T.C

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KUAZİ OPTİĞİN DURGUN DENKLEMİ İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ

Yusuf KOÇAK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

HAZİRAN – 2010

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Yusuf KOÇAK'ın Prof. Dr. Gabil YAGUBOV'un danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Kuazi Optiğin Durgun Denklemi İçin Bir Optimal Kontrol Probleminin Çözümü'' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği... ile kabul edilmiştir.

25/06/2010

Adı ve Soyadı **İmza**

Başkan: Prof. Dr. Gabil YAGUBOV ....

Üye: Prof. Dr. Nazım SADIK ....

Üye : Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA ....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ...../...../...... gün ve ..../...................... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Prof. Dr. Abdullah DOĞAN

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Tez çalışmamda bana en büyük katkıyı sağlayan ve yardımlarını esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi danışman hocam sayın Prof. Dr. Gabil YAGUBOV `a ve Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA hocama en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmam sürecinde maddi manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve tezin hazırlanması esnasında fikirlerinden yararlandığım Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü yüksek lisans öğrencisi Taha Yasin ÖZTÜRK `e ve Arş. Gör. Murat ÇAĞLAR `a teşekkürlerimi borç bilirim.

Kars – 2010 **Yusuf KOÇAK**

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde kuazi Optiğin durgun denklemi için optimal kontrol problemi ele alındı. Çalışmanın önce 3.1 bölümünde kuazi optiğin durgun denklemi için sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı ve tekliğine ait olan hükmün ispatı verildi. Bu hükmü kullanarak göz önüne alınan optimal kontrol probleminin çözümünün varlığına ve tekliğine ait teoremler ispatlandı. Çalışmanın 3.2 bölümünde kuazi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şartın elde edilmesi incelendi. Bu amaçla önce fonksiyonelin differansiyellenebilmesi ispatlandı ve onun gradiyenti için formül elde edildi. Bu formüller kullanılarak problemin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlandı.

2010 - 42 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Kuazi Optiğin Durgun Denklemi, Optimal Kontrol Problemi, Sınır Değer Problemi

ABSTRACT

In this thesis, optimal control problem was taken up for stationary equation of Quasi Optic. In the 3.1 section of this work, for stationary equation of Quasi Optic, at first judgement relating to existence and eniqueness of boundary value problem was given. By using this judgement, the existence and sigle of the optimal control problem solutions were proved. İn the 3.2 section of this thesis for stationary equation of Quasi Optic and the solution of optimal control problem questions relating to getting conditions were analyzed. For obtained for its gradient. By using this formula, for the solution of the problem the necessity condition, in the form of the variation inequality, was proved.

2010 – 42 pages

Key Words: Stationary Equation of Quasi Optic, Boundary Value Problem, Optimal Control problem

SİMGELER DİZİNİ

Tezde kullanılan temel simgeler aşağıda gösterilmiştir.

$\forall$	herhangi
$\overset{0}{\forall}$	hemen hemen her yerde
H	Hilbert uzayı
B	Banach uzayı
$\Omega = (0, l) \times (0, L)$	Açık Dikdörtgen
$\overline{\Omega} = (0, l) \times (0, L)$	Kapalı dikdörtgen

1. GİRİŞ

Schrödinger denklemi ile ifade edilen kuantum mekanik sistemleri için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıkar. (Butkovski A.G., Samoyolenko Y.I., 1984, Landau L.D., Lifchiş E.M., 1963 Vorontsov M.A., Şmalguzen V.I., 1984). Bu nedenle böyle problemlerin incelenmesi gerek teorik gerek pratik anlamda öneme sahiptir. Kuazi optiğin durgun denklemi aslında kompleks potansiyelli Schrödinger denkleminin bir biçimidir. Bilindiği üzere durgun olmayan Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ilk önce $[1, 2, 4, 11, 12, 14, 15, 16, 17]$ çalışmalarında incelenmiştir. Ancak denklemin katsayılarında yer alan kontrollerle başlangıç fonksiyonunda yer alan kontroller karesel integrallenebilir fonksiyonlar olduğunda bu tür problemler az incelenmiştir.

Sunulan tezde kuazi optiğin durgun denklemi için bir optimal kontrol probleminin çözümü ele alınmıştır. Kuazi optiğin durgun veya kompleks potansiyelli durgun olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ilk önce $[4, 15, 16, 17]$ çalışmalarında incelenmiştir. Konulan optimal kontrol problemi konulma açısından önceki problemlerden farklı olduğundan bu problemin incelenmesi gerek teorik gerekse pratik açıdan önem taşır.

Tez çalışmasının önemli bölümlerinden biri materyal ve yöntem bölümüdür ki buda iki alt bölümden oluşmuştur. Birinci alt bölümde kuazi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol probleminin iyi konulmasına ait olan sorular cevaplandırılmıştır. Yani optimal kontrol probleminin varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlanmıştır. İkinci alt bölümde kuazi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol probleminde gerek şartlar incelenmiştir. Bunun için önce sunulan amaç fonksiyoleninin differansiyellenebilmesi incelenmiş ve onun gradiyenti için formül ispatlanmıştır. Bu formülden yararlanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şartlar incelenmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Tanım 2.1 : $L_2(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemenları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir :

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)v(x)dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)}} \quad [6].$$

Tanım 2.2 : $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları $\Omega = (0,l) \times (0,L)$ bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}} \quad [6] .$$

Tanım 2.3 : $C^0([0,T],B)$ Banach uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\,\in\,[0,T]} \|u(t)\|_B \quad [9].$$

Tanım 2.4 : $W_2^1(0,l)$ Sobolev uzayı olup, olup elemanlarının kendisi ve x`e göre I. mertebeden genelleştirilmiş türevi $L_2(0,l)$'den olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left[u(x)\bar{v}(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{d\bar{v}(x)}{dx}\right]dx \,,$$

$$\|u\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{W_2^1(0,l)}} \qquad [6]\,.$$

Burada $\bar{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$ `in kompleks eşleniğidir.

Tanım 2.5 : $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ uzayı $W_2^1(0,l)$ uzayının alt uzayıdır.Elemanları 0 ve l noktalarında sıfıra eşittir [6].

Tanım 2.6 : $W_2^2(0,l)$ Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve x`e göre II. mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$`den olan fonksiyonlar uzayıdır. Aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left[u(x)\bar{v}(x) + \frac{du(x)}{dx}\frac{d\bar{v}(x)}{dx} + \frac{d^2u(x)}{dx^2}\frac{d^2\bar{v}(x)}{dx^2}\right]dx \,,$$

$$\|u\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{W_2^2(0,l)}} \qquad [6]\,.$$

Tanım 2.7 : $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayı $W_2^2(0,l)$ uzayının alt uzayıdır. Elemanları 0 ve l noktalarında sıfıra eşittir[6].

Tanım 2.8 : $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobelev uzayıdır, elemanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle $u(x,t)$ fonksiyonlarıdır ki, $u, \frac{\partial u}{dx}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlar. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle u, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[u(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \bar{\phi}(x,t)}{\partial x^2} \right] dxdt \ ,$$

$$\|u\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^{1,1}(\Omega)}} \qquad [6].$$

Tanım 2.9 : $\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir[6].

Tanım 2.10 : Diyelim ki B herhangi Banach uzayı $J(u)$ fonksiyoneli ise u noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma) = \{v : v \in B, \|v-u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle_B + o\langle h, u \rangle$ şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneli Frechet anlamında differansiyellenebilirdir denir [13].

Tanım 2.11 : Eğer B Banach uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c \in B^*$, $\lim_{k\to\infty}\langle c, u_k \rangle = \langle c, u \rangle$ şartını sağlıyorsa bu taktirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir [13].

Tanım 2.12: U, B Banach uzayının bir kümesi olsun. Eğer $\forall\{u_k\} \in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu taktirde U kümesine B \`de zayıf kompakt küme denir [13].

Tanım 2.13 : $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için

$$\lim_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$$

şartı sağlanıyorsa bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında alttan yarı sürekli denir [13].

Teorem 2.1 : Diyelim ki U, B Banach uzayının konveks alt kümesi $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli differansiyellenebilir fonksiyonel ve

$U_* = \{u \in U: J(u) = J_* = \inf_U J(u)\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu taktirde $\forall u_* \in U_*$ ve $\forall u \in U$ için $\langle J'(u_*), u - u_*\rangle \geq 0$ şartı sağlanır [13].

Teorem 2.2: U, B Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun. $J(u)$ fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan yarı sürekli olsun. Bu taktirde $J_* = \inf_U J(u) > -\infty, U_* = \{u \in U: J(u) = J_*\} \neq \emptyset$ zayıf kompakttır ve U \`dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar [13].

Teorem 2.3 (Goebel): Kabul edelim ki, $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0,\ \beta \geq I$ verilen sayılar olsun. Bu taktirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle G alt kümesi vardır ki, $\forall\omega \in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha\|v - \omega\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > I$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır [3].

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Kuazi Optiğin Durgun Denklemi İçin Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması

Bu bölümde kuazi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol probleminin iyi konulması incelenmektedir. Bilindiği üzere kuazi optiğin durgun denklemi lineer olmayan optikte ortaya çıkan durgun ışık demetlerinin dağılması sürecini ifade eden bir denklemdir[14]. Bu denklemin katsayıları olan kırılma ve absorbe katsayıları kuazi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol problemlerinde kontrol rolünü oynayan fiziksel araçlardır. Bunların yanı sıra ışık demetlerinin başlangıç noktasındaki durumuda kontrol rolünü oynayabilen bir fiziksel araç olabilir.

3.1.1. Problemin Konulması

Farz edelim ki

$$J_\alpha(v) = \|\psi(.,L) - y\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\|v - \omega\|^2_H \qquad (3.1.1.1)$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \Big\{v = \big(v_0, v_1, \varphi_0, \varphi_1\big), \quad v_m \epsilon L_2(0,l), \quad v_1(z) \geq 0, \ \overset{o}{\forall} z \epsilon (0,L),$$
$$\|v_m\|_{L_2(0,l)} \leq b_m, \ \varphi_m \epsilon L_2(0,l), \ \|\varphi_m\|_{L_2(0,l)} \leq d_m, \ m = 0,1\Big\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial\psi}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + v_0(z)\psi + iv_1(z)\psi = f(x,z), \quad (x,z)\,\epsilon\,\Omega, \qquad (3.1.1.2)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x) = \varphi_0(x) + i\varphi_1(x), \quad x\,\epsilon\,(0,l), \qquad (3.1.1.3)$$

$$\psi(0,z) = \psi(l,z) = 0, \quad z\,\epsilon\,(0,L), \qquad (3.1.1.4)$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir.

