T.C
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SANAL KATSAYILI GRADYENT İÇEREN SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN LİONS FONKSİYONELLİ OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

Gökçe Dilek AKBABA

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUBOV

OCAK-2011
KARS

Prof. Dr. Gabil YAGUBOV danışmanlığında Gökçe Dilek AKBABA'nın Yüksek Lisans Tezi olarak hazırladığı Sanal Katsayılı Gradyent İçeren Schrödinger denklemi İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemi adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında...oy birliği............ ile kabul edilmiştir.

..14/..01/20.11

	Adı Soyadı	**İmza**
Başkan :	Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	....
Üye :	Prof. Dr. Gabil YAGUBOV........	....
Üye :	Prof. Dr. Refik ABDULLA......	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..../..../20... gün ve ..../ .... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

....

Doç.Dr.Muzaffer ALKAN

Enstitü Müdür Vekili

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamın başlangıcından bitimine kadar her aşamada çalışmayı yönlendiren, değerli bilgilerini ve özverili yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Prof. Dr. Gabil YAGUBOV ve Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Yrd. Doç. Dr. Nizami MUSTAFA hocalarıma en içten teşekkürlerimi sunarım.

Tezin hazırlanması sürecinde yardımlarından dolayı Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim elemanı Arş. Gör. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca çalışmam esnasında her zaman yanımda olan aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2011 Gökçe Dilek AKBABA

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde Schrödinger denklemi için Lions Fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alındı. Bu çalışmanın 3.1.2. bölümünde önce Schrödinger denklemi için I.ve II. çeşit sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı ve tekliğine ait olan önermelerin ispatı verildi. Bu hükümleri kullanarak 3.1.3. bölümünde söz konusu optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini içeren teoremler ispatlandı. 3.1.4. bölümünde fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğu gösterildi ve onun gradyenti için formül elde edildi. Nihayet çalışmanın 3.1.5. bölümünde optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlandı.

2011, 78 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Schrödinger denklemi, Optimal kontrol, Lions fonksiyoneli

ABSTRACT

In this thesis, optimal control problem Lions bifunctional is considered for Schrödinger equation. In the 3.1.2. section of this work, for Schrödinger equation, propositions relating to existence and uniqueness of generalized solutions of I th and II th type boundary value problems are given. In the 3.1.3. section by using these propositions, the existence of the optimal control problem solution is proved. In the 3.1.4. section differentiability of the function is proved and a formula is obtained for its gradient. Finally in the 3.1.5. section for the solution of the optimal control problem the necessity condition in the form of variation inequality is proved.

2011, 78 Pages

Keywords: Schrödinger equation, Optimal control, Lions functional

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
$\overset{0}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$l > 0$	Verilen sayı
$i = \sqrt{-1}$	Sanal birim
$x \in [0, l]$	Uzay değişkeni
$t \in [0, T]$	Zaman değişkeni
$\Omega_T = (0, l) \times (0, T),\ \Omega = \Omega_t$	Verilen bölge
$\bar{\Omega}_t = (0, l) \times (t, T)$	Verilen bölge

1. GİRİŞ

Schrödinger denklemi ile ifade edilen kuantum mekanik sistemleri için optimal kontrol teorisi çağdaş optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıkar. (Butkovskiy A.G. Samoilenko Y.I. , 1984, Landau L.D. Lifşis E.M., 1963, Vorontsov , M.A. Shmalgauzen V.I., 1985). Bu nedenle böyle problemlerin incelenmesi, gerek teorik gerekse pratik anlamda öneme sahiptir. Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri daha önce farklı çalışmalarda ele alınmıştır.(Dın Nıo Hao. 1986, İskenderov A.D. , Yagubov G.Y., 1988, 1989, Silla N. 1991, Yagubov G.Ya., Musayeva M.A., 1995, 1997, Yagubov G.Ya. 1994 vs.). Bu çalışmalardan İskenderov , A.D ve Yagubov, G.Y. nin çalışmalarını önemle dikkate almak gerekir.Çünkü İskenderov A.D ve Yagubov G.Y nin çalışmalarında hem lineer hem lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol teorisi oluşturulmuş ve geliştirilmiştir.

Bu tez çalışmasında sanal katsayılı Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi incelenmiştir. Bu tür problemler yüklü kütleciklerin dağılması sürecinin incelenmesi sonucu ortaya çıkan optimal kontrol problemleridir. (Butkovskiy A.G. , Samoilenko Y.I,1984) . Burada incelenen problem konulma açısından önceki incelenenlerden farklıdır. Ele alınan problemde amaç fonksiyoneli olarak Lions fonksiyoneli tipli amaç fonksiyoneli kullanılmıştır. Lions tipli fonksiyoneller ilk kez Fransız matematikçi Lions tarafından sunulmuştur. (Lions J.L.,1971). Bu tipli foksiyoneller matematiksel fiziğin denklemlerinin katsayısı ile kontrol edilen sistemler için kontrol problemlerinde ilk kez İskenderov'un çalışmalarında sunulmuştur ve analiz edilmiştir(İskenderov A.D,1984). Lions fonksyonelli optimal kontrol problemleri Schrödinger denklemi için daha önce farklı konulmada İskenderov ve Mahmudov'un çalışmalarında incelenmiş ve problemin iyi konulmasına ve çözüm için gerek şartlara ait sonuçlar elde edilmiştir (İskenderov A.D., Mahmudov N.M.,1997).

Bu tez çalışmasında ilk önce ele alınan problemin iyi konulmasına ait sorular cevaplandırılmıştır. Bu amaçla sanal katsayılı Schrödinger denklemi için I. ve II. çeşit sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı ve tekliğini içeren teoremler ispatlanmıştır. Bu teoremleri kullanılarak optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait hükümler elde edilmiştir. Sonra problemde kullanılan amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği incelenmiş ve onun gradyenti için formül gösterilmiştir. Gradyent için olan formülü kullanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde çalışma boyunca kullanacağımız tanım ve teoremleri vereceğiz.

Tanım 2.1: $L_2(0,l)$ uzayı Hilbert Uzayı olup elemanları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)}=\int_0^l u(x)\bar{v}(x)dx,$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)}=\sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,l)}}.$$

Tanım 2.2: $L_2(\Omega)$ uzayı Hilbert Uzayı olup elemanları $\Omega=(0,l)\times(0,T)$ bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)}=\int_\Omega \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt,$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)}=\sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}.$$

Tanım 2.3: $L_\infty(0,l)$ uzayı Banach Uzayı olup, $(0,l)$ aralığında ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|u\|_{L_\infty(0,l)}=vrai\sup_{x\in(0,l)}|u(x)|=ess\sup\{|u(x)|:x\in(0,l)\}$$

normuna sahip u=u(x) fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.4: $L_\infty(\Omega)$ Banach Uzay olup Ω bölgesinde ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} = vrai\sup_{(x,t)\in\Omega} |\psi(x,t)|$$

normuna sahip $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.5: $C^0([0,T],B)$ Banach Uzayı olup elemanları [0,T] aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach Uzayından alan fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)} = \max_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_B .$$

Burada $B \equiv R$ alınırsa $C[0,T] \equiv C^0([0,T];R)$ elde edilir.

Tanım 2.6: $L_2([0,T],B)$ Banach Uzayı olup elemanları $[0,T]$ aralığında ölçülebilir, karesel integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyon uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|u\|_{L_2([0,T],B)} = \left[\int_0^T \|u(.,t)\|_B^2 \, dt\right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Tanım 2.7: $W_2^1(0,l)$ Hilbert Uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev Uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x)\bar{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx}\frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^1(0,l)}} .$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ uzayı $W_2^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup,(0,l) aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.8: $W_2^2(0,l)$ Hilbert Uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev Uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x)\bar{\phi}(x) + \frac{d\psi(x)}{dx}\frac{d\bar{\phi}(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2}\frac{d^2\bar{\phi}(x)}{dx^2} \right) dx$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^2(0,l)}},$$

$$\overset{0}{W}{}_2^2(0,l) \equiv W_2^2(0,l) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(0,l).$$

Tanım 2.9: $W_2^{1,0}(\Omega)$ Hilbert Uzayı olup elemanların kendisi ve onların x değişkenine göre 1. mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev Uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\bar{\phi}(x,t)}{\partial x} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.10: $\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup Ω nın sınırında sıfıra dönüşen, her yerde yoğun olan düzgün fonksiyonlar uzayıdır.

Tanım 2.11: $W_2^{0,1}(\Omega)$ Hilbert Uzayı olup elemanların kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.12: $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert Uzay olup elemanların kendisi ve onların x değişkenine göre ikinci mertebeye, t değişkenine göre birinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev Uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \overline{\phi}(x,t)}{\partial x^2} \right] dxdt$$

$$+ \int_\Omega \left[\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right] dxdt$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}} \;,$$

$$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega) = W_2^{2,1}(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$$

dır.

Tanım 2.13: V, X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall\ u, v \in V$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha u + (1-\alpha) v \in V$ oluyorsa, V kümesine X de konveks küme denir.

Tanım 2.14: $(X, \| \ \|)$ bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. E içindeki her dizinin E de en az bir limit noktası varsa E kümesine X de kompakt küme denir.

Tanım 2.15: X normlu uzayında bir E kümesi verilsin. Eğer E deki bütün yakınsak dizilerin limit noktaları E de ise E kümesine X de kapalı küme denir.

Tanım 2.16: Eğer B Banach Uzayından olan $\{u_k\}$ dizisi için $\forall c \in B^*$, $\lim\limits_{k\to\infty} \langle c, u_k \rangle = \langle c, u \rangle$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $\{u_k\}$ dizisi $u \in B$ noktasına zayıf yakınsıyor denir. Burada B^* uzayı B nin eşlenik uzayıdır.

Tanım 2.17: X, Banach Uzayı ve $E \subset X$ olsun. Eğer $\{x_n\} \in E$ ve $\{x_n\}$ dizisi bir x elemanına zayıf yakınsadığında $x \in E$ ise E kümesine X de zayıf kapalıdır denir.

Tanım 2.18: X bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer X in her bir x elemanı, E nin elemanlarının dizisinin bir limiti ise E ye X de yoğundur denir.

Tanım 2.19: X bir vektör uzayı olmak üzere , $I : X \to \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) lineer operatörüne X üzerinde bir lineer fonksiyonel denir. X üzerindeki sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X in duali denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 2.20: U,B Banach Uzayının bir kümesi olsun. Eğer $\forall \{u_k\} \in U$ dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu taktirde U kümesine B de zayıf kompakt küme, denir.

Tanım 2.21: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach Uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer ,$u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\varliminf\limits_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu taktirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

Tanım 2.22: F, bir I aralığı üzerinde tanımlı f(t) fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in F$ için $t_1, t_2 \in I$ olmak üzere $|t_1 - t_2| \le \delta(\varepsilon)$ olduğunda $|f(t_1) - f(t_2)| \le \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)$>0 sayısı varsa F ye I üzerinde aynı dereceden sürekli(eş sürekli) dir, denir.

Tanım 2.23: Diyelim ki B herhangi Banach Uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma) = \{v : v \in B, \|v - u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J^{'}(u), h\rangle_B + o\langle h,u\rangle$ şartını sağlayan $J^{'}(u) \in B^{*}$ elemanı varsa, bu taktirde J(u) fonksiyoneli u noktasında Freschet anlamında diferansiyellenebilirdir. Burada B^{*} uzayı B nin eşlenik uzayıdır.

Teorem 2.24: Diyelimki U, B Banach Uzayının konveks bir alt kümesi, J(u) fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonel ve $U_{*} = \left\{u \in U : J(u) = J_{*} = \inf_u J(u)\right\}$ kümesi J(u) fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu taktirde $\forall u^{*} \in U_{*}$ için $\left\langle J^{'}(u^{*}), u - u^{*}\right\rangle \ge 0$ şartı sağlanır (Vasilyev 1981).

