T.C
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA DÖNÜŞÜMLER UZAYI

İlker YAŞAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV

HAZİRAN-2009
KARS

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada matematiğin yeni denebilecek alanlarından olan Fuzzy Topolojisinin alt dallarından Fuzzy Topolojik Uzaylarda Dönüşümler Uzayı üzerinde durulmuştur. Çalışmanın birinci kısmında çalıma içerisinde kullanmış olduğum anahtar kelimeler ile tanımlamalara yer verilmiştir. İkinci kısım içerisinde ise Topolojik Uzaylar, Topolojik Uzaylarda Dönüşümler Uzayı, Fuzzy Topolojik Uzay ve Fuzzy Topolojik Uzaylarda Kompaktlık verilmiştir. Son bölümde ise Fuzzy Topolojik Uzayların özel bir hali olan Fuzzy Topolojik Uzaylarda Dönüşümler Uzayı üzerine yapılmış ola çalışmaya yer verilmiştir.

Tez çalışmamda büyük emeği geçen, yoğun çalışmalarından zaman ayırarak bana derin bilgilerinden faydalanma fırsatı veren, danışman öğretmenim olmasından dolayı her zaman gurur duyduğum, değerli bilim adamı, Sayın Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV'A en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tüm yüksek lisans eğitimim boyunca ve tez çalışmalarım esnasında katkılarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA'YA, Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUBOV'A ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Gülçin BİLGİCİ' YE de teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2009 İlker YAŞAR

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada Topolojik uzaylardan yola çıkılarak Topolojik Uzaylarda Dönüşümler Uzayı, Fuzzy Topolojik Uzay ve Fuzzy Kompaktlık verilmiş ve son olarak Fuzzy Topolojik Uzaylarda Dönüşümler Uzayı verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Topolojik Uzay, Dönüşümler Uzayı, Fuzzy Topolojik Uzay, Fuzzy Kompaktlık, Fuzzy Topolojik Uzaylarda Dönüşümler Uzayı, Değer Dönüşümü ve Exponensiyel Dönüşüm.

ABSTRACT

In this study I have started to Topological Spaces and than I have gone about Maps Space ın to Topological Spaces, Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness finaly I have givet information to about Maps Space in to Fuzzy Topological Spaces.

Key Words: Topological Space, Maps Spaces, Fuzzy Topological Space, Fuzzy Compactness, Maps Spaces in to Fuzzy Topological Spaces, Evaluation Map and Exponential Map.

SİMGELER DİZİNİ

ξ	Kompleks sayılar kümesi
$\forall$	Herhangi
$\oplus$	Skaler toplam
$\sum$	Toplam sembolü
$\prod$	Çarpım sembolü
Λ	Dönüşüm sembolü
τ	Topolojik uzay
Ω	Değer dönüşümü

1.GİRİŞ

Bu tez çalışması içerisinde yukarıda da belirtildiği gibi Fuzzy Topolojik Uzayların özel bir hali olan Fuzzy Topolojik Uzaylarda Dönüşümler Uzayı üzerinde durulmuştur. Çalışma iki bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde gerekli olan kavram ve tanımlamalara yer verilerek Topolojik Uzaylar, Dönüşümler Uzayı ve Fuzzy Topolojik Uzaylar ile ilgili gerekli teoremler ve ispatları verilmiştir. İkinci bölümde ise Fuzzy Topolojik Uzaylarda Dönüşümler Uzayı üzerine yapılmış olunan çalışma verilmiştir.

Topolojide, Analizde, Fonksiyonel Analizde; Dönüşümler Uzayının önemli bir yeri vardır. Dönüşümler Uzayında bazı topolojiler tanımlanabilir. Bunlardan en önemlilere Noktasal Yakınsak ve Kompakt Açık topolojilerdir.

Bizim amacımız Fuzzy Topolojik Uzayların Dönüşümler Uzayında Fuzzy Topolojiler tanımlamak ve Genel Topolojideki teoremleri ve özellikleri buraya taşımaktır.

Fuzzy Küme kavramı ilk olarak 1966 yılın da Lütfizadeh tarafından ifade edilmiştir. Daha sonra Fuzzy Kümeler üzerinde Topoloji kavramını Change tanımlamıştır. Ardından Ming, Samanta ve diğerleri Ayırma Aksiyomları ve Kompaktlık gibi kavramları Fuzzy Topolojik Uzaylara taşımışlardır. Son yıllarda ise Fuzzy Topolojik Uzaylara farklı bir yaklaşım izlenilmektedir. Bu bağlamda ilk olara Soustac Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzay kavramını ifade etmiştir. Bu yeni durumda Fuzzy Kümelerin açık olup olmaması değil açıklık derecesi önem taşımaktadır. Hard Samanta tarafından Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzaylar ile Fuzzy Topolojik Uzaylar arsında bir bağlantı kurulmuştur. Bizde bu bağlantıdan yararlanarak Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzayların Dönüşümler Uzayında Noktasal Yakınsaklık Topolojisini vererek bu Dönüşümler Uzayının bazı özelliklerini araştırdık.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen tanımlar ve teoremler ile bunların ispatlarına yer verilecektir.

2.1:Topolojik Uzaylar

Tanım 2.1.1: X boş olmayan bir küme ve $\tau = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset 2^x$ in bir alt ailesi olsun. τ ailesi için aşağıdaki koşullar sağlanırsa:

1-) $X, \emptyset \in \tau$,

2) $\forall A' \subset A$ altkümesi için $\bigcup_{\alpha \in A'} U_\alpha \in \tau$,

3) τ da alınan her sonlu sayıda elemanın arakesiti τ ya aittir

τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine topolojik uzay, τ nun her U_α elemanına açık küme denir.

2.2: Dönüşümler Uzayı

(X, τ), (Y, τ¹) iki topolojik uzay, *C(X, Y)=* Y^x ise *X* ve *Y* ye giden bütün sürekli fonksiyonların kümesi olsun, Y^x kümesinde topoloji tanımlayalım, önce bunu özel durumda, yani *C(X, R)=* R^x üzerinde inceleyelim.

2.2.1: Tanım $A \subset R^x$ bir küme $f \in R^x$ bir fonksiyon olsun. $f \in A^c \Leftrightarrow \lim_{1} f_1 = f$

sağlanacak şekilde $\{ f_1 \} \subset A$ dizisi vardır.

2.2.2: Teorem R^x kümesinde $A \alpha \; A^c$ işlemi için kapanma işleminin koşulları sağlanır.

Ispat: $\varnothing^c = \varnothing$ olduğu açıktır. Her $f \in A^c$ için $\{ f \}$sabit dizisi f fonksiyonuna düzgün yakınsadığı için $f \in A^c$ dır, yani $A \subset A$dır,

$A \subset B$olsun. Her için $f \in A^c$ için $\lim\limits_{1} f_1 = f$ sağlanacak şekilde $\{ f_1 \} \subset A$ dizisi vardır. $A \subset B$olduğundan $\{ f_1 \} \subset B$ dir. Buradan $f \in B^c$ dır, yani $A^c \subset B^c$ dır.

$(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$ olduğunu gösterelim

$$
\left.
\begin{array}{l}
A \subset A \cup B \Rightarrow A^c \subset (A \cup B)^c \\
\\
B \subset A \cup B \Rightarrow B^c \subset (A \cup B)^c
\end{array}
\right\} \Rightarrow A^c \cup B^c \subset (A \cup B)^c
$$

dır.

Şimdi $(A \cup B)^c \subset A^c \cup B^c$ olduğunu gösterelim. Her $f \in (A \cup B)^C$ için $\lim\limits_{1} f_1 = f$ biçiminde $\{ f_1 \} \subset A \cup B$ dizini vardır. A ve B kümelerinin en az birisinde bu dizinin sonsuz elamanı aittir. Farz edelim ki $\{ f_1 \}$ dizisinin $\{ f_1 \}$ sonsuz alt dizisi A kümesine aittir. O zaman $\lim\limits_{k} f_{1_k} = f$ olduğundan $f \in A^c \subset A^c \cup B^c$ dır, yani $(A \cup B)^c \subset A^c \cup B^c$ dır. Böylece $(A \cup B)^c = A^c \cup B^c$ olduğu ispatlanmış olur.

$(A^c)^c = A^c$ olduğunu araştıralım. $A \subset A^c \Rightarrow A^c \subset (A^c)^c$ dır. $(A^c)^c \subset A^c$ olduğunu gösterelim. Her $f \in (A^c)^c$ için $\lim_1 f_1 = f$ sağlanacak şekilde $\{f\} \subset A^c$ dizisi vardır. Yani her $\varepsilon/2 > 0$ ve her $x \in X$ için

$$\forall_i \geq i_0 |f_1(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

koşulunu sağlayan $i_0 \in N$ vardır. $f_1 \in A^c$ olduğundan $\lim_k g_k^{(i)} = f_1$ sağlanacak şekilde $\{g_j^{(i)} \subset A\}$ dizisi vardır, yani her $\in/2 > 0$ ve $x \in X$ için

$$\forall k \geq k_0 |g_k^{(i)}(x) - f_1(x)| < \in/2$$

koşulunu sağlayan $k_0 \in N$ vardır.

O halde her $\varepsilon > 2, k \geq k_0, i \geq i_0$ ve $x \in X$ için

$$|f(x) - g_k^{(i)}(x)| = |f(x) - f_1(x) + f_1(x) - g_k^{(i)}(x)| \leq$$

$$|f(x) - f_1(x)| + |f_1(x) - g_k^{(i)}(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

dur böylece f fonksiyonu için $\lim_k g_k^{(i)} = f$ sağlanacak şekilde $\{g_k^i\} \subset A$ dizisi bulunduğu için $f \in A^c$ dır.