Burada $i = \sqrt{-1}$ sanal birim; $a_0 > 0$, $l > 0$, $L > 0$, $\alpha \geq 0$, $b_0 \geq 0$, $b_1 > 0$, $d_0 > 0$, $d_1 > 0$ verilen sayılar $x \in [0,l]$, $z \in [0,L]$, $\Omega_z = (0,l) \times (0,z)$ $\Omega = \Omega_L$ ' dır; $y(x)$, $f(x,z)$ kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$f \in L_2(\Omega) \ , \qquad (3.1.1.5)$$

$$y \in L_2(0,l) \qquad (3.1.1.6)$$

şartlarını sağlar; $w \in H$ verilen eleman olup,

$\omega = (\omega_0, \omega_1, \varpi_0, \varpi_1)$ ve $H = (L_2(0,l))^2 \times (L_2(0,L))^2$ 'dır.

$\forall v \in V$ için (3.1.1.2) - (3.1.1.4) şartlarından $\psi = \psi(x,z) \equiv \psi(x,z;\, v)$ fonksiyonunun bulunması problemi kuazi optiğin durgun denklemi için I. çeşit başlangıç sınır değer problemidir.

Tanım3.1.1.1: $\forall \boldsymbol{v} \in V$ için (3.1.1.2) - (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümü olarak $\forall \eta \in \overset{0}{W}{}_{\mathbf{2}}^{\mathbf{2,1}}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \psi\left(i\frac{\partial\bar\eta}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2\bar\eta}{\partial x^2} + v_0(z)\eta + iv_1(z)\eta\right)dxdz =$$

$$= \int_\Omega f\bar\eta dxdz - i\int_0^l \psi(x,L)\bar\eta(x,L)dx +$$

$$+\int_{\mathbf{0}}^{\boldsymbol{l}} (\varphi_{\mathbf{0}}(x) + i\varphi_{\mathbf{1}}(x)\,\bar\eta(x,0)dx \qquad (3.1.1.7)$$

integral özdeşliğini sağlayan $C^0([0,L], L_2(0,l))$ uzayına ait olan $\psi = \psi(x,z) \equiv \psi(x,z;\, v)$ fonksiyonu anlaşılır. (3.1.1.2) - (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözüm sınıfı $C^0([0,L], L_2(0,l))$ uzayı seçildiğinden bu uzaya ait olan amaç fonksiyonelinin içerdiği integralin sonu olduğunu görebiliriz.

Konulan optimal kontrol problemi konulma açısında ilk önceki problemlerden farklı olduğundan (3.1.1.1) - (3.1.1.4) probleminin incelenmesi gerek teorik gerekse pratik açıdan önem taşır.

(3.1.1.1) - (3.1.1.4) optimal kontrol problemini incelemek için ilk önce $\forall v \in V$ için (3.1.1.2) - (3.1.1.4) problemin iyi konulmasını incelememiz gerekiyor.

Kuazi optiğin durgun veya kompleks potansiyelli durgun olmayan schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ilk önce $[4, 15, 16, 17]$ çalışmalarında incelenmiş ve problemin çözümünün varlığı ve tekliğine ait sonuçlar elde edilmiştir. Ancak bu çalışmalarda mevcut olan sonuçlar (3.1.1.1) - (3.1.1.4) problemini incelemek için yeterli olmadığında her şeyden önce (3.1.1.2) - (3.1.1.4) probleminin iyi konulmasını bir sonraki bölümde inceleyeceğiz.

3.1.2. Başlangıç Sınır Değer Problemlerinin Genelleştirilmiş Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini ispatlamak için Galerkin yöntemini uygulayacağız.

Teorem 3.1.2.1: Farz edelim ki f fonksiyonu (3.1.1.5) şartını sağlasın. Bu taktirde $\forall v \in V$ için (3.1.1.2) - (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $C^0([0,L], L_2(0,l))$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirim geçerdir:

$$\|\psi(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_0(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)}),\ \forall z \in [0,L]\,. \tag{3.1.2.1}$$

İspat : Teoremi ispatlamak için Galerkin yöntemini kullanalım. Bu amaçla $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar sistemi olarak aşağıdaki

$$Lu_k = -a_0 \frac{d^2 u_k}{dx^2} = \lambda_k u_k \ , \qquad x \in (0,l)\,, \tag{3.1.2.2}$$

$$u_k(0) = u_k(l) = 0 \ , \ k = 1,2 \ldots \tag{3.1.2.3}$$

özdeğer probleminin λ_k , $k = 1,2 \ldots$ özdeğerlerine karşılık gelen öz fonksiyonları alacağız. Bilindiği üzere (3.1.2.2.) – (3.1.2.3) probleminin özdeğerleri olan λ_k`lar negatif olmayan reel sayılardır. $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 \ldots \ldots .. < \lambda_k < \cdots$ şartlarını sağlar ve öz fonksiyonlarda reel değerli fonksiyonlardır. $L_2(0,l)$, $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$, $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzaylarında ortogonallık şartını sağlar.

Farz edelim ki $u_k = u_k(x)$ fonksiyonları $L_2(0,l)$`de ortonormaldır. Yani aşağıdaki şartları sağlar:

$$(u_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x) u_m(x)\, dx = \delta_k^m \ , \qquad k, m = 1,2 \ldots \ . \tag{3.1.2.4}$$

Burada

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1 & , \ k = m \\ 0 & , \ k \ne m \end{cases} \qquad k, m = 1,2 \ ,$$

Cronecer sabitleridir. $W_2^1(0,l)$, $W_2^2(0,l)$ uzaylarında ortogonallık aşağıdaki anlamdadır:

$$[u_k, u_m] = (Lu_k, u_m)_{L_2(0,l)} =$$

$$= \int_0^l a_0 \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx} dx = \lambda_k \delta_k^m \ , \ k, m = 1,2 \ldots \ , \tag{3.1.2.5}$$

$$\{u_k, u_m\} = (Lu_k, Lu_m)_{L_2(0,l)} =$$

$$= \int_0^l Lu_k(x)Lu_m(x)\,dx = {\lambda_k}^2 \delta_k^m \ , \qquad k,m = 1,2\ldots \ . \tag{3.1.2.6}$$

Farz edelim ki temel fonksiyonlar aşağıdaki şartı sağlasın:

$$\|u_k\|_{W_2^2(0,l)} \le \tilde{d}_k \ , \quad k = 1,2\ldots \ . \tag{3.1.2.7}$$

Burada $\tilde{d}_k > 0$, $k = 1,2\ldots$ sabitlerdir.

Galerkin yöntemine göre (3.1.1.2) - (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümüne yaklaşımları

$$\psi^N(x,z) = \sum_{k=1}^{N} C_k^N(z) u_k(x) \tag{3.1.2.8}$$

biçiminde arayalım. Burada $C_k^N = C_k^N(z) = \langle \psi^N(\cdot,z), u_k \rangle_{L_2(0,l)}$ aşağıdaki Cauchy probleminin çözümüdür:

$$i\frac{d}{dz}\langle \psi^N(\cdot,z), u_k \rangle_{L_2(0,l)} = (L\psi^N, u_k) - (v_0(z)\psi^N(\cdot,z), u_k)_{L_2(0,l)} -$$

$$-(iv_1(z)(\psi^N(\cdot,z), u_k)_{L_2(0,l)} + f_k(z)\ , z \in [0,L], k = \overline{1,N}\ , \tag{3.1.2.9}$$

$$C_k^N(0) = (\psi^N(\cdot,z), u_k) = \varphi^N(x) = \varphi_0^N(x) + i\varphi_1^N(x) \ , \qquad k = \overline{1,N}\ . \tag{3.1.2.10}$$

Burada

$f_k(z) = \langle f(\cdot,z), u_k \rangle_{L_2(0,l)}$,

$$\varphi^N(x) = \sum_{k=1}^{N} \varphi(x) u_k(x) = \sum_{k=1}^{N} (\varphi_0(x) + i\varphi_1(x)) u_k(x)\text{` dir.} \tag{3.1.2.11}$$

Görüldüğü üzere (3.1.2.9) – (3.1.2.10) Cauchy problemi karesel integrallenebilir katsayılı ve serbest terimli adi diferansiyel denklemler sistemi için Cauchy problemidir. [13] çalışmasından bildiğimize göre bu problemin $[0, L]$ aralığında tanımlanan sürekli çözümü vardır. Ayrıca bu çözüm $L_2(0,l)$ \`den olan türeve sahiptir.

Şimdi ilk önce (3.1.2.9) – (3.1.2.10) probleminin çözümü için kestirim elde etmeye çalışalım. Bu amaçla (3.1.2.9) sisteminin k. denklemini $\tilde{C}_k^N(z)$ fonksiyonu ile çarpıp k üzerinden $k = 1$`den $k = n$`ye kadar toplayıp $(0, L)$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu taktirde L operatörü için olan formülü ve kısmi integrasyon formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_z} (i\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\ \bar{\psi}^N + a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2 + v_0(z)|\psi^N|^2 + i\, v_1(z)|\psi^N|^2)dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_z} f\ \bar{\psi}^N dxd\tau \quad , \quad \forall z \in [0, L]\, .$$

Bu eşitlikten kompleks eşleniğini çıkarırsak:

$$\int_{\Omega_z} (\frac{\partial\psi^N}{\partial z}\ \bar{\psi}^N + \frac{\partial\bar{\psi}^N}{\partial z}\psi^N)dxd\tau + 2\int_{\Omega_z} v_1(z)|\psi^N|^2 dxd\tau =$$

$$= 2\int_{\Omega_z} I_m(f\,\bar{\psi}^N)dxd\tau\, .$$

Buradan kolaylıkla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_0^l |\psi^N(x,z)|^2\, dx + 2\int_{\Omega_z} v_1(z)|\psi^N|^2 dxd\tau =$$

$$= \int_0^l |\psi^N(x,0)|^2\, dx + 2\int_{\Omega_z} I_m(f\,\bar{\psi}^N)dxd\tau\, .$$

sonuncu eşitlikten kolaylıkla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\|\psi^N(\cdot,z)\|_{L_2(0,l)}^2 \le \|\psi^N(\cdot\,,0)\|_{L_2(0,l)}^2 + 2\int_{\Omega_z} |f||\psi^N|\, dxd\tau. \qquad (3.1.2.12)$$

(3.1.2.8) formülünü kullanırsak $\psi^N(x, 0)$ aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\|\psi^N(x,0)\|^2_{L_2(0,l)} = \sum_{k=1}^{N} |C_k^N(0)|^2 = \sum_{k=1}^{N} |\varphi_k|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k|^2 = \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} . \quad (3.1.2.13)$$

Bu eşitsizliği ve Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğini kullanarak (3.1.2.12) eşitsizliğinden aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\|\psi^N(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)} \leq \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)} + \int_0^z \|\psi^N(\cdot,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}\, d\tau \ , \forall z \in [0,L] .$$

Gronwall lemmasını kullanarak bu eşitsizlikten aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|\psi^N(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_0 \langle \|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)} \rangle \ , \ \forall z \in [0,L] . \quad (3.1.2.14)$$

