T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ŠOSTAK FUZZY TOPOLOJİK UZAYLAR KATEGORİSİNDE HOMOLOJİ TEORİ

Taha Yasin ÖZTÜRK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV

HAZİRAN–2010
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Taha Yasin ÖZTÜRK'ün Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV'un danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Šostak Fuzzy Topolojik Uzaylar Kategorisinde Homoloji Teori'' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy..birliği... ile kabul edilmiştir.

25/06/2010

Adı ve Soyadı **İmza**

Başkan: Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV ....

Üye: Prof. Dr. Nazım SADIK ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA ....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ...../...../...... gün ve ..../

.... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdullah DOĞAN
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Tüm yüksek lisans eğitimimin yanı sıra tez çalışmamda büyük emeği olan danışman hocam Sayın Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV'a yine eğitimimde ve çalışmalarımda desteklerini aldığım Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUBOV'a, Sayın Yrd. Doç. DR. Nizami MUSTAFA' ya en içten dileklerimle teşekkür ederim.

Tez çalışmamda katkıları olan Arş. Gör. Fatih KUTLU'ya, Arş. Gör. Murat ÇAĞLAR'a ve Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı yüksek lisans öğrencisi Yusuf KOÇAK'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Tezde intunistik fuzzy topolojik uzayların Cech homoloji ve kohomoloji gruplarını tanımlıyoruz ve bu gruplar için homoloji teorinin aksiyomlarının sağlanmasını kontrol ediyoruz. Tezde bu tanımlanan homoloji ve kohomoloji grupları için tamlık aksiyomu dışında tüm aksiyomların sağlandığı ispatlanır.

Tezin en temel sonucu intunistik fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde homotopya bağıntısının verilmesidir ve homoloji gruplarının bu bağıntıya göre invaryant olduğunun ispatıdır.

ABSTRACT

In this thesis, we introduce and investigate Chec homology and cohomology groups of intuitionistic fuzzy topological spaces and control that providing of axioms of homology theory for these groups.

We prove that all exactness axioms is provided for homology and cohomology groups the most fundamental results of this thesis is introducing of homotopia relation for category of intuitionistic fuzzy topological spaces and prove that homology groups are invariant fort his relation.

SİMGELER DİZİNİ

A_λ	: A fuzzy kümesinin λ kesimi
a_α	: L-fuzzy nokta
$B_n\left[(X,\tau),Z\right]$	: (X,τ) uzayının singüler n- sınırı
CC	: Zincir kompleksler kategorisi
$C_n\left[(X,\tau),Z\right]$	: (X,τ) uzayının singüler n- zincir grubu
$C_q(X)$	: q- boyutlu zincir grup
$Cov(X)$	: X uzayının açık örtümlerinin kümesi
$Dir(Top)$	: Topolojik uzayların düz spekitirler kategorisi
Δ_q	: q- boyutlu simpleks
E	: Fuzzy ekspiyonensal dönüşüm
$\underline{f}$	: Ters spektirin morfizması
f'	: f kümesinin tümleyeni
$\overset{\circ}{f}$	: f kümesinin içi
$\overline{f}$	: f kümesinin kapanışı
fgm_Λ^Z	: Fuzzy derece sol Λ- modüllerin kategorisi
G_0	: G fuzzy kümesinin destek kümesi
$H_n\left[(X,\tau),Z\right]$	: (X,τ) uzayının singüler n- homoloji grubu
$H(\theta_C)$	: Fuzzy derece modülü
H_q	: Homoloji funktoru
H^q	: Kohomoloji funktoru
$I(L)$	: Monoton azalan dönüşümlerin kümesi
$I^n(L)$	: L-fuzzy esas n- küp
$Inv(Top)$	: Topolojik uzayların ters spektirler ketegorisi
χ_A	: A kümesinin karakteristik fonksiyonu
ξ^n	: L- fuzzy singüler n- küp
ξ_I	: I üzerinde Öklid alt uzay topolojisi
$\lim\limits_{\leftarrow} \underline{X}$	: Ters spektrin limiti
$\lim\limits_{\rightarrow} \overline{X}$	: Düz spektrin limiti
$M(L)$	: L latisinin indirgenemez elemanlarının kümesi
$M(L^X)$	: X kümesinin L- fuzzy noktalarının kümesi
(M,μ)	: Fuzzy modül
μ	: Derece fonksiyonu
$M\otimes N$	: M ve N modüllerinin tensör çarpımı
$\mu\otimes v$	: μ ve v derece fonksiyonlarının tensör çarpımı
$nervf$	: f örtümünün simplisial kompleksi

$P(X,\tau)$	: Fuzzy yolların ailesi
$S_n(X,\tau)$	: L- fuzzy singüler n- küpler kümesi
$S(M)$	: Derece fonksiyonların kümesi
τ^n	: Çarpım topolojisi
Top^2	: Topolojik uzayların çiftler kategorisi
θ_C	: Fuzzy zincir kompleks
(X,τ)	: Fuzzy topolojik uzay
$\underline{X}$	: X topolojik uzayının ters spektiri
$\bar{X}$	: X topolojik uzayının düz spektiri
$Z_n\left[(X,\tau),Z\right]$	: (X,τ) uzayının singüler n- devri

1.GİRİŞ

Cebirsel topolojinin temel amaçlarından biri ele alınan topolojik problemin cebirsel probleme dönüştürülmesi ve bu cebirsel problemin çözümünden yararlanarak topolojik problem hakkında bilgi elde etmektir. Cebirsel topolojinin bu tür problemlerin çözümünde yıllardan beri gelişen kendine özgü yöntemleri vardır. Bu yöntemlerden en önemlileri homoloji ve kohomoloji homotopik teorilerdir. Homoloji ve kohomoloji gruplar için ele alınan topolojik nesnenin invaryantları olarak yedi aksiyomun sağlanması gerekmektedir. Bu aksiyomlardan en önemlileri homotopi, tamlık ve kesme aksiyomlarıdır.

Bilindiği gibi matematikte en önemli problemlerden biri topolojik uzayın alt uzayında verilen fonksiyonun tüm topolojik uzaya genişletilmesi problemidir. Bu problem hakkında çok fazla sonuç elde edilmemiştir. Bununla ilgili en önemli teorem Tietze genişletilme teoremidir. Cebirsel topolojinin yöntemleriyle bu problem daha kolay hale getirilebilir. Diğer topoloji problemlerinden kaldırım problemi de cebirsel topolojinin yöntemleriyle çözülebilir.

Cebirsel topoloji yöntemlerin sadece topolojide değil matematiğin ve fen bilimlerinin çeşitli alanlarında da uygulamaları vardır. Örneğin uygulamalı matematiğin varyasyonel hesabında homotopik teori kullanılmaktadır. Ayrıca kuantum fiziğinde kohomaloji teorinin sonuçları önemli bir yer tutmaktadır.

Cebirsel topolojik uzaylar kategorisinde üç önemli homoloji ve kohomoloji teori inşa edilmiştir. Bunlardan biri poliyedirler kotegorisinde tanımlı geometrik yapısı olan simplisial homoloji teoridir. Bu teorinin tüm topolojik uzaylar kategorisine genişletilme problemi birçok matematikçi için güncel bir probleme dönüşmüştür. Bu tür genişletilme problemi biri Cech diğeri ise Shape teorisi olmak üzere iki farklı yöntemle çözülmeye çalışılmıştır. Simplisial homoloji teorinin iyi yönü homoloji ve kohomoloji grupların geometrik yapı kullanılarak daha kolay hesaplanmasıdır. Kötü yönü ise bu teorinin tüm topolojik uzaylarda tanımlı olmayışı ve bunun sonucu olarak genişletilmede tamlık ve homotopi aksiyomlarında problemlerin ortaya çıkmasıdır.

İkinci önemli teori olan Singüler Homoloji Teori tüm topolojik uzaylar kategorisinde tanımlanmıştır. Fakat singüler homoloji grupların topolojik uzaylar için hesaplanması oldukça zor bir problemdir.

Üçüncü önemli teori olan Spektral Homoloji Teori, simplisial ve singüler homloji teorilerin iyi özelliklerini içermektedir. Bu teori hem singüler homoloji teoride olduğu gibi tüm topolojik uzaylar kategorisinde tanımlı hem de bu teorinin inşasında poliyedirler kullanıldığı için homoloji grupların hesaplanması daha kolaydır.

İlk olarak 1965 yılında Zadeh, L. A. tarafından fuzzy (bulanık) küme tanımı verilmiştir[52]. Daha sonra topolojiciler fuzzy kümelerde topoloji tanımlayarak klasik topolojik uzaylardaki kavramları ve teoremleri fuzzy topolojik uzaylarda vermeye ve ispatlamaya çalışmışlardır. Fuzzy kümelerde topoloji kavramı ilk olarak Chang, C. L. tarafından verilmiştir [5].

Yapılan taramalar ve incelemeler fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde cebirsel topolojinin yöntemlerinin neredeyse hiç kullanılmadığını gösterdi. Bunun nedeni uygun homotopi kavramının verilmememsidir. Aslında fuzzy topolojik uzaylarda homotopi kavramının verilmesinde üç farklı yaklaşım izlenmektedir.

Birinci yaklaşım verilen topolojik uzayın topolojisi fuzzy kümelerin bir desteği olarak ele alınan fuzzy topolojiden yararlanarak fuzzy birim aralığını tanımlayarak homotopi bağıntısının verilmesidir [38,39].

İkinci yaklaşım monoton azalan fonksiyonları kullanarak fuzzy birim aralığının tanımlanması ve bundan yararlanarak fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde fuzzy homotopi kavramının verilmesidir [7,15,34,37,47]. Bu verilen fuzzy homotopinin bir denklik bağıntısı olup olmadığı bilinmemektedir.

Üçüncü yaklaşım [19] deki fuzzy kümelerle kümeler arasındaki bağlantıyı kullanarak fuzzy kümelerde farklı bir topoloji tanımlayarak fuzzy kümeler arasında ki dönüşümlerde fuzzy homotopinin verilmesidir [9,16,18]. Bu homotopi bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu ispatlanmamaktadır ve bu bağıntı tüm fuzzy topolojik uzaylara genişletilememektedir. Fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde Wang-Jin, L., Chong-You, Z. [46] tarafından verilen fuzzy birim aralığını kullanarak singüler homoloji tanımlanmış ve bu grubun fuzzy homeomorfizması altında invaryant olduğu ispatlanmıştır [37]. Daha sonra Salleh A.R. tarafından bu singüler homoloji grubun fuzzy homotopi bağıntısına göre invaryant olduğu ispatlanmıştır [37].

Görüldüğü gibi cebirsel topolojinin yöntemleri fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde pek fazla yer almamıştır. Burada fuzzy topolojik kategorisinde ele alınan fuzzy homotopilerinden yararlanarak homoloji teorinin tüm aksiyomlarını sağlayan bir teori inşa etmek amaçlanmaktadır.

Ayrıca Salleh, A. , R. [38,39] tarafından verilen homotopiden yararlanarak fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde Cech homoloji teori inşa edilmektedir.

Çuvalcıoğlu-Citil [9] tarafından verilen homotopiden yararlanarak fuzzy kümelerde başka bir homotopi inşa edilmektedir.

Bu çalışmalar için fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde gerekli olan fuzzy normallik, fuzzy dönüşümler uzayı, fuzzy uzayların ters ve düz spektirleri hakkında incelemeler yapmak gerekmektedir. Fuzzy normallikle ilgili [22,48] çalışmaları yapılmıştır. Fuzzy dönüşümler uzayı ile ilgili [2,25] çalışmaları yapılmıştır. Fuzzy uzayların ters ve düz spektirleri ile ilgili [13,14] çalışmalrı yapılmıştır.

Homoloji teorilerin inşasında en fazla kullanılan yöntem topolojik uzaylar kategorisinden zincir kompleksler kategorisine ulaşma yöntemidir. Bundan dolayı fuzzy gruplar ve fuzzy modüller konusunda da incelemeler yapılmıştır. Fuzzy gruplar ve modüllerle ilgili [23,28,29,32,36,53,55] çalışmaları yapılmıştır. [3] de

Ameri ve Zahedi tarafından fuzzy zincir kompleks, fuzzy zincir homotopi ve fuzzy homoloji gruplar tanımlanmıştır. Fakat fuzzy homoloji grupların tam dizisi oluşturulmamıştır.

Son yıllarda fuzzy topolojik uzaylara farklı bir yaklaşım izlenmektedir. Burada topoloji kavramı ve topoloji kavramında açık veya kapalı küme gösterilmemektedir. Fakat kümenin açık olma ve açık olmama dereceleri verilmektedir. İlk olarak bu kavramlar Šostak tarafından verilmiştir ve böyle uzaylara intunistik fuzzy topolojik uzaylar adını vermiştir [41,42,43]. Burada önemli olan topolojinin kendisinde fuzzy kavramının kullanılmasıdır. Daha sonra Abbas S.E., Chattopadhyay K.C. ve arkadaşları, Çöker D., Fang J. ve Yue Y. tarafından bu konu ile ilgili bazı araştırmalar yapılmıştır [1,6,8,11,12,26]. En kapsamlı araştırmalar Mondal Samanta tarafından yapılmıştır. Bu araştırmada intunistik fuzzy topolojik uzaylarla Chang fuzzy topolojik uzaylar arasında kategorisel bağıntı kurulmaktadır. [5],[31] çalışmalarında ise intunistik fuzzy topolojik uzaylarda direkt çarpım, topolojik toplam, bölüm uzayı ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

Yukarıda belirttiğimiz gibi hatta fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde cebirsel topolojinin yöntemleri birkaç çalışma dışında hemen hemen hiç yer almamaktadır. İntunistik fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde ise bu konuda günümüze kadar hiçbir çalışma yapılmamıştır. Bizce bunun nedeni uygun intunistik fuzzy birim aralığının tanımlanamamasından ve bundan dolayı homotopya bağıntısının verilmemesinden kaynaklanıyor. Biz bu tezde bu problemleri gidermeyi amaçlıyoruz. Tezde intunistik fuzzy topolojik uzayların Cech homoloji ve kohomoloji gruplarını tanımlıyoruz ve bu gruplar için homoloji teorinin aksiyomlarının sağlanmasını kontrol ediyoruz.

Tezde bu tanımlanan homoloji ve kohomoloji grupları için tamlık aksiyomu dışında tüm aksiyomların sağlandığı ispatlanır. Tezin en temel sonucu intunistik fuzzy topolojik uzaylar kategorisinde homotopya bağıntısının verilmesidir ve homoloji gruplarının bu bağıntıya göre invaryant olduğunun ispatıdır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Ters ve Düz Spektirler

Tanım 2.1.1. A yönlendirilmiş küme, her $\alpha \in A$ için X_α bir topolojik uzay ve her $\alpha \prec \alpha' \in A$ için $p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer

1) Her $\alpha \in A$ için $p_\alpha^\alpha = 1_{X_\alpha} : X_\alpha \to X_\alpha$;

2) Her $\alpha \prec \alpha' \prec \alpha''$ için $p_\alpha^{\alpha''} = p_\alpha^{\alpha'} \circ p_{\alpha'}^{\alpha''}$ koşulları sağlanırsa

$$\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha\}_{\alpha \prec \alpha' \in A} \right)$$

ailesine topolojik uzayların ters spektri denir [10].

Tanım 2.1.2. A yönlendirilmiş küme, her $\alpha \in A$ için X^α bir topolojik uzay ve her $\alpha \prec \alpha' \in A$ için $q_\alpha^{\alpha'} : X^\alpha \to X^{\alpha'}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer

1) Her $\alpha \in A$ için $q_\alpha^\alpha = 1_{X_\alpha} : X^\alpha \to X^\alpha$;

2) Her $\alpha \prec \alpha' \prec \alpha''$ için $q_\alpha^{\alpha''} = q_{\alpha'}^{\alpha''} \circ q_\alpha^{\alpha'}$ koşulları sağlanırsa

$$\overline{X} = \left(\{X^\alpha\}_{\alpha \in A}, \{q_\alpha^{\alpha'} : X^\alpha \to X^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha' \in A} \right)$$

ailesine topolojik uzayların düz spektri denir [10].

Tanım 2.1.3. $\underline{X} = (\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{p_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}), \underline{Y} = (\{Y_\beta\}_{\beta \in B}, \{r_\beta^{\beta'}\}_{\beta \prec \beta' \in B})$ topolojik uzayların ters spektrleri, $\varphi : B \to A$ izoton örten dönüşüm ve her $\beta \in B$ için $f_\beta : X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\beta \prec \beta' \in B$ için

$$\begin{array}{ccc} X_{\varphi(\beta')} & \xrightarrow{p_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\beta')}} & X_{\varphi(\beta)} \\ f_{\beta'}\downarrow & & \downarrow f_{\beta} \\ Y_{\beta'} & \xrightarrow[r_{\beta}^{\beta'}]{} & Y_{\beta} \end{array}$$

diyagramı komutatif ise

$$\underline{f} = (\varphi : B \to A, \{ f_\beta : X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta \}_{\beta \in B})$$

ailesine $\underline{X}$ ters spektrinden $\underline{Y}$ ters spektrine giden dönüşüm denir [10].

Tanım 2.1.4. $\overline{X} = (\{X^\alpha\}_{\alpha \in A}, \{q_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}), \overline{Y} = (\{Y^\beta\}_{\beta \in B}, \{r_\beta^{\beta'}\}_{\beta \prec \beta' \in B})$ topolojik uzayların düz spektrleri, $\phi : A \to B$ izoton örten dönüşüm ve her $\alpha \in A$ için $f^\alpha : X^\alpha \to Y^{\phi(\alpha)}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\alpha \prec \alpha' \in A$ için

$$\begin{array}{ccc} X^{\alpha} & \xrightarrow{q_{\alpha}^{\alpha'}} & X^{\alpha'} \\ f^{\alpha}\downarrow & & \downarrow f^{\alpha'} \\ Y^{\phi(\alpha)} & \xrightarrow[r_{\phi(\alpha)}^{\phi(\alpha')}]{} & Y^{\phi(\alpha')} \end{array}$$

diyagramı komutatif ise

$$\overline{f} = (\phi : A \to B, \{ f^\alpha : X^\alpha \to Y^{\phi(\alpha)} \}_{\alpha \in A})$$

ailesine $\overline{X}$ düz spektrinden $\overline{Y}$ düz spektrine giden dönüşüm denir [10].