Teorem 2.25 (Weierstrass Teoremi): U, B Banach Uzayında zayıf kompakt küme olsun.J(u) fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli olsun.Bu taktirde $J_{*} = \inf_u J(u) > -\infty$, $U_{*} = \{u \in U : J(u) = J_{*}\} \ne \phi$ zayıf kompakttır ve U dan olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktalar kümesine zayıf yakınsar (Vasilyev 1981).

Teorem 2.26: Kabul edelim ki , $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $\mathrm{I}(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0,\ \beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu taktirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle G alt kümesi vardır ki $\forall \omega \in G$ için

$$J_\alpha(v) = \mathrm{I}(v) + \alpha \|v - \omega\|_{\tilde{X}}^\beta$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır (Goebel 1979)

Lemma 2.27 (T. H. Gronwall): Eğer g(t) fonksiyonu $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \leq g(t) \leq K + L\int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \leq t \leq t_1$ üzerinde

$$0 \leq g(t) \leq K \exp\left(L\left(t - t_0\right)\right)$$

dır. Burada K ve L negatif olmayan sabitlerdir (Hsieh and Sibuya 1999).

Lemma 2.28 (Cauchy –Bunjakovskii Eşitsizliği): $u, v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left|\int_\Omega u\bar{v}dxd\tau\right| \leq \left(\int_\Omega |u|^2 dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2 dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Ladyzenskaja et al. 1968).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Sanal Katsayılı Gradyent İçeren Schrödinger denklemi İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemi

Bu bölümde sanal katsayılı gradyent içeren Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin iyi konulması ve onun çözümü için gerek şartın elde edilmesiyle ilgili soruları cevaplandıracağız. Bu bölüm beş alt bölümden oluşmaktadır.

3.1.1 Problemin Konulması

Bu alt bölümde ele alınan optimal kontrol problemini tanımlayalım. Farz edelim ki

$$J_\alpha(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\|v - \omega\|^2_H \qquad (3.1.1.1)$$

fonksiyonelinin

$$V = \left\{ v = v(x), v \in L_2(0,l), \|v\|_{L_2(0,l)} \le b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial \psi_k}{\partial x} - a(x)\psi_k + v(x)\psi_k = f_k(x,t), k = 1,2, (x,t) \in \Omega, \qquad (3.1.1.2)$$

$$\psi_k(x,0) = \varphi_k(x),\ k = 1,2,\ x \in (0,l), \qquad (3.1.1.3)$$

$$\psi_1(0,t) = \psi_1(l,t) = 0,\ \forall t \in (0,T), \qquad (3.1.1.4)$$

$$\frac{\partial \psi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2(l,t)}{\partial x} = 0, \; t \in (0,T), \tag{3.1.1.5}$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Burada $i = \sqrt{-1}$ sanal birim, $l > 0$, $T > 0$, $b_0 > 0$, $\alpha \ge 0$, $a_0 > 0$ verilen sayılar; $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$, $\Omega_t = (0,l) \times (0,t)$, $\Omega = \Omega_T$, $a(x)$, $a_1(x)$ reel değerli, ölçülebilir sınırlı fonksiyonlar olup

$$0 < \mu_0 \le a(x) \le \mu_1, \; \overset{0}{\forall} x \in (0,l), \; \mu_0, \mu_1 = sabit > 0, \tag{3.1.1.6}$$

$$|a_1(x)| \le \mu_2, \left| \frac{da_1(x)}{dx} \right| \le \mu_3, \overset{0}{\forall} x \in (0,l),$$

$$a_1(0) = a_1(l) = 0, \mu_2, \mu_3 = sabit > 0, \tag{3.1.1.7}$$

şartlarını sağlar; $\varphi_k(x)$, $f_k(x,t)$, $k = 1,2$ kompleks değerli ölçülebilir fonksiyonlar olup

$$\varphi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l), \; \varphi_2 \in W_2^2(0,l), \; \frac{d\varphi_2(0)}{dx} = \frac{d\varphi_2(l)}{dx} = 0, \tag{3.1.1.8}$$

$$f_k \in W_2^{0,1}(\Omega), \; k = 1,2 \tag{3.1.1.9}$$

şartlarını sağlar. $\omega \in H$ verilen eleman, $H = L_2(0,l)$ dir.

Her bir $v \in V$ için (3.1.1.2)- (3.1.1.5) şartlarından $\psi_k = \psi_k(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v)$, k=1,2 fonksiyonlarının bulunması problemi (3.1.1.2) Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleridir. Başka bir deyişle (3.1.1.2)-(3.1.1.4) şartlarından $\psi_1 = \psi_1(x,t) = \psi_1(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi Schrödinger denklemi için I.çeşit başlangıç sınır değer problemi; (3.1.1.2),(3.1.1.3), (3.1.1.5) şartlarından $\psi_2 = \psi_2(x,t) = \psi_2(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi Schrödinger denklemi için II.çeşit başlangıç sınır değer problemidir.

Tanım 3.1.1: Her bir $v \in V$ için (3.1.1.2)-(3.1.1.5) başlangıç sınır değer problemlinin çözümü olarak $\psi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $\psi_2 \in W_2^{2,1}(\Omega)$ olan ve (3.1.1.2)-(3.1.1.5) şartlarını $\forall (x,t) \in \overset{0}{\Omega}$ için sağlayan $\psi_k = \psi_k(x,t) = \psi_k(x,t;v)$, k=1,2 fonksiyonları anlaşılır.

Söylemek gerekir ki Schrödinger denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ilk önce İskenderov, Yagubov 1989 çalışmalarında incelenmiştir. Ancak burada olan sonuçlardan yararlanarak (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol problemini incelemek mümkün değildir. Çünkü burada yer alan Schrödinger denklemi önceki çalışmalardaki Schrödinger denkleminden farklıdır. Bu nedenle (3.1.1.2)-(3.1.1.5) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği ile ilgili olan soruları incelemek gerekliliği ortaya çıkar.

3.1.2 Başlangıç sınır değer probleminin çözümü için Galerkin yöntemi

Aşağıdaki başlangıç sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x)\psi + v(x)\psi = f_1(x,t),\ (x,t) \in \Omega, \qquad (3.1.2.1)$$

$$\psi(x,0) = \varphi_1(x),\ x \in (0,l), \qquad (3.1.2.2)$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0,\ t \in [0,T]. \qquad (3.1.2.3)$$

Burada i=$\sqrt{-1}$, l >0, T>0, $a_0 > 0$ verilen sayılar; $a(x)$, $a_1(x)$ ölçülebilir, sınırlı fonksiyonlar olup (3.1.1.6), (3.1.1.7) şartlarını sağlar. $\varphi_1(x)$, $f_1(x,t)$ fonksiyonları ölçülebilir fonksiyonlar olup (3.1.1.8), (3.1.1.9) şartlarını sağlar. $v(x)$ fonksiyonu ise ölçülebilir, karesi integrallenebilir fonksiyon olup V kümesinden seçilir.

Görüldüğü gibi herbir $v \in V$ için (3.1.2.1)-(3.1.2.3) şartlarından $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi (3.1.2.1) denklemi için 1.çeşit başlangıç sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü olarak $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan ve (3.1.2.1)-(3.1.2.3) şartlarını $\forall(x,t) \in \overset{0}{\Omega}$ için sağlayan $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonu anlaşılır.

Şimdi bu biçimde olan çözümün varlık ve teklik teoremini ispatlayalım.

Teorem (3.1.2.1) : Farz edelim ki $a(x)$, $a_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $f_1(x,t)$ fonksiyonları (3.1.2.6)-(3.1.2.9) şartlarını sağlasın. Bu taktirde her bir $v \in$ V için (3.1.2.1)- (3.1.2.3) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_0 \left(\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \| f_1\|^2_{W_2^{0,1}} \right). \tag{3.1.2.4}$$

Burada c_0>0 sayısı φ_1 ve f_1 den bağımsızdır.

İspat: Teoremin ispatı için Galerkin yöntemini kullanalım. Bu amaçla $\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)$ uzayında temel fonksiyonlar olarak aşağıdaki

$$LX = -a_0 \frac{d^2X}{dx^2} + a(x)X = \lambda X \ , \ X(0) = X(l) = 0 \tag{3.1.2.5}$$

özdeğer probleminin $\lambda = \lambda_k$, k=1,2,… özdeğerlerine karşılık gelen $X = u_k(x)$, k=1,2… özfonksiyonlarını alalım.

[9] çalışmasından bilindiği gibi L operatörünün katsayısı olan $a(x)$ fonksiyonu $a(x)$ >0 olduğundan λ_k, k=1,2,… özdeğerleri reel ve pozitiftirler, bunun yanı sıra $u_k = u_k(x)$

$k=1,2,\ldots$ özfonksiyonları da reeldirler ve $L_2(0,l), W_2^1(0,l), \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ uzayında ortogonallik şartlarını sağlar. Kolaylık olsun diye $u_k = u_k(x)$ $k=1,2,\ldots$ özfonksiyonlarının $L_2(0,l)$'de ortonormal olduğunu varsayalım. Yani

$$(u_k, u_m)_{L_2(0,l)} = \int_0^l u_k(x) u_m(x) dx = \delta_k^m \, , k, m = 1,2,\ldots \tag{3.1.2.6}$$

olup

$$\delta_k^m = \begin{cases} 1, k=m \\ 0, k \neq m \end{cases} , k, m = 1,2, \ldots .$$

Kronecker sabitleridir. $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ ve $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$ de ortogonallik aşağıdaki gibi anlaşılır:

$$[u_k, u_m] = (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} = \int_0^l \left[a_0 \frac{du_k}{dx} \frac{du_m}{dx} + a(x) u_k u_m \right] dx = \lambda_k \delta_k^m, \text{ k,m=1,2,...} \tag{3.1.2.7}$$

$$\{u_k, u_m\} = (u_k, u_m)_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} = \int_0^l L u_k L u_m dx = \lambda_k^2 \delta_k^m \, , k, m = 1,2,\ldots . \tag{3.1.2.8}$$

Farz edelim ki $u_k(x)$ fonksiyonları aşağıdaki şartı sağlasın:

$$\left\| u_k \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} \le d_k \text{ , k=1,2}\ldots . \tag{3.1.2.9}$$

Burada $d_k > 0$ $k=1,2,\ldots$ sabitlerdir.

Galerkin yöntemine göre (3.1.2.1)- (3.1.2.3) başlangıç sınır değer probleminin Galerkin yaklaşımlarını aşağıdaki biçimde arayabiliriz:

$$\psi^N(x,t)=\sum_{k=1}^{N} C_k^N(t)u_k(x). \qquad (3.1.2.10)$$

Burada $C_k^N(t)=(\psi^N(.,t),u_k)_{L_2(0,l)}$ $k=\overline{1,N}$ katsayıları aşağıdaki Cauchy probleminin çözümüdür:

$$i(\frac{\partial\Psi^N}{\partial t},u_k)_{L_2(0,l)}=(L\psi^N(.,t),u_k)_{L_2(0,l)}-(v(.)\psi^N(.,t),u_k)_{L_2(0,l)}-$$

$$-\left(ia_1(.)\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x},u_k\right)_{L_2(0,l)}+f_{1k}(t),\ k=\overline{1,N}, \qquad (3.1.2.11)$$

$$C_k^N(0)=(\varphi_1,u_k)_{L_2(0,l)}=\varphi_{1k},\ k=\overline{1,N}. \qquad (3.1.2.12)$$

Burada $f_{1k(t)}=\left(f_1(.,t),u_k\right)_{L_2(0,l)}$ dir.

