)||u(\tau)|\,d\tau + \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau$$

$$|x_T(t)| \le |x_T| + \int_t^T |a(\tau)||x_T(\tau)|\,d\tau + \int_t^T |b(\tau)||x_T(\tau)|\,d\tau + \int_t^T |f(\tau)|\,d\tau \;\; \forall t \in [0,T]$$

Burada $a(t), b(t)$ fonksiyonları için olan (3.1.1.4) şartlarını kullanıp Cauchy Bunyakovski eşitsizliğini her iki eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci ve üçüncü terimlere uygularsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz;

$$|x_0(t)| \le |x_0| + a_{\max}\int_0^t |x_0(\tau)|\,d\tau + \sqrt{T} b_{\max} \|u\|_{L_2(0,T)} + \sqrt{T}\,\|f\|_{L_2(0,T)} \quad ,$$

$$|x_T(t)| \le |x_T| + a_{\max}\int_t^T |x_T(\tau)|\,d\tau + \sqrt{T} b_{\max} \|u\|_{L_2(0,T)} + \sqrt{T}\,\|f\|_{L_2(0,T)}$$

her iki eşitsizliğe Gronwall Lemmasını uygulayalım.Bu taktirde kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz;

$$|x_0(t)| \le e^{a_{\max}T}\left(|x_0| + \sqrt{T} b_{\max} \|u\|_{L_2(0,T)} + \sqrt{T}\,\|f\|_{L_2(0,T)}\right)$$

$\forall t \in [0,T]$.Bu eşitsizliklerde x_0, x_T ' nin verilen sayılar $u \in U$,$t \in L_2(0,T)$ olduğunu dikkate alırsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz.

$$|x_p(t)| \le c_2, \forall t \in [0,T], p = 0,T \qquad (3.1.3.10)$$

Buradan da kolaylıkla aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\|x_p\|_{L_2(0,T)} \le c_3, \qquad p = 0,T \qquad (3.1.3.11)$$

Burada $c_3 > 0$ belirli bir sabittir.

Diğer yandan (3.1.3.7) kestirimini kullanarak aşağıdaki kestirimi elde edebiliriz

$$\|\Delta x_p\|_{L_2(0,T)} \le e_4 \|\Delta u\|_{L_2(0,T)} \quad , \qquad p = 0,T \qquad (3.1.3.12)$$

Burada $c_4 > 0$ Δu'dan bağımsızdır.Böylece (3.1.3.11) ve (3.1.3.12) kestirimini (3.1.3.9) eşitsizliğinin sağ tarafında kullanırsak;

$$|\Delta J_0(u)| \le c_5\left(\|\Delta u\|_{L_2(0,T)} + \|\Delta u\|^2_{L_2(0,T)}\right) \qquad (3.1.3.13)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Burada $c_5 > 0$ sayısı Δu'dan bağımsızdır. Görüldüğü üzere (3.1.3.13) eşitsizliği herhangi $u \in U$ için geçerli olduğundan $J_0(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde sürekli olacaktır, yani $\forall u \in U$ ve

$$\|\Delta u\|_{L_2(0,T)} \to 0 \text{ için } \Delta J_0(u) \to 0 \text{ olur.} \tag{3.1.3.14}$$

limit bağıntısı geçerlidir. Şimdi;

$$I(u) = \|u - u_0\|^2_{L_2(0,T)} \tag{3.1.3.15}$$

fonksiyonelini göz önüne alalım. Herhangi $u \in U$ için $I(u)$ fonksiyonelinin artışını yazalım:

$$\Delta I(u) = I(u + \Delta u) - I(u) = 2\int_0^T \left(u(t) - u_0(t)\right)\Delta u(t)dt + \|\Delta u\|^2_{L_2(0,T)}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafına Cauchy Bunyakovski eşitsizliğini uygulayalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|\Delta I(u)| \le 2\left(\|u\|_{L_2(0,T)} + \|u_0\|_{L_2(0,T)}\right)\|\Delta u\|_{L_2(0,T)} + \|\Delta u\|^2_{L_2(0,T)}$$

Burada $u \in U$, $u_0 \in L_2(0,T)$ olduğunu dikkate alırsak ,

$$|\Delta I(u)| \le c_5\left(\|\Delta u\|_{L_2(0,T)} + \|\Delta u\|^2_{L_2(0,T)}\right) \tag{3.1.3.16}$$

eşitsizliğine sahip oluruz. Buradan da herhangi $u \in U$ için

$$\|\Delta u\|_{L_2(0,T)} \to 0 \text{ için } \Delta I(u) \to 0 \tag{3.1.3.17}$$

limit bağıntısını elde ederiz, yani $I(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde süreklidir. Böylece (3.1.3.14) ve (3.1.3.17) limit bağıntılarından

$$J_\alpha(u) = J_\alpha(u) + \alpha I(u) \tag{3.1.3.18}$$

fonksiyonelinin U kümesi üzerinde sürekli olduğu ispatlanır.

Şimdi $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde konveks olduğunu gösterelim.Farz edelim ki; $u, v \in U$ herhangi iki eleman ve $\beta \in [0,1]$ herhangi sayı olsun. $u_\beta = u_\beta(t) = \beta u + (1-\beta)v \in U$ olduğunu ispatlayalım $x_{p\beta}(t) \equiv x_p(t, u_\beta),\ p = 0,T$ Fonksiyonları $\forall \beta \in [0,1]$, $v_\beta \in U$ için (3.1.1.2) , (3.1.1.3) Cauchy probleminin çözümü olsun. Bunun yanı sıra farz edelim ki , $x_p(t,u)$, $x_p(t,v)$, $p = 0,T$

fonksiyonları (3.1.1.2) , (3.1.1.3) Cauchy probleminin sırasıyla $u \in U$ ve $v \in U$ karşılık gelen çözümleri olsun. Bu taktirde aşağıdaki problemleri yazabiliriz:

$$\frac{dx_p(t;u)}{dt} = a(t)x_p(t;u) + b(t)u(t) + f(t) \ , \quad p = 0,T \tag{3.1.3.19}$$

$$x_0(0;u) = x_0 \ , \quad x_T(T;u) = x_T \tag{3.1.3.20}$$

$$\frac{dx_p(t;v)}{dt} = a(t)x_p(t;v) + b(t)v(t) + f(t) \tag{3.1.3.21}$$

$$x_0(0;v) = x_0 \ , \quad x_T(T;v) = x_T \tag{3.1.3.22}$$

(3.1.1.19) , (3.1.1.20) Bağıntılarının her iki yanını β'ya (3.1.1.21) , (3.1.1.22) bağıntılarının her iki yanını ise $(1-\beta)$ ile çarpıp toplarsak aşağıdaki Cauchy problemini elde ederiz:

$$\frac{dw_p(t)}{dt} = a(t)w_p(t) + b(t)u_\beta(t) + f(t) \ , \qquad p = 0,T \tag{3.1.3.23}$$

$$w_0(0) = x_0 \qquad w_T(T) = x_T \tag{3.1.3.24}$$

Burada $w_p(t) = \beta x_p(t;u) + (1-\beta)x_p(t;v), p = 0,T$

Diğer yandan (3.1.1.2) , (3.1.1.3) Cauchy probleminin u_β'ya karşılık gelen $x_p(t;u_\beta)$, $p = 0,T$ aşağıdaki şartları sağlar:

$$\frac{dx_p(t;u_\beta)}{dt} = a(t)x_p(t;u_\beta) + b(t)u_\beta + f(t) \quad , \qquad p = 0,T \tag{3.1.3.25}$$

$$x_0(0,u_\beta) = x_0 \ , \quad x_T(T;u_\beta) = x_T \tag{3.1.3.26}$$

(3.1.3.25) , (3.1.3.26) problemini (3.1.3.23) , (3.1.3.24) problemini taraf tarafa çıkaralım. Sonuçta aşağıdaki problemini elde ederiz:

$$\frac{dz_P(t)}{dt} = a(t)z_P(t) \qquad p = 0,T \tag{3.1.3.27}$$

$$z_0(0) = 0 \quad , \quad z_T(T) = 0 \tag{3.1.3.28}$$

burada $Z_P(t) = x_p(t;u_\beta) - \beta x_p\left(t;u\right).(1-\beta)x_p\left(t;\beta\right)$ $p = 0,T$ Adi diferansiyel denklemlerden bildiğimize göre (3.1.3.27) denkleminin çözümü

$$Z_0(t) = Z_0(0)e^{\int_0^t a(T)dT} \equiv 0$$

$$Z_T(t) = Z_T(0)e^{-\int_0^t a(T)dT} \equiv 0$$

şartlarını sağlar , yani (3.1.3.27) , (3.1.3.28) çözümü olan $Z_p(t) = 0$, $p = 0,T$

$Z_p(t) = 0$, $p = 0,T$ fonksiyonları olan formülünü dikkate alırsak

$$x_p(t;u_\beta) = \beta x_p(t;u) + (1-\beta)x_p(t;\beta) \quad , \quad \text{P=0,T} \quad \forall\beta \in [0,1] \quad , \quad \forall u_\beta \in U \quad (3.1.3.29)$$

bağıntısını elde ederiz. Bu eşitliği kullanarak $J_0(u_\beta)$ değerini $\forall\beta \in [0,1]$ için bulalım. $\alpha = 0$ olduğunda (3.1.1.1) formülünü kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$J_0(u_\beta) = \left\| x_0(.,u_\beta) - x_0(.,u_\beta) \right\|^2_{L_2(0,T)} =$$

$$\left\| \beta x_0(.,u) + (1-\beta)x_0(.,v) - \beta x_T(.,u) - (1-\beta)x_T(.,v) \right\|^2_{L_2(0,T)} =$$

$$\left\| \beta\left(x_0(.,u) - x_T(.,u) + (1-\beta)x_0(.,v) - x_T(.,v)\right) \right\|^2_{L_2(0,T)} = \beta \left\| x_0(.,u) - x_T(.,u) \right\|^2_{L_2(0,T)}$$

$$+(1-\beta)\left\| x_0(.,v) - x_T(.,v) \right\|^2_{L_2(0,T)} -$$

$$-\beta(1-\beta)\left\| \left(x_0(.,u) + x_T(.,u) - x_0(.,v) - x_T(.,v)\right) \right\|^2_{L_2(0,T)} \le$$

$$\le \beta \left\| x_0(.,u) - x_T(.,u) \right\|^2_{L_2(0,T)} + (1-\beta)\left\| x_0(.,v) - x_T(.,v) \right\|^2_{L_2(0,T)} =$$

$$= \beta J_0(u) + (1-\beta)J_0(v) \quad (3.1.3.30)$$

u_β için olan formülü kullanırsak sonucu eşitsizlikten,

$$J_0\left(\beta u + (1-\beta)v\right) \le \alpha J_0(u) + (1-\beta)J_0(v) \quad \forall u,v \in V \quad \text{ve} \quad \forall\beta \in [0,1] \quad (3.1.3.31)$$

böylece $J_0(u)$ fonksiyonelinin konveks U kümesi üzerinde konveksliği ispatlandı.