Teorem 2.1.5. $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha\}_{\alpha \prec \alpha' \in A} \right)$ topolojik uzayların ters spektri olsun.

$$B = \left\{ \pi_\alpha^{-1}(U) : \alpha \in A, U \in \tau_\alpha \right\}$$

ailesi $X = \varprojlim \underline{X}$ uzayının topolojisinin bir tabanıdır.

$$\underline{X} = (\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{p_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}), \ \underline{Y} = (\{Y_\beta\}_{\beta \in B}, \{r_\beta^{\beta'}\}_{\beta \prec \beta' \in B})$$

topolojik uzayların ters spektrleri ve

$$\underline{f} = (\varphi : B \to A, \{ f_\beta : X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta \}_{\beta \in B}) : \underline{X} \to \underline{Y}$$

bu ters spektrlerin bir dönüşümü olsun. Her $x = \{x_\alpha\} \in \varprojlim \underline{X}$ ve her $\beta \in B$ için $y_\beta = f_\beta(x_{\varphi(\beta)})$ alalım. $y = \{y_\beta\}$ elemanın $\varprojlim \underline{Y}$ uzayına ait olduğunu gösterelim. Her $\beta' \succ \beta \in B$ için

$$q_\beta^{\beta'}(y_{\beta'}) = q_\beta^{\beta'}(f_{\beta'}(x_{\varphi(\beta')}) = f_\beta(p_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\beta')}(x_{\varphi(\beta')})) = f_\beta(x_{\varphi(\beta)}) = y_\beta$$

olduğundan $y = \{y_\beta\}$ elemanı $\varprojlim \underline{Y}$ uzayına aittir. Böylece her $x = \{x_\alpha\} \in \varprojlim \underline{X}$ elemanına karşı $y = \{y_\beta\} = \{ f_\beta(x_{\varphi(\beta)})\} \in \varprojlim \underline{Y}$ elemanı karşı gelir. Buradan $\varprojlim \underline{X}$ den $\varprojlim \underline{Y}$ ye giden bir fonksiyon tanımlanır. Bu fonksiyonu $\varprojlim \underline{f} : \varprojlim \underline{X} \to \varprojlim \underline{Y}$ ile gösterelim [10].

Tanım 2.1.6. $\varprojlim \underline{f} : \varprojlim \underline{X} \to \varprojlim \underline{Y}$ fonksiyonuna $\underline{f} : \underline{X} \to \underline{Y}$ dönüşümünün limiti denir [10].

$\overline{X} = (\{X^\alpha\}_{\alpha \in A}, \{q_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha' \in A})$, $\overline{Y} = (\{Y^\beta\}_{\beta \in B}, \{r_\beta^{\beta'}\}_{\beta \prec \beta' \in B})$ topolojik uzayların düz spektrleri, $\overline{f} = (\phi : A \to B, \{ f^\alpha : X^\alpha \to Y^{\phi(\alpha)}\}_{\alpha \in A}) : \overline{X} \to \overline{Y}$ bu spektrlerin bir dönüşümü olsun. $\left\{ f^\alpha : X^\alpha \to Y^{\phi(\alpha)} \right\}_{\alpha \in A}$ fonksiyonlarından yararlanarak

$$f = \bigoplus_{\alpha \in A} f^\alpha : \bigoplus_{\alpha \in A} X^\alpha \to \bigoplus_{\alpha \in A} Y^\alpha$$

fonksiyonunu verelim. f fonksiyonunun denklik bağıntısını koruduğunu gösterelim. $x^\alpha \in X^\alpha, x^{\alpha'} \in X^{\alpha'}$ denklik sınıfını denklik sınıfına götürdüğü için bölüm uzaylarının

$$\varinjlim \overline{f} : \varinjlim \overline{X} \to \varinjlim \overline{Y}$$

sürekli fonksiyonunu tanımlar.

Tanım 2.1.7. $\varinjlim \overline{f} : \varinjlim \overline{X} \to \varinjlim \overline{Y}$ fonksiyonuna $\overline{f} : \overline{X} \to \overline{Y}$ dönüşümünün limiti denir [10].

2.2. Topolojik Uzaylar Kategorisinde Spektral Homoloji Teori

(X,τ) bir topolojik uzay $Cov(X)$ ile X uzayının tüm açık örtümler kümesini gösterelim. $Cov(X)$ kümesi örtümlerin inceltilmesine göre yönlendirilmiş bir kümedir. $\forall \alpha \in Cov(X)$ örtümü için

$$\alpha = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}\ ,\ nerv\alpha = \left\{ (i_1, i_2, \ldots, i_k) \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{U}_{i_j} \neq \varnothing \right\}$$

simplisial kompleksini oluşturalım.

Her bir s simpleksi için $Car_\alpha(s)$ ile $\bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{U}_{i_j}$ bu ara kesiti gösterelim.

Lemma 2.2.1. Eğer s' simpleksi s simpleksinin sınırı ise $Car_\alpha(s') \supset Car_\alpha(s)$ sağlanır. $f : X \to Y$ keyfi sürekli fonksiyon ve β, Y uzayının herhangi açık örtümü olsun. f sürekli olduğundan $\alpha = f^{-1}(\beta)$ ailesi X uzayının açık bir örtümü olmaktadır [10].

Lemma 2.2.2. $f : X \to Y$ sürekli fonksiyon ve $\alpha = f^{-1}(\beta)$ ise o zaman $nerv\alpha$ simplisial kompleksi $nerv\beta$ simplisial kompleksinin alt kompleksidir ve bu gömmeyi f_β ile gösterelim [10].

$$f_\beta : nerv\alpha \to nerv\beta$$

Tanım 2.2.3. $Cov(X)$ bir örtüm olsun. $\alpha = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}, \beta = \{\mathcal{V}_j\}_{j\in J}$ için $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_j$ sağlanıyorsa α'ya, β'nın inceltilmişi denir($\alpha \succ \beta$ ile gösterilir) [10].

Lemma 2.2.4. $Cov(X)$ inceltilmeye göre yönlendirilmiş kümedir [10].

$\alpha = \{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}, \beta = \{\mathcal{V}_j\}_{j\in J}$ ve $\alpha \succ \beta$ olsun. O zaman bu inceltilmeyi fonksiyonla ifade edebiliriz. Yani $p: I \to J$ öyle bir fonksiyondur ki $\forall\, \mathcal{U}_i \in \alpha$ için $\mathcal{U}_i \subset \mathcal{V}_{p(i)}$ sağlanır. Bu p fonksiyonu tek değildir. p fonksiyonundan yararlanarak simplisial komplekslerin simplisial dönüşümünü tanımlayabiliriz.

$p: nerv\alpha \to nerv\beta,\ (i_1, i_2, \ldots, i_k) = s \in nerv\alpha$ bir simpleks olsun. O zaman $(p(i_1), p(i_2), \ldots, p(i_k)) \in nerv\beta$'da bir simplekstir. Gerçekten $s = (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ simpleks ise

$$\mathcal{U}_{i_1} \cap \mathcal{U}_{i_2} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{i_k} \neq \varnothing \text{ ve } \mathcal{U}_{i_1} \subset \mathcal{V}_{p(i_1)}, \ldots, \mathcal{U}_{i_k} \subset \mathcal{V}_{p(i_k)}$$

burada

$$\mathcal{V}_{p(i_1)} \cap \mathcal{V}_{p(i_2)} \cap \ldots \cap \mathcal{V}_{p(i_k)} \supset \mathcal{U}_{i_1} \cap \mathcal{U}_{i_2} \cap \ldots \cap \mathcal{U}_{i_k} \neq \varnothing .$$

Lemma 2.2.5. α, β iki örtüm olsun. p, p' ise $\alpha \succ \beta$ olsun. O zaman p, p' dönüşümleri simplisial denktir [10].

Bu lemmadan yararlanarak simplisial denk dönüşümleri aynı düşündüğümüzde örtümlerin inceltilmesi tek bir simplisial dönüşüm vermektedir. Eğer simplisial denk dönüşümleri aynı düşünürsek o zaman keyfi (X, τ) topolojik uzayı için

$$nerv(x) = \left(\{nerv\alpha\}_{\alpha \in Cov(x)}, \{p_\alpha^\beta : nerv\beta \to nerv\alpha\}_{\alpha \prec \beta} \right)$$

simplisial kompleksin spektrini elde ederiz. Şimdi $f:(X,\tau) \to (Y,\tau')$ keyfi sürekli dönüşüm olsun.

Her $\beta \in Cov(Y)$ için $f^{-1}(\beta) \in Cov(X)$ olmaktadır ve $\beta_1 < \beta_2$ ise $f^{-1}(\beta_1) < f^{-1}(\beta_2)$ sağlanır. Yani $f^{-1}: Cov(Y) \to Cov(X)$ yönlendirilmiş kümelerin izoton dönüşümüdür. O halde

$$f_* = \left(f^{-1} : Cov(Y) \to Cov(X), \left\{ f_\beta : nervf^{-1}(\beta) \to nerv\beta, \beta \in Cov(Y) \right\} \right)$$

dönüşümü $nerv(X)$ ters spektrinden $nerv(Y)$ ters spektrine morfizma olmaktadır.

Teorem 2.2.6. $X \mapsto nerv(X),\ f : X \to Y \mapsto f_* : nerv(X) \to nerv(Y)$ karşı gelmesi topolojik uzaylar kategorisinde simplisial komplekslerin ters spektirler kategorisine giden bir kovaryant funktordur.

$\forall (X,\tau)$ topolojik uzayı için $nerv(X)$ ters spektirini $H_q (H^q)$ homoloji(kohomoloji) funktorunu uygularsak;

$$H_q(nerv(X)) = \left(\left\{ H_q(nerv\alpha) \right\}_{\alpha \in Cov(X)}, \left\{ H_q(p_\alpha^\beta) \right\}_{\alpha \prec \beta} \right)$$

$$\left[H^q(nerv(X)) = \left(\left\{ H^q(nerv\alpha) \right\}_{\alpha \in Cov(X)}, \left\{ H^q(p_\alpha^\beta) \right\}_{\alpha \prec \beta} \right) \right]$$

grupların ters (düz) spektrini elde ederiz [10].

Tanım 2.2.7. $H_q(X) = \varprojlim_{\alpha \in Cov(X)} H_q(nerv\alpha)$ $\left[H^q(X) = \varinjlim_{\alpha \in Cov(X)} H^q(nerv\alpha) \right]$ grubunu (X,τ) topolojik uzayının q boyutlu spektiral homoloji(kohomoloji) grubu denir [10].

Topolojik uzaylardan simplisial komplekslerin ters spektirine geçiş kovaryant funktor, H_q ve ters limitlerde kovaryant funktor oldukları için $X \mapsto H_q(X)$ karşı gelmesi topolojik uzaylar kategorisinden gruplar kategorisine giden bir kovaryant funktordur.

Böylece topolojik uzaylar kategorisinden gruplar kategorisine giden funktoru belirledik. Şimdi bu funktor için homoloji teorinin aksiyomlarının sağlandığını kontrol edelim. Homoloji teorinin 1. ve 2. aksiyomu funktorluğu belirttiğinden dolayı bu şartların sağlandığı açıktır. Şimdi 7.ölçüm aksiyomunu kontrol edelim.

Teorem 2.2.8. (Ölçüm Aksiyomu) Eğer $X = P$ bir noktalı uzay ise $H_q(P) = 0$, $q = 0$ ise $H_0(P) = Z$ olmaktadır [10].

Teorem 2.2.9. (Kesme Aksiyomu): U, X uzayının açık kümesi olsun. Eğer $U^c \in \dot{I}nt(A)$ ise $f_{**} : H_q(X, \mathcal{U}, A, \mathcal{V}) \to H_q(X, A)$ homomorfizması izomorfizmadır [10].

Teorem 2.2.10. (Homotopya Aksiyomu): $g_0, g_1 : (X, A) \to (X, A) \times I$ dönüşümleri $g_0(x) = (x, 0), g_1(x) = (x, 1)$ şeklinde tanımlansın. O zaman $g_0^* = g_1^*, g_{0_*} = g_{1_*}$ sağlanır [10].

2.3. Fuzzy Topolojik Uzaylar

Tanım 2.3.1. X boştan farklı bir küme ve L'de bir tam latis olsun. X'deki bir $L-$ *fuzzy* alt kümesi bir $A : X \to L$ dönüşümüdür. Yani X deki tüm $L-$ *fuzzy* alt kümelerinin ailesi L^X, X'den L'ye tüm dönüşümleri kapsar. Burada L^X bir $L-$ *fuzzy* uzayı, X kendi üzerindeki her bir $L-$ *fuzzy* alt kümesinin taşıyıcı aralığı, L'de X'in her $L-$ *fuzzy* alt kümesinin değer aralığı olarak adlandırılır [48].

Tanım 2.3.2. L^X, L^Y $L-$ *fuzzy* uzayları, $f : X \to Y$ sıradan bir dönüşüm olsun. $f : X \to Y$ dönüşümüne dayanarak $f^{\to} : L^X \to L^Y$ $L-$ *fuzzy* dönüşümünü ve bunun $f^{\leftarrow} : L^Y \to L^X$ $L-$ *fuzzy* ters dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$f^{\to} : L^X \to L^Y,\ f^{\to}(A) = \vee\{A(x) : x \in X,\ f(x) = y\},\ \forall A \in L^X, \forall y \in Y$$

$$f^{\leftarrow} : L^Y \to L^X,\ f^{\leftarrow}(B)(x) = B(f(x)),\ \forall B \in L^Y,\ \forall x \in X .$$

Bu durumda $f : X \to Y$ sıradan dönüşümü uygun $f^{\to} : L^X \to L^Y$ $L-$ *fuzzy* dönüşümü üretir ya da $f^{\to} : L^X \to L^Y$, $f : X \to Y$ dönüşümünden indirgenir denir.

Her zaman $f^{\rightarrow}$ sembolü bir f sıradan dönüşümünden indirgenen bir $L-$ *fuzzy* dönüşümü anlamına ve $f^{\leftarrow}$ sembolü de $f^{\rightarrow}$'nın ters $L-$ *fuzzy* dönüşümü anlamına gelir [48].

Teorem 2.3.3. L^X ve L^Y birer $L-$ *fuzzy* uzayı , $f: X \rightarrow Y$ sıradan bir dönüşüm olsun. O halde

(i) $f^{\rightarrow}$ birebirdir ancak ve ancak f birebir ise.

(ii) $f^{\rightarrow}$ birebirdir ancak ve ancak $f^{\leftarrow} \circ f^{\rightarrow} = id_{L^X} : L^X \rightarrow L^X$ ise.

(iii) $f^{\rightarrow}$ örtendir ancak ve ancak f örten ise.

(iv) $f^{\rightarrow}$ örtendir ancak ve ancak $f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow} = id_{L^Y} : L^Y \rightarrow L^Y$ ise.

(v) $f^{\rightarrow}$ bijektifdir ancak ve ancak f bijektif ise.

(vi) $f^{\rightarrow}$ bijektifdir ancak ve ancak $f^{\leftarrow} \circ f^{\rightarrow} = id_{L^X}$, $f^{\rightarrow} \circ f^{\leftarrow} = id_{L^Y}$ yani $(f^{\rightarrow})^{-1} = f^{\leftarrow}$ ise [48].

Teorem 2.3.4. L^X, L^Y ve L^Z $L-$ *fuzzy* uzayları $f: X \rightarrow Y$ ve $g: Y \rightarrow Z$ sıradan dönüşümler olsun. O halde

(i) $g^{\rightarrow} f^{\rightarrow} = (gf)^{\rightarrow}$

(ii) $f^{\leftarrow} g^{\leftarrow} = (gf)^{\leftarrow}$ [48].

Teorem 2.3.5. $f: X \rightarrow Y$ ve L^X, L^Y $L-$ *fuzzy* uzayları olsun. O halde $f^{\leftarrow} = g^{\rightarrow}$ olacak şekilde bir $g: Y \rightarrow X$ sıradan dönüşümü vardır ancak ve ancak f bijektif ve $g = f^{-1}$ ise [48].

Tanım 2.3.6. X boştan farklı bir sıradan küme, L bir $F-latis, \delta \subset L^X$ olsun. Eğer δ aşağıdaki üç şartı sağlar ise δ, X üzerinde bir $L-$ *fuzzy* topolojisi olarak ve (L^X, δ) de bir $L-$ *fuzzy* topolojik uzayı ya da kısaca $L-$ *fts* olarak adlandırılır.

(LFT1) $\underline{0}, \underline{1} \in \delta;$
(LFT2) $\forall \mathcal{A} \subset \delta, \vee \mathcal{A} \in \delta;$
(LFT3) $\forall U, V \in \delta, \;\; U \wedge V \in \delta$.

Özellikle $L = \{0,1\}$ olduğunda (L^X, δ) $L-fuzzy$ topolojik uzayı bir $F-topolojik\, uzay$ ya da kısaca $F-ts$ olarak adlandırılır ve sadece (X, δ) ile gösterilir.

δ'nın her bir elemanı L^X'de bir açık alt küme ve δ'nın her bir elemanın psedu tümleyen kümesi, yani δ'nın her bir elemanı L^X'de bir kapalı alt küme olarak adlandırılır [48].

Tanım 2.3.7. X boştan farklı bir sıradan küme, L bir $F-latis$, $\eta \subset L^X$ olsun. Eğer η aşağıdaki koşulları sağlıyorsa η'ye X'de bir $L-fuzzy\; ko-topolojisi$ ve (L^X, η)'ye de bir $L-fuzzy\; (L^X, \delta)$ topolojik uzay ya da kısaca $L-fts$ denir.

(LFT$1'$**)** $\underline{0}, \underline{1} \in \eta;$
(LFT$2'$**)** $\forall \mathcal{A} \subset \eta, \Lambda \mathcal{A} \in \eta;$
(LFT$3'$**)** $\forall P, Q \in \eta, \;\; P \mathrm{V} \mathrm{Q} \in \eta$.

η'nün her bir elemanı L^X'de bir kapalı küme ve η'nün her bir elemanın psedu tümleyen kümesi, yani η'nün her bir elemanı L^X'de bir açık alt küme olarak adlandırılır [48].