R^x kümesinde bu kapanma işlemi ile tanımlanan topolojiye düzgün yakınsaklık topolojisi denir.

<u>2.2.3: Tanım</u> (X, τ), (Y, τ') iki topolojik uzay olmak üzere

$$B = \{M(AY) : A \in F, Y \in r'\}$$

ailesinden bir alt taban olarak Y^x kümesinde üretilen topolojiye noktasal yakınsaklık topolojisi denir.

Her $x \in X$ için $Y_1 = Y$ ise Y^x kümesi $\prod_{x\in X} Y_x$ kümesinin bir alt kümesidir. O halde eğer (Y, τ[1]) bir topolojik uzay ise $\prod_{x\in X} Y_x$ de bir topolojik uzaydır ve Y^x kümesine $\prod_{x\in X} Y_x$ uzayının çarpımı topolojisinden üretilen alt uzay topolojisi verilebilir.Böylece Y^x kümesinde iki topoloji tanımlanabilir.

$\{(X_s, \tau_s)\}_{s\in S}$ topolojik uzaylar ailesi, (Y, τ[1]) bir topolojik uzay olmak üzere

$$Y^{x_s} \prod_{s\in S} (Y^{x_s}), Y^{\underset{s\in S}{\oplus} x_s}$$

kümelerinde noktasal yakınsaklık topolojisinden yararlanarak topoloji tanımlanabilir. Aynen, $\{(X_s, \tau_s)\}_{s\in S}$ topolojik uzaylar ailesi ve (Y, τ) topolojik uzayı için,

$$Y_s^x, \prod_{s\in S} (Y_s^x). \left(\prod_{s\in S} Y_s\right)^x$$

topolojik uzay tanımlanabilir.

Bu uzaylar arasında bazı bağlantıları araştıralım.

$$\nabla : \prod_{s\in S} (Y^{x_s}) \to Y^{\underset{s\in S}{\oplus} x_s}, \qquad \Delta : \prod_{s\in S} (Y_s^x). \left(\prod_{s\in S} Y_s\right)^x$$

dönüşümleri uygun

$$\forall \{ f_s : X_s \to Y \} \in \prod_{s\in S} (Y^{x_s}) \text{ için } \nabla(\{ f_s \}) = \nabla_{s\in S} f_s ,$$

$$\forall \{ f_s : X \to Y_s \} \in \prod_{s \in S} (Y_s^x) \text{ için } \Delta(\{ f_s \}) = \mathop{\Delta}_{s \in S} f_s ,$$

formülleri ile verelim.

$$\forall f \in Y^{\oplus_s x_s}, f : \bigoplus_s X_s \to Y \text{ için}$$

$$\nabla^{-1} = \{ f \,\text{o}\, i_s = f|x_s = f_s : X_s \to Y \} \in \prod_s (Y^{x_s})$$

$$\forall f \in \left(\prod_s Y_s \right)^x , \; f : X \to \prod_s Y_s \text{ için}$$

$$\nabla^{-1}(f) = \{ pr_s \,\text{o}\, f = f_s : X \to Y_s \} \in \prod_s (Y_s^x)$$

formülleri ile tanımlanan dönüşümler uygun ∇ ve Δ dönüşümlerinin tersleridir ve dolayısıyla ∇ ve Δ dönüşümleri birebir ve örtendir.

2.2.4:Teorem $\{(X_s, \tau_s)\}_{s \in S}$ topolojik uzaylar ailesi, (Y, τ^1) bir topolojik uzay ise

$$\nabla : \prod_{s \in S} (Y^{x_s}) \to Y^{\oplus_{s \in S} x_s}$$

dönüşümü noktasal yakınsaklık topolojisine bir homeomorfizmadır. Aynen (Y, τ) bir topolojik uzay, $\{(X_s, \tau^1_s)\}_{s \in S}$ topolojik uzaylar ailesi ise

$$\Delta : \prod_{s \in S} (Y_s^x) \to \left(\prod_{s \in S} Y_s \right)^x$$

dönüşümü noktasal yakınsaklık topolojisinde bir homeomorfizmadır.

Ispat: ∇, Δ dönüşümleri ve onların terslerinin sürekli olduğu benzer şekilde gösterildiğinden birisinin sürekli olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\nabla : \prod_{s\in S} (Y^{X_s}) \to Y^{\bigoplus_{s\in S} X_s}$$

dönüşümünün sürekli olduğunu gösterelim.

Her $x \in \bigoplus_{s\in S} X_s$ noktası $U \in \tau^{\iota}$ için $Y^{\bigoplus_s X_s} \cap p_r^{-1}(U)$ kümesi $Y^{\bigoplus_s X_s}$ uzayının topolojisinin bir alt taban elemanıdır ve ∇ nın sürekli olduğunu göstermek için $Y^{\bigoplus_s X_s} \cap p_r^{-1}(U)$ kümesinin ters görüntüsünün açık olduğunu göstermek yeterlidir. $x \in \bigoplus_{s\in S} X_s$ noktası X_{s_0} uzayına ait olsun. O zaman

$$\nabla^{-1}\left(Y^{\bigoplus_s X_s} \cap p_x^{-1}(U) \right) = \nabla^{-1}(\{ f : \bigoplus_s X_s \to Y : f(x) \in U \})=$$

$$\{ f \circ i_s = f_s : X_s \to Y : f_{s_o}(x) = f \circ i_{s_o}(x) = f(x) \in U \}=$$

$$Y^{X_{s_o}} \cap p_x^{-1}(U) \times \prod_{s\neq s_o} Y^{X_s}$$

dir. Bu son küme $\prod_s (Y^{X_s})$ uzayında açık olduğundan ∇ dönüşümü süreklidir.

X, Y, Z, T topolojik uzaylar, $g : Y \to Z, h : T \to X$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere,

$$\Phi_g : Y^X \to Z^X, \Psi_h : Y^X \to Y^T$$

dönüşümleri

$$\forall f \in Y^X \text{ için } \Phi_g(f) = g \circ f,$$

$$\forall f \in Y^X \text{ için } \Psi_h(f) = f \circ h,$$

formülleri ile tanımlansın.

$$\Phi_g^{-1}(M(A,B)) = M(A, g^{-1}(B)),$$

$$\Psi_g^{-1}(M(A,B)) = M(h(A), B)$$

olduğundan Φ_g, Ψ_h dönüşümleri noktasal yakınsaklık topolojisinde süreklidir.

Fonksiyonların

$$\sum : Y^x \times Z^y \to Z^x$$

bileşke işlemi bir dönüşüm olarak $\sum \ (f,g) = g \circ f$ formülü ile verilebilir. Fakat $\sum$ bir fonksiyon olarak her zaman sürekli değildir.

2.2.5: Tanım

$$\Omega : Y^x \times X \to Y,\ \Omega(f,x) = f(x)$$

şeklinde tamamlanan dönüşüme değer dönüşümü denir.

(Y, τ[1]) bir topolojik uzay, {p} tek noktalı uzay olmak üzere $i_y : Y \to Y^{\{p\}}$ dönüşümü $i_y(y) : \{p\} \to Y,\ i_y(y)(p) = y$ formülü ile tanımlayalım. Açıktır ki $i_y : Y \to Y^{\{p\}}$ dönüşümü bir homeomorfizmadır.

Şimdi Ω dönüşümünün $\sum$ ile ifadesini verelim.

$$Y^x \times X \xrightarrow{1_{y^x} \times i_i} Y^x \times X^{\{p\}} \xrightarrow{\sum} Y^{\{p\}} \xrightarrow{i_y^{-1}} Y$$

dönüşümlerinin bileşkesi Ω dönüşümüne eşittir. Gerçekten,

$\forall (f,x) \in Y^x \times X$ için

$$i_y^{-1} \circ \sum \circ (1_{y^x} \times i_x)(f,x) = i_y^{-1} \circ \sum (f, i_x(x)) =$$

$$i_y^{-1}(f \circ i_x(x)) = f(x) = \Omega(f, x) \text{ dir.}$$

Son olarak exponensiyel adı verilen

$$\Lambda : Y^{z\times x} \to (Y^x)^z, \Lambda^{-1} : (Y^x)^z \to Y^{z\times x}$$

dönüşümlerini tamamlayalım

2.2.6: Tanım Λ ve Λ^{-1} dönüşümlerinin önce uygun uzaylarda tanımlanan bütün fonksiyonlar (süreksiz dahil) için verelim.

Her $f : Z \times X \to Y$ için $\Lambda(f) : Z \to Y^x$ olması gerekir. O zaman her $z \in Z$ için $\Lambda(f)(z) : X \to Y$ olmalıdır. Bu son dönüşümü

$$\Lambda(f)(z)(x) = f(z, x)$$

formülü ile verelim.

Şimdi Λ^{-1} dönüşümünü tanımlayalım. Her $f : Z \to Y^x$ için $f(z) : X \to Y$ dir. O halde her $x \in X$ için $f(z)(x) \in Y$ dir. Yani $f(z)(x)$ ifadesini iki değişkenli fonksiyon gibi düşünebiliriz. Böylece

$$\Lambda^{-1}(f)(z, x) = f(z)(x) \in Y^{z\times x}$$

dir.

Bu durumda Λ dönüşümü birebir ve örtendir. Eğer yalnız sürekli dönüşümler ele alınırsa $f \in Y^{z\times x}$ için genelde $\Lambda(f) \notin (Y^x)^z$ ve tersine her $g \in (Y^x)^z$ için $\Lambda^{-1}(g) \notin Y^{z\times x}$ dir.