Şimdi $I(u)$ fonksiyonelini göz önüne alalım (3.1.3.15) formülünü kullanırsak; $\forall u,v \in U$ ve $\forall\beta \in [0,1]$ için,

$$I\left(\beta(u) + (1-\beta)v\right) = \left\| \beta u + (1-\beta)v - u_0 \right\|^2_{L_2(0,T)} =$$

$$\left\| \beta(u-u_0) + (1-\beta)(v-u_0) \right\|^2_{L_2(0,T)} =$$

$$\beta\left\|(u-u_0)\right\|^2_{L_2(0,T)} + (1-\beta)\left\|(v-u_0)\right\|^2_{L_2(0,T)} - \beta(1-\beta)\left\|(u-v)\right\|^2_{L_2(0,T)} =$$

$$\beta I(u)+(1-\beta)I(v)-\beta(1-\beta)\left\|(u-v)\right\|^2_{L_2(0,T)} = \tag{3.1.3.32}$$

Buradan $\vartheta=1$ sabiti ile $I(u)$ fonksiyonelinin kuvvetli konveks olduğu elde edilir. İspata göre $J_0(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde konveks $I(u)$ ise kuvvetli konveks fonksiyoneldir. Bildiğimize göre kuvvetli konveks aynı zamanda konvekstir. Yani $\alpha\geq 0$ için $J_0(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde konveks fonksiyonel $\alpha>0$ için U kümesi üzerinde sürekli ve konveks konveks fonksiyoneldir. $[17, sayfa 52]$ çalışmasından bildiğimiz teoreme göre $J_0(u)$ fonksiyoneli $\alpha\geq 0$ için U da alttan zayıf yarı sürekli fonksiyonel olacaktır. U kümesi $L_2(0,T)$ uzayında kapalı sınırlı ve konveks küme , $L_2(0,T)$ uzayı ise Refleksif Banach uzayı olduğundan yine $[17]$ çalışmasından bildiğimiz teoreme göre zayıf kompakt küme olacaktır. Diğer yandan $J_0(u)$ fonksiyonelinin sonlu değerlere sahip olduğu açıktır. Böylece Weierstrass teoreminin $[17, sayfa 53]$ çalışmasından bildiğimiz genelleştirilmiş varyansına göre $J_0(u)$ fonksiyoneli $\alpha\geq 0$ ve herhangi $u_0\in L_2(0,T)$ için en az bir minimum noktasına sahiptir, yani $U_*\equiv\left\{u^*\in U; J_\alpha(u^*)=\inf\limits_{u\in V} J_\alpha(u)=J_{\alpha^*}\right\}\neq\phi.$ Böylece , $\alpha\geq 0$ ve herhangi $u_0\in L_2(0,T)$ için (3.1.1.1) , (3.1.1.3) kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğu ispatlandı. Eğer $\alpha>0$ ise $J_0(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde kuvvetli konveks fonksiyonel olacaktır. Kuvvetli konveks fonksiyonel aynı zamanda kesin (ciddi) konveks fonksiyoneldir. Kesin konveks fonksiyonelin minimum noktası bir tektir, yani U_* kümesi bir noktadan oluşur. Böylece $\alpha>0$ olduğunda (3.1.1.1) , (3.1.1.3) optimal kontrol problemi bir çözüme sahiptir. Teorem 3.1.3.1 ispatlandı.

3.1.4 Fonksiyonelin Diferansiyellenmesi ve Çözüm İçin Gerek ve Yeterli Şart

Bu alt bölümde (3.1.1.1) , (3.1.1.3) optimal kontrol probleminde fonksiyonelin diferansiyellenebilirliği incelenir ve fonksiyonelin gradyenti için formül elde edilir.Fonksiyonelin gradyenti için formül elde edilir. Fonksiyonelin gradyenti için olan formülü kullanarak problemin çözümü için gerek ve yeterli şart ispatlanır.

Farz edelim ki, $\Psi_p(t), p=0,T$ fonksiyonları aşağıdaki eşlenik sistemin çözümü olsun:

$$\frac{d\Psi_o(t)}{dt} = -a(t)\Psi_o(t) + 2\left(x_o(t) - x_T(t)\right), 0 \le t \le T \, , \qquad (3.1.4.1)$$

$$\frac{d\Psi_T(t)}{dt} = -a(t)\Psi_T(t) - 2\left(x_o(t) - x_T(t)\right), 0 \le t \le T \qquad (3.1.4.2)$$

$$\Psi_0(T) = 0 \quad , \quad \Psi_T(0) = 0 \qquad (3.1.4.3)$$

Görüldüğü üzere (3.1.4.1) (3.1.4.3) şartlarından $\Psi_p(t), p=0,T$ fonksiyonlarının bulunması probleminde adi diferansiyel denklem için Cauchy problemidir.

TANIM 3.1.4.1 : (3.1.4.1) (3.1.4.3) eşlenik sistemin çözümü olarak $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve $\forall t \in [0,T]$ için

$$\Psi_0(\tau) \equiv \int_t^T \left[a(\tau)\Psi_0(\tau) - 2\left(x_0(\tau) - x_T(\tau)\right)\right] d\tau \qquad (3.1.4.4)$$

$$\Psi_T(\tau) \equiv \int_t^T \left[a(\tau)\Psi_T(\tau) + 2\left(x_0(\tau) - x_T(\tau)\right)\right] d\tau \qquad (3.1.4.5)$$

integral özdeşliklerini sağlayan $\Psi_p = \Psi_p(t), \quad p=0,T$ fonksiyonları anlaşılır.

Verilen şartlar altında $x_p \in C[0,T] \quad p=0,T$ için teorem3.1.4.1'in aynısını, eşlenik sistem olarak adlandırdığımız (3.1.4.1) , (3.1.4.3) Cauchy probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu ifade eden teoremi ispatlayabiliriz. Diğer yandan (3.1.4.4) ve (3.1.4.5) özdeşliklerini ve $x_0(t)$, $x_p(t)$ fonksiyonları için olan kestirimleri kullanarak kolaylıkla aşağıdaki eşitlikleri yazabiliriz.

$$\left|\Psi_0(t)\right| \le a_{\max} \int_t^T \left|\Psi_0(\tau)\right| d\tau + c_5 \left(|x_0| + |x_T| + \|u\|_{L_2(0,T)} + \|f\|_{L_2(0,T)} \right) \qquad (3.1.4.6)$$

$$\left|\Psi_0(t)\right| \le a_{\max} \int_t^T \left|\Psi_t(\tau)\right| d\tau + c_7 \left(|x_0| + |x_T| + \|u\|_{L_2(0,T)} + \|f\|_{L_2(0,T)} \right) \qquad (3.1.4.7)$$

$\forall t \in [0,T]$ burada Gronwall lemmasını uygulayarak aşağıdaki kestirimi elde edebiliriz.

$$\left|\Psi_p(t)\right| \le c_8 \left(|x_0| + |x_T| + \|u\|_{L_2(0,T)} + \|f\|_{L_2(0,T)} \right) \qquad (3.1.4.8)$$

$\forall t \in [0,T]$ burada $c_8 > 0$ belirli sabittir.Aşağıdaki gibi fonksiyon tanıyalım:

$H_1\left(t, x_0(t), x_T(t), u(t), \Psi_0(t), \Psi_T(t)\right) = \Psi_0(t)\left(a(t)x_0(t) + b(t)u(t) + f(t) +\right.$

$\Psi_T(t)\left(a(t)x_T(t) + b(t)u(t) + f(t) - \left(x_0(t) - x_T(t)\right)^2 - \alpha\left(u(t) - u_0(t)\right)^2\right.$,

$t \in [0,T]$ (3.1.4.9)

Burada $x_p(t) = x_p(t;u)$, $\Psi_p(t) \equiv \Psi_p(t;u)$, $p = 0,T$ fonksiyonları sırasıyla (3.1.1.2) (3.1.1.3) Cauchy probleminin ve (3.1.4.1) , (3.1.4.5) eşlenik sistemin $u \in U$ 'ya karşılık gelen çözümleridir. Bu fonksiyona (3.1.1.1) (3.1.1.3) optimal kontrol problemi için Hamilton Pontryagin fonksiyonu denir.

TEOREM 3.1.4.1 : Farz edelim ki; teorem 3.1.2.1'in şartları sağlansın ve $u_0 \in L_2(0,T)$ verilen fonksiyon $\alpha \geq 0$ verilen sayı olsun. Bu taktirde $J_0(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve fonksiyonelin gradyenti için

$$J_\alpha^{'}(u) = -\frac{\partial H_1}{\partial u} = -b(t)\Psi_0(t) - b(t)\Psi_T(t) + 2\alpha\left(u(t) - u_0(t)\right) , \quad 0 \leq t \leq T \qquad (3.1.4.10)$$

ifadesi geçerlidir.Burada $\Psi_0(t), \Psi_T(t)$ fonksiyonları (3.1.4.1) , (3.1.4.3) eşlenik çözümüdür.

İSPAT : U kümesi üzerinden herhangi $u \in U$ elemanını alalım.Bu eleman için $J_\alpha^{'}(u)$'nun artışını bulalım. (3.1.1.1) formülünü ve (3.1.3.8)eşitliğini kullanırsak aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(u) = J_\alpha(u + \Delta u) - J_\alpha(u) = 2$$

$$\int_0^T \left(x_0(t) - x_T(t)\right)\left(\Delta x_0(t) - \Delta x_T(t)\right)dt + 2\alpha\int_0^T \left(u(t) - u_0(t)\right)\Delta u(t)dt +$$

$$+\left\|\Delta x_0\right\|^2_{L_2(0,T)} + 2\left\|\Delta x_T\right\|^2_{L_2(0,T)} + \left\|\Delta u\right\|^2_{L_2(0,T)} - 2\int_0^T \Delta x_0(t)\Delta x_T(t)dt \qquad (3.1.4.11)$$

Burada $\Delta x_p(t), p = 0,T$ (3.1.3.1) , (3.1.3.2) Cauchy probleminin çözümüdür. Bu eşitliğin sağ tarafında yer alan birinci terimi dönüştürmeye çalışalım. Gerçekten eşlenik sistemi kullanırsak ;

$$\int_0^T \left(x_0(t)-x_T(t)\right)\left(\Delta x_0(t)-\Delta x_T(t)\right)dt=\int_0^T 2\left(x_0(t)-x_T(t)\right)\Delta x_0(t)dt$$

$$\int_0^T \left(-2\left(x_0(t)-x_T(t)\right)\Delta x_T(t)dt= \int_0^T\left(\frac{d\Psi_0(t)}{dt}+a(t)\Psi_T(t)\right)\Delta x_T(t)dt\right.$$

eşitliğinin geçerli olduğu elde ederiz. Bu eşitliğin sağ tarafında kısmi integrasyon formülünü kullanırsak

$$\int_0^T (-2\left(x_0(t)-x_T(t)\right)\Delta x_T(t)dt \int_0^T\left(-\frac{d\Psi_0(t)}{dt}+a(t)\Delta x_0(t)\right)\Psi_0(t)dt+$$

$$+\int_0^T\left(-\frac{d\Delta x_T(t)}{dt}+a(t)\Delta x_T(t)\right)\Psi_T(t)dt+\left(\Delta x_0(T)-\Psi_0(T)\right)-\Delta x_0(0)\Psi_0(0)+$$

$$\Delta x_0(T)\Psi_T(T)-\Delta x_T(0)\Psi_T(0)$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikte (3.1.3.1) (3.1.3.2) (3.1.4.3) şartlarını uygularsak aşağıdaki eşitliği buluruz:

$$2\int_0^T \left(x_0(t)-x_T(t)\right)\left(\Delta x_0(t)-\Delta x_T(t)\right)dt=\int_0^T \left(-b(t)\Delta u(t)\Psi_0(t)-b(t)\Delta u(t)\Psi_T(t)\right)dt=$$

$$\int_0^T -b(t)\left(\Psi_0(t)+\Psi_T(t)\right)\Delta u(t)dt$$

Bu eşitliği (3.1.4.11) formülünde dikkate alırsak fonksiyonelin artışı için aşağıdaki formülü elde edebiliriz:

$$\Delta J_\alpha(u)=\int_0^T -b(t)\left(\Psi_0(t)+\Psi_T(t)\right)\Delta u(t)dt+2\alpha\int_0^T\left(v(t)-u_0(t)\right)\Delta u(t)dt+$$

$$+\left\|\Delta x_0\right\|^2_{L_2(0,T)}+\left\|\Delta x_T\right\|^2_{L_2(0,T)}-2\int_0^T\Delta x_0(t)\Delta x_T(t)dt+\alpha\left\|\Delta u\right\|^2_{L_2(0,T)} \tag{3.1.4.12}$$

Buradan da

$$\Delta J_\alpha(u)=\int_0^T -b(t)\left(\Psi_0(t)+\Psi_T(t)\right)+2\alpha\left(u(t)-u_0(t)\right)\Delta u(t)dt+R(\Delta u) \tag{3.1.4.13}$$

formülü elde edilir. Burada $R(\Delta u)$

$$R(\Delta u)=\left\|\Delta x_0\right\|^2_{L_2(0,T)}+\left\|\Delta x_T\right\|^2_{L_2(0,T)}+\alpha\left\|\Delta u\right\|^2_{L_2(0,T)}-2\int_0^T\Delta x_0(t)\Delta x_T(t)dt \tag{3.1.4.14}$$