Tanım 2.3.8. $(L^X, \delta), (L^Y, \mu)$ iki $L-fts$ ve $f^{\rightarrow} : L^X \rightarrow L^Y$ bir $L-fuzzy$ dönüşümü olsun. Eğer $f^{\rightarrow}$'nin ters $L-fuzzy$ dönüşümü olan $f^{\leftarrow} : L^Y \rightarrow L^X$ dönüşümü L^Y'deki her bir açık kümeyi L^X'deki bir açık kümeye dönüştürüyorsa $f^{\rightarrow}$ dönüşümüne (L^X, δ)'dan (L^Y, μ)'ye bir $L-fuzzy$ sürekli dönüşümü ya da kısaca

$f^{\rightarrow}$ süreklidir diyeceğiz. (Yani; $\forall V \in \mu,\ f^{\leftarrow}(V) \in \delta$.) Bir $L-$ *fuzzy* sürekli dönüşümünü $f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ şeklinde de gösterilir [48].

Teorem 2.3.9. $(L^X, \delta), (L^Y, \mu)$ birer $L-fts$ ve $f^{\rightarrow} : L^X \rightarrow L^Y$ bir $L-$ *fuzzy* sürekli dönüşümü olsun. O halde aşağıdaki şartlar denktir [48].

(i) $f^{\rightarrow}$ süreklidir.

(ii) $\forall Q \in \mu',\ f^{\leftarrow}(Q) \in \delta'$.

(iii) $f^{\rightarrow}, (L^X, \delta)$ 'nın her yerinde süreklidir.

(iv) $\forall e \in M(L^X),\ \forall Q \in \mathcal{R}(f(e)),\ f^{\leftarrow}(Q) \in \mathcal{R}(e)$.

(v) $\mu, \forall V \in \mu_0$ için $f^{\leftarrow}(V) \in \delta$ olacak şekilde bir μ_0 alt tabanına sahiptir.

(vi) $\mu, \forall Q \in \mu_0{}'$ için $f^{\leftarrow}(Q) \in \delta'$ olacak şekilde bir μ_0 alt tabanına sahiptir.

(vii) $\forall A \in L^X,\ f^{\rightarrow}(A^-) \leq (f^{\rightarrow}(A))^-$.

(viii) $\forall B \in L^Y, (f^{\leftarrow}(B))^- \leq f^{\leftarrow}(B^-)$.

(ix) $\forall B \in L^Y,\ f^{\leftarrow}(B^\circ) \leq (f^{\leftarrow}(B))^\circ$.

Tanım 2.3.9. L^X bir $L-$ *fuzzy* uzay, $Y \subset X,\ Y \neq \emptyset, A \subset L^X$ olsun. $\mathcal{A}|_Y$ kısıtlaması;

$$\mathcal{A}|_Y = \left\{ \mathcal{A}|_Y : A \in \mathcal{A} \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Ayrıca her (L^X, δ) $L-fts$ 'si için $\delta|_Y = \left\{ U|_Y : U \in \delta \right\}$ olur [48].

Önerme 2.3.10. (L^X, δ) bir $L-fts$,

$$Z \subset Y \subset X, Y \neq \emptyset, Z \neq \emptyset, \left\{ A_t : t \in T \right\} \subset L^X, A \in L^X$$

olsun. O halde

(i) $(\mathrm{V}_{t\in T} A_t)|_Y = \mathrm{V}_{t\in T}(A_t|_Y)$.

(ii) $(\Lambda_{t\in T} A_t)|_Y = \Lambda_{t\in T}(A_t|_Y)$.

(iii) $A'|_Y = (A|_Y)'$.

(iv) $(A|_Y)|_Z = A|_Z$ [48].

Sonuç 2.3.11. (L^X, δ) bir $L-fts$ ve $Z \subset Y \subset X, Y \neq \emptyset, Z \neq \emptyset, \{A_t : t \in T\} \subset L^X$, $A \in L^X$ olsun. O halde

(i) $\delta|_Y$, Y 'de bir $L-fuzzy$ topolojisidir.

(ii) $\left(\delta|_Y\right)|_Z = \delta|_Z$ [48].

Tanım 2.3.12. (L^X, δ) bir $L-fts$, $Y \subset X$, $Y \neq \emptyset$ olsun. $\delta|_Y$, Y 'de δ 'nın relativ topolojisi ya da Y 'nin alt uzayı ; $(L^Y, \delta|_Y)$ 'de (L^Y, δ) 'nin bir $L-fuzzy$ alt uzayı ya da kısaca bir alt uzay olarak adlandırılırlar.

(a) Eğer $\mathcal{X}_Y \in \delta$ ise $(L^Y, \delta|_Y)$, (L^X, δ) 'nin bir açık alt uzayı olarak adlandırılır.

(b) Eğer $\mathcal{X}_Y \in \delta'$ ise $(L^Y, \delta|_Y)$, (L^X, δ) 'nin bir kapalı alt uzayı olarak adlandırılır.

(c) Eğer $cl_\delta \mathcal{X}_Y = \mathcal{X}_X$ ise $(L^Y, \delta|_Y)$, (L^X, δ) 'nin bir yoğun alt uzayı olarak adlandırılır[48].

Yukarıdaki önermenin (i),(ii) şartlarından ve relativliğin tanımından aşağıdaki sonuçlar çıkarılır.

Önerme 2.3.13. (L^X, δ) bir $L-fts$ olsun. O halde

(i) (L^X, δ) 'nin her $(L^Y, \delta|_Y)$ alt uzayı bir $L-fts$ dir.

(ii) Eğer $(L^Y, \delta|_Y)$, (L^X, δ) 'nin bir alt uzayı ise ve $\left(L^Z, \left(\delta|_Y\right)|_Z\right)$, $(L^Y, \delta|_Y)$ 'nin bir alt uzayı ise o halde $\left(L^Z, \left(\delta|_Y\right)|_Z\right)$, (L^X, δ) 'nin de bir alt uzayıdır.

(iii) $(L^Y, \delta|_Y)$ 'de tüm kapalı alt kümelerin ailesi (L^X, δ) 'da ki tüm kapalı alt kümelerin kısıtlamasını kapsar. Yani; $\left(\delta|_Y\right)' = \delta'|_Y$.

(iv) Eğer $\mathcal{B}, \delta$ 'nın bir tabanı ve $(L^Y, \delta|_Y)$, (L^X, δ) 'nin bir alt uzayı ise o halde $\mathcal{B}|_Y$, $\delta|_Y$ 'nin bir tabanıdır.

(v) Eğer $\mathcal{S}, \delta$ 'nın bir alt tabanı ve $(L^Y, \delta|_Y)$, (L^X, δ) 'nin bir alt uzayı ise o halde $\mathcal{B}|_Y$, $\delta|_Y$ 'nin bir alt tabanıdır [48].

Teorem 2.3.14. (L^X, δ), (L^Y, μ) birer $L-$ *fts*, $f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ bir $L-$ *fuzzy* dönüşüm, $X_0 \subset X, Y_0 \subset Y$ olsun. O halde

(i) $f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ ve $f\left[X_0\right] \subset Y_0 \Rightarrow (f|_{X_0}^{Y_0})^{\rightarrow} : (L^{X_0}, \delta|_{X_0}) \rightarrow (L^{Y_0}, \mu|_{Y_0})$ süreklidir.

(ii) $f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ ve $f\left[X\right] \subset Y_0 \Rightarrow (f|^{Y_0})^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^{Y_0}, \mu|_{Y_0})$ açıktır.

(iii) $f^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^Y, \mu)$ ve $f\left[X_0\right] \subset Y_0 \Rightarrow (f|^{Y_0})^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \rightarrow (L^{Y_0}, \mu|_{Y_0})$ kapalıdır [48].

Tanım 2.3.15. $\mathcal{S} = \left\{\left(L^{X_t}, \delta_t\right) : t \in T\right\}$ $L-$ *fts* 'lerin bir ailesi her $t \in T$ için $A_t \in L^{X_t}$ olmak üzere $\mathcal{A} = \left\{A_t : t \in T\right\}$ $L-$ *fuzzy* alt kümelerinin bir ailesi olsun. $X = \prod_{t \in T} X_t$ şeklinde tanımlansın.

Her $t \in T$ için $p_t : X \rightarrow X_t$ doğal projeksiyon dönüşümü olsun. L^X $L-$ *fuzzy* uzayından L^{X_t} $L-$ *fuzzy* uzayına projeksiyon dönüşümünü

$$p_t^{\rightarrow} : L^X \rightarrow L^{X_t}$$

şeklinde tanımlayalım.

X üzerinde $\{\delta_t : t \in T\}$ $L-fuzzy$ topolojisinin çarpım uzayı $\{p_t^{\leftarrow}(U_t) : U_t \in \delta_t, t \in T\}$ alt tabanı ile üretilen X üzerinde ki δ $L-fuzzy$ topolojisidir ve $\prod_{t\in T}\delta_t$ ile gösterilir.

(L^X,δ) $L-fts$ 'si $\{(L^{X_t},\delta_t) : t \in T\}$ $L-fts$ 'lerinin çarpım uzayı olarak ya da $L-fuzzy$ çarpım uzayı olarak adlandırılır. $\prod\mathcal{S}$ ya da $\prod_{t\in T}(L^{X_t},\delta_t)$ ile gösterilir. Her $t \in T$ için (L^{X_t},δ_t) koordinat uzayı ya da $\prod\mathcal{S}$ çarpım uzayının bir bileşeni olarak adlandırılır. Bazen (L^{X_t},δ_t), t 'inci koordinat uzayı olarak da adlandırılır.

$\mathcal{A} = \{A_t : t \in T\}$ $L-fuzzy$ alt kümesinin çarpımı

$$\prod\mathcal{A} = \prod_{t\in T} A_t = \Lambda\{p_t^{\leftarrow}(A_t) : t \in T\}$$

şeklinde tanımlanır ve $\prod\mathcal{A}$ ya da $\prod_{t\in T} A_t$ ile gösterilir.

$x \in X, s \in T$ ve $\prod_{t\in T} X_t$ uzayında X_s 'ye paralel x noktasında $sl(x,s)$ dilimi için $\prod_{t\in T}(L^{X_t},\delta_t)$ 'nin $\left(L^{sl(x,s)},\delta|_{sl(x,s)}\right)$ $L-fuzzy$ alt uzayı, (L^{X_s},δ_s) 'ye paralel $L-fuzzy$ x_1 noktasında $\prod_{t\in T}(L^{X_t},\delta_t)$ 'nin $L-fuzzy$ dilimi olarak adlandırılır [48].

Önerme 2.3.16. $\mathcal{S} = \{(L^{X_t},\delta_t) : t \in T\}$ $L-fts$ 'lerin bir ailesi, (L^X,δ) bunların çarpım uzayı olsun. O halde

$$\left\{\underset{t\in F}{\Lambda}\, p_t^{\leftarrow}(U_t) : F \in [T]^{<\omega}, \forall t \in F, U_t \in \delta_t\right\}$$

δ çarpım topolojisinin bir tabanıdır [48].

Tanım 2.3.17. $\mathcal{S} = \{(L^{X_t},\delta_t) : t \in T\}$ $L-fts$ 'lerin bir ailesi olsun. $\{p_t^{\leftarrow}(U_t) : U_t \in \delta_t, t \in T\}$ ailesi $\prod_{t\in T}\delta_t$ çarpım topolojisinin kanonik alt tabanı ve

$\left\{ \underset{t\in F}{\wedge} p_t^{\leftarrow}(U_t) : F \in [T]^{<\omega}, \forall t \in F, U_t \in \delta_t \right\}$ ailesi de yine bu çarpım topolojisinin kanonik tabanı olarak adlandırılır [48].

Teorem 2.3.18. $\mathcal{S} = \left\{ \left(L^{X_t}, \delta_t \right) : t \in T \right\}$ $L-fts$ 'lerin bir ailesi, (L^X, δ) bunların çarpım uzayı olsun.O halde

(i) Her $t \in T$ için $p_t^{\rightarrow} : (L^X, \delta) \to (L^{X_t}, \delta_t)$ projeksiyonu süreklidir.

(ii) δ çarpım topolojisi her bir $p_t^{\rightarrow}$ projeksiyonunu sürekli yapan X 'de ki en kaba $L-fuzzy$ topolojisidir [48].

Tanım 2.3.19. I yönlendirilmiş küme olmak üzere I^{op} 'dan $\mathcal{A}$ kategorisine giden herhangi D funktoru $\mathcal{A}$ 'da bir ters sistem olarak adlandırılır. D 'nin limitine D 'nin ters limiti denir. $\mathcal{A}$ kategorisi ters limite sahiptir ancak ve ancak her $D : I^{op} \to \mathcal{A}$ ters sistemi bir limite sahip ise.

$\mathcal{A}$ 'da direkt sistem, direkt limit, direkt limite sahip olma notasyonlarının duali tanımlanabilir. $S((L^X, \delta)) = X$ ve $S(F) = f$ ile tanımlanan $S : LTop \to Set$ funktoru yardımcı funktor olarak adlandırılır [13].

Teorem 2.3.20. $D : I^{op} \to LTop$, $i \le j$ 'yi sağlayacak herhangi $i, j \in I$ için $D(i) = \left(L^{X_i}, \delta_i \right)$ ve $D(i \le j) = F_{ji} : D(j) \to D(i)$ olmak üzere $LTop$ 'da bir ters sistem olsun. (A, P_i), $\{D(i)\}_{i\in I}$ $LTop$ -çarpımı yani $A = (L^X, \delta)$, $\{D(i)\}_{i\in I}$ ailesinin $L-fts$ çarpımı olsun. $P_i : A \to D(i)$, Zadeh fonksiyonların $L-$değerli projektifidir.
$Y = \left\{ y \in X \mid F_{ji} \circ P_j(y_\alpha) = P_i(y_\alpha),\ \alpha \in M(L),\ i, j \in I,\ i \le j \right\}$ olsun.
O halde $((L^Y, \delta|_Y), P_i|_Y)$, D 'nin ters limitidir [13].

Sonuç 2.3.21. Farz edelim ki $D: I^{op} \to LTop$ bir ters sistem ve $S: LTop \to Set$ yardımcı funktordur. O halde $((L^Y, \varepsilon), Q_i)$, D'nin ters limitidir ancak ve ancak (Y, q_i), $S \circ D$'nin ters limiti ise [13].

Teorem 2.3.22. J, I'da bir konfinal alt küme olmak üzere eğer her $j \in J$ için δ_j'nin bir β_j tabanı sabit ise $V_j \in \beta_j$'nin $(P_j|_Y)^{-1}(V_j)$ ailesi $\delta|_Y$'nın bir tabanıdır [13].

Teorem 2.3.23. Farz edelim ki S, $S \cap I = \varnothing$ sağlayacak bir küme olmak üzere $\{A_{si} \,|(s,i) \in S \times I\} \subset |LTop|$ olsun. Her $s \in S$, ve $i \in I$ için

$$D_1(i) = \prod_{s \in S} A_{si}, \; D_2(i) = \oplus_{s \in S} A_{si}, \; D_s(i) = A_{si}$$

$$D_1(i \le j) = \prod_{s \in S} D_s(i \le j), \; D_2(i \le j) = \oplus_{s \in S} D_s(i \le j)$$

sağlanacak şekilde $D_1, D_2, D_s : I^{op} \to LTop$ ters sistemlerdir. Ayrıca her $s \in S$ için A_s, D_s'nin ters limiti olsun.
O halde $\prod_{s \in S} A_s$ ve $\oplus_{s \in S} A_s$ sırasıyla D_1 ve D_2'nin ters limitleridir [13].

Önerme 2.3.24. Eğer $cf(I) \le \aleph_0$ ise tüm $D_i = \varnothing$ ve tüm F_{ij}'ler $Y \ne \varnothing$ sağlayacak şekilde örtendir [13].

Tanım 2.3.25. $D: I^{op} \to \mathcal{A}$ ve $\bar{D}: \bar{I}^{op} \to \mathcal{A}$ iki ters sistem ve $\varphi(\bar{I})$, I'da konfinal olacak şekilde $\varphi: \bar{I} \to I$ bir monoton fonksiyon olsun. O halde $\eta: D \circ \varphi \to \bar{D}(D \circ \varphi, \eta, \bar{D})$ bir doğal dönüşümü D ters sisteminden $\bar{D}$ ters sistemine bir dönüşüm olarak adlandırılır [13].

Uyarı 2.3.26.

(1) Her $i, j \in I$ ve $\bar{i}, \bar{j} \in \bar{I}$ için $D: I^{op} \to \mathcal{A}$ ve $\bar{D}: \bar{I}^{op} \to \mathcal{A}$ her zaman

$$D(i) = (L^{X_i}, \delta_i), \; \bar{D}(\bar{i}) = (L^{\bar{X}_i}, \bar{\delta}_i), \; D(i \le j) = F_{ij}, \; \bar{D}(\bar{i} \le \bar{j}) = \bar{F}_{\bar{i}, \bar{j}}$$

koşullarını sağlayacak iki ters sistemini gösterirler.

(2) (L^X, δ) ve $(L^{\bar{X}}, \bar{\delta})$ sırasıyla $\{D(i)\}_{i\in I}$ ve $\{\bar{D}(\bar{i})\}_{\bar{i}\in \bar{I}}$ ailelerinin $LTop$-çarpımı olmak üzere $(L^Y, \delta|_Y)$ ve $(L^{\bar{Y}}, \bar{\delta}|_{\bar{Y}})$ sırasıyla D ve $\bar{D}$'nün ters gösterirler.

(3) $\eta : D\circ\varphi \to \bar{D}(D\circ\varphi, \eta, \bar{D})$, D ters sisteminden $\bar{D}$ ters sistemine bir dönüşümü gösterir.

Kolaylık için her $\bar{i} \in \bar{I}$ için $\eta_{\bar{i}}$' nin yerine $F_{\bar{i}}$ alabiliriz ve $\{\varphi, F_{\bar{i}}\}$ ailesi D ters sisteminden $\bar{D}$ ters sistemine bir dönüşüm olarak adlandırılır [13].

Teorem 2.3.27. $\{\varphi, F_{\bar{i}}\}$, $\underleftarrow{\lim}\{\varphi, F_{\bar{i}}\}$ ile gösterilen ve $\{\varphi, F_{\bar{i}}\}$ ile üretilen $LTop$-morfizminin limiti olarak adlandırılan bir $F : (L^Y, \delta|_Y) \to (L^{\bar{Y}}, \bar{\delta}|_{\bar{Y}})$ $LTop$-morfizmini üretir [14].