Görüldüğü gibi (3.1.2.11) denklemleri sistemi homojen olmayan, sabit katsayılı adi deferensiyel denklemler sistemidir. Bu denklemin sağ tarafında $f_{1k}\in W_2^1(0,T)$ dir. Adi diferensiyel denklemler teorisinden bildiğimize göre (3.1.2.11), (3.1.2.12) Cauchy probleminin çözümü , [0,T] aralığında tanımlanan sürekli ve sürekli türevlere sahiptir.

Şimdi $C_k^N(t)$ katsayıları için başka bir deyişle (3.1.2.11), (3.1.2.12) Cauchy probleminin N e bağlı çözümleri için kestirimler elde edelim.

Lemma 3.1.2.1: (3.1.2.11), (3.1.2.12) Cauchy probleminin çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\int_0^T\sum_{k=1}^{N}\left|C_k^N(t)\right|^2dt+\int_0^T\sum_{k=1}^{N}\left|\frac{dC_k^N(t)}{dt}\right|^2dt\le\left\|\psi^N\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}\le$$

$$\leq c_0(\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,L)} + \| f_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{0,1}(\Omega)}) \qquad (3.1.2.13)$$

İspat : (3.1.2.11) Sisteminin k. denklemini $\overline{C}_k^N(t)$ ile çarpıp, k üzerinden k=1 den k=N e kadar toplayıp [0,t] aralığı üzerinden integralleyelim.

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N - L\psi^N\overline{\psi}^N + v(x)\left|\psi^N\right|^2 + a_1(x)\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\overline{\psi}^N\right)dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} f_1\overline{\psi}^N dxd\tau \ , \ \forall t \in [0,T].$$

Burada L operatörünün biçimini dikkate alıp sol tarafta ikinci terimde kısmi integrasyon formülünü uygulayıp,

$$u_k(0) = u_k(l) = 0 \, , k = 1,2,\ldots$$

şarlarını kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N - a_0\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\right|^2 - a(x)\left|\psi^N\right|^2 + v(x)\left|\psi^N\right|^2 + ia_1(x)\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\overline{\psi}^N\right)dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} f_1\overline{\psi}^N dxd\tau \, .$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkaralım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$i\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N + \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t}\psi^N\right)dxd\tau + \int_{\Omega_t} ia_1(x)\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial x}\overline{\psi}^N + \frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial x}\psi^N\right)dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} \left(f_1 \bar{\psi}^N - \bar{f}_1 \psi^N \right) dx d\tau \,, \forall t \in [0,T].$$

Bu eşitlikten de kolaylıkla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left| \psi^N \right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} a_1(x) \frac{\partial}{\partial x} \left| \psi^N \right|^2 dx d\tau =$$

$$= 2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}(f_1 \bar{\psi}^N) dx d\tau \,, \ \forall \mathrm{t} \in [0,\mathrm{T}].$$

Bu eşitliğin her iki tarafına

$$\int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx} \left| \psi^N \right|^2 dx d\tau$$

terimini ekleyelim. Bu taktirde son eşitlikten aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} \left| \psi^N \right|^2 dx d\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x} (a_1(x) \left| \psi^N \right|^2) dx d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx} \left| \psi^N \right|^2 dx d\tau + 2 \int_{\Omega_t} \operatorname{Im}(f_1 \bar{\psi}^N) dx d\tau \,..$$

Burada $u_k(0) = u_k(l) = 0$, k =1,2,…şartlarını kullanırsak kolaylıkla sonuncu eşitliğin sol tarafındaki 2.terimin sıfıra eşit olduğunu söyleyebiliriz. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_0^l \left| \psi^N (x,t) \right|^2 dx - \int_0^l \left| \psi^N (x,0) \right|^2 dx =$$

$$= \int_{\Omega^t} \frac{da_1(x)}{dx} \left|\psi^N\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t} \mathrm{Im}(f_1\bar{\psi}^N)dxd\tau .$$

Burada $a_1(x)$ için olan (3.1.1.7) şartını kullanıp Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)} + (\mu_3+1)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau +$$

$$+\| f_1\|^2_{L_2(\Omega)} \quad , \ \forall t \in [0,T] . \tag{3.1.2.14}$$

(3.1.2.10) formülünden aşağıdaki eşitliği yazarız:

$$\psi^N(x,0) = \sum_{k=1}^N C_k^N(0)u_k(x) = \sum_{k=1}^N \varphi_{1k}u_k(x) = \varphi_1^N(x) .$$

Buradan da Parseval özdeşliğini kullanarak:

$$\left\|\psi^N(.,0)\right\|_{L_2(0,l)} = \sum_{k=1}^N \left|C_k^N(0)\right|^2 = \sum_{k=1}^N \left|\varphi_{1k}\right|^2 \le \sum_{k=1}^\infty \left|\varphi_{1k}\right|^2 = \|\varphi_1\|^2_{L_2(0,l)} \tag{3.1.2.15}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliği (3.1.2.14) de dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \|\varphi_1\|^2_{L_2(0,l)} + \| f_1\|^2_{L_2(\Omega)} + (\mu_3+1)\int_0^t \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau , \ \forall t \in [0,T].$$

Burada Gronwall lemmasını uygularsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_1(\|\varphi_1\|^2_{L_2(0,l)} + \| f_1\|^2_{L_2(\Omega)}) , \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.1.2.16}$$

Burada $c_1 > 0$ sayısı φ_1 ve f_1 den bağımsızdır.

Şimdi (3.1.2.11) sistemini aşağıdaki gibi yazalım:

$$i(\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}, u_k)_{L_2(0,l)} = \left(a_0 \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x}, \frac{du_k}{dx} \right)_{L_2(0,l)} + (a(.)\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(0,l)} -$$

$$-\left(v(.)\psi^N(.,t), u_k \right)_{L_2(0,l)} - i(a_1(.)\frac{\partial \psi^N}{\partial x}(.,t), u_k)_{L_2(0,l)} + f_k(t),\ k = \overline{1,N}. \qquad (3.1.2.17)$$

Şimdi bu denklemin her iki tarafının t ye göre türevini bulalım. Bu taktirde aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$i\left(\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t^2}, u_k \right)_{L_2(0,l)} = (a_0 \frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x \partial t}, \frac{du_k}{dx})_{L_2(0,l)} + (a(.)\frac{\partial \psi^N}{\partial t}, u_k)_{L_2(0,l)} -$$

$$-\left(v(.)\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}, u_k \right)_{L_2(0,l)} - i\left(a_1(.)\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial x}, u_k \right)_{L_2(0,l)} + \frac{df_k(t)}{dt},\ k = \overline{1,N}. \qquad (3.1.2.18)$$

Bu sistemin k. denklemini $\dfrac{\partial \overline{C}_k^N(t)}{\partial t}$ ile çarpıp k üzerinden k=1 den k=N e kadar toplayıp [0,t] aralığı üzerinden integralleyelim. Bu taktirde

$$\int_{\Omega_t} \left(i\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t^2}\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t} - a_0\left|\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial t \partial x}\right|^2 - a(x)\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 + ia_1(x)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right)\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t} + v(x)\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 \right) dx d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t} \right) dx d\tau\ ,\ \forall t \in [0,T].$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak ve elde edilen eşitliğin her iki tarafına

$$\int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau$$

terimini eklersek kolaylıkla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 \right) dxd\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx}\left|\frac{\partial \psi^N}{\partial t}\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(\frac{\partial f_1}{\partial t}\frac{\partial \overline{\psi}^N}{\partial t} \right) dxd\tau \ . \qquad (3.1.2.19)$$

$u_k(0) = u_k(l) = 0$, k=1,2,… sınır şartlarını ve (3.1.2.10) formülünü kullanırsak aşağıdaki şartları yazabiliriz:

$$\frac{\partial \psi^N(0,t)}{\partial t} = \frac{\partial \psi^N(l,t)}{\partial t} = 0 \,, \ \forall t \in (0,T) . \qquad (3.1.2.20)$$

Bu şartları kullanarak (3.1.2.19) un sol tarafındaki ikinci terimin sıfır olduğunu söyleyebiliriz. Bu nedenle (3.1.2.20) şartını kullanarak (3.1.2.19) eşitliğinden aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|\frac{\partial f_1}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+(1+\mu_3)\int_0^t \left\|\frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau, \ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.1.2.21)$$

Şimdi ilk önce bu eşitsizliğin sağ tarafındaki birinci terimi değerlendirelim. Bu amaçla (3.1.2.11) sisteminin k.denkleminde t=0 alıp elde edilen denklemi $\frac{d\overline{C}_k^N(0)}{dt}$ ile çarpıp k=1 den k=N e kadar toplayalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_0^l i\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial t}\right|^2 dx=\int_0^l\left[L\psi^N(x,0)-ia_1(x)\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x}-v(x)\psi^N(x,0)+f_1(x,0)\right]\times$$

$$\times\frac{\partial\overline{\psi}^N(x,0)}{\partial t}dx\ .$$

Bu eşitlikten Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le 4\left\|L\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+4\int_0^l|a_1(x)|\left|\frac{\partial\psi^N(x,0)}{\partial x}\right|dx+$$

$$+4\int_0^l|v(x)|^2\left|\psi^N(x,0)\right|^2dx+4\int_0^l|f_1(x,0)|^2dx\ .$$

$\psi^N(x,0)=\varphi_1^N(x)$ eşitliğini ve denklemin katsayıları üzerine konulan şartları kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le 4\left\|L\varphi^N\right\|^2_{L_2(0,l)}+4\mu_3^2\left\|\frac{\partial\varphi^N}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+$$

$$+4b_0^2\left\|\varphi^N\right\|^2_{L_\infty(0,l)}+4\left\|f_1(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}$$

yazabiliriz. Bu eşitsizlikte aşağıdaki

$$\left\|L\varphi_1^N\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_2\left\|\varphi_1\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} \qquad (3.1.2.22)$$

$$\left\|\frac{d\varphi_1^N}{dx}\right\|^2_{L_2(0,l)}\le c_3\left\|\varphi_1\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} \qquad (3.1.2.23)$$

$$\left\|\varphi_1^N\right\|_{L_\infty(0,l)}^2 \le c_4 \left\|\varphi_1\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}^2 \qquad (3.1.2.24)$$

$$\| f_1(.,t)\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_5 \| f_1\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \ , \ \forall t \in [0,T] \qquad (3.1.2.25)$$

eşitsizliklerini kullanarak bir sonraki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_6 \left(\left\|\varphi_1\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \| f_1\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right) . \qquad (3.1.2.26)$$

Burada $c_6 > 0$ sabiti φ_1, f_1 ve N den bağımsızdır. Bu kestirimi (3.1.2.21)eşitliğinde dikkate alıp Gronwall lemmasını uygularsak oradan kolaylıkla aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu görebiliriz:

$$\left\|\frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t}\right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_7 \left(\left\|\varphi_1\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \| f_1\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right) , \ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.1.2.27)$$

Burada $c_7 > 0$ sabiti φ, f ve N den bağımsızdır.