(3.1.4.12) kestirimini kullanırsak $R(\Delta u)$ kalanını aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\left|R(\Delta u)\right|\le 2\left\|\Delta x_0\right\|^2_{L_2(0,T)}+2\left\|\Delta x_T\right\|^2_{L_2(0,T)}+\alpha\left\|\Delta u\right\|^2_{L_2(0,T)}\le c_5\left\|\Delta u\right\|^2_{L_2(0,T)} \tag{3.1.4.15}$$

Buradan da

$$R(\Delta u) = 0\left(\|\Delta u\|_{L_2(0,T)}\right) \qquad (3.1.4.16)$$

bağıntısını elde ederiz, yani

$$\lim_{\|\Delta u\|_{L_2(0,T)}} \to 0 \qquad \frac{R(\Delta u)}{\|\Delta u\|_{L_2(0,T)}} = 0 \qquad (3.1.4.17)$$

dır. (3.1.4.16) bağıntısının yardımıyla $\Delta J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin artışını aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(u) = \int_0^T -b(t)\left(\Psi_0(t)+\Psi_T(t)\right) + 2\alpha\left(u(t)-u_0(t)\right)\Delta u(t)dt + o\|\Delta u\|_{L_2(0,T)} \qquad (3.1.4.18)$$

Hamilton Pontryagin fonksiyonun ifadesini dikkate alırsak sonuncu formülü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(u) = \int_0^T -\frac{\partial H\left(t, x_0(t), x_T(t), u(t), \Psi_0(t), \Psi_T(t)\right)}{\partial u}\Delta u(t)dt + o\|\Delta u\|_{L_2(0,T)} \qquad (3.1.4.19)$$

$L_2(0,T)$ uzayında tanımlanan fonksiyonelin Frechet anlamında diferansiyellenebilir olmasının tanımını kullanarak ,

$\Delta J_\alpha(u) = \int_0^T J_\alpha^{'}(u)\Delta u(t)dt + o\left(\|\Delta u\|_{L_2(0,T)}\right)$ formülünü elde ederiz. Bu formülü (3.1.4.19) de karşılaştırırsak

$$\Delta J_\alpha^{'}(u) = -\frac{\partial H}{\partial u} \qquad (3.1.4.20)$$

formülünü elde ederiz.Burada Hamilton Pontryagin fonksiyonun ifadesini dikkate alırsak $u \in U$ elemanında $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğunu ve (3.1.4.10) formülünün geçerli olduğunu göstermiş oluruz. Teoerm 3.1.4.1 ispatlandı. Şimdi optimal kontrol probleminin çözümü için gerek ve yeterli şartı gösterelim.

TEOREM 3.1.4.2 : Farz edelim ki; teorem 3.1.4.1'in şartları sağlansın ve U_* kümesi $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin U kümesi üzerinde (3.1.1.2) (3.1.1.3) şartları altında minimum noktaları kümesi olsun. Bu taktirde $\forall u^* \in U_*$ için $\forall u \in U$ olduğunda

$$\int_0^T \Big(b(t)\big(\Psi_0(t)+\Psi_T(t)\big)-2\alpha\big(u^*(t)-u_0(t)\big)\times\big(u-u^*(t)\big)dt \le 0 \qquad (3.1.4.21)$$

şartının sağlanması gerek ve yeterlidir. Burada $\Psi_p^*(t)=\Psi_p(t;u^*)$ $p=0,T$ fonksiyonları eşlenik sistemin $u^* \in U$ elemanına karşılık gelen çözümüdür.

İSPAT : Farz edelim ki , $u^*=u^*(t)\in U_*$ herhangi optimal kontrol olsun , yani (3.1.1.1) (3.1.1.3) probleminin herhangi çözümü olsun. Teorem 3.1.4.1'e göre $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli $u^* \in U$ elemanında diferansiyellenebilirdir ve onun gradyenti için

$$J_\alpha^{'}(u^*)=-b(t)\big(\Psi_0^*(t)+\Psi_T^*(t)\big)+2\alpha\big(u^*(t)-u_0(t)\big) \qquad (3.1.4.22)$$

formülü geçerlidir. Önce $J_\alpha^{'}(u)$ 'nun artışını bulursak

$$J_\alpha^{'}(u)(u+\Delta u)-J_\alpha^{'}(u)=-b(t)\big(\tau_0(t;u+\Delta u)\big)+\big(\tau_T(t;u+\Delta u\big)+2\alpha$$
$$\big(u(t)-\Delta u(t)-u_0(t)\big)+$$

$$+b(t)\big(\tau_0(t;u)+\tau_T(t;u)\big)\ -2\alpha\big(u(t)-u_0(t)\big)=-b(t)\big(\Delta\tau_0(t)+\Delta\tau_T\big)+2\alpha\Delta u \qquad (3.1.4.23)$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $\Delta\Psi_P$, $p=0,T$ fonksiyonları aşağıdaki sistemin çözümüdür:

$$\frac{d\Delta\Psi_0(t)}{dt}=-a(t)\Delta\Psi_0(t)+2\big(\Delta x_0(t)-\Delta x_T(t)\big) \qquad (3.1.4.24)$$

$$\frac{d\Delta\Psi_T(\alpha)}{dt}=-a(t)\Delta\Psi_T(t)-2\big(\Delta x_0(\alpha)-\Delta x_T(t)\big) \qquad (3.1.4.25)$$

$$\Delta\Psi_0(T)=0 \quad , \quad \Delta\Psi_T(0)=0 \qquad (3.1.4.26)$$

Burada $\Delta\Psi_p(t)=\big(\Psi_p(t;u+\Delta u)\big)-\big(\Psi_p(t;u\big)$ dur,

$\Delta x_p(t), p=0,T$ ise (3.1.3.1) (3.1.3.2) Cauchy probleminin çözümüdür. (3.1.4.4) (3.1.4.5) özdeşliklerini kullanırsak (3.1.4.24) (3.1.4.26) sisteminin çözümü için aşağıdaki özdeşlikleri yazabiliriz:

$$\Delta\Psi_0(t)=\int_t^T\big[a(t)\Delta\Psi_0(t)-2\big(\Delta x_0(\tau)-\Delta x_T(\tau)\big)\big]dt$$

$$\Delta\Psi_T(t)=\int_0^t\big[a(t)\Delta\Psi_T(t)-2\big(\Delta x_0(\tau)-\Delta x_T(\tau)\big)\big]dt$$

Buradan da kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlikleri elde edebiliriz:

$$\left|\Delta\Psi_T(t)\right| \le a_{\max}\int_t^T \left|\Delta\Psi_0(\tau)\right| d\tau + 2\int_t^T \left(\left|\Delta x_0(\tau)\right| + \left|\Delta x_T(\tau)\right|\right) d\tau, \forall t \in [0,T]$$

$$\left|\Delta\Psi_T(t)\right| \le a_{\max}\int_t^T \left|\Delta\Psi_T(\tau)\right| d\tau + 2\int_t^T \left(\left|\Delta x_0(\tau)\right| + \left|\Delta x_T(\tau)\right|\right) d\tau, \forall t \in [0,T]$$

bu eşitsizliklerden (3.1.3.7) kestirimlerinin yardımıyla

$$\left|\Delta\Psi_0(t)\right| \le a_{\max}\int_t^T \left|\Delta\Psi_0(\tau)\right| d\tau + c_{10}\left\|\Delta u\right\|_{L_2(0,T)}$$

$$\left|\Delta\Psi_T(t)\right| \le a_{\max}\int_0^t \left|\Delta\Psi_T(\tau)\right| d\tau + c_{10}\left\|\Delta u\right\|_{L_2(0,T)} \quad \forall t \in [0,T]$$

olup bu iki eşitsizliğe Gronwall lemmasını uygularsak ,

$$\left|\Delta\Psi_P(t)\right| \le c_{11}\left\|\Delta u\right\|_{L_2(0,T)} \quad p = 0,T \qquad \forall t \in [0,T] \tag{3.1.4.27}$$

kestirimlerini ispatlarız. Burada $c_{11} > 0$ sabiti Δu ’ dan bağımsızdır.

Şimdi fonksiyonelin gradiyentinin artışı için olan (3.1.4.23) formülünü kullanıp değerlendirirsek , $\forall u \in U$ için

$$\left\|J'_\alpha(u+\Delta u) - J'_\alpha(u)\right\|_{L_2(0,T)} \le c_{13}\left(\left\|\Delta\Psi_0\right\|_{L_2(0,T)} + \left\|\Delta\Psi_T\right\|_{L_2(0,T)} + \left\|\Delta u\right\|_{L_2(0,T)}\right) \tag{3.1.4.28}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafında (3.1.4.27) kestirimini uygularsak , $\forall u \in U$ için

$$\left\|J'_\alpha(u+\Delta u) - J'_\alpha(u)\right\|_{L_2(0,T)} \le c_{14}\left\|\Delta u\right\|_{L_2(0,T)} \tag{3.1.4.29}$$

eşitsizliğini ispatlamış oluruz. Burada $c_{14} > 0$ sabiti Δu ’ dan bağımsızdır.(3.1.4.28) eşitsizliğinden $\forall u \in U$ için

$$\lim_{\left\|\Delta u\right\|_{L_2(0,T)} \to 0} \left\|J'_\alpha(u+\Delta u) - J'_\alpha(u)\right\|_{L_2(0,T)} = 0 \tag{3.1.4.30}$$

limit bağıntısı elde edilir, yani $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde Frechet anlamında sürekli diferansiyellenebilirdir:

$J_\alpha(u) \in C^1(U)$ ’dur. (3.1.4.31)

Bunun yanı sıra U kümesi $L_2(0,T)$ uzayında konveks kümedir. Böylece $[17, sayf.28]$ çalışmasından bildiğimiz teoremin tüm şartlarının sağlandığını görüyoruz. Söz konusu teoremin hükmüne göre , eğer $u^* \in U_* \subset U$ herhangi elemanı $J_\alpha(u)$ fonksiyonelin minimum noktası ise , bu taktirde $\forall u \in U$ için

$$< J_\alpha^{'}(u^*), u - u^* >_{L_2(0,T)} \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır. Burada (3.1.4.22) formülünü dikkate alırsak (3.1.4.24) şartını ispatlarız, yani gerek şart yeterlidir. Farz edelim ki, herhangi $u^* \in U$ elemanı için (3.1.4.21) formülü geçerli olsun. Bu taktirde $u^* \in U_*$ olduğunu yani $u^* = u^*(t) \in U$ elemanının (3.1.1.1) (3.1.1.3) optimal kontrol probleminin çözümü olduğunu ispatlayalım. (3.1.4.21) eşitsizliğinde gradyenti için olan (3.1.4.22) formülünü kullanırsak ve elde edilen eşitsizliği (-1) ile çarparsak $\forall u \in U$ için

$$< J_\alpha^{'}(u^*), u - u^* >_{L_2(0,T)} \geq 0 \qquad (3.1.4.32)$$

Teorem 3.1.3.1' de $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin $\alpha \geq 0$ için U kümesi üzerinde konveks olduğu ispatlandı. Bildiğimize göre $\left([17, sayfa 25]\right)$ $\forall u \in U$, $u^* \in U$ için

$$J_\alpha(u) \geq J_\alpha(u^*) + < J_\alpha^{'}(u^*), u - u^* >_{L_2(0,T)} \qquad (3.1.4.33)$$

şartını sağlanması $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin $\alpha \geq 0$ olduğunda U kümesi üzerinde konveks fonksiyonel olması için gerek ve yeterlidir, yani $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli konveks olduğundan (3.1.4.33) eşitliği geçerlidir. (3.1.4.33) eşitliğinde (3.1.4.32) ‘ yi dikkate alırsak $u^* \in U$ $\forall u \in U$ için

$$J_\alpha(u) \geq J_\alpha(u^*)$$

eşitliği elde edilir, yani $u^* \in U$ elemanı $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin minimum noktasıdır. Başka bir değişle $u^* \in U_* \subset U$ (3.1.1.1) (3.1.1.3) probleminin çözümüdür. Teorem 3.1.4.2 ispatlandı.