Teorem 2.3.28. Eğer tüm $F_{\bar{i}}$'ler sırasıyla injeksiyon, bijeksiyon ve $LTop$-izomorfizmleri ise o halde $F = \underleftarrow{\lim}\{\varphi, F_{\bar{i}}\}$ sırasıyla bir injeksiyon, bijeksiyon ve $LTop$-izomorfizmidir [14].

Sonuç 2.3.29. Eğer J, I'da bir konfinal alt küme ise o halde $D|_{J^{op}}$'nın ters limiti D'nin $(L^Y, \delta|_Y)$ ters limiti ile $LTop$-izomorfiktir [14].

2.4. İntunistik Fuzzy Topolojik Uzaylar

Tanım 2.4.1. X boştan farklı bir küme olsun. X'in fuzzy alt kümelerinde bir IGO aşağıdaki koşulları sağlayan I^X'den I'ya giden fonksiyonların (τ, τ^*) şeklindeki sıralı ikilisidir.

(IGO1) $\tau(\lambda) + \tau^*(\lambda) \le 1, \quad \forall \lambda \in I^X$

(IGO2) $\tau(\tilde{0}) = \tau^*(\tilde{1}) = 1,\ \tau^*(\tilde{0}) = \tau^*(\tilde{1}) = 0,$

(IGO3) $\tau(\lambda_1 \cap \lambda_2) \geq \tau(\lambda_1) \wedge \tau(\lambda_2)$ ve $\tau^*(\lambda_1 \cap \lambda_2) \leq \tau^*(\lambda_1) \vee \tau^*(\lambda_2),\ \lambda_i \in I^X, i = 1,2,$

(IGO4) $\tau\left(\bigcup_{i\in\Delta}\lambda_i\right) \geq \Lambda_{i\in\Delta}\tau(\lambda_i)$ ve $\tau^*\left(\bigcup_{i\in\Delta}\lambda_i\right) \leq \mathrm{V}_{i\in\Delta}\tau^*(\lambda_i), \lambda_i \in I^X, i \in \Delta.$

(X,τ,τ^*) sıralı üçlüsü IFTS olarak isimlendirilir. τ ve τ^* sırasıyla açıklık derecesi ve açık olmama derecesi olarak adlandırılır [31].

Tanım 2.4.2. X boştan farklı küme ve $\mathfrak{F},\mathfrak{F}^* : I^X \to I$ aşağıdaki koşulları sağlayan iki dönüşüm olsun.

(IGC1) $\mathfrak{F}(\lambda) + \mathfrak{F}^*(\lambda) \leq 1, \quad \forall \lambda \in I^X$

(IGC2) $\mathfrak{F}(\tilde{0}) = \mathfrak{F}^*(\tilde{1}) = 1, \mathfrak{F}^*(\tilde{0}) = \mathfrak{F}^*(\tilde{1}) = 0,$

(IGC3) $\mathfrak{F}(\lambda_1 \cup \lambda_2) \geq \mathfrak{F}(\lambda_1) \wedge \mathfrak{F}(\lambda_2)$ ve $\mathfrak{F}^*(\lambda_1 \cup \lambda_2) \leq \mathfrak{F}^*(\lambda_1) \vee \mathfrak{F}^*(\lambda_2),\ \lambda_i \in I^X, i = 1,2,$

(IGC4) $\mathfrak{F}\left(\bigcap_{i\in\Delta}\lambda_i\right) \geq \Lambda_{i\in\Delta}\mathfrak{F}(\lambda_i)$ ve $\mathfrak{F}^*\left(\bigcap_{i\in\Delta}\lambda_i\right) \leq \mathrm{V}_{i\in\Delta}\mathfrak{F}^*(\lambda_i), \lambda_i \in I^X, i \in \Delta.$

O halde $(\mathfrak{F},\mathfrak{F}^*)$ çifti X 'de intunistik kapalılık derecesi olarak isimlendirilir [31].

Tanım 2.4.3. $(\mathfrak{F},\mathfrak{F}^*)$ ve (τ,τ^*) için $I^X \to I$ ' ya giden aşağıdaki dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlayalım [31].

$$\tau_{\mathfrak{F}}(\lambda) = \mathfrak{F}(\lambda^c), \quad \tau^*_{\mathfrak{F}^*}(\lambda) = \mathfrak{F}^*(\lambda^c),$$

$$\mathfrak{F}_\tau(\lambda) = \tau(\lambda^c), \quad \mathfrak{F}^*_{\tau^*}(\lambda) = \tau^*(\lambda^c)$$

Teorem 2.4.4.

a) (τ,τ^*) , X 'de bir IGO'dur ancak ve ancak $(\mathfrak{F}_\tau,\mathfrak{F}^*_{\tau^*})$, X 'de bir IGC ise

b) $(\mathfrak{F},\mathfrak{F}^*)$, X 'de bir IGC'dir ancak ve ancak $(\tau_{\mathfrak{F}},\tau^*_{\mathfrak{F}^*})$, X 'de bir IGO ise

c) $\tau_{\mathfrak{F}_\tau} = \tau, \quad \tau^*_{\mathfrak{F}^*_{\tau^*}} = \tau^*, \quad \mathfrak{F}_{\tau_{\mathfrak{F}}} = F, \quad F^*_{\tau^*_{\mathfrak{F}^*}} = \mathfrak{F}^*$ [31].

Tanım 2.4.5. $\{(\tau_i,\tau_i^*)\}_{i\in\Delta}$ X 'deki IGO'ların bir ailesi olsun. O halde bunların arakesiti aşağıdaki gibi tanımlanr [31].

$$\bigcap_{i\in\Delta}(\tau_i,\tau_i^*)=(\Lambda_{i\in\Delta}\tau_i,\mathrm{V}_{i\in\Delta}\tau_i^*)$$

Burada

$$(\Lambda_{i\in\Delta}\tau_i)(\mu)=\Lambda_{i\in\Delta}(\tau_i(\mu)),\ (\mathrm{V}_{i\in\Delta}\tau_i^*)(\mu)=\mathrm{V}_{i\in\Delta}(\tau_i^*(\mu)),\ \mu\in I^X.$$

Teorem 2.4.6. IGO'ların bir keyfi arakesiti yine bir IGO'dur [31].

Tanım 2.4.7. (τ,τ^*) ve (U,U^*) X 'de bir IGO olsun. O halde '$\leq$' bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır [31].

$$(\tau,\tau^*)\leq(U,U^*)\Leftrightarrow\tau\leq U \text{ ve } \tau^*\geq U^*.$$

Teorem 2.4.8. X 'deki tüm IGO'ların koleksiyonu '$\leq$' bağıntısına göre bir tam latis oluşturur. (τ_w,τ_w^*) ve (τ_s,τ_s^*) sırasıyla bu latisin en küçük ve en büyük elemanlarıdır [31].

Tanım 2.4.9. (τ,τ^*), X 'de bir IGO olsun. $r\in I_0$ için

$$\tau_r=\tau^{-1}[r,1],\quad \tau_r^*=(\tau^*)^{-1}[0,1-r].[31]$$

Teorem 2.4.10. (X,τ,τ^*) bir IFTS olsun. O halde $\{\tau_r\}_{r\in I_0}$ ve $\{\tau_r^*\}_{r\in I_0}$ aileleri aşağıdaki şartları sağlayacak şekilde X 'deki fuzzy alt kümelerinin topolojisinin azalan iki ailesidir [31].

a) $\tau_r\subset\tau_r^*$,

b) $\tau_r=\bigcap_{s<r}\tau_s;\tau_r^*=\bigcap_{s<r}\tau_s^*$.

Teorem 2.4.11. $\{(T_r, T_r^*); r \in I_0\}$, X 'deki fuzzy alt kümelerinin birbirini içeren bitopolojisinin bir azalan ailesi olsun. $\tau, \tau^* : I^X \to I$,

$$\tau(\lambda) = \vee\{r; \lambda \in T_r\} \text{ ve } \tau^*(\lambda) = \wedge\{1-r; \lambda \in T_r^*\}$$

ile tanımlansın. O halde aşağıdaki şartlar sağlanır [31].

(a) (τ, τ^*), X 'de bir IGO'dur.

(b) $\tau_r = T_r$ ancak ve ancak $\bigcap_{s<r} T_s = T_r$, $\forall r \in I_0$ ise.

(c) $\tau_r^* = T_r^*$ ancak ve ancak $\bigcap_{s<r} T_s^* = T_r^*$, $\forall r \in I_0$ ise.

Tanım 2.4.12. (T, T^*) boştan farklı X kümesi üzerinde bir BFTS olsun. Her bir $r \in I_0$ için $T^r, (T^*)^r : I^X \to I$ dönüşümlerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım [31].

$$T^r(\tilde{0}) = T^r(\tilde{1}) = 1, \ (T^*)^r(\tilde{0}) = (T^*)^r(\tilde{1}) = 0,$$

$$T^r(\mu) = \begin{cases} r & \mu \in T - \{\tilde{0}, \tilde{1}\} \text{ için,} \\ 0 & \mu \in I^X - T \text{ için} \end{cases}$$

$$(T^*)^r(\mu) = \begin{cases} 1-r & \mu \in T^* - \{\tilde{0}, \tilde{1}\} \text{ için,} \\ 1 & \mu \in I^X - T^* \text{ için} \end{cases}.$$

Teorem 2.4.13. (T, T^*), X 'de birbirini içeren BFTS olsun. O halde $(T^r, (T^*)^r)$, X 'de

$$(T^r)_r = T \text{ ve } ((T^*)^r)_r = T^*$$

olacak şekilde bir IGO'dur [31].

Teorem 2.4.14. (X,τ,τ^*),bir IFTS ve $Y\subset X$ olsun. $\tau_Y,\tau_Y^*:I^Y\to I$ dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\tau_Y(\mu)=\vee\left\{\tau(\lambda);\lambda\in I^X, \lambda/_Y=\mu\right\},$$

$$\tau_Y^*(\mu)=\wedge\left\{\tau^*(\lambda);\lambda\in I^X, \lambda/_Y=\mu\right\},\quad \forall\mu\in I^Y.$$

O halde (τ_Y,τ_Y^*), Y 'de bir IGO'dur ve $\tau_Y(\mu)\geq\tau(\mu_X)$, $\tau_Y^*(\mu)\leq\tau^*(\mu_X)$ [31].

Tanım 2.4.15. (Y,τ_Y,τ_Y^*) IFTS'si (X,τ,τ^*) IFTS'sinin bir alt uzayı ve (τ_Y,τ_Y^*) ise (X,τ,τ^*) 'dan elde edilen Y 'deki IGO olarak adlandırılır [31].

Teorem 2.4.16. (Y,τ_Y,τ_Y^*), (X,τ,τ^*) IFTS'sinin bir fuzzy alt uzayı ve $\mu\in I^Y$ olsun. O halde

(i) $F_{\tau_Y}(\mu)=\vee\left\{F_\tau(\eta):\eta\in I^X, \eta/_Y=\mu\right\}$

$$F^*_{\tau_Y^*}(\mu)=\wedge\left\{F^*_{\tau^*}(\eta):\eta\in I^X, \eta/_Y=\mu\right\}$$

(ii) $Z\subset Y\subset X$ ise $\tau_Z=(\tau_Y)_Z, \tau_Z^*=(\tau_Y^*)_Z$ dir [31].

Tanım 2.4.17. (X,τ,τ^*) ve (Y,U,U^*) iki IFTS ve $f:X\to Y$ bir dönüşüm olsun. O halde her bir $\mu\in I^Y$ için;

$U(\mu)\leq\tau(f^{-1}(\mu))$ ve $U^*(\mu)\geq\tau^*(f^{-1}(\mu))$ oluyorsa f 'ye gp-dönüşüm denir [31].

Tanım 2.4.18. (X,T,T^*) ve (Y,S,S^*), fuzzy alt kümelerinin bitopolojik uzayları ve $f:(X,T,T^*)\to(Y,S,S^*)$ bir döşüm olsun. Eğer $f:(X,T)\to(Y,S)$ ve $f:(X,T^*)\to(Y,S^*)$ sürekli ise o halde f 'ye süreklidir denir [31].

Teorem 2.4.19. (X,τ,τ^*) ve (Y,U,U^*) iki IFTS ve $f: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. O halde $\forall r \in I_0$ için

1) $f:(X,\tau,\tau^*) \to (Y,U,U^*)$ bir gp-dönüşümdür ancak ve ancak

2) $f:(X,\tau_r,\tau_r^*) \to (Y,U_r,U_r^*)$ dönüşümü sürekli ise [31].

Teorem 2.4.20. (X,τ,τ^*), (Y,U,U^*) ve (Z,W,W^*) üç IFTS olsun. Eğer $f:(X,\tau,\tau^*) \to (Y,U,U^*)$ ve $g:(Y,U,U^*) \to (Z,W,W^*)$ dönüşümleri gp-dönüşümleri ise o halde $g \circ f:(X,\tau,\tau^*) \to (Z,W,W^*)$ dönüşümü bir gp-dönüşümdür [31].

Tanım 2.4.21. (T,T^*), X 'de bir BFTS olsun. Eğer $\mathfrak{B}$ ve $\mathfrak{B}^*$ sırasıyla T ve T^* 'nin tabanları ise o zaman $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}^*)$ 'ye (T,T^*) 'nun tabanı denir [31].

Tanım 2.4.22. (T,T^*), X 'de bir BFTS olsun. Eğer $\mathfrak{V}$ ve $\mathfrak{V}^*$ sırasıyla T ve T^* 'nin alt tabanı ise o zaman $(\mathfrak{V},\mathfrak{V}^*)$ 'a (T,T^*) 'nun alt tabanı denir [31].

Teorem 2.4.23. (X,τ,τ^*) bir IFTS, $f: X \to Y$ bir dönüşüm , $\{(T_r,T_r^*); r \in I_0\}$ ailesi Y 'deki fuzzy alt kümelerinin birbirini içeren bitopolojisinin azalan bir ailesi , (U,U^*) ise Y 'de bu aile tarafından üretilen IGO olsun ve farz edelim ki her bir $r \in I_0$ için $(\mathfrak{B},\mathfrak{B}^*)$ veya $(\mathfrak{V},\mathfrak{V}^*)$, (T_r,T_r^*) 'ın sırasıyla bir tabanı ya da alt tabanıdır. O halde aşağıdaki önermeler birbirine denktir [31].

(a) $f:(X,\tau,\tau^*) \to (Y,U,U^*)$ bir gp-dönüşümdür.

(b) $\forall \mu \in T_r, \forall r \in I_0$ için $\tau(f^{-1}(\mu)) \geq r$

$\forall \mu \in T_r^*, \forall r \in I_0$ için $\tau^*(f^{-1}(\mu)) \leq 1-r$.

(c) $\forall \mu \in \mathfrak{B}_r \forall r \in I_0$ için $\tau(f^{-1}(\mu)) \geq r$,

$\forall \mu \in \mathfrak{B}_r^*, \forall r \in I_0$ için $\tau^*(f^{-1}(\mu)) \leq 1 - r.$

(d) $\forall \mu \in \mathfrak{V}_r \forall r \in I_0$ için $\tau(f^{-1}(\mu)) \geq r,$

$\forall \mu \in \mathfrak{V}_r^*, \forall r \in I_0$ için $\tau^*(f^{-1}(\mu)) \leq 1 - r.$

Teorem 2.4.24. (X, T, T^*) ve (Y, S, S^*) fuzzy alt kümelerinin iki tane birbirini içeren bitopolojik uzayları ve $f : X \to Y$ olsun. O halde

1) $f : (X, T, T^*) \to (Y, S, S^*)$ süreklidir ancak ve ancak

2) $\forall r \in I_0$ için $f : (X, T^r, (T^*)^r) \to (Y, S^r, (S^*)^r)$ bir gp-dönüşüm ise [31].

Tanım 2.4.25. $A \in I^X$ ve (X, τ, τ^*) bir IFTS olsun. O halde A'nın kapanışı

$$\overline{A} = \bigcap \left\{ K \in I^X : \mathcal{F}_\tau(K) > 0 \text{ ve } \mathcal{F}_{\tau^*}^* \leq \mathcal{F}_{\tau^*}^*(A), A \subseteq K \right\}$$

ile A'nın içi ise

$$A^o = \bigcup \left\{ K \in I^X : \tau(K) > 0 \text{ ve } \tau^*(K) \leq \tau^*(A), K \subseteq A \right\}$$

ile tanımlanır [33].

Teorem 2.4.26. $A, B \in I^X$ ve (X, τ, τ^*) bir IFTS olsun. O halde

(1) $\mathcal{F}_{\tau^*}^*(\overline{A}) \leq \mathcal{F}_{\tau^*}^*(A),$

(2) $\tau^*(A^o) \leq \tau^*(A),$

(3) $A \subseteq B$ ve $\mathcal{F}_{\tau^*}^*(B) \leq \mathcal{F}_{\tau^*}^*(A) \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B},$

(4) $A \subseteq B$ ve $\tau^*(A) \leq \tau^*(B) \Rightarrow A^o \subseteq B^o$ [33].

Teorem 2.4.27. $A \in I^X$ ve (X, τ, τ^*) bir IFTS olsun. O halde

(1) $(\overline{A})^c = (A^c)^o,$

(2) $\overline{A} = ((A^c)^o)^c$,

(3) $(A^o)^c = \overline{(A^c)}$,

(4) $A^o = \overline{((A^c))}^{\,c}$ [33].

Teorem 2.4.28. $A, B \in I^X$ ve (X, τ, τ^*) bir IFTS olsun. O halde

(1) $\overline{(0_X)} = 0_X$,

(2) $A \subseteq \overline{A}$,

(3) $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$,

(4) $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{(A \cup B)}$ [33].

Teorem 2.4.29. $A \in I^X$ ve (X, τ, τ^*) bir IFTS olsun. O halde

(1) $\tau(A) > 0 \Rightarrow A^o = A$,

(2) $\mathcal{F}_\tau(A) > 0 \Rightarrow \overline{A} = A$ [33].

2.5. İntunistik Fuzzy Topolojik Uzaylarda Kompaktlık

TFS'lerde çeşitli kompaktlık tanımları Lowen, Gantner ve Samanta tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır. Bizde çeşitli kompaktlık tanımlarını ilk önce BFTS'lerde sonrada IFTS'lerde kuracağız. Bu bölümde fuzzy kümelerinin tüm topolojileri Lowen'e göre verilmiştir. X 'deki açıklık derecesi aşağıdaki ek şartlı sağlar.