Şimdi $\dfrac{\partial \psi^N}{\partial x}$ i değerlendirelim. Bu amaçla (3.1.2.11) in k. denklemini $\lambda_k \bar{C}_k^N(t)$ ile çarpıp k üzerinden k=1 den k=N e kadar toplayıp [0,T] aralığı üzerinden integrallemiş olursak sonuçta aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t} \left(i \frac{\partial \psi^N}{\partial t} L\bar{\psi}^N - \left|L\psi^N\right|^2 + i a_1(x) \frac{\partial \psi^N}{\partial x} L\bar{\psi}^N + v(x)\psi^N L\bar{\psi}^N \right) dx d\tau =$$

$$= \int_{\Omega_t} f_1 L\bar{\psi}^N dx d\tau \ , \ \forall t \in [0,T].$$

L operatörü için olan formülü ve (3.1.2.20) şartlarını kullanırsak kısmi integrasyon formülünün yardımıyla sonuncu eşitlikten aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\left(ia_0(x)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right)\frac{\partial\overline{\psi}^N}{\partial x}+ia(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial t}\overline{\psi}^N-\left|L\psi^N\right|^2\right)dxd\tau+$$

$$\int_{\Omega_t}\left(ia_1(x)\frac{\partial\psi^N}{\partial x}L\overline{\psi}^N+v(x)\psi^N L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau=$$

$$=\int_{\Omega_t}f_1L\overline{\psi}^N dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a_0\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|^2\right)dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial t}\left(a(x)\left|\psi^N\right|^2\right)dxd\tau=$$

$$=-2\int_{\Omega_t}a_1(x)\operatorname{Re}\left(\frac{\partial\psi^N}{\partial x}L\overline{\psi}^N\right)dxd\tau-2\int_{\Omega_t}v(x)Im(\psi^N L\overline{\psi}^N)dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}\operatorname{Im}(f_1L\overline{\psi}^N)dxd\tau\ ,\ \forall t\in[0,T].$$

$a(x)$ ve $a_1(x)$ üzerine konulan şartları kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,t)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\mu_0\left\|\psi^N(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le a_0\left\|\frac{\partial\psi^N(.,0)}{\partial x}\right\|^2_{L_2(0,l)}+\mu_1\left\|\psi^N(.,0)\right\|^2_{L_2(0,l)}+$$

$$+2\mu_2\int_{\Omega_t}\left|\frac{\partial\psi^N}{\partial x}\right|\left|L\psi^N\right|dxd\tau+2\int_{\Omega_t}|v(x)|\left|\psi^N\right|\left|L\psi^N\right|dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}|f_1|\left|L\psi^N\right|dxd\tau,\ \forall t\in[0,T].$$

Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini uygulayıp $v \in V$ olduğunu dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)} \le a_0 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,0)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)} + \mu_1 \left\| \psi^N(.,0) \right\|^2_{L_2(0,l)} + \| f_1 \|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+\mu_2 \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau + (2+\mu_2) \int_0^t \left\| L\psi^N(.,\tau) \right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau +$$

$$+2b_0^2 \int_0^t \left\| \psi^N(.,\tau) \right\|^2_{L_\infty(0,l)} d\tau, \ \forall t \in [0,T] \qquad . (3.1.2.28)$$

[9,10] çalışmasından bildiğimiz eşitsizliğe göre aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_\infty(0,l)} \le \beta \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|^{1/2}_{L_2(0,l)} \left\| \psi^N(.,t) \right\|^{1/2}_{L_2(0,l)} \qquad (3.1.2.29)$$

Burada $\beta > 0$ sabiti N den bağımsızdır. Bu eşitsizliği ,(3.1.2.15) i, $\psi^N(x,0) = \varphi_1^N(x)$ formülünü ve (3.1.2.23) eşitsizliğini kullanarak (3.1.2.28) den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_8 \left(\left\| \varphi_1 \right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)} + \| f_1 \|^2_{L_2(\Omega)} \right) + c_9 \int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau +$$

$$+c_{10} \int_0^t \left\| L\psi^N(.,\tau) \right\|^2_{L_2(\Omega)} d\tau, \ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.1.2.30)$$

Burada $c_8 > 0$, $c_9 > 0$, $c_{10} > 0$ sabitleri N den bağımsızdırlar.

Şimdi sonuncu eşitsizliğin sağ tarafında yer alan sonuncu terimi değerlendirelim. Bu amaçla (3.1.2.11) sisteminin k. denklemini $\lambda_k \overline{C}_k^N(t)$ ile çarpıp k üzerinden k=1 den k=N e kadar toplarsak sonuçta aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_0^l \left| L\psi^N(x,t) \right|^2 dx = \int_0^l \left(i \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial t} + ia_1(x) \frac{\partial \psi^N(x,t)}{\partial x} + v(x)\psi^N(x,t) - f_1(x,t) \right) \times$$

$$\times L\overline{\psi}^N(x,t)dx \ , \ \forall t \in [0,T].$$

Cauchy- Bunjakovskii eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(0,l)}^2 \le 4 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial t} \right\|_{L_2(0,l)}^2 + 4\mu_2^2 \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 +$$

$$+4b_0^2 \left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_\infty(0,l)}^2 + 4\left\| f_1(.,t) \right\|_{L_2(0,l)}^2 , \ \forall t \in [0,T].$$

(3.1.2.25), (3.1.2.29) eşitsizliklerini ve (3.1.2.16), (3.1.2.27) kestirimlerini kullanarak sonuncu eşitsizlikten yararlanıp aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{11} \left(\left\| \varphi_1 \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \left\| f_1 \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right) +$$

$$+c_{12} \left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 , \forall t \in [0,T]. \qquad (3.1.2.31)$$

Burada $c_{11} > 0, \ c_{12} > 0$ sabitleri N den bağımsızdır. Bu eşitsizliği (3.1.2.30) da dikkate alırsak oradan aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_{13} \left(\left\| \varphi_1 \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}^2 + \left\| f_1 \right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}^2 \right) +$$

$$+c_{14}\int_0^t \left\| \frac{\partial \psi^N(.,\tau)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau \ , \ \forall t \in [0,t].$$

Bu eşitsizlikte Gronwall Lemmasını uygularsak aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left\| \frac{\partial \psi^N(.,t)}{\partial x} \right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{15}\left(\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right), \ \forall t \in [0,T]. \qquad (3.1.2.32)$$

Burada $c_{15} > 0$ sabiti $\varphi_1, \ f_1$ ve N den bağımsızdır. Bu kestirimin yardımıyla (3.1.2.31) den aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{16}\left(\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}^2_2(0,l)} + \|f_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right), \ \forall t \in [0,T] \qquad (3.1.2.33)$$

$c_{16} > 0$ sabiti $\varphi_1, \ f_1$ ve N den bağımsızdır.

L operatörü için olan formülden yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\| L\psi^N(.,t) \right\|^2_{L_2(0,l)} = \left\| -a_0 \frac{\partial^2 \psi^N(.,t)}{\partial x^2} + a(.)\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} \ge$$

$$\ge a_0 \left\| \frac{\partial^2 \psi^N(.,t)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,l)} - \mu_1 \left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(0,l)}.$$

Buradan

$$\left\| \frac{\partial^2 \psi^N(.,t)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(0,l)} \le \frac{1}{a_0} \left\| L\psi^N(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} + \frac{\mu_1}{a_0} \left\| \psi^N(.,t) \right\|_{L_2(0,l)}$$

yazılır. Burada (3.1.2.16) ve (3.1.2.33) kestirimlerini dikkate alırsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\| \frac{\partial^2 \psi^N(.,t)}{\partial x^2} \right\|^2_{L_2(0,l)} \leq c_{17} \left(\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right) \tag{3.1.2.34}$$

Burada $c_{17} > 0$ sabiti φ_1, f_1 ve N den bağımsızdır.

Böylece (3.1.2.16), (3.1.2.27), (3.1.2.32), (3.1.2.34) kestirimlerini taraf tarafa toplayıp [0,T] aralığı üzerinden integrallemiş olursak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|\psi^N\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)} \leq c_{18} \left(\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega)} + \|f_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)} \right). \tag{3.1.2.35}$$

Burada $c_{18} > 0$ sabiti φ_1, f_1 ve N den bağımsızdır.

$$\int_0^T \sum_{k=1}^N \left| C_k^N(t) \right|^2 + \int_0^T \sum_{k=1}^N \left(\frac{dC_k^N(t)}{dt} \right)^2 = \|\psi^N\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \psi^N}{\partial t} \right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq$$

$$\leq \|\psi^N\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}$$

eşitsizliğini kullanarak (3.1.2.35) kestiriminin yardımıyla lemmanın hükmümün geçerli olduğunu elde ederiz. Lemma (3.1.2.1) ispatlandı.

Şimdi teoremin ispatını devam ettirelim. Aşağıdaki gibi fonksiyonlar tanımlayalım:

$$l_{N,k}(t) = (\psi^N(.,t), u_k)_{L_2(0,l)}, \text{ N,k=1,2,\ldots} \tag{3.1.2.36}$$

Bu formülü, Cauchy -Bunjakovskii eşitsizliğini ve $u_k = u_k(x)$ fonksiyonlarının ortonormallik şartını kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|l_{N,k}(t)\right| \le \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \left\|u_k\right\|_{2(0,l)} = \left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T] \ .$$

Burada

$$\left\|\psi^N(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le c_{19} \left\|\psi^N\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \tag{3.1.2.37}$$

eşitsizliğini ve (3.1.2.13) kestirimini kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$\left|l_{N,k}(t)\right| \le c_{20}, \ \forall t \in [0,t], \text{ N,k=1,2,}\ldots \tag{3.1.2.38}$$

Bu bağıntı $l_{\mathrm{N,k}}(t)$, k ,N=1,2,…fonksiyonlar ailesinin [0,T] aralığında düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Şimdi bu ailenin [0,T] aralığında tespit edilmiş k ve $\forall$ N$\ge$k için eş sürekli (aynı dereceden sürekli) fonksiyonlar ailesi olduğunu gösterelim. Gerçekten (3.1.2.11) sisteminin k.denklemini $(t, t+\Delta t)$ aralığı üzerinden integralleyip kısmi integrasyon formülünü uygularsak elde edilen eşitlikten kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde edebilir:

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t) - l_{N,k}(t)\right| \le a_0 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\frac{\partial \psi^N(,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\|\frac{du_k}{dx}\right\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+\mu_2 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\frac{\partial \psi^N(,\tau)}{\partial x}\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)} + \mu_1 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+b_0 \int_t^{t+\Delta t} \left\|\psi^N(.,\tau)\right\|_{L_\infty(0,l)} d\tau \left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+\int_t^{t+\Delta t} \left\|f(.,\tau)\right\|_{L_2(0,l)} d\tau \left\|u_k\right\|_{L_2(0,l)} \ , \ \forall t \in [0,T] \tag{3.1.2.39}$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2\left(\left[0,T\right];\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)\right)$ uzayına, $\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)$ uzayı $L_\infty(0,l)$ uzayına gömüldüğünden

$$\left\|\psi^N\right\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))} \le c_{21}\left\|\psi^N\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \tag{3.1.2.40}$$

eşitsizliğini yazabiliriz. Bu eşitsizliği (3.1.2.13) kestirimini ve u_k lar için kabullendiğimiz (3.1.2.9) şartını kullanırsak (3.1.2.39) dan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|l_{N,k}(t+\Delta t)-l_{N,k}(t)\right| \le c_{22}d_k\left|\Delta t\right|^{1/2},\ \forall t\in[0,T],\ \text{N,k=1,2,…} \tag{3.1.2.41}$$

Burada $c_{22}>0$, k ve N, k ve Δt den bağımsızdır. Sonuncu eşitsizlikten k tesbit edildiğinde $\forall N \ge k$ için $\left\{l_{N,k}(t)\ \right\}$ fonksiyonlar ailesinin [0,T] aralığında eş sürekli olduğu elde edilir. Böylece $\left\{l_{N,k}(t)\ \right\}$ fonksiyonlar ailesinin [0,T] aralığında düzgün sınırlı ve eş sürekli olduğu ispatlandı. Bu taktirde köşegen sürecin yardımıyla öyle N_m ,m=1,2,…alt dizisi seçebiliriz ki bu alt dizi üzerinden $\left\{l_{N_m,k}(t)\right\}$ dizisi [0,T] aralığında her bir k=1,2,..için $l_k(t)$ fonksiyonuna yakınsar. $l_k(t)$ fonksiyonlarını kullanarak aşağıdaki gibi $\psi(x,t)$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$\psi(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} l_k(t)u_k(x) \tag{3.1.2.42}$$