Ancak, eğer Y^x uzayının topolojisi noktasal yakınsaklık topolojisi ise her sürekli $f \in Y^{z \times x}$ fonksiyonu için $\Lambda(f) \in (Y^x)^z$ fonksiyonunda süreklidir. Gerçekten, $\Lambda(f): Z \to Y^x$ fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak her $x_0 \in X$ için $p_{x_0}\Lambda(f)$ fonksiyonu süreklidir. Her $z \in Z$ için $(p_{x_0}\Lambda(f))(z) = f(z, x_0)$ olduğundan $p_{x_0}\Lambda(f)$ süreklidir.

Y^x uzayının noktasal yakınsaklık topolojisinde her sürekli $g \in (Y^x)^z$ fonksiyonu için $\Lambda^{-1}(g)$ fonksiyonu genelde sürekli değildir. Gerçekten $g \in (Y^x)^z$ fonksiyonu sürekli ise her belirlenmiş, $x_0 \in X$, $z_0 \in Z$ noktaları için $[g(z_0)](x)$ ve $[g(z)](x_0)$ fonksiyonları bir argümana göre sürekli olmaları gerekir. $\Lambda^{-1}(g)$ fonksiyonunun sürekliliği ise g fonksiyonunun her iki argümana göre sürekliliğini gerektirir.

2.2.7:Teorem (X, τ). (Y, τ¹) iki topolojik uzay olsun Y^x kümesinde herhangi bir topoloji verilsin. Bu topolojide her sürekli $g \in (Y^x)^z$ için $\Lambda^{-1}(g) \in Y^{z \times x}$ fonksiyonunun sürekli olması için gerek ve yeter koşul $\Omega : Y^x \times X \to Y$ dönüşümünün sürekli olmasıdır.

Ispat: "$\Rightarrow$" $Z = Y^x$ ve $g = 1_{y^x}$ için teoremin koşulundan $\Lambda^{-1}(g): Y^x \times Z \to Y$ dönüşümü süreklidir.

$$\{[\Lambda \, o\Omega](f)\} \ (x) = \Omega(f, x) = f(x)$$

olduğundan $\Lambda \, o\Omega = 1_{y^x}$ dir, yani $\Omega = \Lambda^{-1}$ dir. Bu nedenle Ω süreklidir.

"$\Leftarrow$" $\Omega : Y^x \times X \to Y$ dönüşümü sürekli olsun. Her sürekli $g \in (Y^x)^z$ fonksiyonu için

$$\Lambda^{-1}(g) = \Omega(g \times 1_x): Z \times X \to Y$$

olduğunu gösterelim. Her $(z,x) \in Z \times X$ için

$$\{[\Lambda(\Omega(g \times 1_x))](z)\}(x) = [\Omega(g \times 1_x)](z,x) = \Omega(g(x),z) = g(z)(x),$$

yani $\Lambda\, o\Omega(g \times 1_x) = g$ dir. Buradan ise $\Lambda^{-1}(g) = \Omega(g \times 1_x)$ iki sürekli fonksiyonun bileşkesi olduğundan süreklidir.

2. 3: Fuzzy Topolojik Uzaylar

Tanım 2. 3.1: Boş olmayan bir X kümesi üzerindeki τ kümeler ailesi aşağıdaki koşulları sağlarsa:

1-) 0□ , 1□ $\in \tau$,

2-) A_1 , $A_2 \in \tau$ ise $A_1 \cap A_2 \in \tau$,

3-) $A_i \in \tau$ ise her bir i için, $\bigcup A_i \in \tau$,

(X,τ) ikilisine bir fuzzy topolojik uzay denir.

Teorem 2.3.2: $f : X \to Y$ bir X fuzzy topolojik uzayından, Y fuzzy topolojik uzayına bir dönüşüm olmak üzere X ' in fuzzy sürekli bir X_t fuzzy noktasında ancak ve ancak V , 'nin her $f(X_t)$ fuzzy komşuluğunda $f(U) \leq V$ olacak şekilde U 'nun bir X_t fuzzy komşuluğu vardır.

X 'in her fuzzy noktasında, f, X üzerinde fuzzy süreklidir.

Tanım 2.3.4: $f : X \to Y$ bir dönüşüm olmak üzere eğer f fuzzy sürekli ve fuzzy açık ise fuzzy f ye homeomorfizmdir denir.

Tanım 2.3.5: Eğer her farklı X_t ve Y_r fuzzy nokta çifti için (i.e., farklı fuzzy noktaları) $X_t \in U$, $y \in V$ ve $U \wedge U = 0_x$ olacak şekilde fuzzy açık U ve V kümeleri varsa (X,τ) fuzzy topolojik uzayına fuzzy Hausdorff uzayı veya $T_2 -$ uzayı denir.

Tanım 2.3.6: Ancak ve ancak X'de her fuzzy X_t fuzzy noktası için fuzzy açık $U \in \tau$ kümesi vardır. Öyleki $X_t \in U$ ve U bir fuzzy kompakt, i.e., her fuzzy açık örtünün, U sonlu alt örtüsü varsa (X,τ) fuzzy topolojik uzayı yerel kompakttır denir.

Not 2.3.7: Her fuzzy kompakt uzayı, fuzzy yerel kompakttır.

Önerme 2.3.8: Hausdorff fuzzy topolojik uzayında X , aşağıdaki durumlarda denktir.
1-) X bir fuzzy yerel kopmaktır.
2-) X'de her X_t fuzzy noktası için, $X_t \in U$ ve $\overline{U}$ fuzzy kompakt olacak şekilde X'de bir fuzzy açık U kümesi vardır.

Ispat: (1-)$\Rightarrow$(2-): Hipotezle X 'in her fuzzy X_t noktası için bir fuzzy açık ve fuzzy kompakt U kümesi olsun. X fuzzy Hausdorf (Bir fuzzy Hausdorf uzayının, fuzzy kompakt alt uzayı fuzzy kapalıdır.) U fuzzy kapalıdır: Böylece $U = \overline{U}$. Bu nedenle $X_t \in U$ ve $\overline{U}$

fuzzy kompakt olur.

(1-)$\Rightarrow$(2-): Aşikardır.

Önerme 2.3.9: X bir fuzzy topolojik uzayı olsun. X'de bir X_t fuzzy noktası ancak ve ancak f her X_t'yi içeren açık U kümesi bir V açık kümesine götürsün. Öyleki $X_t \in V$, $\overline{V}$ fuzzy kompakt ve $\overline{V} \leq U$ X fuzzy yerel kompakt olur.

Ispat: İlk olarak farz edelim ki x_t nokta olsun. Tanım 2.4'de oluşturulan fuzzy açık U kümesi madem ki X fuzzy Hausdorffun $x_t \in V$ ve V fuzzy kompakttır. U ise fuzzy kapalıdır. Böylece $U = \overline{U}$'dur. $y_r \in (1_X - V)$ngibi bir fuzzy noktasını alalım. Madem ki X fuzzy Hausdorff tur. Tanım 2.3'e göre $x_t \in C$ ve $y \in D$ ve $C \wedge D = 0_x$ olacak şekilde C ve D açık kümeleri vardır. $V = C \wedge V$ olsun. $V \leq V$, $\overline{V} \leq \overline{U} = V$'yu kapsar. Madem ki $\overline{V}$ $f-$ kapalı ve V fuzzy kompakttır. $\overline{V}$'de fuzzy kompakt olduğuna göre böylece $x_t \in \overline{V} \leq U$ ve U fuzzy kompakttır. Tersi Önerme 2.6 (2-)'den gösterilir.

Tanım 2.3.10: (X, τ) fuzzy topolojik uzayında iki fuzzy açık A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı V $(A \times B)$ (x, y)'in $(A(x), B(y))$ bütün $(x, y) \in X \times Y$ için belirlidir.

Tanım 2.3.11: Eğer $f_i : X_i \rightarrow Y_i$, $i = 1,2$ iken $f_1 \times f_2 : X_i \times X_i \rightarrow Y_1 \times Y_2$ oluyorsa $(f_1 \times f_2).(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ her (x_1, x_2) $X_1 \times X_2$ için terimdir.

Terim 2.3.12: I^x'de herhangi A ve B fuzzy kümeleri için $(A \times B)' = (A' \times 1_x) \cup (1_x \times B')$'dir. Benzer şekilde $f_i : X_i \to Y_i$ $i = 1,2$ ise $(f_1 \times f_2)^{-1}$ $(B_1 \times B_2) = f_1^{-1}(B_1) \times f_2^{-1}(B_2)$ bütün $B_1 \times B_2 \subset X_2 \times Y_2$'dir.

Tanım 2.3.13: X ve Y gibi iki fuzzy topolojik uzayı olsun.

$T : X \times Y \to Y \times X$ fonksiyonu $T(x,y) = |y,x|$ her $(x,y) \in X \times Y$ için belirli ise f'e değişim dönüşümü denir.

Sıradaki Lemmanın ispatı kolaydır.

Lemma 2.3.14: $T : X \times Y \to Y \times X$'e değişim dönüşümü fuzzy sürekli iken belirlidir.

2. 4: Fuzzy Kompaktlık

Tanım 2. 4. 1: A fuzzy küme olsun $v \in I^E$ fuzzy kompakt ise her küme ailesi için

$$\beta \subset \delta \text{ iken } \sup_{\mu \in \beta_0} \mu \geq v$$

ve her $\varepsilon > 0$ için bir sonlu altaile $\beta_0 \subset \beta$ olduğundan

$$\sup_{\mu \in \beta_0} \mu \geq v - \varepsilon$$

dur.

Şimdi yukarıdaki tanımdaki fuzzy kompaktlık kavramını kullanarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2. 4. 2: (E,δ) bir fuzzy topolojik uzay ise sabit bir fuzzy küme üzerinde (E,δ) fuzzy kompakt uzaydır.