Böylece Galerkin yaklaşımları için sağ tarafı N`den bağımsız olan kestirim elde ettik. Şimdi $\psi^N(x,z)$ yaklaşımlarını kullanarak

$$l_{N,K}(z) = (\psi^N(\cdot,z), u_k)_{L_2(0,l)} \ , \quad N,k = 1,2.. \quad (3.1.2.15)$$

fonksiyonlar ailesini oluşturalım. (3.1.2.14) kestirimini kullanarak bu ailenin $[0,L]$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu cauchy – bunyakovski eşitsizliği yardımı ile gösterebiliriz. Gerçekten $l_{N,k}(z)$ ler için olan formülü ve cauchy – bunyakovski eşitsizliğini, $u_k = u_k(x)$, $k = 1,2..$ fonksiyonlarının ortagonallığını kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$|l_{N,k}(z)\ | \leq \|\psi^N(\cdot,z)\|_{L_2(0,l)} \|u_k\|_{L_2(0,l)} = \|\psi^N(\cdot,z)\|_{L_2(0,l)} \leq$$

$$\leq (c_0\|\varphi\|_{L_2(0,l)} + \|f\|^2_{L_2(\Omega)})^{1/2} = C_1 \ , \quad N,k = 1,2.. \ . \quad (3.1.2.16)$$

Yani

$$|l_{N,k}(z)\ | \leq c_1 \ , \ \forall z \in [0,L] \ , \ N,k = 1,2 \ldots \quad (3.1.2.17)$$

eşitsizliği $l_{N,k}(z)$, $N,k = 1,2 \ldots$ fonksiyon ailesinin $[0,L]$ aralığında düzgün sınırlı olduğunu ifade eder. Şimdi $l_{N,k}(z)$, $N,k = 1,2 \ldots$ ailesinin $[0,L]$ aralığında aynı dereceden sürekli olduğunu gösterelim. Bu amaçla (3.1.2.8) sistemindeki $k.$ denklemi $\forall z \in [0,L]$ için $[z,\ z+\Delta z]$ aralığı üzerinden integralleyelim.Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$l_{N,k}(z+\Delta z) - l_{N,k}(z) = \int\limits_{z}^{z+\Delta z}\int\limits_{0}^{l} \psi^N(x,\tau) L u_k \, dx d\tau -$$

$$- \int\limits_{z}^{z+\Delta z}\int\limits_{0}^{l} v_0(\tau)\psi^N(x,\tau)u_k(x)dxd\tau - \int\limits_{z}^{z+\Delta z}\int\limits_{0}^{l} iv_i(\tau)\psi^N(x,\tau)u_k(x)dxd\tau +$$

$$+ \int\limits_{z}^{z+\Delta z}\int\limits_{0}^{l} f(x,\tau)u_k(x)dxd\tau \ , \qquad \forall z \in \ [0,L] \, .$$

Bu eşitlikte sağ tarafta yer alan birinci integralde iki kez kısmi integrasyon formülünü uygulayıp ve $u_k(0) = u_k(l) = 0$, $k = 1,2 \ldots$ sınır şartlarını kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$l_{N,k}(z+\Delta z) - l_{N,k}(z) = \int\limits_{z}^{z+\Delta z}\int\limits_{0}^{l} \psi^N(x,\tau) L u_k \, dx d\tau -$$

$$- \int\limits_{z}^{z+\Delta z}\int\limits_{0}^{l} v_0(\tau)\psi^N(x,\tau)u_k(x)dxd\tau - \int\limits_{z}^{z+\Delta z} iv_i(\tau)\psi^N(x,\tau)u_k(x)dxd\tau +$$

$$+ \int\limits_{z}^{z+\Delta z}\int\limits_{0}^{l} f(x,\tau)u_k(x)dxd\tau \ .$$

Bu eşitlikte Cauchy – Bunyakovski eşitsizliğini uygulayarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|l_{N,k}(z+\Delta z) - l_{N,k}(z)\right| \le \int\limits_{z}^{z+\Delta z} \|\psi^N(\cdot,\tau)\|_{L_2(0,l)} d\tau \|Lu_k\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+ \int\limits_{z}^{z+\Delta z} |v_o(\tau)| d\tau \max_{0\le\tau\le t} \|\psi^N(\cdot,\tau)\|_{L_2(0,l)} \|u_k\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+ \int\limits_{z}^{z+\Delta z} |v_1(\tau)| d\tau \max_{0\le\tau\le L} \|\psi^N(\cdot,\tau)\|_{L_2(0,l)} \|u_k\| +$$

$$+\int_{z}^{z+\Delta z} \|f(\cdot,\tau)\|_{L_2(0,l)} d\tau \|u_k\|_{L_2(0,l)} \quad . \tag{3.1.2.18}$$

Burada

$$\|Lu_k\|_{L_2(0,l)} \leq c_2 \|u_k\|_{W_2^2(0,l)}$$

eşitsizliğini ve (3.1.2.7) şartını kullanarak aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğun elde ederiz:

$$\left|l_{N,k}(z+\Delta z) - l_{N,k}(z)\right| \leq \tilde{d}_k \Big(\int_{z}^{z+\Delta z} \|\psi^N(\cdot,\tau)\|_{L_2(0,l)} d\tau +$$

$$+\int_{z}^{z+\Delta z} |v_o(\tau)| d\tau \max_{0\leq\tau\leq t} \|\psi^N(\cdot,\tau)\|_{L_2(0,l)} + \int_{z}^{z+\Delta z} |v_1(\tau)| d\tau \max_{0\leq\tau\leq L} \|\psi^N(\cdot,\tau)\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+\int_{z}^{z+\Delta z} \|f(\cdot,\tau)\|_{L_2(0,l)} d\tau \|u_k\|_{L_2(0,l)} \Big) .$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafında yer alan integrallerde Cauchy – Bunyakovski eşitsizliğini uygularsak kolaylıkla aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\left|l_{N,k}(z+\Delta z) - l_{N,k}(z)\right| \leq \tilde{d}_k \Big((\Delta z)^{\frac{1}{2}} \|\psi^N(\cdot,\tau)\|_{L_2(,\Omega)} +$$

$$+(\Delta z)^{\frac{1}{2}} \max_{0\leq\tau\leq L} \|\psi^N(\cdot,\tau)\|_{L_2(0,l)} \left(\|v_0\|_{L_2(0,\tau)} + \|v_1\|_{L_2(0,\tau)} \right) +$$

$$+\|f\|_{L_2(\Omega)} (\Delta z)^{\frac{1}{2}} \Big) \quad .$$

(3.1.2.14) kestirimini kullanarak sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\left|l_{N,k}(z+\Delta z) - l_{N,k}(z)\right| \leq c_3 \tilde{d}_k (\Delta z)^{\frac{1}{2}} \;,\;\; \forall z \in [0,L] \;\;,\;\; N,k = 1,2.. \quad . \tag{3.1.2.19}$$

Aynı biçimde (3.1.2.9) sistemindeki k. denklemi $(L-\Delta L,\ L)$ aralığı üzerinden integralleyip benzer işlemleri yaparsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|l_{N,k}(L) - l_{N,k}(L-\Delta L)\right| \le c_3 \tilde{d}_k (\Delta L)^{\frac{1}{2}} \quad , \qquad N,k = 1,2 .. \quad . \tag{3.1.2.20}$$

(3.1.2.19) – (3.1.2.20) eşitsizliklerinden kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|l_{N,k}(z+\Delta z) - l_{N,k}(z)\right| \le c_3 \tilde{d}_k |\Delta z|^{\frac{1}{2}} \ , \ \forall z \in [0,L] \ , \qquad N,k = 1,2.. \ . \tag{3.1.2.21}$$

Burada c_2 sabiti k ve N`den bağımsızdır. Bu eşitsizlik $l_{N,k}(z)$, $N,k = 1,2..$ ailesinin $[0,L]$ aralığında tespit edilmiş k ve $\forall N \ge k$ için aynı dereceden sürekli olduğunu elde ediyoruz.

Böylece $l_{N,k}(z)$, $N,k = 1,2..$ ailesinin $[0,L]$ aralığında düzgün sınırlılığı tespit edilmiş k`lar ve $\forall N \ge k$ `lar için aynı dereceden sürekli olduğu ispatlandı. Bu taktirde köşegen yöntemi ile $N = N_m$, $m = 1,2..$ alt dizisini seçebiliriz ki bu alt dizi üzerinden $\left\{l_{N_m,k}(z)\right\}$ dizisi $\forall k$ için $l_k(z)$ sürekli fonksiyonuna yakınsar ve $l_k(z)$ fonksiyonları

$$\psi(x,z) = \sum_{k=1}^{\infty} l_k(z) u_k(x) \tag{3.1.2.22}$$

fonksiyonunu tanımlar.

Şimdi $\{\psi^{N_m}(x,z)\}$ alt dizisinin $\psi(x,z)$ fonksiyonuna z`ye göre düzgün olarak $L_2(0,l)$ uzayında zayıf yakınsadığını gösterelim. Gerçekten $\forall g \in L_2(0,l)$ için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$(\psi^{N_m}(x,z) - \psi(\cdot,z), g)_{L_2(0,l)} = \sum_{k=1}^{s} (g,u_k)_{L_2(0,l)} (\psi^{N_m}(\cdot,z) - \psi(\cdot,z), u_k)_{L_2(0,l)} +$$

$$+(\psi^{N_m}(\cdot,\tilde{z}) - \psi(\cdot,z), \sum_{u=s+1}^{\infty} (g,u_k)_{L_2(0,l)} u_k)_{L_2(0,l)} \quad . \tag{3.1.2.23}$$

Öyle ki

$$\left|(\psi^{N_m}(\cdot,z) - \psi(\cdot,z), \sum_{k=s+1}^{\infty} (g,u_k)_{L_2(0,l)} u_k)_{L_2(0,l)}\right| \le$$

$$\leq c_3\Big(\sum_{k=s+1}^{\infty}|(g,u_k|^2)^{\frac{1}{2}} = c_3R(s)\,. \qquad (3.1.2.24)$$

Burada $c_3 > 0$ sabiti N_m`den bağımsızdır. (3.1.2.24) eşitsizliğinde $s$ numarasını yeterli kadar büyük seçerek $c_3R(s)$ teriminin $\forall z \in [0,L]$ için önceden verilen $\forall\varepsilon > 0$ $\varepsilon/_2$ den küçük yapılabilir. Yani (3.1.2.23) eşitliğinin sağ tarafında yer alan ikinci terim $\varepsilon/_2$` den küçük yapılabilir.