Şimdi $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisinin bu $\psi(x,t)$ fonksiyonuna [0,T] aralığında düzgün olarak $L_2(0,l)$ de zayıf yakınsak olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten $\forall g\in L_2(0,l)$ için $\forall t\in[0,T]$ için [10] çalışmasındaki yöntemi kullanarak $\forall \varepsilon>0$ verildiğinde

$$\left|(\psi^{N_m}(.,t)-\psi(.,t),g)_{L_2(0,l)}\right|<\varepsilon \qquad (3.1.2.43)$$

yazabiliriz. Buradan gereken hükmü kolaylıkla elde ederiz. (3.1.2.13) kestirimine dayanarak $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ alt dizisinden (3.1.2.42) formülüyle tanımlanan $\psi(x,t)$ fonksiyonuna $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan alt diziyi seçebiliriz. Kolaylık olsun diye $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan alt diziyi $\left\{\psi^{N_m}(x,t)\right\}$ ile gösterelim. Bu taktirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $m\to\infty$ için

$$\psi^{N_m}\to\psi \quad L_2(\Omega)\text{ ’da zayıf} \qquad (3.1.2.44)$$

$$\frac{\partial\psi^{N_m}}{\partial x}\to\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad L_2(\Omega)\text{ ’da zayıf}, \qquad (3.1.2.45)$$

$$\frac{\partial^2\psi^{N_m}}{\partial x^2}\to\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} \quad L_2(\Omega)\text{ ’da zayıf}, \qquad (3.1.2.46)$$

$$\frac{\partial\psi^{N_m}}{\partial t}\to\frac{\partial\psi}{\partial t} \quad L_2(\Omega)\text{ ’da zayıf} \qquad (3.1.2.47)$$

dir. Diğer yandan [9,10,13] çalışmasından bildiğimiz kompakt gömülme teoremine göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(0,T;L_\infty(0,l))$ uzayına kompakt gömülür. Bu taktirde (3.1.2.44)-(3.1.2.47) limit bağıntılarını sağlayan $\left\{\psi^{N_m}\right\}$ alt dizisi için aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $m\to\infty$ için

$$\left\|\psi^{N_m}-\psi\right\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))}\to 0 \qquad (3.1.2.48)$$

dir.

Şimdi $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1.2.1)- (3.1.2.3) probleminin çözümü olduğunu ispatlayalım. İlk önce $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.2.1) denklemini $\forall(x,t) \in \overset{0}{\Omega}$ için sağladığını gösterelim. Bu amaçla (3.1.2.11) sisteminin k. denklemini [0,T] aralığında sürekli olan $\forall \overline{\eta}_k(t)$ fonksiyonuyla çarpıp k üzerinden k=1 den k= $N^{'} \le N$ e kadar toplayıp , [0,T] aralığı üzerinden integralleyelim. Bu taktirde aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_\Omega [i\frac{\partial \psi^N}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \psi^N}{\partial x^2} - a(x)\psi^N + ia_1(x)\frac{\partial \psi^N}{\partial x} +$$

$$+v(x)\psi^N - f_1(x,t)]\overline{\eta}^{N^{'}}(x,t)dxdt = 0 \qquad (3.1.2.49)$$

$$\forall \overline{\eta}^{N^{'}}(x,t) = \sum_{k=1}^{N^{'}} \eta_k(t)u_k(x). \qquad (3.1.2.50)$$

(3.1.2.44)- (3.1.2.48) limit bağıntılarını kullanarak (3.1.2.49) integral özdeşliğinde N= N_m alıp $m \to \infty$ için limite geçersek aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_\Omega \left[i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi + ia_1(x)\frac{\partial \psi}{\partial x} + v(x)\psi - f_1(x,t) \right] \times$$

$$\times \overline{\eta}^{N^{'}}(x,t)dxdt = 0. \qquad (3.1.2.51)$$

Bilindiği üzere (3.1.2.50) biçiminde olan fonksiyonlar $L_2(\Omega)$ uzayında her yerde yoğundur. Bundan dolayı $N^{'} \to \infty$ için (3.1.2.51) integral özdeşliğinde limite geçersek $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_\Omega [i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi + ia_1(x)\frac{\partial \psi}{\partial x} + v(x)\psi - f_1(x,t)]\overline{\eta}(x,t)dxdt = 0.$$

Buradan da $\psi = \psi(x,t)$ (3.1.2.1) denklemini $\overset{0}{\forall}(x,t) \in \Omega$ için sağlandığını hükmedebiliriz.

Şimdi $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.2.2) başlangıç şartını sağladığını ispatlayalım.

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $C^0([0,T], L_2(0,l))$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$\left\| \psi^{N_m}(.,t) - \psi(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} \to 0 ,\ \forall t \in [0,T]$$

limit bağıntısını yazabiliriz. t=0 alırsak $m \to \infty$ için

$$\left\| \psi^{N_m}(.,0) - \psi(.,0) \right\|_{L_2(0,l)} \to 0$$

olur. Bu limit bağıntısını, $\psi^{N_m}(x,0) = \varphi_1^{N_m}(x), \quad x \in (0,l)$ eşitliğini göz önünde bulundurup

$$\left\| \psi(.,0) - \varphi_1 \right\|_{L_2(0,l)} \le \left\| \psi(.,0) - \psi^{N_m}(.,0) \right\|_{L_2(0,l)} + \left\| \psi^{N_m}(.,0) - \varphi_1 \right\|_{L_2(0,l)}$$

eşitsizliğinde limite geçersek kolaylıkla

$$\left\| \psi(.,0) - \varphi_1 \right\|_{L_2(0,l)} = 0$$

bağıntısını elde ederiz. Buradan da $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun $\overset{0}{\forall} x \in (0,l)$ için (3.1.2.2) başlangıç şartını sağladığını görebiliriz. Nihayet $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (3.1.2.3) sınır şartlarını sağladığını ispatlayalım.

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(0,T)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$\left\| \psi^{N_m}(s,.) - \psi(s,.) \right\|_{L_2(0,T)} \to 0 \text{, s=0,l}$$

olur. Bu limit bağıntılarını ve $\psi^{N_m}(s,t) = 0$, $s = 0, l$, t$\in (0,T)$ eşitliğini dikkate alıp

$$\left\| \psi(s,.) \right\|_{L_2(0,T)} \le \left\| \psi(s,.) - \psi^{N_m}(s,.) \right\|_{L_2(0,T)} + \left\| \psi^{N_m}(s,.) \right\|_{L_2(0,T)}$$

eşitsizliğinde $m \to \infty$ için limite geçersek

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \ \ \forall t \in (0,T)$$

sınır şartlarını elde ederiz. Böylece $\psi(x,t)$ fonksiyonunun (3.1.2.1)- (3.1.2.3) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ sınıfından çözümü olduğu ispatlandı. (3.1.2.13) kestiriminde $N = N_m$ alıp $m \to \infty$ için limite geçersek ve $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alırsak (3.1.2.4) kestiriminin geçerli olduğunu ispatlarız. Nihayet bu kestirimi kullanarak çözümün bir tek olduğunu da hükmedebiliriz. Teorem 3.1.2.1 ispatlandı.

Bu teoremin yardımıyla (3.1.2.1) denklemi için 1.çeşit başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan hemen hemen çözümün varlığı ve bir tekliği ispatlandı. Şimdi 2.çeşit başlangıç sınır değer problemi için teorem 3.1.2.1 in aynısını elde etmek için aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + i a_1(x)\frac{\partial \psi}{\partial x} - a(x)\psi + v(x)\psi = f_2(x,t),\ (x,t) \in \Omega, \quad (3.1.2.52)$$

$$\psi(x,0) = \varphi_2(x),\ x \in (0,l), \quad (3.1.2.53)$$

$$\frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi(l,t)}{\partial x} = 0,\ t \in [0,T]. \quad (3.1.2.54)$$

Burada i=$\sqrt{-1}$, $l>0, T>0, a_0>0$ verilen sayılar, $a(x)$, $a_1(x)$ fonksiyonları (3.1.1.6), (3.1.1.7) şartlarını sağlar, $\varphi_2(x,t)$, $f_2(x,t)$ fonksiyonları ise (3.1.1.8), (3.1.1.9) şartlarını sağlar. $\forall v \in V$ için (3.1.2.52)- (3.1.2.54) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olarak $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan, (3.1.2.52)- (3.1.2.54) şartlarını $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega$ için sağlayan $\psi=\psi(x,t)=\psi(x,t;v)$ fonksiyonu anlaşılır.

Teorem 3.1.2.2: Farz edelim ki a(x), $a_1(x)$, $\psi_2(x)$, $f_2(x,t)$ fonksiyonları (3.1.1.6)-(3.1.1.9) şartlarını sağlasın. Bu taktirde her bir $v\in V$ için (3.1.2.52)- (3.1.2.54) başlangıç sınır değer probleminin $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayına ait olan bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le c_{23}(\|\varphi_2\|^2_{W_2^2(0,l)} + \|f_2\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}). \tag{3.1.2.55}$$

Burada $c_{23}>0$, ψ_2 ve f_2 den bağımsızdır.

Bu teoremin ispatı teorem 3.1.2.1 de olduğu gibi Galerkin yöntemi ile gerçekleştirilir. Sadece $W_2^{2,1}(0,l)$ de temel fonksiyonlar olarak

$$LX=-a_0\frac{d^2X}{dx^2}+a(x)X=\lambda X\ ,\ X^{'}(0)=X^{'}(l)=0$$

özdeğer probleminin $\lambda=\lambda_k$, k=1,2,… özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonları alınır. Kalan işlemler yani teoremin ispatı Teorem 3.1.2.1. deki gibidir.

Teorem 3.1.2.1 ve Teorem 3.1.2.2 nin hükümlerini birleştirerek (3.1.1.2)- (3.1.1.5) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği için aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 3.1.2.3: Farz edelim ki $a(x)$, $a_1(x)$, $\varphi_k(x)$, $f_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.1.6)- (3.1.1.9) şartlarını sağlasın. Bu taktirde her bir $v \in V$ için (3.1.1.2)- (3.1.1.5) probleminin $\psi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $\psi_2 \in W_2^{2,1}(\Omega)$ olan bir tek hemen hemen çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

$$\|\psi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_{24}(\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \|f_1\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}), \tag{3.1.2.56}$$

$$\|\psi_2\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le c_{25}(\|\varphi_2\|^2_{W_2^{2}(0,l)} + \|f_2\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}). \tag{3.1.2.57}$$

Burada c_{24}>0, c_{25}>0 sabitleri sırasıyla φ_1, f_1 ve φ_2, f_2 den bağımsızdır.

3.1.3 Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu alt bölümde (3.1.1.1)- (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığıyla ilgili olan soruları inceleyeceğiz. İlk önce $\alpha > 0$ olduğunda optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 3.1.3.1: Farz edelim ki teorem 3.1.2.3 ün şartları sağlansın. Bu taktirde $H = L_2(0,l)$ uzayında her yerde yoğun olan G alt kümesi vardır ki $\forall \omega \in G$ için ve $\alpha > 0$ için (3.1.1.1)- (3.1.1.5) optimal kontrol problemi bir tek çözüme sahiptir.