Bu bölümde ispatlanan Teorem 3.1.3.1 , 3.1.4.1 , 3.1.4.2'lerin hükümlerinden (3.1.1.1) (3.1.1.3) optimal kontrol probleminin $\alpha > 0$ için iyi konulmuş problem olduğu ortaya çıkar. Gerçekten teorem 3.1.3.1'e göre $J_{\alpha *} > -\infty$, $U_* \neq \emptyset$ ve U_* kümesi bir tek noktadan oluşmaktadır. $\alpha > 0$ olduğunda $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli $\alpha > 0$ sayısıyla kuvvetli konveks fonksiyoneldir. Çünkü $J_\alpha(u)$ fonksiyoneli (3.1.3.18) , formülüne göre $J_0(u)$

konveks ve $I(u)$ kuvvetli konveks fonksiyonlarının $\alpha > 0$ katsayısıyla toplamıdır ve

$$J_\alpha(u_\beta) \le \beta J_\alpha(u) + (1-\beta) J_\alpha(u) - \alpha\beta(1-\beta)\|u-v\|_{L_2(0,T)} \quad \forall u, v \in U, \forall \beta \in [0,1]$$

eşitsizliği geçerlidir. Diğer yandan $J_\alpha(u)$ fonksiyonelinin $\alpha > 0$ sayısıyla kuvvetli konveks fonksiyonel olması için $\forall u \in U$, $\forall u^* \in U$ olduğunda

$$J_\alpha(u) \ge J_\alpha(u^*) + < J'_\alpha(u^*), u - u^* > + \alpha\|u-u^*\|^2_{L_2(0,T)} \tag{3.1.4.34}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerek ve yeterlidir. $u^* \in U$ elemanı (3.1.1.1) (3.1.1.3) optimal kontrol probleminin çözümü ise (3.1.4.33) şartı sağlanır. Bu taktirde (3.1.4.34) 'den

$$\alpha\|u-u^*\|^2_{L_2(0,T)} \le J_\alpha(u) - J_\alpha(u^*) \tag{3.1.4.35}$$

eşitsizliği elde edilir. $u = u(t)$ yerine herhangi minimalleştirici $\{u_k\} = \{u_k(t)\} \subset U$

$J_\alpha(u^*) = J_{\alpha*}$ olduğundan (3.1.4.35)'den

$$\alpha\|u-u^*\|^2_{L_2(0,T)} \le J_\alpha(u_k) - J_{\alpha*} \tag{3.1.4.36}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu görürüz. Buradan

$$\lim_{k\to\infty} J_\alpha(u_k) - J_{\alpha*} \tag{3.1.4.37}$$

şartını sağlayan herhangi $\{u_k\} \subset U$ minimalleştirici dizisinin $\alpha > 0$ olduğunda

(3.1.1.1) (3.1.1.3) probleminin bir tek çözümü olan $u^* = u^*(t)$ 'ye yakınsadığı ispatlanır. Başka bir değişle $\alpha > 0$ olduğunda (3.1.1.1) (3.1.1.3) problemi iyi konulmuş problemdir.

Ancak $\alpha = 0$ olduğunda (3.1.1.1) (3.1.1.3) optimal kontrol problemi genelde karasız problemdir. Yani iyi konulmamış problemdir. [15,17] Gerçekten aşağıdaki örneği ele alalım.

ÖRNEK3.1.4.1 :

Farz edelim ki;

$$J_0(u) = \int_0^2 \left(x_0(t) - x_T(t)\right)^2 dt \tag{3.1.4.38}$$

fonksiyonelinin minimumunu

$U \equiv \left\{ u = u(t), u \in L_2(0,2), \|u\|_{L_2(0,2)} \le 1 \right\}$ kümesi üzerinde

$$\frac{dx_0(t)}{dt} = u(t), \frac{dx_T(t)}{dt} = u(t) \quad , \qquad 0 \le t \le 2 \tag{3.1.4.39}$$

$$x_0(0) = 0, x_T(T) = 0 \tag{3.1.4.40}$$

şartları altında bulmak gerekir.

Görüldüğü üzere (3.1.4.38) (3.1.4.40) problemi (3.1.1.1) (3.1.1.3) probleminin özel halidir. Gerçekten $T = 2$ $x_0 = x_T = 0$ $a(t) = 0, b(t) = 1, f(t) = 0$ $\alpha = 0$, $b_0 = 1$ alırsak (3.1.1.1) (3.1.1.4) probleminden (3.1.4.39) (3.1.4.40) problemini özel hal olarak elde ederiz. Herhangi $u \in U$ için $J_\alpha(u) \ge 0$ şartı sağlanır ve $J_{0*} = \inf J_0(u) = 0$ 'dır.Bu kesin alt sınıra $u^* = 0 \in U$ noktasında $J_0(u)$ fonksiyoneli sahip olur.Yani $J_{0*}(u^*) = J_0(u) = 0 = J_{0*}$ dır. Gerçekten $u = u(t) = 0$ fonksiyonunu (3.1.4.39) denklemlerinde yerine yazarsak ve (3.1.4.40) şartlarını kullanırsak $x_0(t) = x_T(t) \equiv 0, \forall t \in [0,T]$ elde edilir.Şunları $J_0(u)$ fonksiyoneli ifadesinde dikkate alırsak $J_0(0) = 0 = J_{0*}$ olur. Şimdi $u = u(t)$ 'nin yerine $u(t) = u_k(t) = \sin \pi kt, k = 1,2...$, fonksiyonlarını (3.1.4.39) denklemlerinde dikkate alalım. Kolaylıkla $x_{0k}(t) = x_{Tk}(t) = \frac{1}{\pi k}(1 - \cos \pi kt), k = 1,2...$ fonksiyonlarını buluruz $J_0(u)$ fonksiyonelinin $u = u_k, k = 1,2...$ için değerini bulalım:

$$J_0(u_k) = \int_0^2 (x_{0k}(t) - x_{Tk}(t))^2 dt = \int_0^2 \left(\frac{1}{\pi k}(1 - \cos \pi kt) - \frac{1}{\pi k}(1 - \cos \pi kt)^2 \right) dt = 0$$

Buradan $\lim_{k \to \infty} J(u_k) = J_{\alpha*} = 0$ bağıntısı elde edilir. Yani $\{u_k\} = \{\sin \pi kt\} \subset U$ dizisi $J_0(u)$ fonksiyoneli için minimalleştirici dizidir. Ancak bu dizi $u^*(t) = 0$ elemanını yakınsamıyor. Gerçekten ,

$$\|u_k - u^*\|^2_{L_2(0,2)} \quad \int_0^2 (\sin \pi kt - 0)^2 \, dt = \frac{1}{2}\int_0^2 (1 - \cos \pi kt) dt = \frac{1}{2}\int_0^2 dt - \frac{1}{2}\int_0^2 \cos \pi kt dt =$$

$$\frac{1}{2}.2 - \frac{1}{4\pi k} \sin 2\pi kt \Big|_0^2 = 1$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan $\lim_{k \to \infty} \|u_k - u^*\|^2_{L_2(0,T)} = 1 \ne 0$

yani $\{u_k\} \subset U$ minimalleştirici dizisi $u^*(t)=0$ elemanına yakınsamıyor.Böylece (3.1.4.38) (3.1.4.40) probleminin kararsız problem olduğu ispatlandı.Bu durum ise (3.1.4.38) , (3.1.4.40) probleminin $\alpha=0$ için genelde iyi konulmayan olduğunu kanıtlar $[15,17]$

3.2. Adi Diferansiyel Denklem İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminin Sonlu Farklar Yöntemiyle Çözümü

Bu alt bölümde adi diferansiyel denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin nümerik çözümüne sonlu farklar yöntemi uygulanmaktadır.Söylemek gerekir ki ,toplanmış parametreli sistemler için optimal kontrol problemlerinin sonlu farklar yöntemiyle çözümü önce $[3,4,12,17]$ vb. çalışmalarında farklı yazarlarca incelenmiştir.Ancak incelenen problem önceki çalışmalardaki problemlerden her açıdan farklı olduğundan sonlu farklar yönteminin şu anki durumunda yakınsaklığının incelenmesi gerek teorik gerekse de pratik açıdan önem taşır.

3.2.1. Problemin Diskritleştirilmesi

Aşağıdaki optimal problemini göz önüne alalım:

$$J(u)=\|x_o(.,u)-x_T(.,u)\|^2_{L_2(0,2)} \tag{3.2.1.1}$$

fonksiyonelinin minimumunu

$$U \equiv \left\{u=u(t): u\in L_2(0,T), \|u\|_{L_2(0,T)} \le b_\alpha\right\}$$

kümesi üzerinde

$$\frac{dx_p(t)}{dt}=a(t)x_p(t)+b(t)u(t)+f(t), \qquad p=0,T \qquad 0<t<T \tag{3.2.1.2}$$

$$x_0(0)=x_0, x_T\left(T\right)=x_T \tag{3.2.1.3}$$

şartları altında bulmak gerekir.Burada $T>0, b_0>0, x_0, x_T$ verilen sayıları $a(t), b(t)$ fonksiyonları (0,T) aralığında ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup (3.2.1.4) şartlarını sağlar ve $f(t)$ de verilen bir fonksiyondur. Söylemek gerekir ki (3.2.1.1) (3.2.1.3) optimal kontrol problemi (3.1.1.1) (3.1.1.3) probleminin $\alpha = 0$ haline karşılık gelen özel halidir. Teorem 3.1.1.1 ‘den (3.2.1.1) (3.2.1.3) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğu elde edilir,Yani ; $U_* \equiv \left\{ u^* \in U : J(u^*) = J_* = \inf_{u \in U} \right\} \neq \varnothing$ ’dir.

Şimdi (3.2.1.1) (3.2.1.3) problemini farklı diskritleştirelim. Bu amaçla $[0,T]$ aralığının N alt aralığa $\{t_k, k = \overline{0,N}\}$ noktaları ile ayıralım. Burada $0 = t_0 < t_1 < .... < t_{N-1} < t_N = T$ şartı sağlanır (3.2.1.2) denklemini Euler şemasının yardımıyla sonlu farklı denklemlerle değiştirelim.Bunun yanı sıra (3.2.1.1) integralini dikdörtgenler formülüyle yaklaşık olarak değişirsek, sonuçta bir sonraki ayrık optimal kontrol problemini elde ederiz:

$$I_N\left([u]_N\right) = \sum_{k=0}^{N-1} \left| x_0^k - x_T^k \right|^2 \Delta t_k \tag{3.2.1.4}$$

fonksiyonun minimumunu

$$U_N \equiv \left\{ [u]_N : [u]_N = \left(u_0, u_1, ..., u_{N-1}\right), \left(\sum_{k=0}^{N-1} (u_k)^2 \Delta t_k \right)^{\frac{1}{2}} \leq b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$x_0^{a+1} = x_0^k + \Delta t_k \left(a(t) x_0^k + b_k u_k + f_k \right), k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.1.5}$$

$$x_T^{k+1} = x_T^k + \Delta t_k \left(a(t) x_T^{k+1} + b_k u_k + f_k \right), k = \overline{N-1, 0} \tag{3.2.1.6}$$

$$x_0^0 = x_0, x_T^N = x_T \tag{3.2.1.7}$$

şartları altında bulmak gerekir. Burada $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k, a_k, b_k, f_k$ ağ fonksiyonları olup aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$a_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t) dt, k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.1.8}$$

$$b_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} b(t) dt, k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.1.9}$$

$$f_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(t) dt, k = \overline{0, N-1} \quad . \tag{3.2.1.10}$$

$$x_p^k = x_p^k\left([u]_n\right), p = 0, T, k = \overline{0, N}$$

ağ fonksiyonları (3.2.1.5) (3.2.1.7) fark şemasının $[u]_n \in U_N$ için çözümüdür. $L_2(0,T)$ uzayının sonlu aynısı olan sonlu boyutlu L_{2N} uzayının elemanları olan $[u]_n = (u_0, u_1, ..., u_{N-1})$ $[v]_n = (v_0, v_1, ..., v_{N-1})$ için çarpımı aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$< [u]_n, [v]_n >_{L_{2N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k u_k v_k \, .$$

Norm ise;

$\left\| [u]_N \right\|_{L_{2N}} < \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k (u_k)^2 \right)^{1/2} < +\infty$ formülü ile tanımlanır. Her bir $[u]_n \in U_N$ için (3.2.1.5) (3.2.1.7) fark şemasını ele alalım.