(iv) Tüm sabit fuzzy kümeleri $\underline{\alpha} \in I^X$ için $\tau(\underline{\alpha}) = 1$ dir.

Burada $\underline{\alpha}: X \to I,\ \underline{\alpha}(x) = \alpha,\ \forall x \in X, \forall \alpha \in I$ dır. Bu bölümdeki IGO(IGC) aşağıdaki ek şartları sağlar.

(IGO5) $\tau(\underline{\alpha}) = 1, \tau^*(\underline{\alpha}) = 0,\ \forall \alpha \in I$

((IGC5) $\mathfrak{F}(\underline{\alpha}) = 1,\ \mathfrak{F}^*(\underline{\alpha}) = 0,\ \forall \alpha \in I$)

(X, T, T^*) bir BFTS ve $\mathfrak{b}, \mathfrak{b}^* \subset I^X$ olsun. Eğer herhangi $x \in X$ için, $\mu(x) > \alpha$ ve $\mu^*(x) > \beta$ olacak şekilde $\exists \mu \in \mathfrak{b}, \mu^* \in \mathfrak{b}^*$ varsa $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}^*)$ çifti bir $(\alpha, \beta) - iz$ ailesi olarak isimlendirilir $(\alpha, \beta \in I_1)$.

$(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}^*)$, bir $(\alpha, \beta) - iz$ ailesi eğer $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{b}$ ve $\mathfrak{D}^* \subset \mathfrak{b}^*$ şartlarını sağlıyor ise $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}^*)$ $(\alpha, \beta) - iz$ ailesinin bir alt ailesi olarak adlandırılır.

Eğer $\mathfrak{b}$ ve $\mathfrak{b}^*$ sonlu ise bir $(\alpha, \beta) - iz$ ailesi olan $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}^*)$ sonlu olarak adlandırılır.

Herhangi bir A kümesi için 2^A ile A'nın tüm sonlu alt kümelerinin ailesini gösterelim.
$i_\alpha(T) = \left\{ \lambda^{-1}\left(\alpha, 1\right] : \lambda : T \right\},\ \alpha \in I_1,\ i_\beta(T^*) = \left\{ v^{-1}\left(\beta, 1\right] : v \in T^* \right\}, \beta \in I_1$ ve $i(T), i(T^*)$ sırasıyla $\bigcup_{\alpha \in I_1} i_\alpha(T)$ ve $\bigcup_{\beta \in I_1} i_\beta(T^*)$ alt tabanlarından üretilen topolojiler olsun [31].

Tanım 2.5.1. Eğer $\alpha, \beta \in I_1$ için (T, T^*)'daki her bir $(\alpha, \beta) - iz$ ailesi sonlu $(\alpha, \beta) - iz$ alt ailesine sahip ise (X, T, T^*) 'a $(\alpha, \beta) -$ *kompakt* denir [31].

Tanım 2.5.2. Eğer $\alpha, \beta \in I_1$ için (X, T, T^*) ,$(\alpha, \beta) -$ *kompakt* ise (X, T, T^*) 'a güçlü fuzzy kompakt denir [31].

Tanım 2.5.3. Eğer $(X, i(T))$ ve $(X, i(T^*))$ kompakt ise (X, T, T^*) 'a ultra fuzzy kompakt denir [31].

Tanım 2.5.4. Eğer $\mathfrak{b} \subset T, \mathfrak{b}^* \subset T^*$ iki ailesi ve $\alpha, \beta \in I$ için $\sup_{\mu\in\mathfrak{b}}\mu \geq \alpha$, $\sup_{\nu\in\mathfrak{b}^*}\nu \geq \beta$ olacak şekilde ve $\varepsilon \in (0,\alpha], \varepsilon^* \in (0,\beta]$ için $\sup_{\mu\in\mathfrak{b}_0}\mu \geq \alpha-\varepsilon$ ve $\sup_{\nu\in\mathfrak{b}_0^*}\nu \geq \beta-\varepsilon^*$ olacak şekilde $\exists \mathfrak{b}_0 \in 2^{(\mathfrak{b})}, \mathfrak{b}_0^* \in 2^{(\mathfrak{b}^*)}$ varsa (X,T,T^*) fuzzy kompakt olarak adlandırılır [31].

Tanım 2.5.5. (X,τ,τ^*) bir IFTS olsun. Eğer $\forall r \in I_0$ için (X,τ_r,τ_r^*), sırasıyla $(\alpha,\beta)-kompakt$,güçlü fuzzy kompakt, ultra fuzzy kompakt ve fuzzy kompakt ise o halde (X,τ,τ^*) $(\alpha,\beta)-kompakt$,güçlü fuzzy kompakt, ultra fuzzy kompakt ve fuzzy kompakt olarak isimlendirilir [31].

Teorem 2.5.6. Eğer $f:(X,\tau,\tau^*) \to (Y,U,U^*)$ bir örten gp-dönüşüm ve (X,τ,τ^*) yukarıdaki tanımlardan herhangi birine göre fuzzy kompakt ise (Y,U,U^*) aynı tanıma göre fuzzy kompaktdır [31].

Teorem 2.5.7. Bir $\{(X_i,\tau_i,\tau_i^*)\}_{i\in\Delta}$ ailesinin her bir IFTS'si yukarıdaki kompaktlık tanımlarından birine sahiptir ancak ve ancak $(\pi_{i\in\Delta}X_i, \pi_{i\in\Delta}\tau_i, \pi_{i\in\Delta}\tau_i^*)$ çarpım uzayı bir fuzzy kompakt ise [31].

(X,τ) bir topolojik uzay ve $G \subseteq X$ olsun. Eğer G 'nin her bir U açık örtüsü sonlu bir V açık alt örtüye sahipse G 'ye kopmaktır denir. Aşağıda da görüldüğü üzere

$$\underset{x\in X}{\Lambda}\left(G'(x) \vee \underset{A\in U}{\mathrm{V}} A(x)\right) = 1,$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X, G'(x) \vee \underset{A\in U}{\mathrm{V}} A(x) = 1,$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X, G'(x) \neq 1 \text{ sağlandığında } \underset{A\in U}{\mathrm{V}} A(x) = 1,$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X, G(x) = 1 \text{ sağlandığında } \underset{A\in U}{\mathrm{V}} A(x) = 1,$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in X, G(x) \leq \underset{A\in U}{\mathrm{V}} A(x) \text{ olur.}$$

G 'ye kopmaktır denir ancak ve ancak $\bigwedge_{x\in X}\left(G'(x) \vee \bigvee_{A\in U} A(x)\right)=1,$ sağlandığında $\bigvee_{V\in 2^{(U)}} \bigwedge_{x\in X}\left(G'(x) \vee \bigvee_{A\in U} A(x)\right)=1$ oluyorsa.

Böylece doğal olarak kompaktlık kavramını L-uzaylarına aşağıdaki şekilde genişletebiliriz.

Tanım 2.5.8. (X,T) bir L-uzayı ve $G\in L^X$ olsun. Eğer her $U\subseteq T$ ailesi için

$$\bigwedge_{x\in X}\left(G'(x) \vee \bigvee_{A\in U} A(x)\right)\leq \bigvee_{V\in 2^{(U)}} \bigwedge_{x\in X}\left(G'(x) \vee \bigvee_{A\in U} A(x)\right)$$

sağlanıyorsa G 'ye fuzzy kompakt denir [40].

Teorem 2.5.9. (X,T) bir L-uzayı ve $G\in L^X$ olsun. O halde G fuzzy kompakttır ancak ve ancak her $P\subseteq T'$ alt ailesi için

$$\bigvee_{x\in X}\left(G(x)\wedge \bigwedge_{B\in P} B(x)\right)\geq \bigwedge_{F\in 2^{(P)}} \bigvee_{x\in X}\left(G(x)\wedge \bigwedge_{B\in F} B(x)\right)$$

sağlanıyor ise.

Şimdi diğer fuzzy kompakt karakterizasyonlarını ele alacağız. Öncelikle aşağıdaki kavramları verelim.

Tanım 2.5.10. (X,T) bir L-uzay ve $a\in L\setminus\{1\}$ ve $G\in L^X$ olsun. L^X 'de bir U alt ailesi,

1)Eğer herhangi $x\in X$ için $G'(x) \vee \bigvee_{A\in U} A(x)\leq a$ G 'nin bir $a-$iz'i olarak adlandırılır.

2)Eğer $\bigwedge_{x\in X}\left(G'(x) \vee \bigvee_{A\in U} A(x)\right)\leq a$ ise G 'nin bir güçlü $a-$iz'i olarak adlandırılır [40].

Teorem 2.5.11. (X,T) bir L-uzayı ve $G \in L^X$ olsun. O halde örnekler birbirine denktir.

1) G fuzzy kopmaktır.
2)Herhangi $a \in L \setminus \{1\}$ için G 'nin her bir açık güçlü $a-$izli U ailesi G 'nin güçlü $a-$iz ailesi olan sonlu bir V alt ailesine sahiptir.
3)Herhangi $a \in L \setminus \{0\}$ için G 'nin her bir kapalı güçlü $a-$uzak ailesi G 'nin güçlü $a-$uzak ailesi olan sonlu bir F alt ailesine sahiptir [40].

Teorem 2.5.12. Eğer G fuzzy kompakt ve H kapalı ise $G \wedge H$ fuzzy kopmaktır [40].

Tanım 2.5.13. (X,τ) ve (Y,σ) fuzzy topolojik uzaylar olsun. Eğer (X,τ)'daki tüm p fuzzy noktaları için $H(p,0) = f(p)$ ve $H(p,1) = g(p)$ olacak şekilde $H:(X,\tau)\times(I,\tilde{\varepsilon}_I) \rightarrow (Y,\sigma)$ fuzzy sürekli dönüşümü var ise $f,g:(X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ iki sürekli fonksiyonuna fuzzy homotopik fonksiyonlar denir.

H fonksiyonunu f ve g arasında homotopi olarak adlandırırız ve $H: f \simeq g$ ile gösteririz [37,39].

Teorem 2.5.14. (X,τ)'dan (Y,σ)'ya giden tüm fuzzy sürekli fonksiyonlar ailesi üzerinde tanımlanan $\simeq$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır [37,39].

Tanım 2.5.14. (X,τ) ve (Y,σ) fuzzy topolojik uzaylar olsun. $f:(X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$, $g:(X,\tau) \rightarrow (Y,\sigma)$ fuzzy sürekli dönüşümleri olmak üzere $g \circ f \simeq I_{(X,\tau)}$ ve $f \circ g \simeq I_{(Y,\sigma)}$ sağlanıyorsa $(X,\tau),(Y,\sigma)$ topolojik uzaylarına aynı fuzzy homotopi tipine sahip uzaylar denir.

O halde f, g fonksiyonlarına da fuzzy homotopi denklikleri ve $(X,\tau),(Y,\sigma)$ uzaylarına da fuzzy homotop denk uzaylar denir [37,39].

Not 2.5.15. Eğer (X,τ) ve (Y,σ) fuzzy topolojik uzayları fuzzy homeomorfik ise o halde bu uzaylar fuzzy homotop denk uzaylarıdır [37,39].

2.6. Fuzzy Topolojik Uzaylarda Homotopya Bağıntısı ve Homoloji Gruplar

Tanım 2.6.1 $f, g:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ $L-$fuzzy sürekli dönüşümleri olsun. $i=0,1,$ için

$$\lambda_i(t)=\begin{cases}1 & t<i,\\ 0 & t>i\end{cases}$$

olmak üzere (X,τ)'da her $L-$fuzzy a_α noktası için,

$$F(a_\alpha,[\lambda_0])=f(a_\alpha) \text{ ve } F(a_\alpha,[\lambda_1])=g(a_\alpha)$$

olacak şekilde bir $F:(X,\tau)\times(I(L),\mathfrak{I})\rightarrow(Y,\sigma)$ $L-$fuzzy sürekli dönüşümü varsa f, g'ye fuzzy homotoptur denir. F dönüşümü f ve g arasında bir $L-$fuzzy homotopyası olarak adlandırılır ve $f\simeq_L g$ şeklinde gösterilir [37,39].

Tanım 2.6.2. (X,τ) ve (Y,σ) $L-$fuzzy topolojik uzayları olsun. ι_X,ι_Y sırasıyla (X,τ) ve (Y,σ) üzerinde birim dönüşüm olmak üzere $g\circ f\simeq_L \iota_X$ ve $f\circ g\simeq_L \iota_Y$ olacak şekilde $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma)\rightarrow(X,\tau)$ sürekli dönüşümleri varsa (X,τ) ve (Y,σ)'ya aynı tipli $L-$fuzzy homotopyaları denir. Ayrıca f ve g sürekli dönüşümleri $L-$fuzzy homotopi denklikleri olarak adlandırılır [37,39].

Not 2.6.3. (X,τ) ve (Y,σ) uzayları $L-$fuzzy homeomorfik ise aynı zamanda bu uzaylar denk $L-$fuzzy homotopik denk uzaylardır [37,39].

Teorem 2.6.4. $f, g : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ dönüşümleri $L-$fuzzy sürekli dönüşümleri olsun. Eğer $f \simeq_L g$ ise f_* ve g_* üretilen homomorfizimleri $n \geq 0$ için $H_n\left[(X, \tau), \mathbb{Z}\right]$'den $H_n\left[(Y, \sigma), \mathbb{Z}\right]$'ye giden aynı homomorfizimlerdir [37,39].

Sonuç 2.6.5. $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ bir $L-$fuzzy homotopi denkliyi olsun. O halde tüm $n \geq 0$ için $f_* : H_n\left[(X, \tau), \mathbb{Z}\right] \to H_n\left[(Y, \sigma), \mathbb{Z}\right]$ bir izomorfizimdir[37,39].

Şimdi büzülebilen uzayların ve topolojik uzayların retraktının fuzzy versiyonu verilecektir [37,39].

Tanım 2.6.6. Eğer bir (X, τ) $L-$fts 'si bir $L-$fuzzy noktasında $L-$fuzzy denk ise bu takdirde (X, τ)'ya büzülebilen $L-$fuzzy denir.

Eğer (X, τ) $L-$fts 'si büzülebilir ise o halde tekbir a noktasını içeren $L-$fts ile aynı $L-$fuzzy homotopluk çeşidine sahiptir [37,39].

$H_0\left[(X, \tau), \mathbb{Z}\right] \cong H_0\left[(\{a\}, \sigma), \mathbb{Z}\right] \cong \mathbb{Z}$ ve $H_n\left[(X, \tau), \mathbb{Z}\right] \cong H_n\left[(\{a\}, \sigma), \mathbb{Z}\right] = \{0\},\ n \geq 1.$

Tanım 2.6.7. $i : (A, \tau_A) \to (X, \tau)$ gömme dönüşümü ve ι_A, (A, τ_A)'da birim dönüşüm olmak üzere $r \circ i = \iota_A$ olacak şekilde $r : (X, \tau) \to (A, \tau_A)$ $L-$fuzzy sürekli dönüşümü var ise (X, τ) $L-$fts 'sinin bir A alt kümesi (X, τ)'nun $L-$fuzzy retraktı olarak isimlendirilir [37,39].

Tanım 2.6.8. (X, τ) $L-$fts 'sinin bir A alt kümesi, $i \circ r \simeq_L \iota_X$ olacak şekilde $r : (X, \tau) \to (A, \tau_A)$ $L-$fuzzy retraksiyonuna sahipse bu küme (X, τ)'nun $L-$fuzzy deformasyon retraktı olarak adlandırılır [37,39].

Önerme 2.6.9. A bir (X, τ) $L-$fts 'sinin $L-$fuzzy deformasyon retraktı olsun. O halde $i : (A, \tau_A) \to (X, \tau)$ bir $L-$fuzzy homotopik denkliğidir [37,39].

Teorem 2.6.10. A bir (X,τ) $L-$fts 'sinin $L-$fuzzy deformasyon retraktı ise her bir $n \geq 0$ için $H_n\left[(X,\tau),\mathbb{Z}\right]$ bir izomorfizimdir [37,39].

$\{C,k,p\},\Re$ kategoryasında bir dual standart yapı (dual üçlü) olsun. Yani, $C:\Re \to \Re$ bir kovaryant funktor ve $p\circ(k*C)=p\circ(C*k)=\iota_{\Re}*C$ ve $p\circ(p*C)=p\circ(C*p)$ şartlarını sağlayan $k:id_{\Re}\to C$ ve p:CC $\to$ C funktorların doğal morfizmalarıdır. $\{C,k,p\}$ bir $F^*=(F_n,\eta_n^i,\varepsilon_n^i)_{n\geq -1}$ dual semisimplisialini üretir.Yani, $\eta_n^i:F_{n-1}\to F_n,\varepsilon_n^i:F_{n+1}\to F_n$ artan ve azalan morfizimleri ile beraber $F_n:\Re\to\Re$ funktorların bir dizisidir. $C^0=id_{\Re}$ ve $\mathrm{C}^{n+1}=CC^n$ olsun.O halde F^* dual semisimplisial funktoru $F_n=C^{n+1},\eta_n^i=C^i*k*C^{n-i}$ ve $\varepsilon_n^i=C^i*p*C^{n-i}$ aracılığıyla verilir.Tam semisimplisial kompleksler şartının tersine η^i ve ε^i artan ve azalan morfizmaları ters yönlere giderler ve dual aksiyomları sağlarlar. F^* dual semisimplisial funktoru $Y\in\Re$ nesnesine uygulanabilir. Böylece $F^*(Y)=(F_n(Y),\eta^i(Y),\varepsilon^i(Y))$ dual semisimplisial nesnesini elde ederiz. $\Re$ kategoryasının $Hom(.,X)$ funktoru $(Hom(F_n(Y),X),\eta^i,\varepsilon^i)$ aracılığı ile $\Re$'de bir semisimplisial kompleks üretir.