Şimdi (3.1.2.23) un sağ tarafında yer alan birinci terimin $\varepsilon/_2$ `den küçük olduğunu gösterelim.$s$ numarasını tespit ettiğimizde $[0,L]$ aralığında olan tüm $z$ `ler için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|\sum_{k=1}^{s}(g,u_k)_{L_2(0,l)}(\psi^{N_m}(\cdot,z)-\psi(\cdot,z),u_k)_{L_2(0,l)}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{s}\left|(g,u_k)_{L_2(0,l)}\right|\left|l_{N_m,k}(z)-l_k(z)\right| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{s}\left|(g,u_k)_{L_2(0,l)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{s}\left|l_{N_m,k}(z)-l_k(z)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty}\left|(g,u_k)_{L_2(0,l)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{s}\left|l_{N_m,k}(z)-l_k(z)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \|g\|^2_{L_2(0,l)}\left(\sum_{k=1}^{s}\left|l_{N_m,k}(z)-l_k(z)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Bu eşitsizlikten s`i tespit edip $N_m$` i yeterli kadar büyük seçerek $\forall z \in [0,L]$ için

$$\left|\sum_{k=1}^{s}(g,u_k)_{L_2(0,l)}(\psi^{N_m}(\cdot,z)-\psi(\cdot,z),u_k)_{L_2(0,l)}\right| < \varepsilon/_2$$

yazabiliriz. Bu eşitsizliği ve $C_\varepsilon R(s) < \varepsilon/_2$ eşitsizliğini kullanarak $\forall z \in [0,L]$ için ve $\forall g \in L_2(0,l)$ için

$$\left|(\psi^{N_m}(\cdot,z)-\psi(\cdot,z),g_k)_{L_2(0,l)}\right|<\varepsilon$$

olduğunu elde ederiz. Böylece bu eşitsizliği kullanarak $\{\psi^{N_m}(x,z)\}$ dizisinin $\psi(x,z)$ fonksiyonuna $L_2(0,l)$`de $z$ `ye göre düzgün olarak zayıf yakınsadığını ispatlamış oluyoruz.

$C_k^N(z)$ `lerin $[0,L]$ aralığında sürekli olduğunu dikkate alırsak (3.1.2.8) formülü ile tanımlanan Galerkin yaklaşımlarının $z$ `ye göre $L_2(0,l)$ normunda sürekli olduğunu gösterebiliriz. Bu nedenle $\psi^{N_m}(x,z)$ alt dizisinin limiti olan $\psi(x,z)$ fonksiyonunda z `ye göre $L_2(0,l)$ normunda sürekli olduğuna hükmedebiliriz. Ve bu fonksiyon için (3.1.2.1) kestiriminin de geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Yani $\psi \epsilon C^0([0,L],\, L_2(0,L))$ ` dır. Gerçekten (3.1.2.14) kestiriminde $N=N_m$ üzerinden limite geçip $m\to\infty$ için $L_2(0,l)$ normunun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu kullanıp (3.1.2.1) `in doğruluğunu söyleyebiliriz.

Simdi $\psi(x,z)$ limit fonksiyonunun (3.1.1.2) - (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $\psi \epsilon C^0([0,L],\, L_2(0,L))$ uzayından olan çözümü olduğını gösterelim. Bu amaçla (16) sisteminin her iki tarafını $[0,L]$ aralığında sürekli diferansiyellenebilir $\bar{\eta}_k$(z) fonksiyonu ile çarpıp k üzerinden $k=1$ `den $k=N^1\le N$ `ye kadar toplayıp $[0,L]$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu taktirde kısmi integrasyon formüllerini kullanarak kolaylıkla aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_\Omega \psi^N\Big(i\frac{\partial\bar{\eta}^{N^1}}{\partial z}+a_0\frac{\partial^2\bar{\eta}^{N^1}}{\partial x^2}+v_0(z)\bar{\eta}^{N^1}+iv_1(z)\bar{\eta}^{N^1}\Big)dxdz=$$

$$=\int_\Omega f\,\bar{\eta}^{N^1}dxdz+i\int_0^l \psi^N(x,0)\bar{\eta}^{N^1}(x,0)dx-i\int_0^l \psi^N(x,L)\bar{\eta}^{N^1}(x,L)dx. \quad (3.1.2.25)$$

Burada $\bar{\eta}^{N^1}(x,z)$ fonksiyonu $\eta^{N^1}(x,z)$ fonksiyonunun kompleks eşleniğidir ve

$$\bar{\eta}^{N^1}(x,z)=\sum_{k=1}^{N}\eta_k(z)u_k(x)\ `dir. \quad (3.1.2.26)$$

$N \to \infty$ için (3.1.2.25) özdeşliğinde limite geçelim ve $\{\psi^{N_m}(x,z)\}$ dizisinin $\psi(x,z)$ fonksiyonuna $[0,L]$ aralığında düzgün olarak $L_2(0,l)$ `de zayıf yakınsadığını dikkate alırsak aşağıdaki özdeşliği elde ederiz:

$$\int_\Omega \psi(-i\frac{\partial \bar{\eta}^{N^1}}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \bar{\eta}^{N^1}}{\partial x^2} + v_0(z)\bar{\eta}^{N^1} + iv_1(z)\bar{\eta}^{N^1})dxdz =$$

$$= \int_\Omega f\,\bar{\eta}^{N^1} dxdz + i\int_0^l \varphi(x)\,\bar{\eta}^{N^1}(x,0)dx - i\int_0^l \psi\,(x,L)\bar{\eta}^{N^1}(x,L)dx \quad . \qquad (3.1.2.27)$$

Bu özdeşlikte yer alan $\bar{\eta}^{N^1}(x,z)$ fonksiyonları (3.1.2.26) biçiminde tanımlanıp $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında her yerde yoğundurlar bu nedenle (3.1.2.27) integral özdeşliğinde $N^1 \to \infty$ için limite geçersek (3.1.1.7) integral özdeşliğinin geçerli olduğunu elde edebiliriz. Böylece limit fonksiyonunun (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin Tanım3.1.1.1 anlamında $C^0([0,L],\, L_2(0,L))$ uzayında olan çözümü olduğunu ispatladık ve bu çözüm için (3.1.2.1) kestiriminin geçerli olduğunuda yukarıda ispatladık. Bu kestirimden direkt olarak (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün tekliği de elde edilir. Böylece (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü için teoremin geçerli olduğunu elde ettik.Teorem3.1.2.1 ispatlandı.

3.1.3 Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu alt bölümde (3.1.1.1) – (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini ispatlayacağız.

Teorem3.1.3.1: Farz edelim ki Teorem3.1.2.1`in şartları sağlansın ve $y \in L_2(0,l)$ verilen fonksiyon olsun. Bu taktirde $H \equiv [L_2(0,L)]^2 \times [L_2(0,l)]^2$ uzayında her yerde yoğun olan G alt kümesi vardır ki $\forall\omega \in G$ $\alpha > 0$ için (3.1.1.1) – (3.1.1.4) optimal kontrol problemi bir tek çözüme sahiptir.

İspat: Herşeyden önce teoremi ispatlamak için $J_0(v)$ fonksiyonelinin

$$J_0(v) = \|\psi(\cdot, L) - y\|^2_{L_2(0,l)} \qquad (3.1.3.1)$$

V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Bu amaçla $\forall v \in V$ alalım. Ve bu elemana $v + \Delta v \in V$ olacak biçimde $\Delta v \in H$ artışını verelim. Bu taktirde (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olan $\psi(x, z; v)$ fonksiyonunun $v \in V$ üzerinde $\Delta\psi = \Delta\psi(x, z) = \psi(x, z; v + \Delta v) - \psi(x, z; v)$ artışına sahip olur. Burada $\psi_\Delta(x, z) = \psi(x, z; v + \Delta v)$ fonksiyonu (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v + \Delta v \in V$ \`ye karşılık gelen çözümüdür. Böyle olduğu taktirde (3.1.1.2) – (3.1.1.4) şartlarından $\Delta\psi(x, z)$ fonksiyonu için aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini elde ederiz:

$$i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x^2} + \big(v_0(z) + \Delta v_0(z)\big)\Delta\psi + i\big(v_1(z) + \Delta v_1(z)\big)\Delta\psi =$$

$$= -\Delta v_0(z)\psi - i v_1(z)\psi \quad , \qquad (x, z) \in \Omega \ , \qquad (3.1.3.2)$$

$$\Delta\psi(x, 0) = \Delta\varphi_0(x) + i\Delta\varphi_1(x) \ , \quad x \in (0, l) \, , \qquad (3.1.3.3)$$

$$\Delta\psi(0, z) = \Delta\psi(l, z) = 0 \quad , \qquad z \in (0, L) \, . \qquad (3.1.3.4)$$

Burada $\psi = \psi(x, z) \equiv \psi(x, z; v)$ fonksiyonu (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ \`ye karşılık gelen çözümüdür. Görüldüğü üzere (3.1.3.2) – (3.1.3.3) başlangıç sınır değer problemine (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer problemi biçiminde olan bir başlangıç sınır değer problemidir. Bu nedenle (3.1.2.1) kestirimine dayanarak aşağıdaki kestirimide geçerli olduğunu hükmedebiliriz:

$$\|\Delta\psi(\cdot, z)\|^2 \le c_4\|\Delta\psi\|^2_{L_2(0,l)} + \|\Delta v_0\psi + i\Delta v_1\psi\|^2_{L_2(\Omega)} \ , \forall z \in [0, L] \ . \qquad (3.1.3.5)$$

Buradanda (3.1.2.1) kestirimini kullanarak kolaylıkla aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|\Delta\psi(\cdot, z)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_5\|\Delta v\|^2_H \quad , \quad \forall z \in [0, L] \, . \qquad (3.1.3.6)$$

Burada $c_5 > 0$ sabiti Δv\`den bağımsızdır.

Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin $v \in V$'deki üzerinde artışını bulalım. (3.1.3.1) formülünü kullanırsak artışı aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\Delta J_0(v) = J_0(v+\Delta v) - J_0(v) = 2\int_0^l Re\left(\psi(x,L) - y(x)\right)\Delta\bar{\psi}(x,L)dx +$$

$$+\|\Delta\psi(\cdot,L)\|^2_{L_2(0,l)} \ . \qquad (3.1.3.7)$$

Burada Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğini uygulayıp (3.1.2.1) ve (3.1.3.6) kestirimlerinden yararlanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|\Delta J_0(v)| \leq c_6\|\Delta v\|^2_H \ , \quad \forall v \in V \ . \qquad (3.1.3.8)$$

Burada $c_6 > 0$ sabiti Δv`den bağımsızdır. Bu eşitsizlik $J_0(v)$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$ üzerinde sürekli olduğunu göstermektedir. Yani $J_0(v)$ fonksiyoneli $v$ `nin kendisinde süreklidir. Diğer taraftan $\forall z \in V$ için $J_0(z) \geq 0$ olduğundan $J_0(v)$ fonksiyoneli V kümesinde alttan sınırlıdır. V kümesi ise H hilbert uzayında yani düzgün konveks uzayda kapalı ve sınırlı kümedir. Böylece $J_0(v)$ fonksiyonelinin ve V kümesinin [ön bilgiler: Teorem 2.3] çalışmasından bilinen teoremin şartlarının sağlandığını görüyoruz. Bu teoreme dayanarak H uzayında her yerde yoğun olan G alt kümesinin var olduğunu ve $\alpha > 0$ $\forall \omega \in G$ için (3.1.1.1) – (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu hükmedebiliriz.Teorem3.1.2.1 ispatlandı.

3.2 Kuazi Optiğin Durgun Denklemi İçin Optimal Kontrol Probleminde Çözüm İçin Gerek Şart

Bu bölümde kuazi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol probleminin çözümüne ait olan gerek şart incelenecektir. Bu nedenle önce amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğunu ispatlayıp gradiyenti için formül elde etmeye çalışacağız.