İspat: Önce

$$J_0(v) = \|\psi_1 - \psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{3.1.3.1}$$

fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Bu amaçla farzedelim ki $\Delta v \in H$ elemanı $v + \Delta v \in V$ olacak biçimde $\forall v \in V$ ye verilen artış olsun. Bu taktirde

$$\psi_k = \psi_k(x,t) = \psi_k(x,t;v),\ \text{k=1,2}$$

fonksiyonları

$$\Delta\psi_k = \psi_k(x,t;v+\Delta v) - \psi_k(x,t;v),\ \text{k=1,2}$$

artışına sahip olur. Burada

$$\psi_k = \psi_k(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v),\ \text{k=1,2},\ \psi_{\Delta k} = \psi_{\Delta k}(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v+\Delta v),\ \text{k=1,2}$$

fonksiyonları (3.1.1.2)- (3.1.1.5) başlangıç sınır değer probleminin sırasıyla $v \in V$ ve $v+\Delta v \in V$ ye karşılık gelen çözümleridir. (3.1.1.2)- (3.1.1.5) şartlarından $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarının aşağıdaki başlangıç sınır değer probleminin çözümü olduğu açıktır:

$$i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial x} - a(x)\Delta\psi_k + \left(v(x)+\Delta v(x)\right)\Delta\psi_k =$$

$$= -\Delta v(x)\psi_k(x,t;v),\ k=1,2,\ (x,t)\in\Omega, \qquad (3.1.3.2)$$

$$\Delta\psi_k(x,0) = 0, k=1,2\ ,\ x\in(0,l), \qquad (3.1.3.3)$$

$$\Delta\psi_1(0,t) = \Delta\psi_1(l,t) = 0,\ t\in\left(0,T\right) \qquad (3.1.3.4)$$

$$\frac{\partial\Delta\psi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial\Delta\psi_2(l,t)}{\partial x} = 0,\ t\in\left(0,T\right) \qquad (3.1.3.5)$$

Şimdi bu problemin çözümü için kestirim elde edelim. Bu amaçla (3.1.3.2) denkleminin her iki tarafını $\Delta\bar{\psi}_k(x,t)$ fonksiyonu ile çarpıp $\Omega_t = \left(0,l\right)\times\left(0,t\right)$ bölgesi üzerinden integralleyelim. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}\Delta\bar{\psi}_k+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2}\Delta\bar{\psi}_k+ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial x}\Delta\bar{\psi}_k-a(x)\left|\Delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau+$$

$$+\int_{\Omega_t}\left(\left(v(x)+\Delta v(x)\right)\left|\Delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau$$

$$=-\int_{\Omega_t}\Delta v(x)\psi_k(x,\tau)\Delta\psi_k(x,\tau)dxd\tau\,,\ \forall t\in[0,T],\ k=1,2\,.$$

Burada (3.1.3.4), (3.1.3.5) sınır şartlarını kullanarak sol tarafın ikinci teriminde kısmi integrasyon formülünü uygularsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}\Delta\bar{\psi}_k-a_0\left|\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial x}\right|+ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial x}\Delta\bar{\psi}_k-a(x)\left|\Delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau+$$

$$+\int_{\Omega_t}\left(\left(v(x)+\Delta v(x)\right)\left|\Delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau=$$

$$=-\int_{\Omega_t}\Delta v(x)\psi_k(x,\tau)\Delta\psi_k(x,\tau)dxd\tau\,,\ \forall t\in[0,T]\ ,\ k=1,2\,.$$

Bu eşitlikten kompleks eşleniğini çıkarırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}\Delta\bar{\psi}_k+\frac{\partial\Delta\bar{\psi}_k}{\partial t}\Delta\psi_k\right)dxd\tau+$$

$$+\int_{\Omega_t}a_1(x)\left(\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial x}\Delta\bar{\psi}_k+\frac{\partial\Delta\bar{\psi}_k}{\partial x}\Delta\psi_k\right)dxd\tau=$$

$$=2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\psi_k(x,\tau)\Delta\bar{\psi}_k(x,\tau)\right)\Delta v(x)dxd\tau\,,\ \forall t\in[0,T],\ k=1,2\,.$$

Bu eşitliğin her iki tarafına

$$\int_{\Omega_t} \frac{da_1(x)}{dx}\left|\Delta\psi_k\right|^2 dxd\tau$$

terimini ekleyip çıkaralım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega_t}\left(\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}\Delta\bar{\psi}_k+\frac{\partial\Delta\bar{\psi}_k}{\partial t}\Delta\psi_k\right)dxd\tau+\int_{\Omega_t}\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\left|\Delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau=$$

$$=\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\Delta\psi_k\right|^2 dxd\tau+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\psi_k(x,\tau)\Delta\bar{\psi}_k(x,\tau)\Delta v(x)dxd\tau\ ,\ \forall t\in[0,T],k=1,2.$$

Bu eşitliği sol tarafındaki ikinci terim $\Delta\psi_1(0,t)=\Delta\psi_1(l,t)$, $a_1(0)=a_1(l)=0$ şartları altında sıfıra dönüşen terimdir. Bunu göz önünde bulundurursak $\Delta\psi_k(x,0)=0$, k=1,2 şartını kullanırsak son eşitliği aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\int_0^l\left|\Delta\psi_k(x,t)\right|^2dx=\int_{\Omega_t}\frac{da_1(x)}{dx}\left|\Delta\psi_k\right|^2 dxd\tau+$$

$$+2\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\psi_k(x,\tau)\Delta\bar{\psi}_k(x,\tau)\Delta v(x)dxd\tau,\ \forall t\in[0,T],\text{ k=1,2.}$$

Burada $a_1(x)$ fonksiyonu için (3.1.1.7) şartını uygularsak Cauchy- Bunjakovskii eşitsizliğinden yararlanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\Delta\psi_k(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)}\le\left(1+\mu_3\right)\int_0^t\left\|\Delta\psi_k(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)}d\tau+$$

$$+\int_{\Omega_t}\left(\left|\Delta v(x)\right|\left|\psi_k(x,\tau)\right|\right)^2dxd\tau,\ \text{k=1,2.} \qquad (3.1.3.6)$$

Şimdi bu eşitliğin sağ tarafında yer alan ikinci terimi değerlendirelim. $\Delta v\in L_2(0,l)$ olduğundan söz konusu terimi aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\int\limits_{\Omega_t} \left(|\Delta v(x)||\psi_k(x,\tau)|\right)^2 dx \le$$

$$\le \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)} \int_0^T \max_{x\in(0,l)} |\psi_k(x,\tau)|^2 \, d\tau, \ \forall t \in [0,T]. \quad (3.1.3.7)$$

$\psi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $\psi_2 \in W_2^{2,1}(\Omega)$ olduğundan gömülme teoremine göre $\psi_1 \in L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(0,l))$, $\psi_2 \in L_2(0,T;W_2^1(0,l))$ bağıntıları geçerlidir. Diğer yandan $\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ ve $W_2^1(0,l)$ uzayları $C[0,l]$ uzayına gömülür. Bu söylentileri dikkate aldığımızda

$$\|\psi_1\|^2_{L_2(0,T;C(0,l))} \le c_{26} \|\psi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}, \quad (3.1.3.8)$$

$$\|\psi_2\|^2_{L_2(0,T;C(0,l))} \le c_{27} \|\psi_2\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)} \quad (3.1.3.9)$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Burada $c_{26}>0$, $c_{27}>0$ sırasıyla ψ_1,ψ_2 den bağımsız sabitlerdir. Bu eşitsizlikleri ve (3.1.2.56), (3.1.2.57) kestirimlerini kullanırsak (3.1.3.7) eşitsizliklerinden

$$\int\limits_{\Omega_t} \left(|\Delta v(x)||\psi_k(x,\tau)|\right)^2 dx d\tau \le c_{28} \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T], \text{ k=1,2}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu buluruz. Bu eşitsizliği (3.1.3.6) da dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\|\Delta\psi_k(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le (1+\mu_3) \int_0^t \|\Delta\psi_k(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)} d\tau +$$

$$+c_{28} \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}, \ \forall t \in [0,T], \text{ k=1,2.}$$

Burada Gronwall Lemmasını uygularsak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\|\Delta\psi_k(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{29}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)},\ \forall t\in[0,T]\ ,\ \text{k=1,2.} \tag{3.1.3.10}$$

Şimdi fonksiyonelin $\forall v \in V$ elemanı üzerinde artışını bulalım. (3.1.3.1) formülünü kullanırsak fonksiyonelin artışı için aşağıdaki formülü yazabilir:

$$\Delta J_0(v) = \Delta J_0(v+\Delta v) - J_0(v) =$$

$$= 2\int_\Omega \mathrm{Re}\left[\left(\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)\right)\left(\Delta\overline{\psi}_1(x,t)-\Delta\overline{\psi}_2(x,t)\right)\right]dxdt +$$

$$+\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} - 2\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1(x,t)\Delta\overline{\psi}_2(x,t)\right)dxd\tau \tag{3.1.3.11}$$

Burada Cauchy- Bunjakovskii eşitsizliğini kullanıp değerlendirme yaparsak ve (3.1.2.56), (3.1.2.57) kestirimlerini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\|\Delta J_0(v)\| \le c_{30}\left(\|\Delta\psi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}\right).$$

Burada (3.1.3.10) kestirimini kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\|\Delta J_0(v)\| \le c_{31}\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} + \|\Delta v\|^2_{L_2(0,l)}\right). \tag{3.1.3.12}$$

Burada c_{31}>0 sayısı Δv den bağımsızdır. Son bağıntıdan fonksiyonelin $\forall v \in V$ elemanı üzerinde sürekli olduğunu görebiliriz. Yani

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,l)} \to 0 \text{ için } |\Delta J_0(v)| \to 0$$

olur. $v \in V$ herhangi eleman olduğundan $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesinde sürekli olduğu elde edilir. Diğer taraftan $\forall v \in V$ için $J_0(v) \ge 0$ şartı sağlanır. Yani

$J_0(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde alttan sınırlıdır. V kümesi $L_2(0,l)$ de kapalı, sınırlı, konveks küme, $H = L_2(0,l)$ uzayı ise düzgün konveks uzay olduğundan [3] çalışmasından bildiğimiz teoremin (Kuramsal Temeller, Teorem 2.26)tüm şartlarının sağlandığını hükmedebiliriz. Bu teoreme dayanarak H uzayında her yerde yoğun olan G alt kümesinin var olduğunu ve bu alt kümeden seçilen herhangi $\omega \in G$ ve $\alpha > 0$ için (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu ispatlarız. Teorem 3.1.3.1 ispatlandı.

Şimdi $\alpha \geq 0$ ve $\omega \in H$ için (3.1.1.1)-(3.1.1.5) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğunu ispatlayalım.

Teorem 3.1.3.2: Farz edelim ki teorem 3.1.2.3 ün şartı sağlansın ve $\alpha \geq 0$ verilen sayı olsun. Bu taktirde $\forall \omega \in H$ için (3.1.1.1)- (3.1.1.5) optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahiptir.