Böylece biz koni yapısını kullanan homotopya grubunun bir kategorisel tanımını verebiliriz. X bir topolojik uzay olsun. $X\times I$'de $(x,1)$ formundaki tüm noktaların belirlenmesi ile elde ettiğimiz $X\times I$'nın bölüm uzayına X üzerinde bir konidir denir. Topolojik uzayların kategoryasında doğal standart yapı $\{C,k,p\}$'yi aşağıdaki yolla elde ederiz. $C(X),X$ üzerinde bir koni olsun. Eğer $f:X\to Y$ sürekli dönüşüm ise o halde $C(f):C(X)\to C(Y), C(f)(x,t)=(f(x),t)$ ile verilir. $k(X)(x)=(x,1)$ ile tanımlanan $k(X):X\to C(X)$ X'den $C(X)$'e doğal gömmedir.Doğal morfizma $p,\ p(X):CC(X)\to C(X)$ ve $p(X)(x,s,t)=(x,s,t)$ ile tanımlanır. F^* dual semisimplisial funktorunun C tarafından üretildiği göz önünde bulundurularak $(Hom(F_n(\{x_0\}),X),\eta^i,\varepsilon^i)$ ile gösterilen $x_0 \in X$ taban noktalı X uzayının semisimplisial kompleksi elde edilir.

$F:\Re \to \Re'$ ve $G:\Re' \to \Re$ eşlenik funktorlar çifti olsun. O halde $(\xi * F)\circ(F*\zeta)=\iota_{\Re'} * F : F \to FGF \to F$ ve $(G*\xi)\circ(\zeta * G)=\iota_{\Re} * G : G \to GFG \to G$ sağlanacak şekilde $\zeta : id_{\Re} \to GF$ ve $\xi : FG \to id_{\Re'}$ doğal morfizmaları vardır. $\Re$'deki her bir $\{C,k,p\}$ dual standart yapısı $\overline{C}=GCF, \overline{k}=(G*k*F)\circ\zeta$ ve $\overline{p}=G*(p\circ(C*\xi*C))*F$ aracılığı ile $\Re$'de bir $\{\overline{C},\overline{k},\overline{p}\}$ dual standart yapısı üretir.

Koni yapısı dual standart yapı olarak tanımlanmak üzere, topolojik uzayların kategoryasında dual standart yapı elde etmek için $F:FTS \to TOP$ ve $G:TOP \to FTS$ eşlenik funktorların bir çiftine ihtiyaç duyarız. ι funktoru ω funktoruna bir sağ eşleniktir. Fakat Huber's yapısı için ω'ya bir sol eşlenik gereklidir. Bu yüzden aşağıda $\tilde{\iota}:FTS \to TOP$ funktorunu ω'ya sol eşlenik düşüneceğiz.

$\tilde{\iota}:FTS \to TOP$ funktorunu tanımlayalım. Eğer Δ, X'de bir fuzzy topoloji ise o halde $\tilde{\iota}(\Delta)=\{M \mid \chi_M \in \Delta\}$ X'de bir topolojidir. $\tilde{\iota}, FTS \to TOP$ morfizimlerinin değişmeyen bir funktoru olarak düşünülür [24].

Önerme 2.6.11. $\tilde{\iota}$, ω'ya bir sol eşleniktir [24].

Biz şimdi FTS ve TOP kategoryalarına Huber's yapısını uygulayabiliriz. Yani $\tilde{\iota}$ ve ω funktorlarını kullanarak TOP'dan FTS'ye koni yapısı ile üretilen dual standart yapıyı taşıyabiliriz. Bu yolla fuzzy topolojik uzaylarda homotopya grubunun farklı bir tanımını elde ederiz.

Teorem 2.6.12. (X,Δ), x_0 taban noktalı fuzzy topolojik uzay olsun. O halde üstte tanımlanan yapı tarafından üretilen (X,Δ)'nın $n.$ dereceden homotopik grubu x_0 taban noktalı $(X,\iota(\Delta))$ topolojik uzayının $n.$ dereceden homotopik grubuna izomorftur [24].

I ile birim aralığı ve $I^n = I \times I \times \cdots \times I$ ile birim $n-k\ddot{u}p$'ü göstereceğiz. R'de reel sayıların kümesidir.

Tanım 2.6.13. $\tilde{I}$ aşağıdaki özellikleri sağlayan tüm $\lambda : R \to L$ monoton azalan dönüşümlerin kümesi olsun.

(1) $\lambda(t) = 1,\ t < 0$ için

(2) $\lambda(t) = 0,\ t > 1$ için.

$\lambda, \mu \in \tilde{I}$ için $\lambda \simeq \mu$ sağlanır ancak ve ancak $\forall t \in R, \lambda(t-) = \inf_{s<t} \lambda(s)$, $\lambda(t+) = \sup_{s>t} \lambda(s)$ olmak üzere $\lambda(t-) = \mu(t-)$ ve $\lambda(t+) = \mu(t+)$ sağlanıyor ise. $'\simeq'$, $\tilde{I}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olmak üzere $\tilde{I}/_{\simeq}$ bölüm uzayı $L-$fuzzy birim aralığı olarak adlandırılır ve $[\lambda]$, $\lambda \in \tilde{I}$ denklik sınıfının tanımında kullanılacaktır.

$L_t([\lambda]) = (\lambda(t-))' \in L, \qquad R_t([\lambda]) = \lambda(t+) \in L$ olmak üzere

$\{L_t, R_t \mid t \in R\}$'nin bir alt taban olarak kabul edilmesiyle $I(L)$ üzerinde bir $\Im$ $L-$fuzzy topolojisini tanımlarız.

Bu $\Im$, $I(L)$ üzerinde standart topoloji olarak adlandırılır [46].

Tanım 2.6.14. $n \geq 1$ için sırasıyla standart topolojileri $\Im_1, \Im_2, \ldots, \Im_n$ olan $I_1(L), I_2(L), \ldots, I_n(L)$ $L-$fuzzy birim aralıklarının $I^n(L)$ çarpım uzayı $L-$fuzzy $n-k\ddot{u}p$ olarak adlandırılır. $\Im^n$ ile de çarpım topolojisi gösterilir.

$i = 1, 2, \ldots, n$ için $p_i = I^n(L) \to I_i(L)$ doğal projeksiyon olsun. O halde $\{L_t, R_t \mid t \in R\}$, $I_i(L)$ üzerindeki $\Im^i$ standart topolojilerinin alt tabanı olmak üzere $\{p_i^{-1}(L_t^{(i)}), p_i^{-1}(R_t^{(i)}) \mid t \in R, i = 1, 2, \ldots, n\}$, $\Im^n$'nin bir alt tabanıdır [46].

Tanım 2.6.15. $\nu_0 \in \tilde{I}, t<0$ için $\nu_0(t)=1$ ve t>0 için $\nu_0(t)=0$ olsun. O halde $I^0(L)=[\nu_0]\in I(L)$ $L-$fuzzy $0-$*küpü* olarak adlandırılır ve $I^0(L), \mathfrak{J}^0$ relativ topolojiye sahiptir [46].

Tanım 2.6.16. (X,τ) bir $L-$fts olsun. O halde (X,τ)'da bir $L-$fuzzy singüler $n-$*küp*'ü bir $L-$fuzzy sürekli dönüşümdür.

$$\xi^{(n)}:(I^n(L),\mathfrak{J}^n)\to(X,\tau), \quad n\geq 0$$

(X,τ)'da ki tüm $L-$fuzzy singüler $n-$*küp*'ünün kümeleri $S_n(X,\tau)$ ile gösterilir [46].

Tanım 2.6.17. $\xi^n\in S_n(X,\tau)\,(n\geq 1)$ $L-$fuzzy singüler $n-$*küp*'ü olarak adlandırılır ancak ve ancak herhangi $[\lambda^i],[\mu^i]\in I_i(L)$ için

$$\xi^{(n)}(\ldots,[\lambda^i],\ldots)=\xi^{(n)}(\ldots,[\mu^i],\ldots)$$

sağlanıyorsa. Yani; $\xi^{(n)}([\lambda^1]\ldots,[\lambda^i],\ldots[\lambda^n])$, $[\lambda^i]$'den bağımsızdır.

$L-$fuzzy singüler $0-$*küpü* hiçbir zaman trivial değildir.

Eğer $L=\{0,1\}$ alınırsa $I(L)$ ve onun standart topolojisi $t<r$ için $\lambda_r(t)=1$ ve $t>r$ için $\lambda_r(t)=0$ olmak üzere $[\lambda_r]$ dönüşüm sınıfı ile tanımlanan alışılmış (öklidyen) topolojiye indirgenir [46].

Önerme 2.6.18. (X,τ) bir alışılmış topolojik uzay olsun. O halde

(i) $\xi^n\in S_n(X,\tau)\Leftrightarrow\xi^n:I^n\to X$, X'de bir singüler $n-$*küp*'dür. $n\geq 0$
(ii) $\xi^n\in S_n(X,\tau)$, trivialdır ancak ve ancak $\xi^n:I^n\to X$, X'de bir trivial singüler $n-$*küp* ise [46]. $n\geq 1$

Tanım 2.6.19. $n \geq 1, \xi^n \in S_n(X,\tau)$ olsun. $i = 1,2,\ldots,n$ için $d_i^0(\xi^{(n)}) = \xi^{(n)} \circ d_i^0$ ve $d_i^1(\xi^{(n)}) = \xi^{(n)} \circ d_i^1 \in S_{n-1}(X,\tau)$ sırasıyla $\xi^{(n)}$'nin i'ninci azalan ve i'ninci artan dönüşümü olarak adlandırılır [46].

Önerme 2.6.20. $\xi^n \in S_n(X,\tau)$ ve $1 \leq i \leq j \leq n$ olsun. O halde

(i) $d_i^0 d_i^0(\xi^{(n)}) = d_{i-1}^0 d_i^0(\xi^{(n)})$,

(ii) $d_i^1 d_i^1(\xi^{(n)}) = d_{i-1}^1 d_i^1(\xi^{(n)})$,

(iii) $d_i^0 d_i^1(\xi^{(n)}) = d_{i-1}^1 d_i^0(\xi^{(n)})$,

(iv) $d_i^1 d_i^0(\xi^{(n)}) = d_{i-1}^0 d_i^1(\xi^{(n)})$ [46].

Tanım 2.6.21. (X,τ) bir $L-$fts ve Z'de tamsayıların alışılmış toplamsal grubu olsun. $n \geq 0$ için $Q_n\left[(X,\tau),Z\right]$ ile (X,τ)'da ki tüm $L-$fuzzy singüler $n-küp$'lerinin $S_n(X,\tau)$ kümesi ile üretilen serbest abelyen grubu göstereceğiz. Yani her $\hat{c} \in Q_n\left[(X,\tau),Z\right]$, $L-$fuzzy singüler $n-küp$'lerinin sonlu lineer kombinasyonu olarak tek bir gösterime sahiptir.

$$\varepsilon^n = \sum_{\alpha} a_\alpha \xi_\alpha^{(n)}, a_\alpha \in Z, \xi_\alpha^{(n)} \in S_n(X,\tau)$$

Bir ξ^n $L-$fuzzy singüler $n-küp$'ü ile $1\xi^n \in Q_n\left[(X,\tau),Z\right]$'ni karıştırmamalıyız. 0 ile $\sum_\alpha 0\xi_\alpha^{(n)} \in Q_n\left[(X,\tau),Z\right]$ göstereceğiz.

$n \geq 1$ için, tüm trivial $L-$fuzzy singüler $n-küp$'leri ile üretilen $Q_n\left[(X,\tau),Z\right]$'nın alt grubunu $D_n\left[(X,\tau),Z\right]$ ile göstereceğiz ve $D_n\left[(X,\tau),Z\right] = \{0\}$ olsun.

$$C_n\left[(X,\tau),Z\right] = \frac{Q_n\left[(X,\tau),Z\right]}{D_n\left[(X,\tau),Z\right]},\ n \geq 0$$

ile tanımlansın. $C_n\left[(X,\tau),Z\right]$, (X,τ)'da ki singüler $n-$zincirlerinin grubu olarak adlandırılır [46].

Tanım 2.6.22. $n\geq 1, (X,\tau)$ bir $L-$fts olsun. : $\xi^n \in S_n(X,\tau)$ için

$$\partial_n \xi^{(n)} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i\left[d_i^1\xi^{(n)} - d_i^0\xi^{(n)}\right]$$

olacak şekilde bir $\partial_n : Q_n\left[(X,\tau),Z\right] \to Q_{n-1}\left[(X,\tau),Z\right]$ homomorfizim tanımlanır [46].

Önerme 2.6.23. $n>1$ olsun. $\partial_{n-1}\partial_n = 0$ vardır [46].

Önerme 2.6.24. $n\geq 1$ olsun. O halde $\partial_n\left\{D_n\left[(X,\tau),Z\right]\right\} \subseteq D_{n-1}\left[(X,\tau),Z\right]$ dir [46].

Tanım 2.6.25. (X,τ) bir $L-$fts olsun.

$$Z_n\left[(X,\tau),Z\right] = Ker(\partial_n^*) = \left\{c_n \in C_n\left[(X,\tau),Z\right] \middle| \partial_n^* c_n = 0\right\},\ n\geq 1$$

$$B_n\left[(X,\tau),Z\right] = \operatorname{Im}(\partial_{n+1}^*) = \partial_{n+1}^*\left\{C_{n+1}\left[(X,\tau),Z\right]\right\},\ n\geq 0$$

tanımlanır ve sırasıyla (X,τ)'da singüler $n-$devirler grup ve singüler $n-$sınırlar grup diye adlandırılır.

$Z_0\left[(X,\tau),Z\right] = C_0\left[(X,\tau),Z\right]$ olsun. Önermeden açıktır ki;

$$B_n\left[(X,\tau),Z\right] \subseteq Z_n\left[(X,\tau),Z\right],\quad n\geq 0.$$

Böylece

$$H_n\left[(X,\tau),Z\right] = \frac{Z_n\left[(X,\tau),Z\right]}{B_n\left[(X,\tau),Z\right]},\quad n\geq 0$$

şeklinde tanımlanır ve (X,τ) $L-$fts 'sinin singüler $n.$homoloji grubu olarak adlandırılır [46].

Teorem 2.6.26. $L=\{0,1\}$ ve (X,τ) $L-$fts 'si alışılmış topolojik uzay olsun. O halde
$H_n(X,Z)$, X 'in n-boyutlu singüler homoloji grubu olmak üzere
$H_n\left[(X,\tau),Z\right]=H_n(X,Z),\quad n\geq 0$ dir [46].

Teorem 2.6.27. $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ bir $L-$fuzzy sürekli dönüşümü olsun. Her $\xi^n\in S_n(X,\tau)$ için

$$f_\#(\xi^{(n)})=f\circ\xi^{(n)}:(I^n(L),\mathfrak{J}^n)\rightarrow(Y,\sigma)$$

olacak şekilde $f_\#:Q_n\left[(X,\tau),Z\right]\rightarrow Q_n\left[(Y,\sigma),Z\right],\quad n\geq 0$ homomorfizması tanımlayalım [46].

Önerme 2.6.28. $n\geq 0$ için , $f_\#\left\{D_n\left[(X,\tau),Z\right]\right\}\subseteq D_n\left[(Y,\sigma),Z\right]$ sağlanır ve $f_\#:C_n\left[(X,\tau),Z\right]\rightarrow C_n\left[(Y,\sigma),Z\right],\quad n\geq 0$ grupların homomorfizmasıdır [46].

Önerme 2.6.29. $(X,\tau),(Y,\sigma),(U,\omega)$ üç $L-$fuzzy topolojik uzay olsun.

(1) (X,τ) üzerinde ι birim dönüşümü ile üretilen $\iota_\#:C_n\left[(X,\tau),Z\right]\rightarrow C_n\left[(X,\tau),Z\right]$ homomrfizması birim izomorfizmadır.

(2) Eğer $f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma)\rightarrow(U,\omega)$ $L-$fuzzy sürekli dönüşümleri ise o halde $(g\circ f)_\#$ ve $g_\#\circ f_\#$,$C_n\left[(X,\tau),Z\right]$'dan $C_n\left[(U,\omega),Z\right]$'ya giden aynı homomorfizmalardır [46].

Önerme 2.6.30. $n \geq 1$, $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ bir $L-$fuzzy sürekli dönüşümü olsun. O halde

(1) $f_{\#} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_{\#} : Q_n\left[(X,\tau),Z\right] \to Q_{n-1}\left[(Y,\sigma),Z\right]$,

(2) $f_{\#} \circ \partial_n^* = \partial_n^* \circ f_{\#} : C_n\left[(X,\tau),Z\right] \to C_{n-1}\left[(Y,\sigma),Z\right]$ [46].

Önerme 2.6.31. $(X,\tau),(Y,\sigma),(U,\omega)$ üç $L-$fuzzy topolojik uzay olsun.

(1) (X,τ) üzerinde ι birim dönüşümü ile üretilen

$$\iota_* : H_n\left[(X,\tau),Z\right] \to H_n\left[(X,\tau),Z\right]$$

homomrfizması birim izomorfizmadır.
(2) Eğer $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ ve $g:(Y,\sigma) \to (U,\omega)$ $L-$fuzzy sürekli dönüşümleri ise o halde $(g \circ f)_*$ ve $g_* \circ f_*$, $H_n\left[(X,\tau),Z\right]$'dan $\mathrm{H}_n\left[(U,\omega),Z\right]$'ya giden aynı homomorfizmalardır [46].

Teorem 2.6.32. $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ bir $L-$fuzzy homeomorfizması olsun. O halde

$$f_* : H_n\left[(X,\tau),Z\right] \to H_n\left[(Y,\sigma),Z\right]$$

izomorfizm grubudur [46].

3. CECH HOMOLOJİ TEORİ

Š FTS 'si Šostak fuzzy topolojik uzayının bir kategorisi olsun. Her bir (X,τ) Šostak fuzzy topolojik uzayı ve $\forall r \in [0,1]$ için (X,τ^r) bir Chang fuzzy topolojik uzayıdır. X 'in tüm açık örtülerinin kümesini $Cov_r(X)$ ile göstereceğiz. $Cov_r(X)$ aşağıda verilen bağıntıya göre yönlendirilmiş bir kümedir.

Eğer $\alpha = \{U_i\}_{i\in I}, \beta = \{V_j\}_{j\in J}$ iki açık örtü ve $V_j \prec U_{p(i)}$ olacak şekilde $p : J \to I$ dönüşümü var ise β örtüsü α 'nın bir inceltilmesi olarak adlandırılır ve $\alpha \prec \beta$ ile gösterilir.