3. 2. 1 Fonksiyonelin Differansiyellenebilmesi

Bu alt bölümde (3.1.1.1) – (3.1.1.4) optimal kontrol probleminde amaç fonksiyonelinin differansiyellenebilmesi incelenir ve onun gradiyenti için formül ispatlanır. Bu amaçla aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\phi}{\partial z}+a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+v_0(z)\phi-iv_1(z)\phi=0\,,\ \ (x,z)\in\Omega \tag{3.2.1.1}$$

$$\phi(x,L)=-2i\big(\psi(x,L)-y(x)\big)\quad ,\ x\in(0,l)\,, \tag{3.2.1.2}$$

$$\phi(0,z)=\phi(l,z)=0\quad ,\quad z\in(0,L)\ . \tag{3.2.1.3}$$

Burada $\psi=\psi(x,z)\equiv\psi(x,z;v)$ fonksiyonu (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v\in V$ olan çözümüdür. (3.2.1.1) – (3.2.1.3) eşlenik problemin çözümü olarak $\forall\eta_1\in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \phi(-i\frac{\partial\overline{\eta_1}}{\partial z}+a_0\frac{\partial^2\overline{\eta_1}}{\partial x^2}+v_0(z)\overline{\eta_1}-iv_1(z)\overline{\eta_1})dxdz=$$

$$=-2\int_0^l\big(\psi(x,L)-y(x)\big)\overline{\eta_1}(x,L)dx+i\int_0^l\phi(x,0)\,\overline{\eta_1}(x,0)dx\,. \tag{3.2.1.4}$$

integral özdeşliğini sağlayan $C^0([0,L],\,L_2(0,L))$ uzayına ait olan $\phi=\phi(x,z)$ fonksiyonu anlaşılır.

Kolaylıkla gösterebiliriz ki (3.2.1.1) – (3.2.1.3) eşlenik problem aslında bir başlangıç sınır değer problemidir. Gerçekten $\theta=L-z$ değişken dönüşümü yaparsak (3.2.1.1) – (3.2.1.3) problemi aşağıdaki probleme dönüştürebiliriz:

$$i\frac{\partial\tilde\phi}{\partial\theta}+a_0\frac{\partial^2\tilde\phi}{\partial x^2}+\tilde v_0(\theta)\tilde\phi-i\tilde v_1(\theta)\tilde\phi=0\,,\ \forall(x,\theta)\in\Omega \tag{3.2.1.5}$$

$$\tilde\phi(x,0)=-2i\big(\psi(x,L)-y(x)\big)\quad ,\ x\in(0,l) \tag{3.2.1.6}$$

$$\tilde\phi(0,\theta)=\tilde\phi(l,\theta)=0\quad ,\quad z\in(0,L)\ . \tag{3.2.1.7}$$

Burada

$\tilde{\phi}(x,v) = \phi(x, L-T) = \phi(x,z)$, $\tilde{v}_0(\theta) = v_0(L-\theta) = v_0(z)$

$\tilde{v}_0(\theta) = v_0(L-\theta) = v_0(z)$`dir.

Bu problemin kompleks eşleniğini yazarsak aşağıdaki problemi elde ederiz:

$$i\frac{\partial F}{\partial \theta} + a_0\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \tilde{v}_0(\theta)F - i\tilde{v}_1(\theta)F = 0\,, \quad \forall (x,z) \in \Omega \tag{3.2.1.8}$$

$$F(x,0) = h(x)\ , \quad x \in (0,l) \tag{3.2.1.9}$$

$$F(0,v) = F(l,\theta) = 0\ , \quad \theta \in (0,L) \tag{3.2.1.10}$$

Burada $F(x,\theta) = \overline{\tilde{\phi}(x,\theta)}$, $h(x) = -2i(\bar{\psi}(x,L) - \bar{y}(x)\,)$ `dir.

(3.2.1.8) – (3.2.1.9) problemine dikkat edersek bu problemin (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer problemi biçiminde bir problem olduğunu görürüz. Sağ tarafı sıfırdır ve $h(x)$ başlangıç fonksiyonu $\psi \in C^0([0,L], L_2(0,l))$, $y \in L_2(0,l)$ olduğunda $L_2(0,l)$ `den olan fonksiyon olacaktır. Bu nedenle Teorem3.1.2.1 in aynısını (3.2.1.8) – (3.2.1.9) başlangıç sınır değer problemine uygularsak bu problemin $C^0([0,L], L_2(0,l))$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için

$$\|F(\cdot,\theta)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_7\|h\|^2_{L_2(0,l)}\ , \quad \forall \theta \in [0,L] \tag{3.2.1.11}$$

kestirimi geçerlidir.

(3.2.1.8) – (3.2.1.9) problemi (3.2.1.1) – (3.2.1.3) eşlenik probleminin eşdeğer dönüşümü olduğundan yararlanarak (3.2.1.1) – (3.2.1.3) eşlenik probleminde $C^0([0,L], L_2(0,l))$ uzayına ait olan bir tek çözümün var olduğunu ve bu çözüm için aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu hükmedebiliriz:

$$\|\phi(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_8\|\psi(\cdot,L) - y\|^2_{L_2(0,l)}\ , \quad \forall z \in [0,L]\,.$$

Burada $c_8 > 0$ sayısı ψ ve y `den bağımsızdır. Bu kestirimde (3.1.2.1) kestirimini kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|\phi(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_9(\|\varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|y\|^2_{L_2(0,l)} + \|\varphi\|^2_{L_2(\Omega)}), \forall z \in [0,L]. \qquad (3.2.1.12)$$

Burada $c_9 > 0$ sabit bir sayıdır.

Teorem3.2.1.1: Farz edelim ki Teorem3.1.2.1`nin şartları sağlansın. Ve $\omega \in H$ verilen eleman olsun. Bu taktirde $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechlet anlamında diferansiyellenebilirdir. Ve onun gradiyenti için aşağıdaki formül geçerlidir:

$$J_\alpha{}'(v) = (J_{\alpha v_0}{}'(v)\,,\, J_{\alpha v_1}{}'(v)\,,\, J_{\alpha\varphi_0}{}'(v)\,,\, J_{\alpha\varphi_1}{}'(v)\,),$$

$$J_{\alpha v_0}{}'(v) = \int_0^l Re(\psi\bar{\phi})dx + 2\alpha(v_0(z) - \omega_0\,(z))\,,$$

$$J_{\alpha v_1}{}'(v) = -\int_0^l Im(\psi\bar{\phi})dx + 2\alpha(v_1(z) - \omega_1\,(z))\,, \qquad (3.2.1.13)$$

$$J_{\alpha\varphi_0}{}'(v) = Im(\bar{\phi}(x,0) + 2\alpha(\varphi_0(x) - \widetilde{\omega}_0(x))\,,$$

$$J_{\alpha\varphi_1}{}'(v) = Re(\bar{\phi}(x,0) + 2\alpha(\varphi_1(x) - \widetilde{\omega}_1(x)).$$

İspat: $\forall v \in V$ için $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışını aşağıdaki biçimde yazalım:

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\Delta v) - J_\alpha(v) = 2\int_0^l Re\big[\big(\psi(x,L) - y(x)\big)\Delta\bar{\psi}(x,L)\big]\,dx +$$

$$+2\alpha\int_0^l (\varphi_0(x) - \widetilde{\omega}_0(x))\Delta\,\varphi_0(x)dx + 2\alpha\int_0^l (\varphi_1(x) - \widetilde{\omega}_1(x))\Delta\,\varphi_1(x)dx +$$

$$+2\alpha\int_0^T (v_0(z) - \omega_0(z))\Delta\, v_0(z)dz + 2\alpha\int_0^T (v_1(z) - \omega_1(z))\Delta\, v_1(z)dz +$$

$$+\|\Delta\psi(\cdot,L)\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\|\Delta v\|^2_H\,. \qquad (3.2.1.14)$$

Bu formülde sağ tarafta yer alan I.terimi değiştirelim. Bu amaçla verilen düzgünlüğün arttırılması yöntemini uygulayalım. Farz edelim ki $\varphi_0^{(k)}(x)$, $\varphi_1^{(k)}(x)$, $f^k(x,z)$, $k = 1,2 \dots$ fonksiyonları sırasıyla $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ ve $f(x,z)$ fonksiyonlarının $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$, $\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)$ uzaylarına ait olan düzgünleştirilmiş yaklaşımlar olup aşağıdaki şartları sağlasın:

$$\left\|\varphi_0^{(k)} - \varphi_0\right\|_{L_2(0,l)} \to 0 \ , \quad k \to \infty \tag{3.2.1.15}$$

$$\left\|\varphi_1^{(k)} - \varphi_1\right\|_{L_2(0,l)} \to 0 \ , \quad k \to \infty \tag{3.2.1.16}$$

$$\|f^k - f\|_{L_2(\Omega)} \to 0 \ , \quad k \to \infty \tag{3.2.1.17}$$

ve $v^{(k)} = (v_0(z), v_1(z), \varphi_0^{(k)}, \varphi_1^{(k)}) \in V$ olsun.

Düzgünleştirme kuralına göre $\varphi^{(k)}(x) = \varphi_0^{(k)}(x) + i\varphi_1^{(k)}(x)$ fonksiyonu

$$\varphi^{(k)} \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l) \quad , \quad k = 1,2 \dots. \tag{3.2.1.18}$$

$$f^{(k)} \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l) \quad , \quad k = 1,2 \dots. \tag{3.2.1.19}$$

şartlarını sağlar. [17 , Teorem 3.2.2.1 bkz. sayfa 43] çalışmasından bildiğimiz bir hükmü kullanırsak söyleyebiliriz ki (3.1.1.2) – (3.1.1.4) probleminde $\varphi(x)$ yerine $\varphi^{(k)}(x)$ $f(x,z)$ yerine $f^{(k)}(x,z)$ aldığımızda $\forall m$ numarası için (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan $\psi^{(k)}(x,z)$, $k = 1,2 \dots$.. çözümü vardır ve bu çözüm için

$$\|\psi^{(k)}\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_9\left(\|\varphi^{(k)}\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(\Omega)} + \|f^{(k)}\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}\right), \ k = 1,2 \dots \ . \tag{3.2.1.20}$$

kestirimi geçerlidir. $\psi^{(k)}(x,z)$ fonksiyonu $\forall k$ için ve $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_\Omega (i\frac{\partial \psi^{(k)}}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2 \psi^{(k)}}{\partial x^2} + v_0(z)\psi^{(k)} - iv_1(z)\psi^{(k)})\bar{\eta}dxdz =$$

$$= \int_{\Omega} f^{(k)}(x,z)\,\bar{\eta}(x,z)dxdz \qquad (3.2.1.21)$$

integral özdeşliği ve

$$\psi^{(k)}(x,0) = \varphi^{(k)}(x) \quad , \quad x \in (0,l) \qquad (3.2.1.22)$$

$$\psi^{(k)}(0,z) = \psi^{(k)}(l,z) \quad , \quad z \in (0,l) \qquad (3.2.1.23)$$

şartlarını sağladığı açıktır.