TEOREM 3.2.1.1 : Farz edelim ki $a(t), b(t)$ ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup (3.1.1.4) şartlarını , f(t) ise (3.1.1.5) şartını sağlarsın. Ayrıca farz edelim ki,

$$d_N = \max_{0 \le k \le N} \Delta t_k \le \frac{T}{N} M \tag{3.2.1.11}$$

şartı sağlansın. Burada $M > 0$ bilinen sabittir. Bu taktirde $\forall [u]_n \in U_N$ için

$$\max_{0 \le k \le N} \left| x_k^p \left([u]_N \right) \right| \le c_{15}, \; p = 0, T \tag{3.2.1.12}$$

eşitsizliği geçerlidir.Burada $c_{15} > 0$ sabit olup K ve N ‘den bağımsızdır.

İSPAT : (3.2.1.5) (3.2.1.6) denklemlerinde k’yi j ile değişip birincisini j üzerinden 0’dan k’ya kadar ,ikincisini ise j üzerinden $k+1$’den N’ye kadar toplarsak,

$$x_0^{k+1} = x_0 + \sum_{j=0}^{k} \Delta t_j \left(a_j x_0^j + b_j u_j + f_j \right), k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.1.13}$$

$$x_T^k = x_T - \sum_{j=0}^{k} \Delta t_{j-1} \left(a_{j-1} x_T^j + b_{j-1} u_{j-1} + f_{j-1} \right), k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.1.14}$$

Denklemlerini elde ederiz. Önce (3.2.1.13) denkleminin çözümünü değerlendirelim. (3.2.1.13)’ü kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\left| x_0^{k+1} \right| \le \left| x_0 \right| + \sum_{j=0}^{k} \Delta t_j \left| a_j \right| \left| x_0^j \right| + \sum_{j=0}^{k} \Delta t_j \left| b_j \right| \left| u_j \right| + \sum_{j=0}^{k} \Delta t_j \left| f_j \right| \quad , \quad k = \overline{0, N-1}$$

(3.1.1.4) şartlarını (3.2.1.8) , (3.2.1.5) formüllerini ve (3.2.1.11)’ i kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|x_0^{k+1}\right| \le \left|x_0\right| + d_N a_{\max} \sum_{j=0}^{k} \left|x_0^j\right| + b_{\max} \sum_{j=0}^{k} \Delta t_j \left|u_j\right| + \sum_{j=0}^{k} \Delta t_j \left| f_j \right| \quad , \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Burada Cauchy Bunyakowski eşitsizliğini ikinci ve üçüncü terimlerine uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|x_0^{k+1}\right| \le \left|x_0\right| + d_N a_{\max} \sum_{j=0}^{k} \left|x_0^j\right| + \sqrt{T} b_{\max} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \Delta t_j \left|u_j\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{T} \left(\sum_{j=0}^{N-1} \Delta t_j \left| f_j \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Bu eşitsizlikte L_{2N} uzayının normunu kullanırsak ,

$$\left|x_0^{k+1}\right| \le \left|x_0\right| + \sqrt{T} b_{\max} \left\| [u]_N \right\|_{L_{2N}} + \sqrt{T} \left\| [t]_N \right\|_{L_{2N}} + d_N a_{\max} \sum_{j=0}^{k} \Delta t_j \left|x_j^k\right| , k = \overline{0, N-1} \quad .$$

Burada $[f]_n = \left(f_0, f_1, ..., f_{N-1} \right)$ dır. Bu eşitsizliğe Gronwall Lemmasının diskrit aynısını uygularsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz.

$$\left|x_0^k\right| \le c_{16} \left(\left|x_0\right| + \left\| [u]_N \right\|_{L_{2N}} + \left\| [f]_N \right\|_{L_{2N}} \right) \tag{3.2.1.15}$$

herhangi $k \in \{0,1,2,....N\}$, burada $c_{16} > 0$ sayısı k ’dan bağımsızdır. Bu kestirimin elde edilmesini aynı olarak (3.2.1.14)’den aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left|x_T^k\right| \le c_{17} \left(\left|x_T\right| + \left\| [u]_N \right\|_{L_{2N}} + \left\| [f]_N \right\|_{L_{2N}} \right) \forall k \in \{0,1,2,....N\} \tag{3.2.1.16}$$

Burada $c_{17} > 0$ sayısı k ’dan bağımsızdır. Böylece (3.2.1.15) ve (3.2.1.16) kestirimlerden (3.2.1.12) eşitsizliğinin geçerli olduğunu ispatlamış oluyoruz. Teorem 3.2.1.1 ispatlandı.

3.2.2 Fark Şemasının Hatası :

Şimdi (3.2.1.5) ve (3.2.1.7) fark şemasının hatasını değerlendirmeye çalışalım. Bu amaçla ,

$$Q_n : L_2(0,T) \to L_{2N}, Q_N(u) = (w_0, w_1, ..., w_{N-1}) = [w]_n , w_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(t) dt ,$$

$$k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.1.21}$$

biçiminde verilen Q_n operatörünü tanımlayalım. Farz edelim ki, $y_p^k = x_p(t_k), p = 0, T, k = \overline{0, N}$ olsun , yani $y_p^k, p = 0, T, k = \overline{0, N}$ değerleri (3.1.1.2) ve

(3.1.1.3) Cauchy probleminin çözümünü $\{t_k, k = 0, N\}$ düğüm noktalarında değerleri olsun. (3.2.1.5) (3.2.1.7) fark şemasının çözümü ile $y_p^k, p = 0, T, k = \overline{0, N}$ ile gösterelim yani ,

$$z_p^k = x_p^k - y_p^k \quad p = 0, T, k = \overline{0, N} \tag{3.2.2.2}$$

olsun .

$z_p^k, p = 0, T, k = \overline{0, N}$ fonksiyonu aşağıdaki sistemin çözümüdür:

$$z_0^{k+1} = z_0^k + \Delta t_k a_k z_0^k + \Delta t_k F_{0k} = \overline{0, N-1} \tag{3.2.2.3}$$

$$z_T^k = z_T^{k+1} - \Delta t_k a_k z_T^{k+1} - \Delta t_k F_{Tk} = \overline{N-1, 0} \tag{3.2.2.4}$$

$$Z_0^0, Z_T^N = 0 \tag{3.2.2.5}$$

$$F_{0k} = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{dx_0(t)}{dt} - a(t)x_0(t) - b(t)u(t) - f(t) \right] -$$

$$-(J_0^{k+1} - J_0^k) \big/ \Delta t_k = a_k J_0^k + b_k u_k + f_k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.2.6}$$

$$F_{Tk} = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\frac{dx_T(t)}{dt} - a(t)x_T(t) - b(t)u(t) - f(t) \right] -$$

$$-(y_0^{k+1} - y_0^k) \big/ \Delta t_k = a_k y_0^k + b_k u_k + f_k = \overline{0, N-1} \ . \tag{3.2.2.7}$$

Şimdi $Z_p^k, p = 0, T, k = \overline{0, N}$ ağ fonksiyonlarını $F_{pk}, P = 0, T$, $k = \overline{0, N-1}$ ağ fonksiyonları ile değerlendirelim. (3.2.2.3) (3.2.2.4) denklemlerini kullanarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$z_0^{k+1} = \sum_{j=0}^{k} \Delta t_j a_j z_0^j + \sum_{j=0}^{k} \Delta t_j F_{0j} k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.2.8}$$

$$Z_T^{k+1} = \sum_{j=k+1}^{N} \Delta t_{j-1} a_{j-1} z_0^j - \sum_{j=k+1}^{N} \Delta t_{j-1} F_{Tj-1}, k = \overline{N-1, 0} \tag{3.2.2.9}$$

Bu eşitsizliklerden (3.2.1.8) formülünü ve (3.1.1.4) (3.2.1.11) şartlarını kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left| z_0^{k+1} \right| \le d_N a_{\max} \sum_{j=0}^{k} \left| z_0^j \right| + \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t_j \left| F_{0j} \right| \quad k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.2.10}$$

$$\left|z_T^{k+1}\right| \le d_N a_{\max} \sum_{j=k+1}^{N} \left|z_0^j\right| + \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t_j \left|F_{Tj}\right| \quad k = \overline{N-1,0} \quad . \tag{3.2.2.11}$$

Bu eşitsizliklerde Gronwall Lemmasının diskrit aynısını $[17]$ uygularsak kolaylıkla

$$\left|z_k^p\right| \le c_{18} \sum_{j=0}^{N-1} \Delta t_j \left|F_{pj}\right|, \; p = 0, T, k = \overline{0, N} \tag{3.2.2.12}$$

kestiriminin geçerli olduğu hüküm edebiliriz. Bu kestiriminin sağ tarafında yer alan $F_{Pj}, p = 0, T, j = \overline{0, N-1}$ ağ fonksiyonlarını değerlendirelim. (3.2.2.6) formülünü kullanarak , aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{0k} = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{dx_0(t)}{dt} dt - (y_0^{k+1} - y_0^k) \Big/ \Delta t_k + \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{k+1} \left(a_k y_0^k - a(t) x_0(t)\right) dt +$$

$$+ \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_k+1} \left(b_k u_k - b(t) u(t)\right) dt - \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_k+1} f(t) dt + f_k =$$

$$\frac{1}{\Delta t_k} \left[\left(x_0(t_{k+1}) - x_0(t_k)\right) - \left(y_0^{k+1} - y_0^k\right)\right] + \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[a_k y_0^k - a(t) x_0(t)\right] dt +$$

$$\frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[b_k u_k - b(t) u(t)\right] dt + f_k \quad , k = \overline{0, N-1}$$

Burada $y_0^k = x_0(t_k)$ olduğunu dikkate alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$F_{0k} = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+!}} \left[a_k x_0(t_k) - a(t) x_0(t)\right] dt + \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+!}} \left[b_k u_k - b(t) u(t)\right] dt$$

$$, k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.2.13}$$

Aynı biçimde $F_{Tk} \; , k = \overline{0, N-1}$ ağ fonksiyonu içinde bir sonraki formüle yazabiliriz:

$$F_{Tk} = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[a_k x_T(t_{k+1}) - a(t) x_T(t)\right] dt + + \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[b_k u_k - b(t) u(t)\right] dt$$

$$, k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.2.14}$$

Şimdi F_{pk} , p=0,T , $, k = \overline{0, N-1}$ ağ fonksiyonlarına ağ fonksiyonu toplamı biçiminde yazalım:

$$F_{0k} = F_{0k}{}^1 + F_{0k}{}^2 \; , k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.2.15}$$

$$F_{Tk} = F_{Tk}{}^1 + F_{Tk}{}^2 \; , k = \overline{0, N-1} \tag{3.2.2.16}$$

Burada

$$F_{0k}^{\ 1} = \frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[a_k x_0(t_k) - a(t)x_0(t)\right]dt \qquad (3.2.2.17)$$

$$F_{0k}^{\ 1} = \frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[a_k x_T(t_{k+1}) - a(t)x_T(t)\right]dt \qquad (3.2.2.18)$$

$$F_{0k}^{\ 2} = F_{Tk}^{\ 2} = \frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[b_k u_T - b(t)u(t)\right]dt\ , k = \overline{0, N-1} \qquad (3.2.2.19)$$

dır. Önce $F_{0k}^{\ 1}, k = \overline{0, N-1}$ ağ fonksiyonuna değerlendirelim. (3.2.2.17) formülüne göre,

$$F_{0k}^{\ 1} = \frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[a_k x_0(t_k) - a(t)x_0(t)\right]dt = \frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(a_k - a(t)\right)x_0(t)dt +$$

$$\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t)\left(x_0(t_k) - x_0(t)\right)dt = F_{0k}^{\ 11} + F_{0k}^{\ 22}\ , k = \overline{0, N-1} \qquad (3.2.2.20)$$

eşitliğini yazabiliriz. $F_{0k}^{\ 11}, k = \overline{0, N-1}$ ağ fonksiyonunu göz önüne aldım. Bu taktirde (3.2.1.8) formülüne göre

$$F_{0k}^{\ 1} = \frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left[\left(a_k - a(t)\right)x_0(t_k)\right]dt = x_0(t_k)\left[a_k - \frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t)dt\right] =$$

$$x_0(t_k)\left(a_k - a_u\right) = 0 \quad , k = \overline{0, N-1} \qquad (3.2.2.21)$$

olur. $F_{0k}^{\ 12}$ için olan formülü kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|F_{0k}^{\ 12}\right| = \left|\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} a(t)\left(x_0(t_k) - x_0(t)\right)dt\right| \le \frac{a_{\max}}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|x_0(t_k) - x_0(t)\right|dt =$$

$$\frac{a_{\max}}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\int_{t_k}^{t}\frac{dx_0(\tau)}{d\tau}d\tau\right|dt \le \frac{a_{\max}}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\int_{t_k}^{t}\left|\frac{dx_0(\tau)}{d\tau}\right|dt \le$$

$$a_{\max}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\frac{dx_0(t)}{dt}\right|dt\ , k = \overline{0, N-1}$$