İspat: Herhangi $\{v^m\} \subset V$ minimalleştirici dizisini alalım.

$$\lim_{m\to\infty} J_{\alpha *}(v^m) = J_{\alpha} = \inf_{v\in V} J_{\alpha}(v).$$

Farz edelim ki $\psi_k^m(x,t) = \psi_k(x,t;v^m)$,k=1,2,m=1,2,…olsun.Her bir $v^m \in V$ olduğundan teorem 3.1.2.3 e göre (3.1.1.2)- (3.1.1.5) başlangıç sınır değer probleminin $\psi_k^m(x,t)$, k=1,2 çözümüne sahip olduğunu ve bu çözüm için aşağıdaki kestirimlerin geçerli olduğunu hükmedebiliriz:

$$\left\|\psi_1^m\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_{24}\left(\left\|\varphi_1\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \left\| f_1\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) = c_{32}\,, \tag{3.1.3.13}$$

$$\left\|\psi_2^m\right\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_{25}\left(\left\|\varphi_2\right\|^2_{W_2^{2}(0,l)} + \left\| f_2\right\|^2_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) = c_{33}\,,\ \text{m=1,2,…} \tag{3.1.3.14}$$

Burada $c_{32}>0, c_{33}>0$ sabitler m den bağımsızdır. V kümesi $L_2(0,l)$ uzayında kapalı, sınırlı, konveks küme ve $L_2(0,l)$ uzayı ise refleksive banach uzay olduğundan bu küme $L_2(0,l)$ de zayıf kompakt ve zayıf kapalı küme olur. Bu nedenle $\{v^m\}\subset V$ dizisinden $v\in V$ ye zayıf yakınsayan alt diziyi seçebiliriz. Kolaylık olsun diye bu zayıf yakınsayan alt diziyi yine de $\{v^m\}$ ile gösterelim. Bu taktirde $\forall q\in L_2(0,l)$ için aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^l v^m(x)q(x)dx=\int_0^l v(x)q(x)dx \tag{3.1.3.15}$$

(3.1.3.13) ve (3.1.3.14) kestirimlerinden $\{\psi_1^m(x,t)\}$, $\{\psi_2^m(x,t)\}$ dizilerinin sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ ve $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarında düzgün sınırlı olduğunu elde ederiz. Bu nedenle $\{\psi_1^m(x,t)\}$ ve $\{\psi_2^m(x,t)\}$ dizilerinden sırasıyla $\psi_1(x,t)$ ve fonksiyonlarına $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan alt dizilerini seçebiliriz ki bu alt dizileri de kolaylık olsun diye $\{\psi_1^m(x,t)\},\{\psi_2^m(x,t)\}$ ile gösterelim. Bu taktirde aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz: $m\to\infty$ için

$$\psi_k^m\to\psi_k\ ,\ L_2(\Omega)\text{ 'da zayıf,} \tag{3.1.3.16}$$

$$\frac{\partial\psi_k^m}{\partial x}\to\frac{\partial\psi_k}{\partial x}\ ,\ L_2(\Omega)\text{ 'da zayıf,} \tag{3.1.3.17}$$

$$\frac{\partial^2\psi_k^m}{\partial x^2}\to\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}\ ,\ L_2(\Omega)\text{ 'da zayıf,} \tag{3.1.3.18}$$

$$\frac{\partial\psi_k^m}{\partial t}\to\frac{\partial\psi_k}{\partial t}\ ,\ L_2(\Omega)\text{ 'da zayıf, k=1,2} \tag{3.1.3.19}$$

dir.

Şimdi limit fonksiyonları olan $\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarının (3.1.1.2)- (3.1.1.5) başlangıç sınır değer probleminin üstte tanımladığımız anlamda çözümü olduğunu gösterelim. Bu amaçla ilk önce $\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarının (3.1.1.2) denklemlerini $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega$ için sağladığını gösterelim.(3.1.3.16)- (3.1.3.19) limit bağıntılarını kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz. m$\to\infty$ için $\forall\eta\in L_2(\Omega)$ olduğunda

$$\int_\Omega\left(i\frac{\partial\psi_k^m}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_k^m}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi_k^m}{\partial x}-a(x)\psi_k^m\right)\bar{\eta}\,dxdt\to$$

$$\to\int_\Omega\left(i\frac{\partial\psi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\psi_k}{\partial x}-a(x)\psi_k\right)\bar{\eta}\,dxdt,\ \text{k=1,2}\ . \qquad (3.1.3.20)$$

dir.

Şimdi $m\to\infty$ için $\forall\eta\in L_2(\Omega)$ olduğunda

$$\int_\Omega v^m(x)\psi_k^m(x,t)\bar{\eta}(x,t)dxdt\to$$

$$\to\int_\Omega v(x)\psi_k(x,t)\bar{\eta}(x,t)dxdt,\ \text{k=1,2.} \qquad (3.1.3.21)$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu ispatlayalım. Aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğu açıktır:

$$\int_\Omega v^m(x)\psi_k^m(x,t)\bar{\eta}(x,t)dxdt=$$

$$=\int_\Omega(v^m(x)-v(x))\psi_k(x,t)\bar{\eta}\,dxdt+$$

$$+\int_{\Omega} v^m(x)\left(\psi_k^m(x,t)-\psi_k(x,t)\right)\overline{\eta}(x,t)dxdt+$$

$$+\int_{\Omega} v(x)\psi_k(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt,\ \text{k=1,2} . \tag{3.1.3.22}$$

(3.1.3.15) limit bağıntısını ve $\psi_k \in W_2^{2,1}(\Omega)$, k=1,2, $\eta \in L_2(\Omega)$ şartını sağlayan $\psi_k(x,t)\eta(x,t)$ fonksiyonları için

$$q(x)=\int_0^T \psi_k(x,t)\overline{\eta}(x,t)dt$$

fonksiyonunun $L_2(0,l)$den olduğunu dikkate alırsak (3.1.3.22) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terimin m$\to\infty$ için limitinin sıfır olduğunu söyleyebiliriz. Yani

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega}\left(v^m(x)-v(x)\right)\psi_k(x,t)\overline{\eta}(x,t)dxdt=0\ \text{, k=1,2} \tag{3.1.3.23}$$

[Lions, (9,10,13)] çalışmasından bildiğimiz lemmaya göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega), W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayları $L_2(0,T;L_\infty(0,l))$ uzayına kompakt gömüldüğünden aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz: m$\to\infty$ için

$$\left\|\psi_k^m-\psi_k\right\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))}\to 0\ \text{, k=1,2} \tag{3.1.3.24}$$

dir.

Şimdi bu limit bağıntısını kullanarak (3.1.3.22) nin sağ tarafındaki ikinci terimin limitini bulmaya çalışalım. Bu terimi değerlendirirsek aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\left|\int_{\Omega} v^m(x)\left(\psi_k^m(x,t)-\psi_k(x,t)\right)\overline{\eta}(x,t)dxdt\right|\leq$$

$$\left\|v^m\right\|_{L_2(0,l)} \left\|\eta\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\psi_k^m - \psi_k\right\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))} \leq$$

$$\leq b_0 \left\|\eta\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\psi_k^m - \psi_k\right\|_{L_2(0,T;L_\infty(0,l))}$$

(3.1.3.24) limit bağıntısını kullanıp bu eşitsizliğin her iki tarafında limite geçersek (3.1.3.22) nin sağ tarafındaki terimin limitinin sıfır olduğu elde edilir. Yani

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega v^m(x)\left(\psi_k^m(x,t) - \psi_k(x,t)\right)\overline{\eta}(x,t)dxdt = 0, \text{ k=1,2.} \qquad (3.1.3.25)$$

Böylece (3.1.3.23), (3.1.3.25) limit bağıntılarını kullanıp (3.1.3.22) nin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçersek (3.1.3.21) nin geçerli olduğunu elde ederiz. Nihayet (3.1.3.20), (3.1.3.21) limit bağıntılarını kullanıp

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial \psi_k^m}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k^m}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial \psi_k^m}{\partial x} - a(x)\psi_k^m + v^m(x)\psi_k^m - f_k(x,t) \right) \times$$

$$\times \overline{\eta}(x,t)dxdt = 0, \text{ k=1,2}$$

integral özdeşliklerinde $\forall \eta \in L_2(\Omega)$ olduğunda m$\to\infty$ için limite geçersek aşağıdaki integral özdeşliğini elde ederiz:

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial^2 x} + ia_1(x)\frac{\partial \psi_k}{\partial x} - a(x)\psi_k + v(x)\psi_k - f_k(x,t) \right) \times$$

$$\times \overline{\eta}(x,t)dxdt = 0, \text{ k=1,2.}$$

Buradan da $\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarının (3.1.1.2) denklemlerini sağladığını elde ediyoruz.

Şimdi $\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarının (3.1.1.3) başlangıç şartlarını sağladığını ispatlayalım.

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ ve $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayları $C^0\left(\left[0,T\right], L_2(0,l)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünden aşağıdaki limit bağıntısını yazabiliriz. $m \to \infty$ için

$$\left\|\psi_k^m(x,t) - \psi_k(x,t)\right\|_{L_2(0,l)} \to 0, \text{ k=1,2} \tag{3.1.3.26}$$

dir. Bu limit bağıntısını t=0 için ve

$$\psi_{\mathrm{k}}^{\mathrm{m}}(x,0) = \varphi_k(x), \text{ k=1,2, x} \in (0,l)$$

başlangıç şartlarını kullanırsak,

$$\left\|\psi_k(.,0) - \varphi_k\right\|_{L_2(0,l)} \le \left\|\psi_k(.,0) - \psi_k^m(.,0)\right\|_{L_2(0,l)} +$$

$$+\left\|\psi_k^m(.,0) - \varphi_k\right\|_{L_2(0,l)}, \text{ k=1,2}$$

eşitsizliğinden $m \to \infty$ için limite geçersek

$$\left\|\psi_k(.,0) - \varphi_k\right\|_{L_2(0,l)} = 0$$

elde edilir. Buradan da

$$\psi_k(x,0) = \varphi_k(x), \text{ k=1,2 }, \ \overset{0}{\forall} x \in (0,l)$$

başlangıç şartları bulunur. Nihayet $\psi_k(x,t)$ limit fonksiyonlarının (3.1.3.4), (3.1.3.5) sınır şartlarını sağladığını ispatlayalım. İlk önce (3.1.3.4) ü alalım. Fonksiyonların izi hakkındaki teoreme göre $\psi_1^m \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ fonksiyonlarının $L_2(0,T)$ den olan izi vardır ve aşağıdaki limit bağıntıları geçerlidir. $m \to \infty$ için

$$\left\|\psi_1^m(s,.)-\psi_1(s,.)\right\|_{L_2(0,T)} \to 0\text{, s=0,}l \qquad (3.1.3.27)$$

olur. Bu limit bağıntılarını,

$$\psi_1^m(0,t)=\psi_1^m(l,t)=0 \text{ , t} \in (0,T)$$

sınır şartlarını kullanıp

$$\left\|\psi_1(s,.)\right\|_{L_2(0,T)} \le \left\|\psi_1(s,.)-\psi_1^m(s,.)\right\|_{L_2(0,T)} +$$

$$+\left\|\psi_1^m(s,.)\right\|_{L_2(0,T)}\text{, s=0,}l$$

eşitsizliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçersek

$$\left\|\psi_1(s,.)\right\|_{L_2(0,T)} = 0\text{, s=0,}l$$

bağıntısını elde ederiz. Buradan da

$$\psi_1(0,t)=\psi_1(l,t)=0\text{, } \overset{0}{\forall} t \in (0,T)$$

sınır şartların geçerli olduğu elde edilir. Şimdi (3.1.3.5) şartının sağlandığını ispatlayalım.

$\psi_2^m(x,t)$, m=1,2… fonksiyonları $W_2^{2,1}(\Omega)$ dan olduğundan gömülme teoremine göre $m \to \infty$ için

$$\frac{\partial \psi_2^m(s,t)}{\partial x} \to \frac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial x}\text{, s=0,}l\text{, } L_2(0,T) \text{ de zayıf}$$

limit bağlantıları geçerlidir. Yani $\forall \eta \in L_2(0,T)$ için

$$\lim_{m\to\infty}\int_0^T \frac{\partial \psi_2^m(s,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt = \int_0^T \frac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt \text{, s=0,} l$$

dir. Bu limit bağıntılarını ve

$$\frac{\partial \psi_2^m(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2^m(l,t)}{\partial x} = 0 \text{, t} \in (0,T) \text{, m=1,2,} \ldots$$

sınır şartlarını dikkate alıp

$$\int_0^T \frac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt = \int_0^T \left(\frac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2^m(s,t)}{\partial x} \right)\overline{\eta}(t)dt +$$

$$+\int_0^T \frac{\partial \psi_2^m(s,t)}{\partial x} dt \quad \text{, s=0,} l$$

eşitliğinin her iki tarafında da limite geçersek $\forall \eta \in L_2(0,T)$ için

$$\int_0^T \frac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial x}\overline{\eta}(t)dt = 0 \text{, s=0,} l$$

eşitliklerini elde ederiz. Buradan da

$$\frac{\partial \psi_2(s,t)}{\partial x} = 0 \text{, } \overset{0}{\forall} t \in (0,T) \text{, s=0,} l$$

elde edilir. Yani $\psi_2(x,t)$ limit fonksiyonu (3.1.1.5) sınır şartını sağlar. Böylece $\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarının (3.1.1.1)- (3.1.1.5) başlangıç sınır değer probleminin

$\{v^m\} \subset V$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v = v(x) \in V$ ye karşılık gelen çözümü olduğu ve bu fonksiyonların sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ ve $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarına ait olduğu elde edilir. Yani

$$\psi_k = \psi_k(x,t) = \psi_k(x,t;v)\text{, k=1,2}$$

dir. Bu fonksiyonlar için (3.1.2.56), (3.1.2.57) kestirimlerinin geçerli olduğu da (3.1.3.13), (3.1.3.14) den limite geçilerek ve $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarında normun alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate almakla elde edilir.