3. FUZZY TOPOLOJİK UZAYLARDA DÖNÜŞÜMLER UZAYI ÜZERİNE ÇALIŞMA

3.1: Fuzzy Kompakt-Açık Topoloji

Fuzzy topolojik X uzayından, fuzzy topolojik Y uzayına bütün fuzzy sürekli fonksiyonların fuzzy kompakt açık topoloji oluşturduğu genel yargısını biliyoruz.

Tanım 3.1.1: X ve Y iki fuzzy topolojik uzayı ve $Y^X = \{f : X \to Y\}$ f bir fuzzy sürekli olsun.

Fuzzy kompakt-açık topoloji denilen verdiğimiz Y^X sınıfı topolojisi:

$$\mathrm{K} = \{K \in I^X : K, X \text{ de fuzzy kompakt}\}$$

ve

$$\mathrm{V} = \{V \in I^Y : V, Y\}$$

Herhangi bir $K \in \mathrm{K}$ ve $V \in \mathrm{V}$ için

$$N_{K,V} = \{f \in Y^X : f(K) \leq V\}$$

olur.

$\{N_{K,V} : K \in \mathrm{K}, V \in \mathrm{V}\}$ grubu, fuzzy kompakt-açık topoloji denilen, Y^x sınıfında bir temel fuzzy topolojisi oluşturmak zorundadır. Y^X sınıfıyla bu topolojiye bir fuzzy kompakt-açık topolojik uzay denir. Aksi belirtilmedikçe, Y^X her zaman fuzzy kompakt-açık topoloji olur.

3.2: Değer Dönüşümü

Şimdi fuzzy ve topoloji uzayların kartezyen çarpımı $Y^X \times X$ ve $Y^X \times X$ 'den Y'ye tanımlayalım.

Tanım 3.2.1: $e : Y^X \times X \to Y$'ye tanımlı $e(f_1 \times x_t) = f(x_t)$ her f $x_t \in X$ noktası için ve $f \in Y^X$ dönüşümü fuzzy değer dönüşümü olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.2: X bir fuzzy yerel kompakt Hausdorff uzayı olsun.

$$e : Y^X \times X \to Y$$

fuzzy değer dönüşümü fuzzy süreklidir.

Ispat: $x_t \times X$ ve $f \in Y^X$ olacak şekilde $(f, x_t) \in Y^X \times X$ ele alalım. Y içinde $f(x_t) = e(f, x_t)$ kümesini kapsayan, V fuzzy açık kümesi olsun. Mademki X fuzzy yerel kopmak ve f fuzzy süreklidir. Önerme 2.3.9'a göre X içinde bir U fuzzy açık kümesi vardır. Öyle ki $x_t \in V, \overline{V}$ fuzzy kompakt ve $f(\overline{V}) \leq V$ dir.

$Y^X \times X$ içinde $N_{\overline{U},V} \times V$ fuzzy açık kümesi ele alalım.

$(f, x_t) \in N_{\overline{U},V} \times U$ olacağı aşikardır. $(g, x_r) \in N_{\overline{U},V} \times V$ rastgele seçilmiş olsun, böylece $g(\overline{U}) \leq V$ olur. Mademki $x_r \in V$ dir. Bu nedenle $g(x_r) \in V$ ve $e(g, x_r) = g(x_r) \in V$ olur.

Böylece $e(N_{\overline{U},V} \times U) \leq V$ e'nin fuzzy sürekli olduğunu gösteriri.

İndükleme dönüşümünün $f : Z \times X \to Y$ bir fonksiyon oluşturacağını ele alalım.

<u>**Tanım 3.2.3:**</u> X, Y, Z fuzzy topolojik uzayları ve $f : Z \times X \to Y$ herhangi bir fonksiyon olsun. $\hat{f}(x_t)(z_r) = f(z_r, x_z)$ tanımlıdır.

Ters taraftan bakacak olursak, $\hat{f} : X \to Y^Z$'ye verilen bir fonksiyon aynı kurala göre bir f örten fonksiyonu tanımlar.

$\hat{f}$'nin sürekliliği, sürekli olan f ile aynı karakteristikte adlandırılırsa da, f 'ye göre çok yönlüdür. Bu maksatla sonraki sonucu vermeye ihtiyaç duyuyoruz.

<u>**Önerme 3.2.4:**</u> X ve Y ikili fuzzy topolojik uzaylar olsun ve Y aynı zamanda fuzzy kompakt olsun. X'de herhangi bir x_t fuzzy noktası ve $\{x_t\} \times Y$'yi kapsayan $X \times Y$ fuzzy kartezyen çarpım uzayında fuzzy açık bir N olsun. Bu durumda olacak şekilde X içinde x_t'nin W fuzzy komşuluğu vardır. $\{x_t\} \times Y \leq W \times Y \leq N$

<u>**Ispat:**</u> $\{x_t\} \times Y$'nin Y'ye homeomorf olduğu aşikârdır. Bu nedenle $(X \times Y$ nin fuzzy topolojisi için $)$ $\{U \times V\}$'nin temel elemanlarıyla $\{x_t\} \times Y$'yi örtebiliriz. $\{x_t\} \times Y$ mademki

fuzzy kompakttır. Öyleyse $\{U \times V\}$ sonlu yarı örtüsü, $U_1 \times V_1,...,U_n \times V_n$ temel elemanlarının sonlu sayıda olduğu söyler.

Genelliği bozarak, her $i = 1,2,...,n$ için $x_t \in U_i$ olduğunu varsayalım. O halde temel elemanlar gereksiz olur.

$$W = \bigwedge_{i=1}^{n} U_i$$

olsun.

W fuzzy açık ve $x_t \in W$ olduğu aşikârdır.

$$W \times Y \leq \bigvee_{i=1}^{n} (U_i \times V_i)$$

olduğunu göstermeliyiz

$(x_r, y_s), W \times Y$ içinde herhangi bir fuzzy noktası olsun. (x_z, y_s) fuzzy noktasını ele alalım. Bazı i için $(x_t, y_s) \in U_i \times V_i$ böylece $y_s \in V_i$ olur. Fakat her j için $j = 1,2,...,n$ (çünkü $x_r \in W$) $x_r \in U_j$ istenen olur. Fakat $U_i \times V_i \leq N$ her $i = 1,2,...,n$ için ve

$$W \times Y \leq \bigvee_{i=1}^{n} (U_1 \times V_i)$$

dir. Bu nedenle $W \times Y \leq N$

<u>Teorem 3.2.5:</u> Z bir fuzzy yerel kompakt Hausdorff uzayı ve X, Y keyfi topolojik uzaylar olsun. Bu durumda

$$\left(\hat{f}(x_t)\right)\ (z_s) = f(z_s, x_t)$$

kurallı ile tanımlanan $\hat{f}, \hat{f} : X \to Y^Z$ fuzzy süreklidir. Ancak ve ancak $f : Z \times X \to Y$ fuzzy sürekli bir dönüşümdür.

Ispat: Farz edelim ki $\hat{f}$ fuzzy sürekli olsun

$$Z \times X \xrightarrow{i_z \times \hat{f}} Z \times Y^Z \xrightarrow{t} Y^Z \times Z \xrightarrow{e} Y$$

fonksiyonlarını ele alalım.

Z üzerinde i_z fuzzy özdeşlik fonksiyonu belirtir, t değişim dönüşümü belirtir ve e değer dönüşümü belirtir. Mademki

$$et\left(i_z \times \hat{f}\right)\left(z_s, \hat{f}(x_t)\right) = e\left(\hat{f}(x_t), z_s\right) = \hat{f}(x_t)(z_s) = f(z_s, x_t)$$

dir, bu $f = et\left(i_z \times \hat{f}\right)$ olduğunu gösterir ve fuzzy sürekli fonksiyonları birleştirdiği için f ‘nin kendisi fuzzy sürekli fonksiyon olur. $\hat{f}(x_k) \in Y^Z$ $\hat{f}(x_k)$’yı kapsayan vardır.

$$N_{K,U} = \left\{g \in Y^Z : g(K) \leq U, K \in I^Z\right\}$$

fuzzy kompakttır ve $U \in I^Y$ fuzzy açıktır.

Tersine, farz edelim ki f fuzzy sürekli bir fonksiyondur. X içinde x_K gibi keyfi bir fuzzy noktası alalım. $\hat{f}(x_k) \in Y^Z$ $\hat{f}(xk)$'yı kapsayan vardır.

$$N_{K,U} = \{g \in Y^Z : g(K) \leq U, K \in I^Z\}$$

Bu kümede fuzzy kompakttır ve $U \in I^Y$ fuzzy açıktır. Yardımcı elemanını dikkate alalım. W'nin bir x_k fuzzy komşuluğunu bulmak zorundayız. Bu $\hat{f}$'nin bir fuzzy sürekli dönüşüm olduğunu ispatlamaya yeterli olacaktır.

K içinde herhengi bir z_u fuzzy noktası için, $\left(\hat{f}(x_k)\right)(z_u) = f(z_u, x_k) \in U$ vardır. Böylece $f\left(K \times \{x_k\} \leq U, yani, K \times \{x_k\} \leq f^{-1}(U)\right)$ olur. Mademki f'yi fuzzy sürekli almıştık. O halde $f^{-1}(U), Z \times X$ içinde bir fuzzy açık küme olmuş olur. Böylece $f^{-1}(U), K \times \{x_k\}$'yı kapsayan $Z \times X$ içinde bir fuzzy açık küme olur. Bu nedenle Önerme 4.4'e göre $K \times \{x_k\} \leq K \times W \leq f^{-1}(U)$ olacak şekilde X içinde x_k'nın W komşuluğu vardır. Bu yüzden $f(K \times W) \leq U$ dur. Şimdi herhangi bir $x_r \in W$ ve $z_v \in K$ için $f(z_v, x_r) = \left(\hat{f}(x_r)\right)(z_u) \in U$ dur.