Böylece buradan ve (3.2.2.21)’den (3.2.2.20) formülüne göre $F_{0k}^{\ 1}$ ağ fonksiyonunu aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\left|F_{0k}^{\ 1}\right| \le a_{\max}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\frac{dx_0(t)}{dt}\right|dt\ , k = \overline{0, N-1} \qquad (3.2.2.22)$$

Aynı biçimde $F_{Tk}{}^{1}\ ,k=\overline{0,N-1}$ ağ fonksiyonunu da

$$\left|F_{Tk}{}^{1}\right|=a_{\max}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\frac{dx_0\left(t\right)}{dt}\right|dt\ ,k=\overline{0,N-1} \tag{3.2.2.23}$$

biçiminde değerlendirmiş oluyoruz.

Şimdi $F_{0k}{}^{2}$, $F_{Tk}{}^{2}$ $,k=\overline{0,N-1}$ ağ fonksiyonlarına bakalım. (3.2.2.19) formülünü kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{0k}{}^{2}=\frac{1}{\Delta t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(b_k u_k-b(t)u(t)\right)dt=\frac{1}{\Delta t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(b_k-b\left(t\right)\right)u\left(t\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\Delta t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}b_k\left(u_k-u\left(t\right)\right)dt=F_{0k}{}^{21}+F_{0k}{}^{22}\ ,k=\overline{0,N-1} \tag{3.2.2.24}$$

$F_{0k}{}^{2}$ için formüle göre ;

$$\left|F_{0k}{}^{21}\right|=\left|\frac{1}{\Delta t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left(u_k-b(t)\right)u(t)dt\right|\le\left(\frac{1}{\Delta t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left|b_k-b(t)\right|^{2}dt\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\Delta t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left|u(t)\right|^{2}dt\right)^{\frac{1}{2}}\ ,k=\overline{0,N-1} \tag{3.2.2.25}$$

eşitsizliğini elde ederiz. $F_{0k}{}^{22}$ için olan formüle ve (3.2.2.1) formülüne göre aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$F_{0k}{}^{22}=\frac{1}{\Delta t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}b_k\left(u_k-u(t)\right)dt=b_k u_k-b_k\frac{1}{\Delta t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}u(t)dt=$$

$$b_k\left(u_k-w_k\right)\ ,k=\overline{0,N-1}$$

Buradan da

$$\left|F_{0k}{}^{22}\right|\le\left|b_k\right|\left|u_k-w_k\right|\le b_{\max}\left|u_k-w_k\right|\ ,k=\overline{0,N-1} \tag{3.2.2.26}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği ve (3.2.2.25)'i kullanarak (3.2.2.24)'den $F_{0k}{}^{2}=F_{Tk}{}^{2}$ için aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu hüküm edebiliriz.

$$\left|F_{0k}{}^{2}\right|=\left|F_{Tk}{}^{2}\right|\le b_{\max}\left|u_k-w_k\right|\le\left(\frac{1}{\Delta t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\left|b_k-b(t)\right|^{2}dt\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}|u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}, k=\overline{0,N-1} \tag{3.2.2.27}$$

Böylece (3.2.2.22) ve (3.2.2.27) eşitsizliklerinin yardımıyla F_{0k} ağ fonksiyonu için (3.2.2.15) formülünden aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|F_{0k}| \le |F_{0k}{}^1| + |F_{0k}{}^2| \le a_{\max}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\frac{dx_0(t)}{dt}\right|dt + b_{\max}|u_k - w_k| + \left(\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}|u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}|b_k - b(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}, k=\overline{0,N-1} \tag{3.2.2.28}$$

Aynı biçimde F_{Tk} için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|F_{Tk}| \le |F_{Tk}{}^1| + |F_{Tk}{}^2| \le a_{\max}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left|\frac{dx_T(t)}{dt}\right|dt + b_{\max}|u_k - w_k| \left(\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}|u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{1}{\Delta t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}}|b_k - b(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}, k=\overline{0,N-1} \tag{3.2.2.29}$$

(3.2.2.28) eşitsizliğini ve P=0 için (3.2.2.12) kestirimini kullanırsak , yazabiliriz:

$$c_{18}a_{\max}\sum_{j=0}^{N-1}\Delta t_j\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left|\frac{dx_0(t)}{dt}\right|dt + c_{18}a_{\max}\sum_{j=0}^{N-1}\Delta t_j|u_j - w_j| +$$

$$c_{18}\sum_{j=0}^{N-1}\left[\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}|u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}|b_k - b(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right], k=\overline{0,N} \ . \tag{3.2.2.30}$$

Aynı biçimde (3.2.2.29) eşitsizliğini ve P=T için (3.2.2.12) kestirimini kullanarak $z_T^k = 0, N$ için aşağıdaki eşitsizliğini elde ederiz:

$$|z_T^k| \le c_{18}\sum_{j=0}^{N-1}\Delta t_j|F_{Tj}| \le c_{18}a_{\max}\sum_{j=0}^{N-1}\Delta t_j\int_{t_j}^{t_{j+1}}\left|\frac{dx_T(t)}{dt}\right|dt + c_{18}b_{\max}\sum_{j=0}^{N-1}\Delta t_j|u_j - w_j| +$$

$$c_{18}\sum_{j=0}^{N-1}\left[\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}|u(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\times\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}}|b_k - b(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right], k=\overline{0,N} \ . \tag{3.2.2.31}$$

Şimdi önce (3.2.2.30) ve (3.2.2.31) eşitsizliklerinin sağ tarafındaki birinci mertebeden türevleri değerlendirelim.Bu amaçla p=0 için (3.2.1.2) den yaralanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\int_0^T \left\| \frac{dx_0(t)}{dt} \right\|^2 dt \le \int_0^T \left(|a(t)||x_0(t)| \right) + \left(|b(t)||u(t)| + |f(t)| \right)^2 dt \le$$

$$3a_{\max}^2 \int_0^T |x_0(t)|^2 dt + 3b_{\max}^2 \int_0^T |u(t)|^2 dt + 3\int_0^T |f(t)|^2 dt$$

Bu eşitsizlikte

$$\left| x_0^{k+1} \right| \le |x_0(t)| \le e^{a_{\max} T} \left(|x_0(t)| + \sqrt{T} b_{\max} \|u\|_{L_2(0,T)} + \sqrt{T} \|t\|_{L_2(0,T)} \right)$$

eşitsizliğini kullanarak , kolaylıkla

$$\left\| \frac{dx_0(t)}{dt} \right\|_{L_2(0,T)} \le c_{19} \left(|x_0| + \sqrt{T} \|u\|_{L_2(0,T)} b_{\max} + \sqrt{T} \|t\|_{L_2(0,T)} \right) \qquad (3.2.2.32)$$

kestirimini elde ederiz:Burada $c_{19} > 0$ bilinen sabittir. Aynı biçimde aşağıdaki kestirimi de elde edebiliriz:

$$\left\| \frac{dx_T(t)}{dt} \right\|_{L_2(0,T)} \le c_{20} \left(|x_0| + \sqrt{T} \|u\|_{L_2(0,T)} b_{\max} + \sqrt{T} \|t\|_{L_2(0,T)} \right) \qquad (3.2.2.33)$$

(3.2.2.32) ve (3.2.2.33)’den

$$\left\| \frac{dx_p}{dt} \right\| \le c_{21} \qquad , \quad \mathrm{P=0,T} \qquad (3.2.2.34)$$

kestiriminin geçerli olduğunu elde ederiz. (3.2.2.30) eşitsizliğine geriye dönersek, oradan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\left| z_0^k \right| \le c_{18} d_N a_{\max} \sqrt{T} \left\| \frac{dx_0}{dt} \right\|_{L_2(0,T)} + c_{18} b_{\max} \sqrt{T} \left\| [u]_N - [w]_N \right\|_{L_{2N}} +$$

$$c_{18} \sum_{j=0}^{N-1} \left[\left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| b_j - b(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

Burada $u \in U$ olduğunu ve (3.2.2.34) kestirimini $p = 0$ için kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|z_0^k\right| \le c_{19} d_N + c_{18} b_{\max} \sqrt{T} \left\| [u]_N - [w]_N \right\|_{L_{2N}} + c_{18} b_0 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| b_j - b(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$, k = \overline{0, N} \qquad (3.2.2.35)$$

Burada $c_{22} > 0$ sabiti k'dan bağımsızdır. Aynı biçimde (3.2.2.31) eşitsizliğini ve (3.2.2.34) kestirimini $p = T$ için kullanırsak $z_T^k = 0, N$ için

$$\left|z_0^k\right| \le c_{23} d_N + c_{18} b_{\max} \sqrt{T} \left\| [u]_N - [w]_N \right\|_{L_{2N}} + c_{18} b_0 \left(\sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| b_j - b(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \qquad (3.2.2.36)$$

kestiriminin geçerli olduğunu elde ederiz. Burada $c_{23} > 0$ sayısı K'dan bağımsızdır. Görüldüğü üzere (3.2.2.35) ve (3.2.2.36) kestirimlerinin sağ taraflarında değerlendirilmemiş bir terimi yer almaktadır. Bu terimi değerlendirelim. Şarta göre $\mathrm{b}(\mathrm{t})$ fonksiyonu $[0,T]$ aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyondur ve $b_j, j = \overline{0, N-1}$ ağ fonksiyonu $\mathrm{b}(\mathrm{t})$fonksiyonunun $\left[t_j, t_{j+1}\right], j = \overline{0, N-1}$ aralıkları üzerinden Steklo anlamında ortalamasıdır. İlave olarak farz edelim ki $b(t)$ fonksiyonu

$$b \in w_2^1(0,T) \qquad (3.2.2.37)$$

şartını da sağlansın.Bu şartları göz önünde bulundurarak

$$\left(\sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| b_j - b(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

terimini değerlendirelim. $b_j, j = \overline{0, N-1}$ için formülü kullanarak aşağıdaki eşitsizliğini elde ederiz.

$$\sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \frac{1}{\Delta t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} b(\tau) d\tau - b(t) \right|^2 dt = \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \frac{1}{\Delta t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(b(\tau) - b(t) \right) d\tau \right|^2 dt =$$

$$\sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\frac{1}{\Delta t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t}^{\tau} \frac{db|z|}{dz} dz d\tau \right]^2 dt \le \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\frac{1}{\Delta t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{db|z|}{dz} dz d\tau \right]^2 dt \le$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left[\frac{1}{\Delta t_j} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \sqrt{\Delta t_j} \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \frac{db|z|}{dz} \right|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \right]^2 dt =$$

$$\leq \sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (\Delta t_j)^2 \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| \frac{db|z|}{dz} \right|^2 dz \leq d_N^2 \left\| \frac{db}{dt} \right\|^2_{L_2(0,T)} ,$$

Böylece ,

$$\left(\sum_{j=0}^{N-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left| b_j - b(t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq d_N^2 \left\| \frac{db}{dt} \right\|_{L_2(0,T)} , \qquad (3.2.2.38)$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğunu kanıtlamış oluruz. (3.2.2.37) şartını , (3.2.2.38)eşitsizliğini (3.2.2.35) ve (3.2.2.36) eşitsizliğinde dikkate alırsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz.

$$\left| z_p^k \right| \leq c_{23} \left(d_N + \left\| [u]_N - \varphi_N(u) \right\|_{L_{2N}} \right), \; c_{18} b_{\max} \sqrt{T} \left\| [u]_N - [w]_N \right\|_{L_{2N}}$$

$$\forall k \in \{0,1,...,N\}, P = 0,T \quad , \qquad (3.2.2.39)$$

burada $c_{24} > 0$ sabiti k ve d_N 'den bağımsızdır. Böylece aşağıdaki teorem ispatlandı:

TEOREM3.2.2.1 : Farz edelim ki ,teorem 3.2.2.1 in şartları sağlansın ve $b(t)$ fonksiyonu ilave olarak (3.2.2.37) şartını da sağlasın. Bu taktirde $\forall u \in U$ ve $\forall [u]_N \in U_N$ için (3.2.2.39) kestirimi geçerlidir.