$\alpha = \{U_i\}_{i\in J}, (X, \tau^r)$ Chang fuzzy topolojik uzayının bir açık örtüsü ve $nerv\alpha = \left\{(i_1,...,i_n) : \overset{n}{\underset{j=1}{\Lambda}} U_{i_j} \neq \underline{0}\right\}$,tepeleri I 'nın elemanlarından oluşan tüm simpleksleri kapsayan simplisial kompleks olsun. $p : J \to I$ dönüşümü $p : nerv\beta \to nerv\alpha$ simplisial dönüşümüne tek bir şekilde genişler. Eğer $\alpha \prec \beta$, (X, τ^r)'nin iki örtüsü ise herhangi $p, p' : nerv\beta \to nerv\alpha$ dönüşümleri denk simplisial dönüşümlerdir. Böylece $p_\alpha^\beta : nerv\beta \to nerv\alpha$ simplisial dönüşümü, simplisial dönüşümlerin denklik sınıfında tek bir şekilde tanımlanır.
Bunu göz önünde bulundurarak kolaylıkla gösterebiliriz ki;

$$nerv(X, \tau^r) = \left(\{nerv\alpha\}_{\alpha\in Cov_r(X)}, \{p_\alpha^\beta : nerv\beta \to nerv\alpha\}_{\alpha\prec\beta}\right) \quad \textbf{(1)}$$

Simplisial komplekslerin ters sistemidir.
G bir keyfi grup olsun.(1) ters sistemi için $H_q\left(H^q\right)$ homoloji(kohomoloji) funktorunu uygularsak aşağıdaki gibi grupların ters(direkt) sistemini elde ederiz.

$$H_q(nerv(X, \tau^r); G) = \left(\{H_q(nerv\alpha, G)\}_{\alpha\in Cov_r(X)}, \{H_q\left(p_\alpha^\beta\right)\}_{\alpha\prec\beta}\right)$$

$$\left[H^q(nerv(X, \tau^r); G) = \left(\{H^q(nerv\alpha, G)\}_{\alpha\in Cov_r(X)}, \{H^q\left(p_\alpha^\beta\right)\}_{\alpha\prec\beta}\right)\right]. \quad \textbf{(2)}$$

Tanım 3.1. $H_q((X, \tau^r); G) = \underset{\leftarrow}{\lim} H_q(nerv\alpha; G)$ $\left[H^q((X, \tau^r); G) = \underset{\rightarrow}{\lim} H^q(nerv\alpha; G)\right]$ grubuna (X, τ) Šostak fuzzy topolojik uzayının r .seviyeden homoloji(kohomoloji) grubu diyeceğiz.

$r \geq s$ için $\tau^r \subset \tau^s$ olduğundan (1) ters sistemi aşağıdaki sistemin bir alt sistemidir.

$$nerv\left(X,\tau^s\right)=\left(\{nerv\alpha\}_{\alpha\in Cov_s(X)},\left\{p_\alpha^\beta : nerv\beta \rightarrow nerv\alpha\right\}_{\alpha\prec\beta}\right)$$

Böylece $\left\{nerv\left(X,\tau^r\right)\right\}_{r\in[0,1]}$ ailesi ters sistemlerin bir direkt sistemidir. Bu yüzden $\left\{H_q\left(X,\tau^r\right)\right\}_{r\in[0,1]}$ $\left[\left\{H^q\left(X,\tau^r\right)\right\}_{r\in[0,1]}\right]$ ailesi bir direkt(ters) sistemdir.

Tanım 3.2. $H_q((X,\tau);G)=\lim\limits_{\rightarrow} H_q\left(\left(X,\tau^r\right);G\right)=\lim\limits_{\rightarrow}\lim\limits_{\leftarrow} H_q(nerv\alpha;G)$

$$\left[H^q((X,\tau);G)=\lim\limits_{\leftarrow} H^q\left(\left(X,\tau^r\right);G\right)=\lim\limits_{\leftarrow}\lim\limits_{\rightarrow} H^q(nerv\alpha;G)\right]$$

grubuna (X,τ) Šostak fuzzy topolojik uzayının homoloji(kohomoloji) grubu diyeceğiz.

$f:(X,\tau)\rightarrow(Y,\tau')$ Šostak fuzzy topolojik uzayının bir gp-dönüşümü olsun. O halde $\forall r\in[0,1]$ için f dönüşümü Chang fuzzy topolojik uzaylarının fuzzy sürekli dönüşümü olan $f^r:\left(X,\tau^r\right)\rightarrow\left(Y,\tau'^r\right)$'i oluşturur. $\left(Y,\tau'^r\right)$ uzayının her açık $\alpha=\{V_j\}_{j\in J}$ örtüsü için $f^{-1}(\alpha)=\left\{f^{-1}(V_j)\right\}_{j\in J'}$ ailesi $\left(X,\tau^r\right)$ uzayının bir fuzzy açık örtüsüdür ve $J'\subset J$ dir.

Eğer $\left(f^r\right)^{-1}\left(V_{j_1}\right)\wedge\ldots\wedge\left(f^r\right)^{-1}\left(V_{j_k}\right)\neq 0$ ise $V_{j_1}\wedge\ldots\wedge V_{j_k}\neq 0$ dir.

Çünkü $\left(f^r\right)^{-1}\left(V_{j_1}\right)\wedge\ldots\wedge\left(f^r\right)^{-1}\left(V_{j_k}\right)=\left(f^r\right)^{-1}\left(V_{j_1}\wedge\ldots\wedge V_{j_k}\right)\neq 0$ dir. Yani $nerv\left(f^r\right)^{-1}(\alpha)$ simplisial kompleksi $nerv\alpha$ simplisial kompleksinin bir alt kompleksidir.

$i_{\alpha,f^r}:nerv\left(f^r\right)^{-1}(\alpha)\rightarrow nerv\alpha$ bir gömme dönüşümü olsun. O halde

$$\underline{f}=\left(\left\{\left(f^r\right)^{-1}:Cov\left(Y,\tau'^r\right)\rightarrow Cov\left(X,\tau^r\right)\right\},\left\{i_{\alpha,f}:nerv\left(f^r\right)^{-1}(\alpha)\rightarrow nerv\alpha\right\}_\alpha\right)$$

ailesi $nerv\left(X,\tau^r\right)$ ters sisteminden $nerv\left(Y,\tau'^r\right)$ ters sistemine bir morfizimdir. $\underline{f}$ morfizmini kullanarak aşağıdaki r.seviyeden homoloji gruplarının homomorfizmasını tanımlarız.

$$f_*^r = \lim_{\leftarrow} H_q\left(\underline{f}\right) : H_q\left(\left(X, \tau^r\right); G\right) \to H_q\left(\left(Y, \tau'^r\right); G\right)$$

$\left\{f_*^r\right\}_r$ homomorfizmaların ailesi aşağıdaki homoloji gruplarının homomorfizmini oluşturur.

$$f_* = \lim_{\rightarrow} f_*^r : H_q\left((X, \tau); G\right) \to H_q\left((Y, \tau'); G\right)$$

Teorem 3.3. $(X,\tau) \mapsto H_q\left((X,\tau);G\right)\left[(X,\tau) \mapsto H^q\left((X,\tau);G\right)\right]$, Š$FTS$ kategorisinden grupların kategorisine bir kovaryant(kontravaryant) funktordur.

(X,τ) Šostak fuzzy topolojik uzay, $A \in X$ bir fuzzy küme olsun. Eğer $\tau(A) = 1$ ise (X, A)'ya Šostak fuzzy topolojik uzaylarının çifti diyeceğiz. $f : (X, A) \to (Y, B)$ morfizmi $f(A) \le B$ olacak şekilde $f : X \to Y$ gp-dönüşümüdür. Tüm Šostak fuzzy topolojik uzaylarının çiftleri ve onların morfizmleri bir kategori oluşturur.Bu kategori ŠFTS^2 ile gösterelir.

(X, A) Šostak fuzzy topolojik uzayların bir çifti olsun. $\forall r \in [0,1]$ için $\left(X, \tau^r\right)$ uzayının keyfi bir $\alpha = \{U_i\}_{i\in I}$ açık örtüsünü alalım. $\tau(A) = 1$olduğu için $A \in \tau^r$ ve $\alpha \wedge A = \{U_i \wedge A\}_{i\in I}$ ailesi $\left(X, \tau^r\right)$ uzayı üzerinde A fuzzy kümesinin bir açık örtüsüdür. O halde $(\alpha, \alpha \wedge A)$ çifti $\left(\left(X, \tau^r\right), \left(A, \tau_A^r\right)\right)$ Chang fuzzy topolojik uzayının bir açık örtüsüdür. Bu örtümler ailesini $Cov_r(X, A)$ şeklinde tanımlarız. Eğer β örtüsü α örtüsünün bir inceltilmesi ise $\beta \wedge A$ örtüsü de $\alpha \wedge A$ örtüsünün bir inceltilmesidir. Böylece $p_\alpha^\beta : nerv\beta \to nerv\alpha$ simplisial dönüşümü aşağıdaki simplisial kompleks çiftlerinin dönüşümünü üretir.

$$p_\alpha^\beta : \left(nerv\beta, nerv(\beta \wedge A)\right) \to \left(nerv\alpha, nerv(\alpha \wedge A)\right)$$

Bu durumda $(X, A) \in$ ŠFTS^2 ve $\forall r \in [0,1]$ için

$$\left(\left\{\left(nerv\alpha, nerv(\alpha \wedge A)\right)\right\}_{\alpha \in Cov_r(X)}, \left\{p_\alpha^\beta\right\}_{\alpha \prec \beta}\right)$$

simplisial komplekslerin bir ters sistemidir.

Tanım 3.4. $H_q\left(((X,A),\tau^r);G\right) = \varprojlim H_q\left((nerv\alpha, nerv(\alpha \wedge A));G\right)$ grubuna (X,A) çiftinin r.seviyeden homoloji grubu denir. $H_q(X,A;G) = \varinjlim H_q\left((X,A),\tau^r;G\right)$ gurubuna da homoloji grup diyeceğiz.

Açıktır ki;

$$H_q : \check{S}FTS^2 \to Group$$

bir funktordur.

(X,A) çifti için $i : A \to X$, $j : X \to (X,A)$ gömme dönüşümü olsun. Her $\alpha \in Cov_r(X,A)$ için i, j dönüşümleri

$$i_{\alpha,r} : nerv(\alpha \wedge A) \to nerv\alpha, \quad j_{\alpha,r} : nerv\alpha \to (nerv\alpha, nerv(\alpha \wedge A))$$

simplisial dönüşümlerini üretir.

Böylece her $\alpha \in Cov_r(X,A)$ için aşağıdaki homoloji gruplarının tam dizisini elde ederiz.

$$\ldots \leftarrow H_q(nerv\alpha, nerv(\alpha \wedge A)) \leftarrow H_q(nerv\alpha) \leftarrow H_q(nerv(\alpha \wedge A)) \leftarrow \ldots \quad \textbf{(3)}$$

Bu diziyi $H(nerv_r\alpha)$ ile gösterelim. Eğer limit alırsak $\varinjlim_{r} \varprojlim_{\alpha} H(nerv_r\alpha)$

$$\ldots \leftarrow H_q(X;G) \leftarrow H_q(A;G) \leftarrow H_{q+1}(X,A;G) \leftarrow H_{q+1}(X;G) \leftarrow \ldots$$

olur.

Dolayısıyla (X,A) Šostak fuzzy topolojik uzayların homoloji gruplarının bir dizisini elde ettik.(3) dizisi tam olmadığından bu dizi genellikle tam değildir.

Teorem 3.5. (Kesme Aksiyomu) (X, A) Šostak fuzzy topolojik uzayların bir çifti ve U, $\tau(U)=1$ olacak şekilde bir fuzzy küme olsun. Bu durumda $f:(U', A\wedge U')\to (X,A)$ gömme dönüşümü

$$f_{*q}: H_q(U', A\wedge U')\to H_q(X,A)$$

homoloji gruplarının izomorfizmini oluşturur.

İspat: D ailesi $Cov((X,A),\tau^r)$'nin indisleri (V_α, V_α^A) olan öyle α örtülerinden oluşsun ki aşağıdaki koşullar sağlansın.

(a) Eğer $\alpha_v \cap U \neq 0$ ise $v\in V_\alpha^A$ ve $\alpha_v \in A$ dir.

Teoremi ispatlamak için aşağıdaki koşulların sağlandığını göstermemiz gereklidir.

(b) D, $Cov_r(X,A)$'nin konfinal alt kümesidir.

(c) $f^{-1}(D)$, $Cov_r(U', A\wedge U')$'nin konfinal alt kümesidir.

(d) Eğer $\alpha\in D$ ve $\beta = f^{-1}(\alpha)$ ise

$$f_{\alpha *}: H_q(nerv_\beta(U'), nerv_\beta(A\wedge U'))\to H_q(nerv_\alpha(X), nerv_\alpha(A))$$

bir izomorfizmdir.

(b)'yi ispatlamak için indisi (V_α, V_α^A) olan (X,A)'nın herhangi α örtüsünü ele alalım. V' öyle küme olsun ki V_α ile arakesiti boş ve V_α^A ile arasında 1-1 uygunluk olsun. Her bir $v\in V_\alpha^A$ için V''nün uygun elemanını v' ile gösterelim. $((X,A),\tau^r)$'nın indisleri $(V_\alpha \cup V', V_\alpha^A\cup V')$ olan ve aşağıdaki gibi tanımlanan γ örtüsünü oluşturalım.

$$\gamma_v = \alpha_v \wedge \left(\overline{U}\right)' \quad \text{için } v\in V_\alpha$$

$$\gamma_{v'} = \alpha_v \cap IntA \quad \text{için } v'\in V'.$$

$\overline{U} < IntA$ olduğundan γ, $((X,A),\tau^r)$'nin bir örtüsüdür. Buradan $\alpha<\gamma$ ve $\gamma\in D$ dir. Yani D, $Cov_r(X,A)$'nin konfinal alt kümesidir.

(c)’yi ispatlamak için $(U', A \wedge U')$’nin indisi (V_β^*, V_β^A) olan herhangi β örtüsünü ele alalım.

İndisi (V_β^*, V_β^A) olan $\alpha \in Cov(X, A)$ örtüsünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$\alpha_v = \beta_v \vee U,\ v \in V_\beta .$$

Bu durumda $\beta = f^{-1}(\alpha)$ dir. $\gamma \in D$ olduğundan $\alpha < \gamma$ dir. O halde $\beta = f^{-1}(\alpha) < f^{-1}(\gamma)$ dir. Böylece $f^{-1}(D), Cov_r(U', A \wedge U')$’nin konfinal alt kümesidir.

(d)’yi ispatlamak için aşağıdaki eşitlikleri ispatlamak yeterlidir.

$$nerv_\alpha(X) = nerv_\beta(U') \cup nerv_\alpha(A)$$

$$nerv_\beta(A \wedge U') = nerv_\beta(U') \cap nerv_\alpha(A)$$

$(nerv_\beta(U'), nerv_\beta(A \wedge U'),\ (nerv_\alpha(X), nerv_\alpha(A))$’nın alt kompleksi olduğundan aşağıdaki gömmeler elde edilir.

$$nerv_\beta(U') \cup nerv_\alpha(A) \subset nerv_\alpha(X),\ nerv_\beta(A \wedge U') \subset nerv_\beta(U') \cap nerv_\alpha(A)$$

Şimdi bu gömmelerin tersini gösterelim.

$$nerv_\beta(U') \cup nerv_\alpha(A) \supset nerv_\alpha(X),\ nerv_\beta(A \wedge U') \supset nerv_\beta(U') \cap nerv_\alpha(A)$$

s, $nerv_\alpha(X)$’in $nerv_\beta(U')$’ne ait olmayan bir simleksi olsun. O zaman $Car_\alpha(s) \neq 0$ ve $Car_\alpha(s) \wedge U' = Car_\beta(s) = 0$ sağlanır. Buradan $0 \neq Car_\alpha(s) < U$ elde edilir. Böylece s simpleksinin her v tepesi için $\alpha_v \wedge U \neq 0$ sağlanır. Buradan da $\alpha \in D$ ve $v \in V_\alpha^A$ elde edilir.

$U < A$ olduğundan $Car_\alpha(s) \wedge A \neq 0$ dır. O halde s, $nerv_\alpha(A)$’nın simpleksidir. Bununla ilk kısım ispatlanır. s, $nerv_\beta(U') \cap nerv_\alpha(A)$’nın bir simpleksi olsun. O zaman s simpleksinin tepesi V_α^A ’dandır ve

$$Car_\alpha(s) \wedge U' = Car_\beta(s) \neq 0$$

sağlanır. $Car_\alpha(s) < U'$ olduğundan

$$Car_{\beta}(s) \wedge (A \wedge U') = Car_{\alpha}(s) \wedge U' \wedge A = Car_{\alpha}(s) \wedge A \neq 0$$

ve s, $nerv_{\beta}(A \wedge U')$'ya aittir. Eğer $Car_{\alpha}(s) \wedge U \neq 0$ ise α, D'ye aittir. s simpleksinin v tepesi için $\alpha_v < A$'dır. Buradan $Car_{\alpha}(s) < A$ ve

$$Car_{\beta}(s) \wedge (A \wedge U') = Car_{\alpha}(s) \wedge U' \wedge A = Car_{\alpha}(s) \wedge U' \neq 0$$

sağlandığından s simpleksi $nerv_{\beta}(A \wedge U')$'ya aittir. Her $\forall r \in [0,1]$ ve r - seviyeli homoloji grubu için Teorem3.5 ispatlanır.

Her r-seviyeli homoloji grupları izomorf olduğundan homoloji gruplarda izomorftur.

Homotopya aksiyomunu ispatlamak için ŠFTS de birim aralığını tanımlayalım. (I, τ_e) Öklid topolojisinde birim aralığı olsun. $\left(\tilde{I}, T\right)$ Chang fuzzy topolojisini

$$T = \{G : I \to I \mid \operatorname{supp} G \in \tau_e\}$$

şeklinde tanımlayalım.

$\left(\tilde{I}, \tau\right)$ Šostak fuzzy topolojisini ise

$$\tau(A) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } A \in T \text{ ise} \\ 0, & \text{eğer } A \notin T \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım ve buna Šostak birim aralığı adını verelim.O halde $\forall r \in [0,1]$ için

$$\left(\tilde{I}, \tau^r\right) = \left(\tilde{I}, T\right)$$

sağlanır.

Tanım 3.6. $f, g : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ Šostak fuzzy topolojik uzaylarının gp-dönüşümleri olsun. Eğer $\forall r \in [0,1]$ için $f^r, g^r : (X, \tau^r) \to (Y, \tau'^r)$, fuzzy homotop ise o zaman f, g gp-dönüşümlerine Šostak fuzzy homotopik dönüşümler denir. Fuzzy homotopi bağıntısı denklik bağıntısı olduğundan Šostak fuzzy homotopi bağıntısı da bir denklik bağıntısıdır.