Şimdi $v^{(k)} \in V$ noktasında $v^{(k)} + \Delta v^{(k)} \in V$ olacak biçimde $\psi^{(k)}(x,z)$ \`nin $\Delta\psi^{(k)}(x,z) \equiv \psi^{(k)}(x,z;\ v^{(k)} + \Delta v^{(k)}) - \psi^{(k)}(x,z;\ v^{k})$ artışının sağladığı bağıntıyı elde edelim.

Bu amaçla (3.2.1.21) özdeşliğini kullanalım. Kolaylıkla artışın aşağıdaki integral özdeşliğini sağladığını elde edebiliriz:

$$\int_{\Omega} (i\frac{\partial\Delta\psi^{(k)}}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi^{(k)}}{\partial x^2} + (v_0(z) - iv_0(z))\Delta\psi^{(k)} +$$

$$+i(v_1(z) - iv_1(z))\Delta\psi^{(k)})\bar{\eta}dxdz = -\int_{\Omega} \Delta\, v_0(z)\psi^{(k)}\bar{\eta}dxdz -$$

$$-\int_{\Omega} \Delta\, v_1(z)\psi^{(k)}\bar{\eta}dxdz \quad . \qquad (3.2.1.24)$$

Bu özdeşliğin yanı sıra (3.2.1.22) – (3.2.1.23) \`dan aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

$$\Delta\psi^{(k)}(x,0) = \Delta\varphi_0^{(k)}(x) + i\Delta\varphi_1^{(k)}(x) \qquad , \ x \in (0,l) \qquad (3.2.1.25)$$

$$\Delta\varphi^{(k)}(x,z) = \Delta\psi^{(k)}(l,z) = 0 \quad , \quad z \in (0,L) \quad . \qquad (3.2.1.26)$$

$\phi = \phi(x,z)$ fonksiyonu yani eşlenik problemin çözümü $C^0([0,L],\ L_2(0,l))$ uzayına ait olduğundan (3.2.1.24) integral özdeşliğinde η \`nın yerine ϕ fonksiyonunu alalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega} (i\frac{\partial \Delta\psi^{(k)}}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta\psi^{(k)}}{\partial x^2} + (v_0(z) - iv_0(z))\Delta\psi^{(k)} +$$

$$+i(v_1(z) - iv_1(z))\Delta\psi^{(k)})\bar{\phi}dxdz = -\int_{\Omega} \Delta\, v_0(z)\psi^{(k)}\bar{\phi}dxdz -$$

$$-\int_{\Omega} \Delta\, v_1(z)\psi^{(k)}\bar{\phi}dxdz \qquad , \qquad k = 1,2 \ldots \qquad (3.2.1.27)$$

$\Delta\psi^{(k)} \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ olduğundan (3.2.1.4) özdeşliğinde $\eta(x,z)$ fonksiyonu yerine $\Delta\psi^{(k)}(x,z)$ alalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega} \phi(-i\frac{\partial \overline{\Delta\psi}^{(k)}(x,z)}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \overline{\Delta\psi}^{(k)}(x,z)}{\partial x^2} + v_0(z)\overline{\Delta\psi}^{(k)} - iv_1(z)\overline{\Delta\psi}^{(k)})dxdz =$$

$$= -2\int_0^l \big(\psi(x,L) - y(x)\big)\,\overline{\Delta\psi}^{(k)}(x,L)dx + i\int_0^l \phi(x,0)\,\overline{\Delta\psi}^{(k)}(x,0)dx \ \ , k = 1,2 \ldots$$

Bu eşitliğin kompleks eşleniğini alırsak $\Delta\psi^{(k)}(x,0) = \Delta\varphi^{(k)}(x)$, $x \in (0,l)$ aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega} \bar{\phi}(-i\frac{\partial \overline{\Delta\psi}^{(k)}}{\partial z} + a_0 \frac{\partial^2 \overline{\Delta\psi}^{(k)}}{\partial x^2} + v_0(z)\Delta\psi^{(k)} + iv_1(z)\Delta\psi^{(k)})dxdz =$$

$$= -2\int_0^l \Big(\bar{\psi}(x,L) - \bar{y}(x)\Big)\Delta\psi^{(k)}(x,L)dz + i\int_0^l \bar{\phi}(x,0)\,\Delta\varphi^{(k)}(x,0)dx\,.$$

(3.2.1.27) `den sonuncu eşitliği çıkarırsak aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$2\int_0^l \Big(\bar{\psi}(x,L) - \bar{y}(x)\Big)\Delta\psi^{(k)}(x,L)dx = -i\int_0^l \Delta\psi^{(k)}\bar{\phi}(x,0)\,dx =$$

$$= \int_{\Omega} \Delta\, v_0(z)\psi^{(k)}\bar{\phi} dxdz + i\int_{\Omega} \Delta\, v_1(z)\psi^{(k)}\phi dxdz \ .$$

Şimdi bu eşitliği onun kompleks eşleniği ile toplarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$2\int_0^l Re\left[\left(\psi(x,L) - y(x)\Delta\psi^{(k)}(x,L)\right)\right]dx = \int_{\Omega} \Delta v_0(z)Re(\,\psi^{(k)}\bar{\phi})dxdz +$$

$$\int_{\Omega} \Delta v_0(z)Re(\,\Delta\psi^{(k)}\bar{\phi})dxdz - \int_{\Omega} \Delta v_1(z)Im(\,\psi^{(k)}\bar{\phi})dxdz -$$

$$+\int_0^l \Delta\varphi_0^{(k)} Im(\,\bar{\phi}(x,0))dx \,. \qquad (3.2.1.28)$$

Şimdi $\psi^k - \psi$, $\Delta\psi^k - \Delta\psi$ farklarını değerlendirmeye çalışalım. Bu amaçla (3.1.1.2) – (3.1.1.4) probleminde f \`nin yerine $f^{(k)}$ , $\varphi$ \`nin yerine $\varphi^{(k)}$ yazıp elde edilen problemden (3.1.1.2) – (3.1.1.4) problemini taraf tarafa çıkarırsak $\omega^{(k)} = \psi^k - \psi$ fonksiyoneli için aşağıdaki problemi elde ederiz:

$$i\frac{\partial\omega^{(k)}}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2\omega^{(k)}}{\partial x^2} + v_0(z)\omega^{(k)} - iv_1(z)\omega^{(k)} =$$

$$= f^{(k)}(x,z) - f(x,z) \quad , \quad (\,x,z) \in \Omega \ , \qquad (3.2.1.29)$$

$$\omega^{(k)}(x,0) = \varphi^{(k)}(x) - \varphi(x) \quad , \quad x \in (0,l) \ , \qquad (3.2.1.30)$$

$$\omega^{(k)}(x,z) = \omega^{(k)}(l,z) = 0 \quad , \quad z \in (0,L) \,. \qquad (3.2.1.31)$$

Görüldüğü üzere $\forall k$ için bu problem (3.1.1.2) – (3.1.1.4)problemi biçiminde başlangıç sınır değer problemi olduğundan (3.1.2.1) kestirimine denk olarak aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu hükmedebiliriz:

$$\|\omega^k(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_0(\|\varphi^k - \varphi\|^2_{L_2(0,l)} + \|f^k - f\|^2_{L_2(\Omega)} \qquad \forall z \in [0,L] \,. \quad (3.2.1.32)$$

(3.2.1.29) – (3.2.1.31) probleminin elde edilmesine denk olarak $\Delta\omega^{(k)} = \Delta\psi^k - \Delta\psi$ fonksiyonu içinde (3.1.3.1) – (3.1.3.3) başlangıç sınır değer problemini kullanarak aşağıdaki problemi elde ederiz:

$$i\frac{\partial \Delta\omega^{(k)}}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2 \Delta\omega^{(k)}}{\partial x^2} + w_0(z) + \Delta v_0(z))\Delta\omega^{(k)} + i(v_1(z) + \Delta v_1(z))\Delta\omega^{(k)} =$$

$$= -\Delta v_0(z)\omega^{(k)} - i\Delta v_1(z)\omega^{(k)} \quad , \qquad (3.2.1.33)$$

$$\omega^{(k)}(x,0) = (\Delta\varphi_0^{(k)} - \Delta\varphi_0(x) + i\left(\Delta\varphi_1^{(k)} - \Delta\varphi_1(x)\right) \quad , \quad x \in (0,l) \ , \qquad (3.2.1.34)$$

$$\omega^{(k)}(0,z) = \omega^{(k)}(l,z) = 0 \quad , \quad z \in (0,l) \ . \qquad (3.2.1.35)$$

Görüldüğü üzere bu problem (3.1.3.1) – (3.1.3.3) biçiminde bir başlangıç sınır değer problemidir. Bu nedenle (3.1.3.4) kestiriminin denklemini (3.2.1.33) – (3.2.1.35) probleminin çözümü için aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\left\|\Delta\omega^{(k)}(\cdot,z)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_4\left(\left\|\Delta\varphi^{(k)} - \Delta\varphi\right\|_{L_2(0,l)}^2 + \left\|\Delta v_0\omega^{(k)} + i\Delta v_1\omega^{(k)}\right\|_{L_2(\Omega)}^2\right) \quad ,$$

$$\forall z \in [0,L] \ . \qquad (3.2.1.36)$$

Bu kestirimin sağ tarafındaki ikinci terimde (3.2.1.32) kestirimini kullanırsak

$$\left\|\Delta\omega^{(k)}(\cdot,z)\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_5(\left\|\Delta\varphi^{(k)} - \Delta\varphi\right\|_{L_2(0,l)}^2 +$$

$$+2\left(\|\Delta v_0\|_{L_2(0,L)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L_2(0,L)}^2\right)(\left\|\varphi^{(k)} - \varphi\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \left\|f^{(k)} - f\right\|_{L_2(\Omega)}^2)) \qquad (3.2.1.37)$$

$\varphi^{(k)}$, φ \`nin düzgünleştirilmişi olduğundan $\Delta\varphi^{(k)}$ \`da $\Delta\varphi$ \`nin düzgünleştirilmiş artısı olacaktır. Bu nedenle üstteki varsayımların yanı sıra farz edelim ki

$$\left\|\Delta\varphi^{(k)} - \Delta\varphi\right\|_{L_2(0,l)} \to 0 \qquad k \to \infty \qquad (3.2.1.38)$$

bağıntısı geçerli olsun. Bu bağıntıyı ve $\varphi^{(k)}$ \`ların $\varphi$\`ye , $f^{(k)}$ \`ların $f$ \`ye sırasıyla $L_2(0,l)$ ve $L_2(\Omega)$ \`da kuvvetli yakınsadığını dikkate alırsak (3.2.1.37) kestiriminden aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz: $k \to \infty$ için

$$\left\|\Delta\omega^{(k)}(\cdot,z)\right\| \to 0 \qquad \forall z \in [0,L] \ . \qquad (3.2.1.39)$$

$\Delta\omega^{(k)} = \Delta\psi^{(k)} - \Delta\psi$ olduğunu dikkate alırsak $k \to \infty$ için

$$\left\|\Delta\psi^{(k)}(\cdot,z) - \Delta\psi(\cdot,z)\right\|_{L_2(0,l)} \to 0 \qquad \forall z \in [0,L] \ . \qquad (3.2.1.40)$$

Aynı biçimde (3.2.1.32) kestiriminden $k \to \infty$ için

$$\left\|\Delta\omega^{(k)}(\cdot,z)\right\|_{L_2(0,l)} \to 0 \qquad \forall z \in [0,L] \tag{3.2.1.41}$$

bağıntısı elde edilir. Burada $\omega^{(k)} = \psi^{(k)} - \psi$ olduğundan $k \to \infty$ için

$$\left\|\psi^{(k)}(\cdot,z) - \psi(\cdot,z)\right\|_{L_2(0,l)} \to 0 \qquad \forall z \in [0,L] \tag{3.2.1.42}$$

geçerli olur.