O halde bütün $x_r \in W$ için $\left(\hat{f}(x_r)(K)\right)U$ ve yani bütün $x_r \in W$ $\hat{f}(x_r) \in N_{K,U}$ olur.

Böylece $\hat{f}(W) \leq N_{K,U}$ istenen sonucuna ulaşmış oluruz.

3.3 Eksponensiyel Dönüşüm

İndükleme dönüşümleri yardımıyla eksponensiyal kuralını tanımlayalım ve bununla ilgili bazı özelliklere bakalım.

Teorem 3.4.1: X ve Z fuzzy yerel kompakt Hausdorff uzayları olsun. Bu durumda herhangi fuzzy topolojik Y uzayı için,

$$E : Y^{Z\times X} \to \left(Y^{Z}\right)^{X}$$

fonksiyonu

$$E(f) = \hat{f}\left(yani, E(f)(x_t)(z_u) = f(z_u, x_t) = \left(\hat{f}(x_t)\right)(z_u)\right)$$

bütün $f : Z\times X \to Y$ fonksiyonu için bir fuzzy homeomorfizmdir.

Ispat:

(1-) E üstünde aşikardır.

(2-) $f, g : Z\times X \to Y$ için

$E(f) = E(g)$ olsun. Böylece $\hat{f} = \hat{g}$, f ve g 'nin indükleme dönüşümlerini sağlar. Şimdi X içinde x_t gibi herhangi bir fuzzy noktası için ve Z içinde z_u gibi herhangi bir fuzzy noktası için

$$f(z_u, x_t) = \left(\hat{f}(x_t)\right) = \left(\hat{g}(x_t(z_u)) = g(z_u, x_t)\right) :$$

O halde $f = g$ olur.

(3-) Ispat için E'nin fuzzy sürekli, $\left(y^{z}\right)^{x}$ içinde $\hat{f}$'nin herhangi bir V fuzzy yardımcı komşuluğunu ele alalım. Yani V , $N_{K,W}$ formundadır. Burada K X 'inbir fuzzy kompakt alt kümesi ve W , Y^{Z}'nin fuzzy açık alt kümesidir. Bir an olsun genel yargıyı yok sayarak, L ,

Z 'nin bir fuzzy kompakt alt kümesi ve $V \in I^Y$ fuzzy açık, $W = N_{L,V}$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\hat{f}(K) \leq N_{L,V} = W \text{ ve } \left(\hat{f}(K)\right)(L) \leq U$$

yu kapsar. Böylece K içinde herhangi bir x_t fuzzy noktası ve L içinde her z_u fuzzy noktası, $\left(\hat{f}(x_t)\right)(z_u) \in U$ yani $f(z_u, x_t) \in U$ ve o halde $f(L \times K) \leq U$ olur. Şimdi mademki L, Z içinde fuzzy kompakttır ve K, X içinde fuzzy kompakttır. Aynı zamanda $L \times K$ da $Z \times X$ içinde fuzzy kompakt olacaktır ve mademki U, Y içinde fuzzy açık bir küme, öyleyse $f \in N_{L\times K,U} \leq Y^{Z\times X}$ dir diyebiliriz. $E(N_L \times K, U) \leq N_{K,W}$ olduğunu iddia ediyoruz. Öyleyse $g \in N_{L\times K,U}$ keyfi olsun.Böylece her $_u \in L \leq Z$ fuzzy noktası ve her $x_t \in K \leq x$ fuzzy noktaları için $\left(\hat{g}(x_t)\right) \in N_{L,U=W}$ yani her $x_t \in K \leq x$ fuzzy noktaları için $\left(\hat{g}(x_t)\right) \in N_{L,U=W}$ olur.Bu nedende

$$\hat{g}(K) \leq W$$

yani

$$\hat{g} = E(g) \in N_{K,W}$$

herhangi bir $g \in N_{L\times K,U}$ için vardır. Böylece

$$E(N_{L\times K,U}) \leq N_{K,W}$$

olur. Bu ise E 'nin fuzzy sürekli olduğunu ispatlar.

(4-) E^{-1}'in fuzzy sürekliliğini ispatlamak için, değer dönüşümü ele alalım: $e_1 : \left(Y^z\right)^x \times X \to Y^z$

$e_1\left(\hat{f}, x_t\right) = \hat{f}(x_t)$ kuralı ile tanımlansın. Burada $\hat{f} \in \left(Y^z\right)^x$ ve x_t X içinde herhangi bir fuzzy noktasıdır ve $e_2 Y^z \times Z \to Y$ tanımlansın. $e_2(g, z_u) = g(z_u)$ kuralı ile burada $g \in Y^z$ ve z_u, Z içinde bir fuzzy noktasıdır.

ψ aşağıdaki fuzzy sürekli fonksiyonların bileşkesini belirtsin

$$
\begin{aligned}
(Z \times X) \times \left(Y^z\right)^x &\xrightarrow{T} \left(Y^z\right)^x \times (Z \times X) \\
&\xrightarrow{i \times t} \left(Y^z\right)^x \times (X \times Z) \\
&\xrightarrow{=} \left(\left(Y^z\right)^x \times X\right) \times Z \\
&\xrightarrow{e^1 \times i_z} Y^z \times Z \\
&\xrightarrow{e_2} Y.
\end{aligned}
$$

Bura da i, i_Z ; $\left(Y^Z\right)^X$ üstünde fuzzy özdeşlik dönüşümü belirtir. Z ve T, t değişim dönüşümü belirtir. Böylece

$$\psi : (Z \times X) \times \left(Y^Z\right)^X \to Y$$

yani

$$\psi \in Y^{(Z \times X) \times \left(Y^Z\right)^X}$$

dir. Aşağıdaki dönüşüme dikkat edelim.

$$\widetilde{E} : Y^{(Z \times X) \times \left(Y^Z\right)^X} \to \left(Y^{Z \times X}\right)^{\left(Y^Z\right)^X}$$

$$\widetilde{E}(\psi) \in \left(Y^{Z \times X}\right)^{\left(Y^Z\right)^X}$$

yani bir fuzzy sürekli dönüşümdür.

$$\widetilde{E}(\psi):\left(Y^Z\right)^X \to Y^{Z\times X}$$

olsun, şimdi herhangi $z_u \in Z$ fuzzy küme noktaları için, $x_t \in X$ ve $f \in Y^{Z\times X}$ i bilindiği gibi denersek

$$\left(\widetilde{E}(\psi)\,\mathrm{o}\,E\right)(f)(z_u, x_t) = f(z_u, x_t)$$

olduğundan

$$E\,\mathrm{o}\,\widetilde{E}(\psi) = \text{özdeşlik}$$

olur.

Benzer şekilde herhangi $\hat{g} \in \left(Y^Z\right)^x$ ve $x_t \in X$ fuzzy küme noktaları için bilindiği gibi deneyelim

$$\left(E\,\mathrm{o}\,\widetilde{E}(\psi)\right)(\hat{g})(x_t)(z_u) = \hat{g}(x_t)(z_u)$$

olduğundan

$$E\,\mathrm{o}\,\widetilde{E}(\psi) = \text{özdeşlik}$$

dir. Bu ise E nin bir fuzzy homeomorfizm olduğunun ispatıdır.

3.4:Fonksiyonlar Uzayı Üzerinde Yüksek Dereceden Açıklık

Tanım 3.4.1: $\tau : L^X \to L$, X kümesi üzerinde bir fuzzy topolojik dönüşüm öyle ki;

$$(L-FO1)\ \tau(1_X) = \tau(0_X) = 1;$$
$$(L-FO2)\ \tau(U \wedge V) \geq \tau(U) \wedge \tau(V),\ \forall U, V \in L^X;$$
$$(L-FO3)\ \tau\left(\underset{j\in J}{\vee} U_j\right) \geq \underset{j\in J}{\wedge} \tau(U_j),\ \forall j \in J, U_j \in L^X.$$

dir. τ ya X kümesi üzerinde fuzzy topolojik uzaylarda yüksek dereceden açıklık ve (X,τ) ya da Sezgisel Fuzzy Topolojik Uzay denir.

<u>Tanım 3.4.2:</u> (X,τ) ve (Y,τ') iki fuzzy topolojik uzay ve $f: X \to Y$ bir dönüşüm olmak üzere, f her $\mu \in I^Y$ için

$$\tau'(\mu) \le \tau\left(f^{-1}(\mu)\right)$$

da yüksek dereceden bir koruma dönüşümü denir.

<u>Tanım 3.4.3:</u> $\left\{\left(X_i,\tau_i,\tau_i^*\right)\right\}_{i\in\Delta}$ fuzzy topolojik uzaylarda bir aile ve $X = \pi_{i\in\Delta} X_i$ ve $p_i : X \to X_i, i \in \Delta$ birer izdüşüm dönüşüm olmak üzere, $\left\{p_i : X \to \left(X_i,\tau_i,\tau_i^*\right)\right\}_{i\in\Delta}$ ailesine X üzerinde yüksek dereceden bir açıklık denir ve X üzerinde $\left(\pi_{i\in\Delta}\tau_i, \pi_{i\in\Delta}\tau_i^*\right)$ belirtir.

$$\left(X, \pi_{i\in\Delta}\tau_i, \pi_{i\in\Delta}\tau_i^*\right)$$

üçlüsü fuzzy topolojik uzaylarda $\left\{\left(X_i,\tau_i,\tau_i^*\right)\right\}_{i\in\Delta}$ ailesinin bir ürünüdür.

Yukarıdaki tanım yüksek dereceden bir açıklık için yapılmıştır.