Teorem 3.7. (Homotopya Aksiyomu) Eğer $f, g : (X, \tau) \to (Y, \tau')$ Šostak fuzzy homotopik dönüşümler ise o halde

$$f_{*q} = g_{*q} = H_q(X, \tau; G) \to H_q(Y, \tau'; G)$$

sağlanır.

Teoremi $\forall r \in [0,1]$ için r-seviyeli homoloji grupları için ispatlayacağız. Bunun için ise bir dizi lemma ispatlamak gereklidir.

$\left(\tilde{I}, T\right)$ fuzzy birim aralığı olsun.

Lemma 3.8. $\left(\tilde{I}, T_e\right)$ aralığının her fuzzy açık, bağlantılı küme taşıyıcısı (a,b) aralığına ait olan bir fuzzy kümedir. Taşıyıcısı açık aralıklar olan fuzzy kümeler $\left(\tilde{I}, T_e\right)$ fuzzy birim aralığının topolojisinin tabanını oluşturur.

İspat: Her bir açık bağlantılı G fuzzy kümesi için $G_0 \subset I$ kümesi açık bağlantılı kümedir. Yani $G_0 = (a,b)$dir.

Eğer $G \in T$ ise $G_0 \in \tau_e$ dir. Bu durumda $G_0 = \bigcup_{i \in I} (a_i, b_i)$ yazılabilir. Her bir $i \in I$ için G^i fuzzy kümesini

$$G^i(t) = \begin{cases} G(t), & t \in (a_i, b_i) \\ 0, & t \notin (a_i, b_i) \end{cases}$$

ile tanımlayalım. O halde G^i açıktır ve $G = \bigvee_{i \in I} G^i$ dir.

Lemma 3.9. $\left(\tilde{I}, T\right)$'nin her bir sonlu açık bağlantılı örtümü için $nerv\alpha$ kompleksi trivialdir.

İspat: Genel durumu aşağıdaki özel bir duruma indirgeyeceğiz.

$\alpha = \{G^1, \ldots, G^n\}$, $\left(\tilde{I}, T\right)$ aralığının öyle bir örtüsü olsun ki G^i fuzzy kümelerinin

$(G^i)_0$ taşıyıcıları için aşağıdaki koşullar sağlansın.

$$G^i \wedge G^{i+1} \neq \underline{0} \text{ ve } G^i \wedge G^j = \underline{0},\ j \neq i-1, i+1 \text{ ve } 0 \in (G^1)_0, 1 \in (G^n)_0$$

$p_i : nerv\alpha \to nerv\alpha$, $i = \overline{1,n}$ simplisel dönüşümünü

$$p_i(v_j) = \begin{cases} v_j & j \leq i \\ v_i & j > i \end{cases}$$

formülüyle tanımlayalım. O halde p_i, p_{i+1} simplisial dönüşümleri denktir. O halde p_1 sabit dönüşüm, p_n ise birim dönüşüm olduğundan $H_q(nerv\alpha) = H_q(*) = 0$ olur. Bu lemma'dan açık bağlantılı örtüler tüm $\left(\tilde{I}, T\right)$'nin konfinal alt kümesi olduğu elde edilir. Böyle örtülere regüler örtü adı verilir.

$\alpha = \{U_i\}_{i \in I} \in Cov_r(X)$ bir örtü olsun. Her bir $i \in I$ için $\left(\tilde{I}, T\right)$ aralığının regüler örtülerini $\beta^i = \{V_j^i\}_{j=\overline{i,N^i}}$ ile gösterelim. W kümesini aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$W = \{(i, j) : i \in I, j \in N^i\}$$

O zaman $\gamma = \{\gamma_{i,j} = U_i \times V_j^i\}_{(i,j) \in W}$, $X \times I$ fuzzy uzayının açık bir örtüsüdür. Bu örtüleri tuğla örtüsü olarak adlandıralım.

Lemma 3.10. Tuğla örtüleri $Cov(X \times I)$'nin bir konfinal alt kümesidir.

İspat: $\delta = \{A_k\}_{k \in K}$, $X \times I$ uzayının bir örtüsü olsun. Her bir (x_λ, t_μ) noktası için $U(x_\lambda, t_\mu) \times V(x_\lambda, t_\mu) < A_k$ sağlanacak şekilde $U(x_\lambda, t_\mu) < X$, $V(x_\lambda, t_\mu) < I$ açık kümeleri vardır. Her bir belirli x_λ fuzzy noktası için $\{V(x_\lambda, t_\mu)\}$ ailesi $\left(\tilde{I}, T\right)$ birim aralığının bir açık örtüsü olmaktadır. O halde bu ailenin sonlu regüler β^{x_λ} inceltilmesi vardır. O zaman her bir $\beta_i^{x_\lambda}$ fuzzy açık kümesi için öyle $U(x_\lambda, i)$ fuzzy açık kümesi vardır ki $U(x_\lambda, i) \times \beta_i^{x_\lambda} < A_k$ sağlanır. Eğer $U(x_\lambda) = \underset{i}{\wedge} U(x_\lambda, i)$ ise $\{U(x_\lambda) \times \beta_i^{x_\lambda}\}$ ailesi $X \times I$ fuzzy topolojik uzayının tuğla örtüsüdür ve δ örtüsünün bir inceltilmesidir.

Lemma 3.11. γ ailesi $X \times I$ fuzzy topolojik uzayının tabanı α olan bir tuğla örtüsü olsun. Eğer $nerv\alpha$ simpleks ise $nerv\gamma$ asiklikdir.

İspat: $\alpha = \{U_i\}_{i \in I}$, $\gamma = \{U_i \times V_j^i\}_{(i,j) \in W}$ olsun. $\left(\tilde{I}, T\right)$ uzayının δ örtüsünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\delta = \{\delta_{i,j} = V_j^i\}_{(i,j) \in W}$$

Eğer s, tepeleri $(i_0, j_0), \ldots, (i_n, j_n) \in W$ olan simleks ise o zaman

$$\underset{k=0}{\overset{n}{\wedge}} \left(U_{i_k} \times V_{j_k}^{i_k}\right) = \left(\underset{k=0}{\overset{n}{\wedge}} U_{i_k}\right) \times \left(\underset{k=0}{\overset{n}{\wedge}} V_{j_k}^{i_k}\right) = \left(\underset{k=0}{\overset{n}{\wedge}} U_{i_k}\right) \wedge \left(\underset{k=0}{\overset{n}{\wedge}} \delta_{i_k, j_k}\right)$$

sağlanır.

$nerv\alpha$ bir simpleks olduğundan $\underset{k=0}{\overset{n}{\wedge}} \delta_{i_k, j_k} \neq 0$ sağlanır. O halde

$$\underset{k=0}{\overset{n}{\wedge}} \left(U_{i_k} \times V_{j_k}^{i_k}\right) = \underline{0} \Leftrightarrow \underset{k=0}{\overset{n}{\wedge}} \delta_{i_k, j_k} = \underline{0}.$$

Buradan $nerv\gamma = nerv\delta$ olduğundan Lemma 3.9 dan $nerv\delta$ asiklidir.

Eğer γ ailesi $X \times I$ fuzzy topolojik uzayının tabanı α olan bir tuğla örtüsü ise

$$l, u : nerv\alpha \to nerv\gamma$$

simplisel dönüşümlerini

$$l(i) = (i, 0), u(i) = (i, n^i)$$

şeklinde tanımlayalım.[3] den

$$l_{*q} = u_{*q} : H_q(nerv\alpha) \to H_q(nerv\gamma)$$

elde edilir.

Teorem 3.7nin ispatı: $f_0, g_0 : X \to X \times I$ dönüşümlerini her bir $p \in X$ noktası için $f_0(p) = (p,0), g_0(p) = (p,1)$ şeklinde tanımlayalım. $H : X \times I \to X$, f ve g dönüşümleri arasında bir fuzzy homotopya olduğundan $f = H \circ f_0$, $g = H \circ g_0$ dur. O halde teoremi ispatlamak için $f_{0*q} = g_{0*q}$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. Tuğla örtüleri konfinal alt küme olduğu için $X \times I$ fuzzy topolojik uzaylarının homoloji gruplarını tanımlamak için tuğla örtülerini kullanmak yeterlidir. γ ailesi $X \times I$ fuzzy topolojik uzayının tabanı α olan tuğla örtüsü olsun. $\gamma_0 = f_0^{-1}(\gamma)$, $\gamma_1 = g_0^{-1}(\gamma)$ kümelerini ve

$$i_{f_0,\gamma} : nervf_0^{-1}(\gamma) \to nerv\gamma \,,\ \ i_{g_0,\gamma} : nervg_0^{-1}(\gamma) \to nerv\gamma$$

simplisial dönüşümlerini ele alalım.

Eğer $u' : nerv\alpha \to nerv\gamma$, $\pi : nerv\gamma \to nervf_0^{-1}(\gamma)$ dönüşümlerini $u'(i) = (i, n^i)$, $\pi(i,j) = (i,0)$ ile tanımlarsak $u = i_{g_0,\gamma} \circ u'$, $l = i_{f_0,\gamma}\pi u'$ sağlanır. $(i_{g_0,\gamma})_{*q} = (i_{f_0,\gamma})_{*q}$ olduğundan $f_{0*q} = g_{0*q}$ olur.

4. KAYNAKLAR

[1] Abbas S.E. , On İntuitionistic Fuzzy Compactness, Information Sciences 173 (2005) 75-91.

[2] Alderton I. W., “Function Spaces in Fuzzy Topology”, Fuzzy Sets and Systems, 32, (1989) 115-124.

[3] Ameri R.,Zahedi M.M. , “Fuzzy Chain Complex and Fuzzy Homotopy.” Fuzzy Sets and Systems, 112, (2000) 287-297.

[4] Bourbaki N. , “Algebre Homologique”, Elements de Mathematique, ChapitreX, Mason-Paris-New York –Barcelone-Milan, (1980).

[5] Chang C.L., Fuzzy Topological Spaces, J. Math. Anal. Appl. 24 (1968) 182-190.

[6] Chattopadhyay K.C., R.N.Hazra, S.K.Samanta, Gradation of Openness: Fuzzy Topology, Fuzzy Sets and Systems 49 (1992) 237-242.

[7] Chong-You Z. , “L-fuzzy Unit İnterval and Fuzzy Connectedness”, Fuzzy Sets and Systems, 27, (1998) 73-76.

[8] Çöker D. , An Introduction To Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets And Systems 88 (1997) 81-89.

[9] Çuvalcıoğlu G., Citil M., “On Fuzzy Homotopy Theory” ,Adv. Stud. Contemp. Math., 12, No 1, (2006) 163-166.

[10] Eilenberg. S., Steenrod N., Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Pres, 1952.

[11] Fang J., Sums of L-Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 739- 754.

[12] Fang J., Yue Y., Base and Subbase in I-Fuzzy Topological Spaces, J.Math. Res. Exposition 26 (2006) 89-95.

[13] Gang-Li S., Inverse Limits in Category $LTop(I)^1$, Fuzzy Sets and Systems 108 (1999) 235- 241.

[14] Gang-Li S., Inverse Limits in Category $LTop(II)^1$, Fuzzy Sets and Systems 109 (2000) 291-299.

[15] Gang-Li S., Some Results On Ĭ(L) and Ř(L), Fuzzy Sets and Systems, 82, (1996) 103-110.

[16] Gündüz Ç., and Bayramov S., “Algebraic Structures on Fuzzy Homotopy Sets.”, Proceeding of The Jangjeon Mathematical Society, 9, No. 2,(2006) 161-173.

[17] Gündüz Ç., and Bayramov S., “Homotopy Relation On The Category of İnverse and Direct Spectra of Topological Spaces”, Transactions of Nas of Azerbaijan 29-38.

[18] Gündüz Ç., and Bayramov S., “On Fuzzy Homotopy Sets”, Advances in Theorical and Applied Mathematics, Vol.1, No.3,(2006).

[19] Hong-Xing L., Cheng-Zhong L., and Pei-Zhuang W.,“The Cardinality of Fuzzy Sets and The Continuum Hypothesis.” Fuzzy Sets and Systems, 55, (1993) 61-77

[20] Höhle U., Šostak A., Axiomatic Foundations of Variable-Basis Fuzzy Topology, in: U.Höhle, S.E. Rodabaugh (Eds.), Mathematics of Fuzzy Sets: Logic,

Topology and Measure Theory, the Handbooks of Fuzzy Sets Series, vol.3, Kluwer Academic Publishers, Boston/ Dordrecht/ London, 1999, 123-272.

[21] Hu S-T., “Homotopy Teory”, Academic Pres, New York and London, 1959.

[22] Hutton B., “Normality in Fuzzy Topological Space”J. Math. Anal. Appl.50, (1975) 74-79.

[23] Isaac P., “On Projective L-Modules”, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, Issue 5, (2005) 747-754.

[24] Klawonn F., “Homotopy Theory in The Category of Fuzzy Topological Spaces” Department of Computer Science, Technical University of Braunschweig, W-3300 Braunschweig, Germany.

[25] Kohli J.K., Prasannan A.R., “Fuzzy Topologies on Function Spaces”, Fuzzy Sets and Systems, 116, (2000) 415-420.

[26] Kubiak T., On Fuzzy Topologies, Ph. D.Thesis, Adam Mickiewicz, Ponzan, Poland, 1985.

[27] Lee S. J., Lee E. P.,The Category of Intuitionistic Fuzzy Topological Spaces, Bull. Korean Math. Soc. 37 (2000), No. 1, 63-76.

[28] Lopez-Permouth S.R., “On Categories of Fuzzy Modules”, Information Sciences, 52, (1990) 211-220.

[29] Lopez-Permouth S.R., “Lifting Morita Equivalence to Categories of Fuzzy Modules”, Information Sciences, 64, (1992) 191-201.

[30] Lowen R., "Fuzzy Topological Spaces and Fuzzy Compactness", J. Math. Anal. Appl. 56, (1977) 621-633.

[31] Mondal T.K., Samanta S.K., On intuitionistic gradation of openness, Fuzzy Sets and Systems 131 (2002) 323-336.

[32] Pan F.Z., "Fuzzy Finitely Generated Modules", Fuzzy Sets and Systems, 21, (1987) 105-115.

[33] Rammadan A.A., Kim Y.C., Abbas S.E., Compactness in Intuitionistic Gradation of Openness, The Journal of Fuzzy Mathematics, Vol. 13, No.3, (2005) 581-600.

[34] Rodabaugh S.E., "Connectivity and The L- Fuzzy Unit Interval" Rocky Mountain J.Math. 12 (1982) 113-121.

[35] Rodabaugh S.E., Categorical Foundations of Variable-Basis Fuzzy Topology, in: U.Höhle, S.E. Rodabaugh (Eds.), Mathematics of Fuzzy Sets: Logic, Topology and Measure Theory, the Handbooks of Fuzzy Sets Series, Vol.3, Kluwer Academic Publishers, Boston/ Dordrecht/ London, (1999), 273-388.

[36] Rosenfeld A., Fuzzy Groups, J. Math. Anal.Appl., 35 (1971) 312-317

[37] Salleh A.R., "The Homotopy Property of The İnduced Homomorphisms on Homology Groups of Fuzzy Topological Spaces", Fuzzy Sets and Systems, 56, (1993) 111-116.

[38] Salleh A.R.B., and MD.TAP, A.O.B., "The Fundamental Group of Fuzzy Topological Spaces.", Sains Malaysiana, 15(4),(1986) 397-407.

[39] Salleh A.R.B., and MD.TAP, A.O.B., "The Fundamental Group of Fuzzy Topological Spaces.", Sains Malaysiana, 16(4),(1987) 447-454.

[40] Shi F.–G., A New Definition of Fuzzy Compactness, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1486-1495.

[41] Šostak A., On A Fuzzy Topological Structure, Rendiconti Ciecolo Matematico Palermo (Supp. Ser. II) 11 (1985) 89-103.

[42] Šostak A., Two Decades of Fuzzy Topology: Basic İdeas Notions and Results, Russian Math. Surveys 44 (6),(1989) 125-186.

[43] Šostak A., Basic Structures of Fuzzy Topology, J.Math. Sci.78 (1996) 662-701.

[44] Spanier Edwin H., "Algebraic Topology", Mc Graw-Hill Book Company, California, Berkeley, (1966).

[45] Switzer R.M., "Algebraic Topology Homotopy and Homology", Springer, Verlag, (1975).

[46] Wang-jin L., Chong-You Z., "Singular Homology Groups of Fuzzy Topological Spaces", Fuzzy Sets and Systems, 15,(1985) 199-207.

[47] Ying-Ming L., "A Note on Compactness in Fuzzy Unit Interval" Kexue Tongbao Selected Papers, Mathematics-Physics-Chemistry Series, (in Chinese), (1980) 33-35.

[48] Ying-Ming L., Mao-Kang L., "Fuzzy Topology", World Scientific, Singapore, (1997).

[49] Ying-Ming L., A New Approach for Fuzzy Topology (I), Fuzzy Sets and Systems 39 (3) (1991) 303-321.

[50] Yue Y., Fang J., Generated I - Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems 154 (2005) 103-117.

[51] Y. Yue, Lattice-Valued İnduced Fuzzy Topological Spaces, Fuzzy Sets and Systems 158 (2007) 1461-1471.

[52] Zadeh L.A., Fuzzy Sets, İnform and Control 8,(1965) 333-353.

[53] Zahedi M.M., Ameri R.A., “On Fuzzy Projective and Injective Modules.”, The Journal of Fuzzy Mathematics, Vol.3, No.1, (1995) 181-190.

[54] Zahedi M.M., Ameri R.A., “Fuzzy Exact Sequence in Category of Fuzzy Modules.”, The Journal of Fuzzy Mathematics, Vol.2, No.2, (1994) 409-424.

[55] Zahedi M.M., Some Results on Fuzzy Modules, Fuzzy Sets and Systems, 55, (1993) 355-361.

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında Kars'ın Akyaka ilçesinde doğdu. İlk ve ortaöğrenimini Kars'ta bitirdi. 2008 yılında Kars Kafkas üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünden mezun oldu. Aynı sene Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına başladı.

Şu anda yine öğrenimine devam etmektedir.