(3.2.1.38) varsayımını ve (3.2.1.40), (3.2.1.42) limit bağıntılarını kullanıp (3.2.1.28) eşitliğinin her iki tarafında limite geçersek aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$2\int_0^l Re[(\psi(x,L) - y(x)\Delta\psi(x,L)]dx =$$

$$= \int_\Omega \Delta v_0(z) Re(\psi\bar{\phi})dxdz - \int_\Omega \Delta v_1(z) Im(\psi\bar{\phi})dxdz +$$

$$+ \int_\Omega \Delta\varphi_1 Re(\bar{\phi}(x,0))dx + \int_\Omega \Delta\varphi_0 Im(\bar{\phi}(x,0))dx +$$

$$+ \int_\Omega \Delta v_0(z) Re(\Delta\psi\bar{\phi})dxdz - \int_\Omega \Delta v_1(z) Im(\Delta\psi\bar{\phi})dxdz. \tag{3.2.1.43}$$

Bu eşitliği fonksiyonelin artışı için olan (3.2.1.14) formülünde dikkate alırsak fonksiyonelin artışını aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v + \Delta v) - J_\alpha(v) =$$

$$\int_0^L (\int_0^l Re(\psi\bar{\phi})dx + 2\alpha\big(v_0(z) - \omega_0(z)\big)\Delta v_0(z)dz - \int_0^l Im(\psi,\bar{\phi})dx\Delta v_1(z)) +$$

$$+ \int_0^L (-\int_0^l Im(\psi\bar{\phi})dx + 2\alpha\big(v_1(z) - \omega_1(z)\big)\Delta v_1(z)dz +$$

$$+\int_0^l [Im(\bar{\phi}(x,0)) + 2\alpha(\varphi_0(x) - \widetilde{\omega}_0(x))]\,\Delta\varphi_0(x)dx +$$

$$+\int_0^l [Re(\bar{\phi}(x,0)) + 2\alpha(\varphi_1(x) - \widetilde{\omega}_1(x))]\,\Delta\varphi_1(x)dx + R(\Delta v).$$

Burada $R(\Delta v)$ aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$R(\Delta v) = \|\Delta\psi(\cdot, L)\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\|\Delta v\|^2_H +$$

$$+\int_\Omega Re(\Delta\psi\bar{\phi})\Delta v_0(z)dxdz - \int_\Omega Im(\Delta\psi\bar{\phi})\Delta v_1(z)dxdz. \qquad (3.2.1.44)$$

Cauchy – Bunyakovski eşitsizliğini uygularsak $R(\Delta v)$ kalan terimin aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$|R(\Delta v)| \le \|\Delta\psi(\cdot, L)\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\|\Delta v\|^2_H +$$
$$(\|\Delta v_1\|_{L_2(0,T)} + \|\Delta v_0\|_{L_2(0,T)} \max\|\Delta\psi(\cdot, L)\|_{L_2(0,l)}\|\phi\|_{L_2(0,L)} .$$

Bu eşitsizlikte (3.1.3.5) , (3.2.1.12) kestirimlerini kullanarak $R(\Delta v)$ için aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$|R(\Delta v)| \le c_{10}\|\Delta v\|^2_H \ . \qquad (3.2.1.45)$$

Burada $c_{10} > 0$ sabit sayıdır. Bu bağıntı

$$R(\Delta v) = o(\|\Delta v\|_H) \qquad (3.2.1.46)$$

bağıntısının geçerli olduğunu gösterir. Sonuncu bağıntıyı kullanırsak fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\int_0^T (\int_0^l Re(\psi\bar{\phi})dx + 2\alpha\big(v_0(z) - \omega_0(z)\big)\Delta v_0(z)dz - \int_0^l Im(\psi, \bar{\phi})dx\Delta v_1(z)) +$$

$$+\int_0^T (-\int_0^l Im(\psi\bar{\phi})dx + 2\alpha\big(v_1(z) - \omega_1(z)\big)\Delta v_1(z)dz +$$

$$+\int_0^l [Im(\bar{\phi}(x,0)) + 2\alpha(\varphi_0(x) - \widetilde{\omega}_0(x))]\,\Delta\varphi_0(x)dx +$$

$$+\int_0^l [Re(\bar{\phi}(x,0)) + 2\alpha(\varphi_1(x) - \widetilde{\omega}_1(x))]\,\Delta\varphi_1(x)dx + o(\|\Delta v\|_H)\ . \qquad (3.2.1.47)$$

$H = (L_2(0,L))^2 \times (L_2(0,l))^2$ fonksiyonel uzayında fonksiyonellerin Frechet anlamında diferansiyellenebilirliğinin tanımı ve (3.2.1.47) formülünü kullanırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$' de üzerinde Frechlet anlamında diferansiyellenebilir ve onun gradiyenti için aşağıdaki formülün geçerlidir oduğunu söyleyebiliriz:

$$J_\alpha{}'(v) = (J_{\alpha v_0}{}'(v)\ ,\ J_{\alpha v_1}{}'(v)\ ,\ J_{\alpha\varphi_0}{}'(v)\ ,\ J_{\alpha\varphi_1}{}'(v)\ ) \qquad (3.2.1.48)$$

$$J_{\alpha v_0}{}'(v) = \int_0^l Re(\psi\bar{\phi})dx + 2\alpha(v_0(z) - \omega_0\,(z)) \qquad (3.2.1.49)$$

$$J_{\alpha v_1}{}'(v) = -\int_0^l Im(\psi\bar{\phi})dx + 2\alpha(v_1(z) - \omega_1\,(z)) \qquad (3.2.1.50)$$

$$J_{\alpha\varphi_0}{}'(v) = Im(\bar{\phi}(x,0) + 2\alpha(\varphi_0(x) - \widetilde{\omega}_0(x)) \qquad (3.2.1.51)$$

Böylece Teorem3.2.1.1 ispatlandı.

3. 2. 2 Optimal Kontrol Probleminin Çözümü İçin Varyasyon Eşitsizliği Şeklinde Gerek Şart

Şimdi Teorem 3.2.1.1`in hükmünü kullanarak (3.1.1.1) – (3.1.1.4) probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart elde edelim.

Teorem3.2.2.1: Farz edelim ki Teorem 3.2.1.1`in şartları sağlansın ve $v^* \in V$ (3.1.1.1) – (3.1.1.4) probleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu taktirde $\forall v \in V$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\int_0^L \left[\left(\int_0^l Re\left(\psi^*(x,z)\bar{\phi}^*(x,z)dx + 2\alpha(v_0^*(z) - \omega_0(z)\right)(v_0(z) - v_0^*(z) \right) + \right.$$

$$\left. + \left(-\int_0^l Im\left(\psi^*(x,z)\bar{\phi}^*(x,z)dx + 2\alpha(v_1^*(z) - \omega_1(z)\right)(v_1(z) - v_1^*(z) \right) \right] dz +$$

$$+ \int_0^l Im\left(\bar{\phi}^*(x,0) + 2\alpha(\varphi_0^*(x) - \widetilde{\omega}_0(x)\right)(\varphi_0(x) - \varphi_0^*(z))dx +$$

$$+ \int_0^l Re\left(\bar{\phi}^*(x,0) + 2\alpha(\varphi_1^*(x) - \widetilde{\omega}_1(x)\right)(\varphi_1(x) - \varphi_1^*(z))dx \geq 0 \qquad (3.2.2.1)$$

Burada $\psi^*(x,z) \equiv \psi(x,z;v^*)$, $\phi^*(x,z) \equiv \phi(x,z;v^*)$ sırasıyla (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin ve eşlenik problemin $v^* \in V$ `ye karşılık gelen çözümleridir.

İspat: Teoremi ispatlamak için önce $J'_\alpha(v)$ gradiyentinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Yani

$$\|\Delta v\|_H \to 0 \ , \quad \|J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)\| \to 0 \qquad (3.2.2.2)$$

olduğunu göstermek için $J'_\alpha(v)$ `nin her bir bileşeninin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu göstermek yeterlidir. $\|\Delta v\|_H \to 0$ için

$$\left\|J'_{\alpha v_0}(v+\Delta v) - J_{\alpha v_0}(v)\right\|_{L_2(0,L)} \to 0 \qquad (3.2.2.3)$$

$$\left\|J'_{\alpha v_1}(v+\Delta v) - J_{\alpha v_1}(v)\right\|_{L_2(0,L)} \to 0 \qquad (3.2.2.4)$$

$$\left\|J'_{\alpha \varphi_0}(v+\Delta v) - J_{\alpha \varphi_0}(v)\right\|_{L_2(0,l)} \to 0 \qquad (3.2.2.5)$$

$$\left\| J'_{\alpha\varphi_1}(v+\Delta v) - J_{\alpha\varphi_1}(v) \right\|_{L_2(0,l)} \to 0 \tag{3.2.2.6}$$

şartlarını sağladığını göstermek yeterlidir.

Öncelikle (3.2.2.3) `un geçerli olduğunu gösterelim. (3.2.1.49) formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$J'_{\alpha v_0}(v+\Delta v) - J_{\alpha v_0}(v) =$$

$$= \int_0^l Re\,(\psi_\Delta \bar{\phi}_\Delta)dx + 2\alpha\big(v_0(z) + \Delta v_0(z) - \omega_0(z)\big) -$$

$$- \int_0^l Re\,(\psi\bar{\phi})dx + 2\alpha\big(v_0(z) - \omega_0(z)\big) = \int_0^l Re\,(\psi_\Delta \bar{\phi}_\Delta - \psi\bar{\phi})dx + 2\alpha =$$

$$= \int_0^l Re\,(\psi(x,z;v+\Delta v)\bar{\phi}(x,z;v+\Delta v) - \psi(x,z;v)\bar{\phi}(x,z;v))dx + 2\alpha\Delta v(z) =$$

$$= \int_0^l Re\,(\psi_\Delta(x,z)\Delta\bar{\phi}(x,z) - \Delta\psi(x,z)\bar{\phi}(x,z))dx + 2\alpha\Delta v(z) \tag{3.2.2.7}$$

Burada $\Delta\psi = \Delta\psi(x,z)$ (3.1.3.1) – (3.1.3.3) probleminin çözümüdür. $\Delta\phi = \Delta\phi(x,z)$ aşağıdaki problemin çözümüdür:

$$i\frac{\partial\Delta\phi}{\partial z} + a_0\frac{\partial^2\Delta\phi}{\partial x^2} + \big(v_0(z) - \Delta v_0(z)\big)\Delta\phi - i\big(v_1(z) - \Delta v_1(z)\big)\Delta\phi =$$

$$= -\Delta v_0(z)\phi + i\Delta v_1(z)\phi \quad , \quad (x,z) \in \Omega\,, \tag{3.2.2.8}$$

$$\Delta\phi(x,L) = -2i\Delta\psi(x,L) \quad , \quad x \in (0,l)\,, \tag{3.2.2.9}$$

$$\Delta\phi(0,z) = \Delta\phi(l,z) = 0 \quad , \quad z \in (0,L)\,. \tag{3.2.2.10}$$

Görüldüğü üzere bu problem eşlenik problem biçimde bir sınır değer problemidir. Eşlenik problem için kullandığımız düşünceleri uygularsak kolaylıkla bu problemin çözümü içinde aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu hükmedebiliriz:

$\|\phi(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_{11}(\|\Delta v_0\phi + i\Delta v_0\phi\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi(\cdot,L)\|^2_{L_2(0,l)}),$

$\forall z \in (0,L)$. (3.2.2.11)

Burada c_{11} sabit bir sayıdır.