<u>Önerme 3.4.4:</u> (X,τ) fuzzy topolojik uzaylarda bir aile τ, X üzerinde yüksek dereceden bir açıklık olmak üzere, her $r \in (0,1]$ için

$$\tau_r = \left\{ \mu \in I^X : \tau(\mu) \geq r \right\}$$

X üzerinde bir Chang fuzzy topolojisidir.

__Önerme 3.4.5:__ $\left\{ T_r : r \in (0,1] \right\}$ ailesi, boş olmayan bir X kümesi üzerinde Chang fuzzy topolojisi olsun ve $\tau : I^X \to I$ dönüşümü tanımlansın, buna göre

$$\tau(\mu) = \vee \left\{ r \in (0,1] : \mu \in T_r \right\}$$

τ , X üzerinde yüksek dereceden bir açıklık dır ve Furthermore dan $r \in (0,1]$ için herhangi bir değerden,

$$T_r = \bigcap_{s<r} T_s$$

tüm $r \in (0,1]$ için $\tau_r = T_r$ dir.

__Tanım 3.4.6:__ (X, τ) L - fuzzy topolojik uzay, $\varnothing \neq Y \subseteq X$ bir küme. $\left(L^Y, \tau | Y \right)$ ya (Y , $\forall U \in L^X, (\tau | Y)(U) = \vee \left\{ \tau(V) : V \in L^X, V | Y = U \right\}$ L - fuzzy topolojik uzayı üzerinde bir küme) (X, τ) nun bir altuzayı denir.

__Tanım 3.4.7:__ $\left\{ (X_t, \tau_t) \right\}_{t \in T}$ L - fuzzy topolojik uzaylarda bir aile $t_1 \neq t_2$ için $X_{t_1} \cap X_{t_2} = \varnothing$ bir küme olsun. $X = \bigcup_{t \in T} X_t$ bir kümeler ailesi ve $\forall t \in T, j_t : X_t \to X$ bir dönüşümü (yani $\forall x \in X_t$, $j_t(x) = x$),

$$\forall B \in L^X,\ \sigma(B) = \underset{t\in T}{\wedge} \tau_t\left(j_t^{\leftarrow}(B)\right)$$

olarak tanımlanır. σ, $\{\tau_t\}_{t\in T}$ L- fuzzy topolojik uzayında $\sum_{t\in T} \tau_t$ belirtir ve kısaca $\sum \tau_t$ olarak yazılır.

L- fuzzy topolojik uzayda $\left(X, \sum \tau_t\right)$ ya esas L- fuzzy topolojik uzay denir. $\sum_{t\in T}(X_t, \tau_t)$ ve $\sum(X_t, \tau_t)$ kısaca

$$\{(X_t, \tau_t)\}_{t\in T}$$

olarak yazılır.

$(X, \sigma) = \sum(X_t, \tau_t)$ olduğunu kabul edelim. Açıkçası X kümesinde bir τ L- fuzzy topolojisi varsa τ L- fuzzy topolojisi $j_t : (X_t, \tau_t) \to (X, \tau)$ de sürekli olur böylece,

$$\forall A \in L^X,\ \tau(A) \le \sigma(A)$$

olur yani X kümesi üzerindeki σ L- fuzzy topolojisi her $t \in T$ için j_t de sürekli olur.

Tanım 3.4.8: τ, X kümesi üzerinde bir LM- fuzzy topolojisi olmak üzere.

1-) τ, B nin bir tabanı ise $\mathrm{B} : L^X \to M$ aşağıdaki gibi:

$$\forall A \in L^X, \tau(A) = \underset{\underset{\lambda\in\wedge}{\vee} B_\lambda = A}{\vee}\ \underset{\lambda\in\wedge}{\wedge} \mathrm{B}(B_\lambda),$$

İfade edersek $\underset{\underset{\lambda\in\wedge}{\vee} B_\lambda = A}{\vee}\ \underset{\lambda\in\wedge}{\wedge} \mathrm{B}(B_\lambda)$, $\mathrm{B}^{(\mathrm{C})}(A)$ tarafından belirtilir.

2-) τ, $\phi^{(\Pi)} : L^X \to M$ bir taban ise $\phi : L^X \to M$ da bir alttabandır ve her $A \in L^X$ için

$\phi^{(\Pi)}(A) = \underset{(\Pi)_{\lambda\in J} B_\lambda = A}{\vee} \underset{\lambda\in J}{\wedge} \phi(B_\lambda)$,(Π) ile sürekli "arakesitler" dir.

Tanım 3.4.9: $\left\{\left(L^{X_t}, \tau_t\right)\right\}_{t\in T}$ LM - fuzzy topolojik uzayda bir aile ve $P_t : \prod_{t\in T} X_t \to X_t$ izdüşüm olsun. LM - fuzzy topolojik uzaylarda bir alttaban olan $\prod_{t\in T} X_t$, $\{\tau_t : t\in T\}$ LM - fuzzy topolojik uzaylarda

$$\forall A \in L^{\prod_{t\in T} X_t}, \phi(A) = \underset{t\in T}{\vee} \underset{(P_t)_L^{\leftarrow}(B)=A}{\vee} \tau_t(B)$$

olarak tanımlanır, $\prod_{t\in T} \tau_t$ şeklinde belirtilir. $\prod_{t\in T} \tau_t$. $\left(L^{\prod_{t\in T} X_t}, \prod_{t\in T} \tau_t\right)$, $\left\{\left(L^{X_t}, \tau_t\right)\right\}_{t\in T}$ ailesinin izdüşüm uzayıdır.

Yukarıdaki 3.6.8. ve 3.6.9.' uncu tanımlar $L = \{0,1\}$ olduğu zaman taban ve alttaban izdüşüm uzaylarını belirtir. Bu iki sınıf fonksiyonlarının tanım 3.6.3. ve tanım 3.6.9.' da verilen izdüşüm uzayları oldukları unutulmamalıdır. Şimdi bu tanımlar arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

Derece dönüşümü olan τ , $\phi : X \to I$ olarak tanımlansın.

$$\forall A \in \prod_{t\in T} X_t, \quad \phi^{(\Pi)}(A) = \underset{\wedge_{\lambda\in J} B_\lambda = A}{\vee} \underset{\lambda\in J}{\wedge} \phi(B_\lambda)$$

olarak tanımlanan aşağıdaki:

$$\tau(A) = \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee} B_\lambda = A}{\vee} \underset{\lambda\in J}{\wedge} \phi^{(\Pi)}(B_\lambda) = \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee} B_\lambda = A}{\vee} \underset{\lambda\in J}{\wedge} \Big(\underset{\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} C_{\lambda,j} = B_\lambda}{\vee} \underset{j\in J_\lambda}{\wedge} \phi(C_{\lambda,j}) \Big)$$

$$= \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee} B_\lambda = A}{\vee} \underset{\underset{\lambda\in J_\lambda}{\wedge} C_{\lambda,j} = B_\lambda}{\vee} \left(\underset{\lambda\in J}{\wedge} \underset{j\in J_\lambda}{\wedge} \phi(C_{\lambda,j}) \right)$$

$$= \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee}\left(\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} C_{\lambda,j}\right) = A}{\vee} \underset{\substack{\lambda\in J \\ j\in J_\lambda}}{\wedge} \phi(C_{\lambda,j}) \text{ [25].}$$

$\phi : X \to I$ derece fonksiyonu τ üzerinde bir alttaban olarak tanımlansın.

$$\forall A \in \prod_{t\in T} X_t,\ \phi(A) = \underset{t\in T}{\vee} \underset{P_t^{-1}(B)=A}{\vee} \tau_t(B)$$

olarak tanımlanan aşağıdaki:

$$\tau(A) = \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee}\left(\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} C_{\lambda,j}\right) = A}{\vee} \underset{\substack{\lambda\in J \\ j\in J_\lambda}}{\wedge} \Big(\underset{t\in T}{\vee} \underset{P_t^{-1}(D_{\lambda,j}) = C_{\lambda,j}}{\vee} \tau_t(D_{\lambda,j}) \Big)$$

$$= \underset{t\in T}{\vee} \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee}\left(\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(D_{\lambda,j})\right) = A}{\vee} \Big(\underset{\substack{\lambda\in J \\ j\in J_\lambda}}{\wedge} \tau_t(D_{\lambda,j}) \Big) \text{ [25].}$$

r - düzey bir τ topolojisi tarafından oluşturulan.

$$\tau^r = \left\{ A : \underset{t\in T}{\vee} \underset{\underset{\lambda\in J}{\vee}\left(\underset{j\in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(D_{\lambda,j})\right) = A}{\vee} \Big(\underset{\substack{\lambda\in J \\ j\in J_\lambda}}{\wedge} \tau_t(D_{\lambda,j}) \Big) \geq r \Big) \right\}$$

τ^{*r} fuzzy topolojisi taban ve alttaban olarak tanımlanmıştır,

$$S^r = \left\{ P_t^{-1}(B_t) : \tau_t(B_t) \geq r \right\},\ B^r = \left\{ \underset{t\in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(B_t) : \tau_t(B_t) \geq r \right\} (J \text{ - sonlu})$$

olarak tanımlanan aşağıdaki:

$$\tau^{*^r} = \left\{ \underset{J_\lambda}{\vee} \underset{t \in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(B_t) : \tau_t(B_t) \geq r \right\}$$

her bir $A \in \tau^{*^r}$ için $A = \underset{J_\lambda}{\vee} \underset{t \in J_\lambda}{\wedge} P_t^{-1}(B_t)$ ve $\tau_t(B_t) \geq r$ dir. Dolayısı ile $A \in \tau^r$ dir. $\tau^{*^r} \subset \tau^r$ den $\tau^* \leq \tau$ elde edilir.