3.2.3. Sonlu Fark Yaklaşımlarının Fonksiyonele Göre Yakınsaklığı :

Bu alt bölümde (3.2.1.1) – (3.2.1.3) optimal kontrol problemine uygulanan sonlu farklar yönteminin yakınsaklığını inceleyeceğiz. Bu amaçla (3.2.1.1) fonksiyoneli ile (3.2.1.4) fonksiyonu arasındaki farkı değerlendirelim.

TEOREM 3.2.3.1 : Farz edelim ki ,teorem 3.2.2.1'in şartları sağlansın. Bu taktirde $\alpha \forall u \in U$ ve $\forall [u]_N \in U_N$ için

$$\left| J(u) - I_N([u]_N) \right| \le c_{25} \left(d_N + \left\| [u]_N - Q_N(u) \right\|_{L_{2N}} \right) \tag{3.2.3.1}$$

Burada $c_{25} > 0$ sayısı d_N 'den bağımsızdır.

İSPAT : (3.2.1.1) , (3.2.1.4) formüllerini kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\left| J(u) - I_n[u]_n \right| = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\left(\left| x_0(t) - x_T(t) \right| - \left| x_0^k - x_T^k \right| \right] \left(\left| x_0(t) - x_T(t) \right| + \left| x_0^k - x_T^k \right| \right) \right] dt$$

Buradan Cauchy-Bunyakowskil eşitsizliğini uygulayarak

$$\left| J(u) - I_n[u]_n \right| \le \sum_{k=0}^{N-1} \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\left| x_0(t) + \left| x_T(t) \right| + \left| x_0^k \right| + \left| x_T^k \right| + \right| \right)^2 dt \right)^2 \times$$

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\left| x_0(t) - x_0^k \right| + \left| x_T(t) - x_T^k \right| \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizlikte (3.1.3.10) ve (3.2.1.12) eşitsizlikleri kullanarak aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu göstermiş oluyoruz:

$$\left| J(u) - I_n[u]_n \right| \le c_{26} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\left| x_0(t) - x_0^k \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\left| x_0(t) - x_0^k \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right] = c_{26}[J_0 + J_T] \tag{3.2.3.2}$$

Burada $c_{26} > 0$ sayısı N 'den bağımsızdır J_0 için olan formüle göre elde ederiz.

$$(J_0)^2 = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| x_0(t) - x_0^k \right|^2 dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| x_0(t) - x_0(t_k) + x_0(t_k) + x_0^k \right|^2 dt \le$$

$$\le 2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| x_0(t) - x_0(t_k) \right|^2 dt + 2 \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| x_0(t_k) - x_0^k \right|^2 dt = J_{01} + J_{02} \tag{3.2.3.3}$$

J_{02} için olan formüle ve $z_0^k = x_0(t_k) - x_0^k$ formülünü kullanarak (3.2.2.39) kestiriminin yardımıyla aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$J_{02} \le c_{27}\left(d_N + \left\|[u]_N - \varphi_N(u)\right\|_{L_{2N}}\right)^2 \qquad (3.2.3.4)$$

Burada $c_{27} > 0$ sabiti d_N ’den bağımsızdır. Şimdi J_0 terimini değerlendirelim J_{01} için olan formüle göre aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$J_{01} = 2\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|x_0(t) - x_0(t_k)\right|^2 dt = 2\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|\int_{t_k}^{t} \frac{x_0(t)}{d\tau} d\tau\right|^2 dt \le$$

$$2\sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}} \left[\int_{t_k}^{t} \left|\frac{dx_0(\tau)}{d\tau}\right| d\tau\right]^2 dt \le 2\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \left(\int_{t_j}^{t_{j+1}} \left|\frac{dx_0(\tau)}{d\tau}\right| d\tau\right)^2 dt \qquad (3.2.3.5)$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafında Caucby-Bunyakowskil eşitsizliğini uygulayıp (3.2.2.34) $p = 0$ için kullanırsak, $J_{01} \le c_{28} d_N^2$ eşitsizliğini elde ederiz.Burada $c_{28} > 0$ sayısı d_N ’den bağımsızdır. Bu eşitsizliği (3.2.3.4) eşitsizliğini (3.2.3.3)’de kullanırsak oradan

$$(J_0)^2 \le c_{29}\left(d_N + \left\|Q_N(u) - [u]_N\right\|_{L_{2N}}\right)^2 \qquad (3.2.3.6)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu alırız.

Aynı biçimde J_T için de aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$(J_T)^2 \le c_{30}\left(d_N + \left\|Q_N(u) - [u]_N\right\|_{L_{2N}}\right)^2 \qquad (3.2.3.7)$$

Burada $c_{30} > 0$ sabiti d_N ’den bağımsızdır.Böylece (3.2.3.6) ve (3.2.3.)eşitsizlerini kullanarak (3.2.3.2) eşitsizliğinden teoremin hükmünün geçerli olduğunu ispatlarız. Teorem 3.2.3.1 ispatlandı.

Sonlu farklar yönteminin fonksiyonele göre yakınsaklığını ispatlamak için önce iki yardımcı lemmayı ispatlayalım.

LEMMA 3.2.3.1 : Farz edelim ki ,teorem 3.2.3.1 ‘in şartları sağlansın.Bunun yanı sıra fark edelim ki , $Q_N(u)$ operatorü $\forall u \in U$ için (3.2.2.1) formülü ile tanımlansın. Bu taktirde kestirimi geçerlidir.

$$Q_N(u) \in U_N \text{ ve } \left|J(u) - I_N([u]_N)\right| \le c_{25} d_N \qquad (3.2.3.8)$$

İSPAT : U kümesinden herhangi $u \in U$ elemanını alalım. (3.2.2.1) formülünü kullanarak

$$Q_N(u) = [w]_N = (w_0, w_1, ..., w_{N-1})$$

$$w_k = \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(t)dt, u \in U$$

Eşitliklerini yazabiliriz.Buradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k |u_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \| [w]_N \|_{L_{2N}} = \| [Q]_N \|_{L_{2N}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \left| \frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(t)dt \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \left[\frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} u(t)dt \right]^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Cauchy-Bunyakowskil eşitsizliğini uygulayarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|Q_N(u)\|_{L_{2N}} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \left[\frac{1}{\Delta t_k} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |u(t)|^2 dt \right] \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |u(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{L_2(0,T)} \leq b_0$$

Buradan $Q_N(u) \in U_N$ olduğu görülür.Bu taktirde $[u]_N \in U_N$ elemanının yerine $[u]_N = Q_N(u) \in U_N$ elemanını alıp Teorem 3.2.3.1'i ispatlarsak,

$$|J(u) - I_N(Q_N(u))| \leq c_{25} d_N + \left(\sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k |u_k - w_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_{25} d_N$$

eşitsizliğinin geçerli olduğuna varırız.Buradan da lemma 3.2.3.1 ispatlandı.

Farz edelim ki, P_N operatorü $P_N : L_{2N} \to L_2(0,T)$

$$\tilde{u}(t) = P_N([u]_N) = u_k, t_k \leq t \leq t_{k+1} \qquad (3.2.3.9)$$

formülü ile tanımlansın.

LEMMA : 3.2.3.2 : Farz edelim ki P_N operatorü (3.2.3.9) formülü ile tanımlansın ve teorem 3.2.3.1'in şartları sağlansın. Bu taktirde $P_N([u]_N) \in U$ ve

$$\left| J\left(P_N([u]_N)\right) - I_N([u]_N) \right| \leq c_{25} d_N \;\; P_N([u]_N) \in U \qquad (3.2.3.10)$$

Kestirimi geçerlidir.

İSPAT : U_N kümesinden herhangi $[u]_N \in U$ elemanını alalım P_N'in formülüne göre yazabiliriz:

$$\|\tilde{u}\|_{L_2(0,T)} = \left(\int_0^T |\tilde{u}|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\left|P_N([u]_N)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|P_N([u]_N)\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} |u_k|^2 \, dt\right)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \, |u_k|^2 = \left\|[u]_N\right\|_{L_{2N}} \le b_0$$

Buradan $P_N([u]_N) \in U$ olduğu görülür. Bu nedenle $u = u(t) \in U$ kontrolünün yerine $\tilde{u}(t) = P_N([u]_N) \in U$.'yu alıp teorem 3.2.3.1'i ispatlarsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$c_{25}\left(d_N + \sum_{k=0}^{N-1} \Delta t_k \left|u_k - u_u\right| = c_{25} d_N\right.$$

Buradan lemmanın hükmü elde edilir. Lemma 3.2.3.2 ispatlandı.

Nihayet bu lemmaları kullanarak sonlu farklı appruksimasyonların fonksiyonele göre yakınsaklığını $[17]$ çalışmasındaki yöntemle ispatlayalım:

TEOREM 3.2.3.2 : Farz edelim ki ,lemma 3.2.3.1 ve lemma 3.2.3.2'nin şartları sağlansın. Bunların yanı sıra J_* (3.2.1.1) fonksiyonelinin kesin alt sınırı, J_* ise (3.2.1.4) fonksiyonunun kesin alt sınırı olsun , yani

$J_* = \inf\limits_{u \in U} J(u), I_{N*} = \inf\limits_{[u]_N \in U} I_N([u]_N)$ olsun ve $u^* \in U, [u]_N^* \in U_N$ için $J_* = J(u^*)$

$I_{N*} = I_n([u]_N^*)$ şartlansın bu taktirde

$$\lim_{N \to \infty} I_{N*} = J_* \tag{3.2.3.11}$$

Limit bağıntısı ve

$$\left|I_{N*} - J_*\right| \le c_{25} d_N, N = 1, 2, \ldots.. \tag{3.2.3.12}$$

Kestirimi geçerlidir.

İSPAT : Şarta göre $u^* \in U$ (3.2.1.1)-(3.2.1.3) optimal kontrol probleminin çözümü $[u]_N^* \in U_N$ ise (3.2.1.4) – (3.2.1.7) diskrit optimal kontrol probleminin çözümüdür. Lemma 3.2.3.1'e göre $Q_N(u^*) = U_N$ olur.Bu taktirde (3.2.3.8) eşitsizliğinde $u = u(t) \in U$ yerine $u^* = u^*(t) \in U$ alarak, aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$I_{N*} \le I_N\left(Q_N(u^*)\right) \le J(u^*) + c_{25}d_N, N = 1, 2, ... \tag{3.2.3.13}$$

Lemma 3.2.3.2'ye göre $[u]_N^* \in U_N$ çözümü için $P_N([u]_N^*) \in U$ şartı sağlanır. Bu taktirde (3.2.3.10)'da $[u]_N \in U_N$ yerine $[u]_N^* \in U_N$ alırsak bir sonraki eşitsizliği yazabiliriz:

$$J_* \le J(P_N([u]_N^*)) \le I_N([u]_N^*) + c_{25}d_N = I_{N*} + c_{25}d_N \;,\; N = 1, 2, ... \tag{3.2.3.14}$$

Bu eşitsizliği ve (3.2.3.13) eşitsizliğini kullanarak kolaylıkla (3.2.3.12) 'nin geçerli olduğunu elde ederiz. $N \to \infty$ için $d_N \to 0$ olduğundan (3.2.3.12) eşitsizliğinin her iki tarafında limite geçersek ,(3.2.3.11)'in geçerli olduğu ispatlanır. Teorem 3.2.3.2 ispatlandı.