(3.1.3.5) ve (3.2.1.12) kestirimlerini kullanırsak sonuncu kestirimden kolaylıkla aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|\phi(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_{12}(\|\Delta v\|^2_H) \quad , \quad \forall z \in (0,L) \ . \tag{3.2.2.12}$$

Burada c_{12} sabit sayıdır. Bu kestirimi ve (3.1.3.5) kestirimini kullanarak (3.2.2.11) `de yer alan ifadeyi değerlendirelim. Bu amaçla Cauchy-Bunyakovski eşitsizliğini kullanırsak ,

$$\left|J'_{\alpha v_0}(v+\Delta v) - J'_{\alpha v_0}(v)\right| \leq \|\psi_\Delta(\cdot,z)\|_{L_2(0,l)}\|\Delta\phi(\cdot,z)\|_{L_2(0,l)}$$

$$+\|\Delta\psi(\cdot,z)\|_{L_2(0,l)}\|\phi(\cdot,z)\|_{L_2(0,l)} + 2\alpha|\Delta v_0(z)| \quad , \quad \forall z \in (0,L)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğin her iki tarafının karesini alıp $(0,L)$ aralığı üzerinden integrallemiş olursak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|J'_{\alpha v_0}(v+\Delta v) - J'_{\alpha v_0}(v)\right\|^2_{L_2(0,l)} \leq 3\int_0^L \|\psi_\Delta(x,z)\|^2_{L_2(0,l)}\,\|\Delta\phi(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)}dz +$$

$$+3\int_0^L \|\Delta\psi(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)}\,\|\phi(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)}dz + 3\|\Delta v_0\|^2_{L_2(0,L)} \ . \tag{3.2.2.13}$$

$\psi_\Delta = \psi_\Delta(x,z) \equiv \psi(x,z;v+\Delta v)$ fonksiyonu (3.1.1.2) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $v+\Delta v \in V$ için çözümü olduğundan (3.1.2.1) kestirimini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\|\psi_\Delta(\cdot,z)\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_{13} \quad , \quad \forall z \in [0,L] \ . \tag{3.2.2.14}$$

Bu eşitsizliği (3.1.3.5) , (3.2.1.12) ve (3.2.2.12) kestirimlerini kullanarak (3.2.2.13) eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left\|J'_{\alpha v_0}(v+\Delta v) - J'_{\alpha v_0}(v)\right\|_{L_2(0,L)} \leq c_{14}\|\Delta v\|_H \ . \tag{3.2.2.15}$$

Burada c_{14} sabit sayıdır. Aynı biçimde

$$\left\|J'_{\alpha v_1}(v+\Delta v)-J'_{\alpha v_1}(v)\right\|_{L_2(0,L)} \le c_{15}\|\Delta v\|_H \qquad (3.2.2.16)$$

eşitsizliğini ispatlayabiliriz.

(3.2.2.15) , (3.2.2.16) `den (3.2.2.3) , (3.2.2.4) limit bağıntılarının geçerli olduğu elde edilir. Şimdi (3.2.2.5) `i ispatlayalım. Bu amaçla (3.2.1.51) formülünü kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$J'_{\alpha v_0}(v+\Delta v)-J'_{\alpha v_0}(v)=I_m\left(\Delta\bar{\phi}(x,0)\right)+2\alpha\Delta\varphi_0 \ . \qquad (3.2.2.17)$$

Burada $\Delta\phi(x,z)$ (3.2.2.8) probleminin çözümüdür.(3.2.2.12) kestirimi $\forall z\in[0,L]$ için geçerli olduğundan $z=0$ `da aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\|\phi(\cdot\,,0)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{12}(\|\Delta v\|^2_H) \ .$$

Bu eşitsizliği kullanarak (3.2.2.16) `dan kolaylıkla

$$\left\|J'_{\alpha\varphi_0}(v+\Delta v)-J'_{\alpha\varphi_0}(v)\right\|_{L_2(0,l)} \le c_{16}\left(\|\Delta v\|_H\right) \qquad (3.2.2.18)$$

eşitsizliği elde edilir. Aynı biçimde (3.2.2.6) `yı kullanarak

$$\left\|J'_{\alpha\varphi_1}(v+\Delta v)-J'_{\alpha\varphi_1}(v)\right\|_{L_2(0,l)} \le c_{17}\left(\|\Delta v\|_H\right) \qquad (3.2.2.19)$$

eşitsizliği elde edilir.

(3.2.2.18) ve (3.2.2.19) `den (3.2.2.5) ve (3.2.2.6) `nin doğruluğu elde edlilir. Böylece (3.2.2.3) – (3.2.2.6) bağıntılarını kullanarak (3.2.2.2) `in geçerli olduğunu ispatlamış olduk. (3.2.2.2) bağıntısında $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $V$ kümesi üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olduğu ispatlanmış oluyor. Yani $J_\alpha\in C^1(V)$ `dir. Diğer yandan V kümesinin tanımına göre konveks kümedir. Böyle olduğu taktirde $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi için [Kuramsal Temeller: Teorem 2.1] bildiğimiz teoremin şartlarının sağlandığını görüyoruz. Bu nedenle bu teoreme dayanarak $\forall z\in V$,

$$\langle J'_\alpha(v^*)\,,v-v^*\rangle_H \ge 0$$

bağıntısını elde ederiz. Burada gradiyent için olan (3.2.1.13) formüllerini $v = v^*$ için kullandığımızda Teorem 3.2.2.1`in hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem 3.2.2.1 ispatlandı.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 3.1 bölümünde kuazi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol probleminin iyi konulması incelendi. Problemin çözümünün varlığı ve tekliği teoremi ispatlandı. Ayrıca kuazi optiğin durgun denklemi için başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği de ispatlandı.

Tezin 3.2 bölümünde ise göz önüne alınan optimal kontrol probleminde amaç fonksiyonelinin differansiyellebilir olduğu ispatlandı ve onun gradiyenti için formül elde edildi. Bunların yanı sıra ele alınan optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şartlar ispatlandı.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Tezde ele alınan optimal kontrol problemi konulma açısından önceki çalışmalardan farklıdır. Kuazi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol problemleri çok az ele alındığından tez çalışması gerek teorik gerekse pratik önem taşır. Bu tezde kuazi optiğin durgun denklemi için optimal kontrol probleminin çözümü için elde edilen araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar, önceki çalışmalardaki sonuçlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

6. KAYNAKLAR

[1] Butkovski, A:G., SamoylenkoY.I. Kuantum Mekanik Süreçlerin Kontrolü.M. Nauka-1984-s.256 (Rusça)

[2] Dın Nıo Hao, Kuantum Objektlerinin Optimal Kontrolü// Optimatik ve Telemekanik. 1986, no 2,s.1420 (Rusça)

[3] Goebel, M., On Existence Of Optimal Control// Math. Nacr-1979, Vol. 53 s.67-73

[4] İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., Kuantum Mekanik Potansiyelin Bulunması Ters Problemin Çözümü için Varyasyon Yöntemi// DAN SSSR, 1988, c.303, No:5, s.1044-1048, Lineer Olmayan Kuantum Mekanik Sistemlerin Optimal Kontrolü// Otomatik ve Telemekanik.1989, no:12-s.27-38 (Rusça)

[5] Iyosida, K. Functional Analysis –Springer-Verlag , New York 1980, 624 p. (İngilizce)

[6] Ladijenskaya O.A., Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri -M: Nauka, 1973 (Rusça)

[7] Ladijenskaya O.A., Parabolik Tip Lineer ve KuaziLineer Denklemler. Moskova, Nauka, 1976

[8] Landau, L.D., Lifsiş E.M.. Kuantum Mekaniği Cilt 3-M-1963-s. 702 (Rusça)

[9] Lions, J.L Optimal Control of Sysytems Governed By Partial Differential Equations. Springer-Verlog Berlin Heidelberg New York-1971-s. 400

[10] Mikhaylov, Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler.-Moskova , Nauka, 1983

[11] Potapov, M.M., Razgulin A.V., Şameeva T.Y., Scrodinger Tipli Optimal Kontrol Probleminin Yaklaşımı ve Regülarizasyonu. Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri 15 (Nümerik Analiz ve Sibernetik) 1987. No:1 s. 8-13

[12] Razgulin A.V., Lineer Olmayan Scrodinger Denklemi için Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri 15 (Nümerik Analiz ve Sibernetik) 1998. No:2-s.28-33 (Rusça)

[13] Vasilyev, F.P., Extremal Problemlerin Nümerik Çözüm Yöntemleri M: Nauka. 1980; Extremal Problemlerin Çözüm Metotları.-M: Nauka. 1981-s. 400 (Rusça)

[14] Vorontsov, M.A., Şmalqauzen, V.I., Adaptiv Optiğin Prensipleri. Moskova, Nauka 1984

[15] Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., Lineer Olmayan Scrodinger Denklemi için Bir İnvers Problemin Varyasyon Konulmasının Farklar Metoduyla Çözümü. Azerbaycan Bilimler Akademisinin Haberleri. Seri: Fizik-Teknik ve Matematik Bilimleri. 1995, Cilt:16, No:1-2, s. 46-51, M.A Lineer Olmayan Scrodinger Denklemi için İnditifikasyon Problemi Hakkında// Diferansiyel Denklemler-1997, c.33, No:12 s. 1691-1698 (Rusça)

[16] Yagubov, G.Ya., Kuazi Lineer Scrodinger Denkleminin Katsayı ile Optimal Kontrol. Bilimler Doktora Tezi. Kiev. 1994 , s.318 (Rusça)

[17] Yetişkin, H.,'Kompleks Potansiyelli Scrodinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemi Ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı ' , Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, 2005

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Gaziantep ilinde doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada tamamladı. 2004 yılında kazandığı Kafkas Üniversitesi Matematik Bölümünü 2008 yılında birincilikle bitirdi. Aynı yıl Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı`nda yüksek lisans programına başladı.

Halen Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı`nda yüksek lisans öğrencisi olarak eğitim ve öğretim hayatına devam etmektedir.