3.5: Noktasal Fuzzy Topoloji

Tanım 3.5.1: Y^X kümesi üzerin de σ_p yüksek dereceden açıklığına noktasal fuzzy fonksiyon topolojisi denir ve (Y^X, σ_p) şeklinde gösterilir.

Bu değer dönüşümü $e_{x_\alpha} : (Y^X, \sigma_p) \to (Y, \sigma)$ de $x_\alpha \in X$ noktası için bir açık dönüşümdür.

Lemma 3.5.2: $f = \sum f_i : \sum(X_i, \tau_i) \to \sum(Y_i, \tau_i')$ ve $\sum : \prod IFTS \to IFTS$ birer dönüşümdür.

Ispat: Her $\mu \in \sum(Y_i, \tau_i')$ için,

$$\begin{aligned} \sigma'(\mu) &= \underset{i \in J}{\wedge} \tau_i'(\mu) \leq \underset{i \in J}{\wedge} \tau_i\left((f_i)^{-1}(\mu)\right) = \underset{i \in J}{\wedge} \tau_i\left((f_i)^{-1}\left(\mu|_{Y_i}\right)\right) \\ &= \underset{i \in J}{\wedge} \tau_i\left(f^{-1}(\mu)|_{X_i}\right) = \sigma\left(f^{-1}(\mu)\right). \end{aligned}$$

dir. Dolayısı ile $\sum f_i$ bir dönüşümdür.

Lemma 3.5.3: Eğer $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ fuzzy topolojik uzaylarda bir dönüşüm ise

$$\tilde{f}:\left(X/_{\sim},\tilde{\tau}\right)\to\left(Y/_{\sim_1},\tilde{\sigma}\right)$$

fonksiyonu da fuzzy topolojik uzaylarda bir dönüşümdür.

Ispat: Aşağıdaki diyagramı düşünelim:

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & (Y,\sigma) \arrow[d, "q"] \\
\left(X/\sim,\tilde{\tau}\right) \arrow[r, "\tilde{f}"] & \left(Y/\sim_1,\tilde{\sigma}\right)
\end{tikzcd}$$

p,q kronik dönüşümlerdir. Yukarıdaki şema bize her $\mu\in\left(Y/_{\sim_1},\tilde{\sigma}\right)$ için

$$\tilde{\sigma}(\mu)\le\tilde{\tau}\left(\tilde{f}^{-1}(\mu)\right)$$

olduğunu gösterir. Yukarıdaki şemadan

$$\left(f^{-1}\circ q^{-1}\right)(\mu)=\left(p^{-1}\circ\tilde{f}^{-1}\right)(\mu)$$

dir. Buradan

$$\tau\left(\left(f^{-1} \circ q^{-1}\right)(\mu)\right)=\tau\left(f^{-1}\left(q^{-1}(\mu)\right)\right)\geq\sigma\left(q^{-1}(\mu)\right)=\tilde{\sigma}(\mu)$$

dir. Ayrıca,

$$\tilde{\tau}\left(\tilde{f}^{-1}(\mu)\right)=\tau\left(p^{-1}\left(\tilde{f}^{-1}(\mu)\right)\right)=\tau\left(\left(f^{-1} \circ q^{-1}\right)(\mu)\right)\geq\tilde{\sigma}(\mu)$$

$\tilde{f}$ bir dönüşümdür.

Her $i \in J$ için fuzzy topolojik uzaylarda bir çiftli $\{(X_i,\tau_i)\}_{i\in J}$ ailesi üzerinde (Y,σ) fuzzy topolojik uzay ve $f_i:(X_i,\tau_i)\to(Y,\sigma)$ bir dönüşümdür.

$$\nabla f_i:\sum(X_i,\tau_i)\to(Y,\sigma)$$

dönüşümü aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\forall x_\alpha\in\sum X_i,\ \nabla f_i(x_\alpha)=f_{i_0}(x_\alpha)$$

burada $x_\alpha\in X_{i_0}$ dır.

Teorem 3.5.4: (X,τ), (Y,σ) ve (Z,η) birer fuzzy topolojik uzay ve $e:Y^Z\times Z\to Y$ bir dönüşüm olmak üzere. Y^X noktasal topolojik fonksiyon uzayı ve her $\hat{g}:X\to Y^Z$ dönüşümü için

$$E^{-1}\left(\hat{g}\right):Z\times X\to Y$$

bir dönüşümdür.

Ispat:

$$1_Z \times \hat{g} : Z \times X \to Z \times Y^Z$$

dönüşümünü kullanarak,

$$Z \times X \xrightarrow{1_Z \times \hat{g}} Z \times Y^Z \xrightarrow{t} Y^Z \times Z \xrightarrow{e} Y$$

alırız. Buradan $e \circ t \circ \left(1_Z \times \hat{g}\right) \in Y^{Z \times X}$ de t bir geçiş elemanıdır. Biz de E için üstel $e \circ t \circ \left(1_Z \times \hat{g}\right)$ dönüşümünü uygulayalım. Her bir $x_\alpha \in X$ ve $z_\beta \in Z$ fuzzy noktaları için

$$\left\{\left[E\left(e \circ t \circ \left(1_Z \times \hat{g}\right)\right)\right]\left(x_\alpha\right)\right\}\left(z_\beta\right) = \left(e \circ t \circ \left(1_Z \times \hat{g}\right)\right)\left(z_\beta, x_\alpha\right)$$

$$= e \circ t\left(z_\beta, \hat{g}\left(x_\alpha\right)\right) = e\left(\hat{g}\left(x_\alpha\right), z_\beta\right) = \left(\hat{g}\left(x_\alpha\right)\right)\left(z_\beta\right).$$

dir.

$$E\left(e \circ t \circ \left(1_Z \times \hat{g}\right)\right) = \hat{g}$$

den

$$E^{-1}\left(\hat{g}\right) = e \circ t \circ \left(1_Z \times \hat{g}\right)$$

dir. Dolayısı ile bir e değer dönüşümü ve t geçiş dönüşümü vardır ve $E^{-1}\left(\hat{g}\right)$ bir dönüşümdür.

3.6: Fuzzy Topolojik Uzaylarda Zayıf Dönüşümler Uzayı

Tanım 3.6.1: (L^x, τ) bir fuzzy topolojik uzay ve X üzerinde bir $\tau(A) \leq \Lambda_{r \in c(L)} \tau(1_{\sigma_r(A)})$ olsun. Tüm $A \in L^x$ (yani, $\tau \leq \omega([\tau]))$ ler için (L^x, τ) ya fuzzy topolojik uzaylarda zayıf dönüşümler uzayı denir.

Teorem 3.6.2: (L^x, τ) zayıf bir dönüşüm ve $Y \subseteq X$ dir. O halde $(L^Y, \tau|Y)$ de bir zayıf dönüşümdür.

Ispat: Çünkü (L^x, τ) zayıf dönüşümü ve elimizdeki $\tau \leq \omega([\tau])$ ayrıca; (X, ξ) bir fuzzy topolojik uzay olmak üzere ve

$$Y \subseteq X \text{ ise } \omega(\xi|Y) = \omega(\xi)|Y$$

dir. Buradan da,

$$\omega([\tau|Y]) \geq \omega([\tau]Y) = \omega([\tau])|Y \geq \tau|Y$$

sonucuna ulaşılır.

Teorem 3.6.3: $\{(L^{X_t}, \tau_t)\}_{t \in T}$ fuzzy topolojik uzaylarda bir aile olmak üzere, bütün (L^{X_t}, τ_t) zayıf dönüşümlerinde t$\in T$ ise, $\prod_{t \in T}(L^{X_t}, \tau_t)$ zayıf dönüşümdür.

Ispat: $\{(X_t, \xi_t)\}_{t \in T}$ fuzzy topolojik uzaylarda bir aile olmak üzere ve $X = \prod_{t \in T} X_t$, o halde

$$\omega(\prod_{t\in T}\xi_t)=\prod_{t\in T}\omega(\xi_t)$$

Olur. Buradan;

$$\omega\left(\left[\prod_{t\in T}\tau_t\right]\right)\geq\omega\left(\prod_{t\in T}[\tau_t]\right)=\prod_{t\in T}\omega([\tau_t])\geq\prod_{t\in T}\tau_t$$

elde edilir.

<u>Teorem 3.6.4:</u> $\{(L^{X_t},\tau_t)\}_{t\in T}$ fuzzy topolojik uzaylarda bir aile ve X_t ler farklı parçalara ayrılmış olsun. O halde (L^{X_t},τ_t) zayıf topolojik uzay ise her $t\in T$ için $\oplus_{t\in T}(L^{X_\tau},\tau_t)$ da bir zayıf dönüşümdür.

<u>Ispat:</u> $\{(X_t,\xi_t)\}_{t\in T}$ fuzzy topolojik uzaylarda bir aile olmak üzere X_t ler farklı parçalara ayrılmış ve $(X,\xi)\oplus_{t\in T}(X_t,\xi_t)$ dir. O halde $\oplus_{t\in T}\,\omega(\xi_t)=\omega(\oplus_{t\in T}\,\xi_t)$ dir. Buradan, elimizde

$$\omega([\oplus_{t\in T}\,\tau_t])=\omega(\oplus_{t\in T}\,[\tau_t])=\oplus_{t\in T}\,\omega([\tau_t])$$

vardır. $\oplus_{t\in T}\,\tau_t$ zayıf dönüşüm ise, o zaman

$$\oplus_{t\in T}\,\tau_t\leq\omega([\oplus_{t\in T}\,\tau_t])=\oplus_{t\in T}\,\omega([\tau_t])$$

dir. Buradan,

$$\tau_t=\oplus_{t\in T}\,\tau_t|X_t\leq\oplus_{t\in T}\,\omega([\tau_t])|X_t=\omega([\tau_t])$$

bundan dolayı τ_t zayıf dönüşümdür. Aksine, τ_t zayıf dönüşüm ise her $t\in T$ için,

$$\omega([\oplus_{t\in T}\,\tau_t])\geq\oplus_{t\in T}\,\omega([\tau_t])\geq\oplus_{t\in T}\,\tau_t$$

şeklinde istediğimiz gibi olur.