3.2.4. Optimal Kontrol Probleminin Gradiyentin İzdüşümü Yöntemiyle Çözüm Algoritması :

Bu alt bölümde (3.1.1.1) – (3.1.1.3) optimal kontrol probleminin gradiyentin izdüşümü yöntemiyle çözüm algoritmasını açıklayacağız.

Farz edelim ki, $u^0 = u^0(t) \in U$ herhangi başlangıç yaklaşım olsun. Bu taktirde (3.1.1.1) – (3.1.1.3) optimal kontrol problemi için gradiyentin izdüşüm yöntemiyle ardışık yaklaşımlar

$$u^{s+1}(t) = P_U\left(u^s(t) - \beta_s J'_\alpha(u^s)\right), S = 0,1,... \quad t \in \left(0, T\right) \tag{3.2.4.1}$$

formülü ile inşa edilir. $[17]$ Burada $P_U(z)$ ifadesi $z = z(t)$ noktasının U kümesine izdüşümüdür ve

$$u^{s+1}(t) = b_0 \frac{u^s(t) - \beta_s J'_\alpha(u^s)}{\left\| u^s - \beta_s J'_\alpha(u^s) \right\|_{L_2(0,T)}} \tag{3.2.4.2}$$

Formülü ile tanımlanır. , $\beta_s J'_\alpha(u^s)$ ise (3.1.4.1) fonksiyonelinin gradiyentinin $u^s \in U$ noktasındaki değeri olup

$$J'_\alpha(u^s) = -b(t)\left(\Psi_{0s}(t) + \Psi_{Ts}(t)\right) + 2\alpha\left(u^s(t) - u_0(t)\right), S = 0,1,2,... \qquad (3.2.4.3)$$

Formülü ile tanımlanır. Burada $\Psi_{0s}(t) \equiv \Psi_0\left(t;u^s\right), \Psi_{TS}(t) \equiv \Psi_T\left(t;u^s\right)$ fonksiyonları (3.1.4.1) – (3.1.4.3) eşlenir.Sistemin $u^s \in U$ için alan çözümüdür $\beta_S > 0$ parametresi bilinmeyen parametredir. Bu parametreyi bulmak için

$$J_\alpha(u^{s+1}) < J_\alpha(u^s) \qquad (3.2.4.4)$$

Şartı kullanılır. Ardışık yaklaşıkların bulunması sürecini sona erdirmek için

$$\left\|u^{s+1} - (u^s)\right\|_{L_2(0,T)} \leq \varepsilon \qquad (3.2.4.5)$$

Şartı kullanılmaktadır. Burada $\varepsilon > 0$ sayısı önceden bilinen kesinlik sabitidir.

Söylemek gerekir ki, bu veriler algoritmanın yardımıyla inşa edilen $\left\{u^s\right\} \subset U$ .dizisi minimalleştirici dizi olup herhangi $\alpha > 0$ için minimum veren elemana ,yani (3.1.1.1) – (3.1.1.3) optimal kontrol probleminin bir tek olan çözümüne yakınsamış olacaktır. Çünkü , $\alpha > 0$ olduğunda $J_\alpha\left(u\right)$ fonksiyonel ,kuvvetli konveks fonksiyonel olur. (bak Teorem 3.1.3.1)

Bu nedenle (3.2.4.1) – (3.2.4.5) algoritmasında $\alpha > 0$ parametresini özel seçmek gerekmez.Sadece $\alpha > 0$ parametresini yeterli kadar sıfıra yakın seçmek gerekir.
(3.1.1.1) – (3.1.1.3) optimal kontrol problemini nümerik yöntemle çözmek için ona sonlu farklar yöntemini uygulayıp ,elde edilen diskrit optimal kontrol problemine gradiyentin izdüşümü yöntemini kullanmamız gerekir. Bu amaçla (3.1.1.1) – (3.1.1.3) optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısı olan aşağıda optimal kontrol problemini göz önüne alalım.

$$I_\alpha([u]_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left|x_0^k - x_T^k\right|^2 \Delta t_k + \alpha \sum_{k=0}^{N-1} \left|u_k - u_{0k}\right|^2 \Delta t_k$$

Fonksiyonelinin U_N kümesi üzerinde (3.2.1.5) – (3.2.1.7) şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Bu problemi kısaca (3.2.1.5) – (3.2.1.7) ,(3.2.4.6) olarak gösterilir. Bu ayrık optimal kontrol problemini çözmek için yinede gradiyentin izdüşümü yöntemini sonlu boyutlu halini (8,16) kullanabiliriz. Bu yönteme göre $[u]_N^0 \in U_N$ başlangıç yaklaşımı verildiğinde ,ardışık yaklaşımlar aşağıdaki şema ile tanımlanır:

$$[u]_N^{s+1} = P_{U_N}\left([u]_N^s - \beta_s I'_\alpha [u]_N^s\right), S = 0,1,2,\dots, \quad (3.2.4.7)$$

Burada $P_{U_N}[z]_N$ ifadesi $[z]_N$ elemanının U_N kümesine izdüşümü olup

$$[u]_N^{s+1} = b_0 \frac{[u]_N^s - \beta_s I'_\alpha [u]_N^s}{\left(\sum_{k=0}^{N-1} \left|u_k^{(s)}\right|^2 \Delta t_k\right)^{\frac{1}{2}}} S = 0,1,2,\dots \quad (3.2.4.8)$$

formülü ile tanımlanır,

$I'_\alpha [u]_N^s$ ise (3.2.4.6) fonksiyonunun gradiyentinin $I'_\alpha [u]_N^s \in U_N$ noktasındaki değeridir ve

$$I'_\alpha [u]_N^s = \left(I'_{\alpha 0} [u]_N^s ,\dots, I'_{\alpha N-1} [u]_N^s\right)$$

$$I'_\alpha [u]_N^s = -b_k \left(\Psi_{0s}^k + \Psi_{Ts}^k\right) + \alpha\left(u_k^{(s)} - u_{0k}\right), k = \overline{0, N-1} \quad (3.2.4.9)$$

Formülü ile tanımlanır $\Psi_{0s}^k, \Psi_{Ts}^k, k = \overline{0, N-1}$ fonksiyonları ise aşağıdaki sistemin $[u]_N^s \in U_N$ 'e karşılık gelen çözümüdür. Yani $\Psi_{0s}^k \equiv \Psi_0^k, \Psi_{Ts}^k = \Psi_0^k([u]_N^s), k = \overline{0, N-1}$. fonksiyonları aşağıdaki sistemin çözümüdür.

$$\Psi_0^k = \Psi_s^{k+1} + \left(a_k \Psi_0^{k+1} - 2\left(x_0^{k+1} - x_T^{k+1}\right)\right)\Delta t_k, k = \overline{N-1, 0} \quad (3.2.4.10)$$

$$\Psi_T^{k+1} = \Psi_T^k - \left(a_k \Psi_T^k - 2\left(x_0^k - x_T^k\right)\right)\Delta t_k, k = \overline{N-1, 0} \quad (3.2.4.11)$$

$$\Psi_0^N = 0, \Psi_T^0 = 0 \quad (3.2.4.12)$$

$\beta_S > 0$ parametresini seçmek için

$$I_\alpha\left([u]_N^{s+1}\right) > I_\alpha\left([u]_N^{(s)}\right), s = 0,1,2,\dots \quad (3.2.4.13)$$

Şartı uygulanmaktadır. Ardışık yaklaşıkların bulunması sürecini sona erdirmek için

$$\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left|u_k^{(s+1)} - u_k^{(s)}\right|^2 \Delta t_k\right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon \quad (3.2.4.14)$$

Şartı kullanılmaktadır. Burada da $\alpha > 0$ parametresi yeterli kadar sıfıra yakın seçilir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 3.1 bölümünde adı diferansiyel denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ispatlandı ve çözüm için gerek ve yeterli şart gösterildi.Bunların yanı sıra fonksiyonelin gradyenti için formül elde edildi.

Tezin 3.2.bölümünde adi diferansiyel denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemine sonlu farklı yaklaşımların fonksiyonele göre yakınsaklığı ispatlandı ve çözüm algoritması gösterildi.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezde ele alınan optimal kontrol problemi konulma açısından önceki çalışmalardan önemli biçimde farklılaşmaktadır. Adi diferansiyel denklemler için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemlerinin çok az ele alındığından dolayı tez çalışması gerek teorik gerekse pratik açıdan önem taşır. Bu tezde Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemleri için elde edilen sonuçlar ,önceki çalışmalardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

KAYNAKLAR

[1] Alekseev, V. M., Tikhomirov , V.M., Fomin , S.V. “Optimal kontrol” – Moskova ,Nauka 1975

[2] Blagodatskikh , V.I “Optimal Kontrolün Linear Teorisi” Moskova , MDÜ yayınevi ,1978

[3] Budak, B.M, Berkoviç, E.M ve Solovyeva, E.N “Optimal Kontrol problemleri için fark yaklaşımlarının yakınsaklığı hakkında. Nümerik Analiz ve Matematiksel Fizik dergisi” ,1969 ,cilt 9 ,no 3 ,s 522-547

[4] Budak B.M ve Berkoviç E.M “Ekstremal problemlerin yaklaşımları hakkında 1,2 Nümerik Analiz ve Matematiksel Fizik dergisi” ,1971,cilt 11 ,no 3,s 580-596;no 4 ,s 870-884

[5] Gabasov, R., Kirillova, F.M., “Optimal Süreçlerin Nitelik Teorisi” Moskova, Nauka ,1971

[6] Iskenderov A.D., Mahmudov N.M., “Kuantum Mekanik Sistemler için Lions Nitelik Kriterli Optimal Kontrol Problemi., AMEA-nin Haberleri ,Fizik Matematik Teknik Bilimler Serisi” ,1995, cilt 16,No 5-6 ,S. 30-35.

[7] Iskenderov A.D., “Matematiksel fiziğin çok boyutlu ters problemlerinin varyasyon konulmaları hakkında Dokladı” USSR ,1984, cilt 274,no 3 ,s. 531-533.

[8] Iskenderov A.D., Tagiyev R.G., Yagubov G.Y., “Optimizasyon Yöntemleri”, Bakü,2002

[9] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., “Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin elemanları”, Moskova ,Nauka ,1976

[10] Lions J., "-L. Optimal Control of Systems Govevned by partial Dufferential eguations,- Springer –Verlag ", Berlin ,Heidelberg ,New-york,1971

[11] Li E.B. ,Markus "L. Optimal Kontrol Teorisinin Temelleri", Moskova , Mir,1972

[12] Mordukhoviç B.Ş., "Optimal Kontrolün Fark Yaklaşımları Hakkında Uygulamalı Matematik ve Mekanik", 1978, cilt 42, no 3, s. 431-440.

[13] Pontryagin L.S., Boltyanski Y.G., Gamkrelidze R.V., Mişenko E.D., "Optimal süreçlerin matematiksel teorisi " Moskova, Nauka,1976

[14] Serkan BEYHAN, "Hiperhalik tip denklem için optimal kontrol probleminin iyi konulması ve onun nümerik çözümünün algoritması", Yüksek lisan tezi,Kafkas Üniversitesi,Kars,2007

[15] Tikhonov A.N. ,Arsenin V.Y., "İyi konulmayan problemlerin çözüm yöntemleri", Moskova ,Nauka 1979

[16] Vasilyev F.P, "Ekstremal problemlerin nümerik çözüm yöntemleri", Moskova,Nauka ,1980

[17] Vasilyev F.B., "Eustremal problemlerin çözüm yöntemleri", Moskova ,Nauka 1981

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erkan DEMİR

Doğum Yeri : Erzurum

Doğum Tarihi : 06/04/1982

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Cumhuriyet Lisesi

Lisans : Samsun On Dokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Matematik Bölümü

Çalıştığı Kurum/Kurumlar ve Yıl : 2007 yılının Şubat ayında, Iğdır Milli Eğitim Müdürlüğü'ne bağlı Kazancı İlköğretim Okulu'nda Matematik Öğretmeni ,olarak görev yapmaktadır.