Teorem 3.6.5: (L^x,τ) bir fuzzy topolojik uzay olmak üzere, $wi(\tau)$ zayıf dönüşümü en küçük fuzzy topolojik zayıf dönüşümünü kapsar.

Ispat: Bizim göstermemiz gereken, her $r \in c(L)$ için

$$wi(\tau)(A) \leq \Lambda_{r\in c(L)} wi(\tau)(1_{\sigma_r(A)}), yani, wi(\tau)(A) \leq wi(\tau)(1_{\sigma_r(A)})$$

dir. Fakat asıl dikkat çeken;

$$wi(\tau)(A) = \bigvee_{\bigvee_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = A} \bigwedge_{\lambda\in\Lambda(\Pi)_{\beta\in\Lambda_\lambda}} \bigvee_{C_{\lambda\beta}=B_\lambda} \bigwedge_{\beta\in\Lambda_\lambda} \phi^\tau(C_{\lambda\beta})$$

nin ve

$$wi(\tau)(1_{\sigma_r(\Lambda)}) = \bigvee_{\bigvee_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda = 1_{\sigma_r(A)}} \bigwedge_{\lambda\in\Lambda(\Pi)_{\beta\in\Lambda_\lambda}} \bigvee_{C_{\lambda\beta}=B_\lambda} \bigwedge_{\beta\in\Lambda_\lambda} \phi^\tau(C_{\lambda\beta})$$

şeklinde olan elimizdeki

$$wi(\tau)(A) \leq wi(\tau)(1_{\sigma_r(A)})$$

ya göre

$$\phi^\tau(C_{\lambda\beta}) \leq \phi^\tau(1_{\sigma_r(C_{\lambda\beta})})$$

eşitsizliği istediğimiz gibi olur.

Şimdi τ fuzzy topolojik uzayındaki zayıf dönüşümün $wi(\tau)$ zayıf dönüşümünü de kapsadığını da ispatlamalıyız. η, X kümesi üzerin de herhangi bir zayıf fuzzy topolojik dönüşümünü de değil de τ, yani, $\eta \geq \tau$ nun içinde olsun. $wi(\tau) \leq \eta$ olduğunu göstermeliyiz.

Bütün $A \in L^x$ ler için $\phi^\tau(A) \leq \eta(A)$ olduğunu göstermek yeterlidir. Sonrada her $U \in 2^X$ için $\phi^\tau(1_U) \leq \eta(1_U)$ olduğunu göstermek gerekir ve bu da aşağıdaki şekilde:

$$\begin{aligned}\phi^\tau(1_U) &= \bigvee_{r \in c(L)} \bigvee \{\tau(B) | \sigma_r(B) = U\} \\ &\leq \bigvee_{r \in c(L)} \bigvee \{\eta(B) | \sigma_r(B) = U\} \\ &\leq \bigvee_{r \in c(L)} \bigvee \left\{ \bigwedge_{s \in c(L)} \eta\left(1_{\sigma_s(B)}\right) \middle| \sigma_r(B) = U \right\}\end{aligned}$$

gösterilerek teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.6.6: $\{(L^{X_t}, \tau_t)\}_{t \in T}$ fuzzy topolojik uzaylarda bir aile olmak üzere, X_t ler $X = \coprod_{t \in T} X_t$ üzerine parçalanıp dağıtılırsa $wi(\oplus_{t \in T} \tau_t) = \oplus_{t \in T} wi(\tau_t)$ olur.

Ispat: Teorem 3.1.4 ve Teorem 3.1.5 den $wi(\oplus_{t \in T} \tau_t) \leq \oplus_{t \in T} wi(\tau_t)$ olduğunu görüyoruz. Aksine, $\lambda \in c(L)$ ve $\lambda < \oplus_{t \in T} wi(\tau_t)(A)$, yani,

$$\begin{aligned}\lambda < \oplus_{t \in T} wi(\tau_t)(A) &= \bigwedge_{t \in T} wi(\tau_t)(A | X_t) \\ &= \bigwedge_{t \in T} \bigvee_{\bigvee_{\lambda \in \Lambda^t} D^t_\lambda = A | X_t} \bigwedge_{\lambda \in \Lambda^t} \bigvee_{(\Pi)_{\beta \in \Lambda^t} E^t_{\lambda\beta} = D^t_\lambda} \bigwedge_{\beta \in \Lambda^t_\lambda} \phi^{\tau_t}(E^t_{\lambda\beta})\end{aligned}$$

dir. Her $t \in T$ için böyle bir $\{D^t_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda^t} \subseteq L^{X_t}$ vardır ve buradan

1-) $\vee_{\lambda\in\Lambda^t} D_\lambda^t = A|X_t$;

2-) Her bir $\lambda \in \Lambda^t$ için $\{E_{\lambda\beta}^t\}_{\beta\in\Lambda_\lambda^t} \subseteq L^{X_t}$ böyle bir $(\prod)_{\beta\in\Lambda_\lambda^t} E_{\lambda\beta}^t = D_\lambda^t$ vardır ;

3-) Her bir $\beta \in \Lambda_\lambda^t$ için , $\lambda \leq \phi^{\tau_t}\left(E_{\lambda\beta}^t\right)$ yi elde ederiz.

$\left(D_\lambda^t\right)^* \in L^X$ ve $\left(E_{\lambda\beta}^t\right)^* \in L^X$ olarak tanımlanabilir ve devamında aşağıdaki gibi

$$\left(D_\lambda^t\right)^*(x) = \begin{cases} D_\lambda^t(x) & x \in X_t, \\ 0 & x \notin X_t, \end{cases}$$

$$\left(E_{\lambda\beta}^t\right)^*(x) = \begin{cases} E_{\lambda\beta}^t(x) & x \in X_t, \\ 0 & x \notin X_t, \end{cases}$$

olur. O halde bildiğimiz gibi

$$\bigvee_{t\in T}\bigvee_{\lambda\in\Lambda^t}\left(D_\lambda^t\right)^* = A\ ,\ (\textstyle\prod)_{\beta\in\Lambda_\lambda^t}(E_{\lambda\beta}^t)^* = (D_\lambda^t)^* \text{ ve } \phi^{\tau_t}\left(E_{\lambda\beta}^t\right) = \phi^{\oplus_{t\in T}\tau_t}\left(\left(E_{\lambda\beta}^t\right)^*\right)$$

dir. Bu sebeple, $\lambda \leq \phi^{\oplus_{t\in T}\tau_t}\left(\left(E_{\lambda\beta}^t\right)^*\right)$ ve buradan $\lambda \leq \phi^{\tau_t}\left(E_{\lambda\beta}^t\right)$ dir. Unutmamalıyız ki

$$wi\left(\oplus_{t\in T}\tau_t\right)(A) = \bigvee_{\vee_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda = A}\ \bigwedge_{\lambda\in\Lambda}\ \bigvee_{(\prod)_{\beta\in\Lambda_\lambda}C_{\lambda\beta} = B_\lambda}\ \bigwedge_{\beta\in\Lambda_\lambda}\phi^{\oplus_{t\in T}\tau_t(C_{\lambda\beta})}$$

dir ve elimizde

$$\lambda \leq wi\left(\oplus_{t\in T} \tau_t\right)(A)$$

eşitsizliği vardır. O halde

$$\oplus_{t\in T} wi(\tau_t)(A) \leq wi\left(\oplus_{t\in T} \tau_t\right)(A)$$

eşitsizliğinden teorem ispatlanmış olur.

4.KAYNAKLAR

[1] Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV, Yrd. Doç. Dr. Çiğdem GÜNDÜZ (ARAS) Genel Topoloji, Çağlayan Kitapevi, İstanbul, 2004

[2] Doğan ÇÖKER, An Introduction To Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets And Systems 88 (1997) 81-89.

[3] Seonk Jong LEE And Eun Pyo LEE, The Category Of Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, Bull. Korean Math. Soc. 37 (2000), No. 1, pp. 63-76.

[4] R. LOWEN, Fuzzy Topological Spaces And Fuzzy Compactness, JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 56, 621-633 (1976).

[5] Yueli YUE, Lattice-Valued Induced Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets And Systems 158 (2007) 1461-1471.

[6] S. DANG, A. BEHERA, On Fuzzy Compact-Open Topology, Fuzzy Sets And Systems 80 (1996) 377- 381.

[7] J. K. KOHLI, A. R. PRASANNAN, Fuzzy Topologies On Function Spaces, Fuzzy Sets And Systems 116 (2000) 415-420.

[8] Sadi BAYRAMOV, Çiğdem GÜNDÜZ (ARAS), A Study on Intuitionistic Gradation of Openness on Function Spaces, Department of Mathematics, Kafkas University, Kars, 36100-Turkey, Department of Mathematics, Kocaeli University, Kocaeli, 41380-Turkey.

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında IĞDIR' ın Aralık İlçesin' de doğdu. İlk ve orta öğrenimimi IĞDIR' da tamamladı. Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünün den 2004 yılında mezun oldu. 2006 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Ana Bilim Dalı Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı yüksek lisans programını başarıyla tamamladı. 2006-2007 yılları arasında Iğdır Sınav Dershanesin de Matematik Öğretmeni olarak çalıştı. 2006 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalın da yüksek lisans programına başladı.

Şu anda ise SAMSUN BAFRA İLÇE EMNİYET MÜDÜRLÜĞÜNDE çalışmakta ve Matematik Öğretmeni olarak ders vermektedir.