$\{v^m\} \subset V$ minimalleştirici alt dizisinin $H = L_2(0,l)$ de, $\{\psi_k^m(x,t)\}$, k=1,2 dizilerinin $L_2(\Omega)$ da $\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonlarına zayıf yakınsadığını, $\alpha \geq 0$ olduğunu, $L_2(\Omega)$ ve $H = L_2(0,l)$ uzaylarında normların alttan zayıf yarı sürekli olduğunu dikkate alırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $v \in V$ elemanı üzerinde alttan zayıf yarı sürekli olduğunu elde ederiz. Yani,

$$J_{\alpha*} \leq J_\alpha(v) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = J_{\alpha*}$$

dir.

Buradan $J_\alpha(v) = J_{\alpha*}$ elde edilir. Yani $v \in V$ elemanı $J_\alpha(v)$ yi minimum yapan elemandır. Başka bir deyişle $v \in V$ (3.1.1.1)- (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin çözümüdür. Teorem 3.1.3.2 ispatlandı.

3.1.4 Fonksiyonelin Diferansiyellenebilirliği

Bu alt bölümde (3.1.1.1)-(3.1.1.5) probleminde amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliğini inceleyeceğiz. Bu amaçla aşağıdaki eşlenik problemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\phi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi_k}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\phi_k\right)-a(x)\phi_k+v(x)\phi_k=$$

$$=2\left(-1\right)^k\left(\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)\right),\ (x,t)\in\Omega., \tag{3.1.4.1}$$

$$\phi_k(x,T)=0,\ \text{k=1,2}\ ,\ x\in(0,l), \tag{3.1.4.2}$$

$$\phi_1(0,t)=\phi_1(l,t)=0,\ t\in(0,T), \tag{3.1.4.3}$$

$$\frac{\partial\phi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\phi_2(l,t)}{\partial x}=0,\ t\in\left(0,T\right). \tag{3.1.4.4}$$

Burada $\psi_k=\psi_k(x,t)\equiv\psi_k(x,t;v)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.1.2)-(3.1.1.5) başlangıç sınır değer probleminin $v\in V$ için çözümüdür.

Eşlenik problemin çözümü olarak sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarına ait olan ve (3.1.4.1)-(3.1.4.4) şartlarını $\forall(x,t)\in\overset{0}{\Omega}$ için sağlayan $\phi_k=\phi_k(x,t)$,k=1,2 fonksiyonları anlaşılır. $\tau=T-t$ değişken dönüşümü yaparak (3.1.4.1)-(3.1.4.4) eşlenik problemini kolaylıkla (3.1.1.2)-(3.1.1.5) biçiminde olan başlangıç sınır değer problemine dönüştürebiliriz. Bu nedenle $\psi_1-\psi_2$ fonksiyonu $W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayının elemanı olduğundan aşağıdaki teoremi yazabiliriz:

Teorem 3.1.4.1: Farz edelim ki teorem 3.1.2.3 ün şartları sağlansın. Bu taktirde (3.1.4.1)-(3.1.4.4) eşlenik probleminin $\phi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $\phi_2 \in W_2^{2,1}(\Omega)$ bir tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\phi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_{34} \|\psi_1 - \psi_2\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}, \tag{3.1.4.5}$$

$$\|\phi_2\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le c_{34} \|\psi_1 - \psi_2\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} . \tag{3.1.4.6}$$

Burada c_{34} >0 sayısı belirli bir sayıdır.

Bu teoremin ispatı da teorem 3.1.2.1 de olduğu gibi Galerkin yöntemiyle yapılır. Şimdi bu hükmü kullanarak (3.1.1.1) fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğunu gösterelim.

Teorem 3.1.4.2: Farz edelim ki Teorem 3.1.4.1 şartları sağlansın ve $\omega \in H$ verilen eleman olsun. Bu taktirde $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onu gradyenti için aşağıdaki formül geçerlidir:

$$\begin{aligned} J_\alpha^{'}(v) &= \int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\overline{\phi_1}(x,t) + \psi_2(x,t)\overline{\phi_2}(x,t)\right)dt + \\ &+ 2\alpha\left(v(x) - \omega(x)\right) \end{aligned} \tag{3.1.4.7}$$

Burada $\psi_k \equiv \psi_k(x,t;v)$, k=1,2, $\phi_k = \phi_k(x,t;v)$, k=1,2 fonksiyonları sırasıyla (3.1.1.2)-(3.1.1.5) başlangıç sınır değer probleminin ve eşlenik probleminin çözümleridir.

İspat: $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$ üzerinde artışını bulalım. (3.1.1.1) ve (3.1.1.11) formüllerini kullanırsak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v) = 2\int_\Omega \mathrm{Re}\left[\left(\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)\right)\left(\Delta\overline{\psi}_1(x,t)-\Delta\overline{\psi}_2(x,t)\right)\right]dxdt +$$

$$+2\alpha\int_0^l \left(v(x)-\omega(x)\right)\Delta v(x)dx +$$

$$+\alpha\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,l)} + \left\|\Delta\psi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \left\|\Delta\psi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)} -$$

$$-2\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1\Delta\overline{\psi}_2\right)dxdt. \qquad (3.1.4.8)$$

Burada $\Delta\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.3.2)-(3.1.3.5) başlangıç sınır değer probleminin çözümüdür. $\psi_k(x,t)$ k=1,2 fonksiyonları sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}\left(\Omega\right), W_2^{2,1}\left(\Omega\right)$ uzaylarına ait olan çözüm olduğundan kolaylıkla $\forall\ \eta_k \in L_2\left(\Omega\right)$, k=1,2 için aşağıdaki integral özdeşliğini yazabiliriz:

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial x} - a(x)\Delta\psi_k + \left(v(x)+\Delta v(x)\right)\Delta\psi_k\right)\overline{\eta}_k dxdt =$$

$$= -\int_\Omega \Delta v(x)\psi_k(x,t)\overline{\eta}_k(x,t)dxdt, \quad \text{k =1,2.} \quad (3.1.4.9)$$

Bu integral özdeşliğinin yanı sıra $\Delta\psi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.3.3) başlangıç şartlarını ve (3.1.3.4), (3.1.3.5) sınır şartlarını sağlar.

Diğer taraftan $\phi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}\left(\Omega\right)$, $\phi_2 \in W_2^{2,1}\left(\Omega\right)$ fonksiyonları eşlenik problemin çözümü olduğundan $\forall\eta_{1k} \in L_2\left(\Omega\right)$, k=1,2 için aşağıdaki integral özdeşliklerini yazabiliriz:

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial\phi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\phi_k}{\partial x^2} + i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1\phi_k\right) - a(x)\phi_k + v(x)\phi_k\right)\overline{\eta}_{1k}dxdt =$$

$$= 2(-1)^k \int_\Omega \left(\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)\right)\overline{\eta}_{1k}(x,t)dxdt, \text{ k=1,2.} \tag{3.1.4.10}$$

Burada η_{1k} nın yerine $\Delta\psi_k(x,t)$ fonksiyonunu alıp kısmi integrasyon formülünü kullanırsak Φ_k ve $\Delta\psi_k$, k=1,2 fonksiyonları için başlangıç sınır şartlarını ve $a_1(x)$ fonksiyonu için sınır şartlarını dikkate alırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_\Omega \phi_k \left(-i\frac{\partial\Delta\overline{\psi}_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\overline{\psi}_k}{\partial x^2} - ia_1(x)\frac{\partial\Delta\overline{\psi}_k}{\partial x} - a(x)\Delta\overline{\psi}_k + v(x)\Delta\overline{\psi}_k \right)dxdt =$$

$$= 2(-1)^k \int_\Omega \left(\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)\right)\Delta\overline{\psi}_k(x,t)dxdt, \text{ k=1,2.} \tag{3.1.4.11}$$

Burada k=1 alırsak

$$\int_\Omega \phi_1 \left(-i\frac{\partial\Delta\overline{\psi}_1}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\overline{\psi}_1}{\partial x^2} - ia_1(x)\frac{\partial\Delta\overline{\psi}_1}{\partial x} - a(x)\Delta\overline{\psi}_1 + v(x)\Delta\overline{\psi}_1 \right)dxdt =$$

$$= -2\int_\Omega \left(\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)\right)\Delta\overline{\psi}_1(x,t)dxdt$$

elde edilir. Bunun kompleks eşleniğini alırsak

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_1}{\partial x^2} + ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi_1}{\partial x} - a(x)\Delta\psi_1 + v(x)\Delta\psi_1 \right)\overline{\phi}_1 dxdt =$$

$$= -2\int_\Omega \left(\overline{\psi}_1(x,t) - \overline{\psi}_2(x,t)\right)\Delta\psi_1(x,t)dxdt \tag{3.1.4.12}$$

elde edilir. Şimdi (3.1.4.9) da $\eta_k(x,t)$ nın yerine $\phi_k(x,t)$ alalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial x}-a(x)\Delta\psi_k\right)\overline{\phi}_k dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\left(\left(v(x)+\Delta v(x)\right)\Delta\psi_k\right)\overline{\phi}_k dxdt=$$

$$=-\int_{\Omega}\Delta v(x)\psi_k(x,t)\overline{\phi}_k\left(x,t\right)dxdt,\ \text{k=1,2.} \tag{3.1.4.13}$$

Bu eşitliğin k=1 halinden (3.1.4.10) u taraf tarafa çıkarırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$2\int_{\Omega}\left(\overline{\psi}_1(x,t)-\overline{\psi}_2(x,t)\right)\Delta\psi_1(x,t)dxdt=$$

$$=\int_{\Omega}\Delta v(x)\psi_1(x,t)\overline{\phi}_1(x,t)dxdt+$$

$$+\int_{\Omega}\Delta v(x)\Delta\psi_1(x,t)\overline{\phi}_1(x,t)dxdt. \tag{3.1.4.14}$$

(3.1.4.11) de k=2 alırsak bu taktirde ,

$$\int_{\Omega}\phi_2\left(-i\frac{\partial\Delta\overline{\psi}_2}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\overline{\psi}_2}{\partial x^2}-ia_1(x)\frac{\partial\Delta\overline{\psi}_2}{\partial x}-a(x)\Delta\overline{\psi}_2+v(x)\Delta\overline{\psi}_2\right)dxdt=$$

$$=2\int_{\Omega}\left(\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)\right)\Delta\overline{\psi}_2(x,t)dxdt$$

olur.

Bunun kompleks eşleniğini alırsak

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\Delta\psi_2}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_2}{\partial x^2}+ia_1(x)\frac{\partial\Delta\psi_2}{\partial x}-a(x)\Delta\psi_2+v(x)\Delta\psi_2\right)\overline{\phi}_2 dxdt=$$

$$= 2\int_{\Omega} \left(\bar{\psi}_1(x,t) - \bar{\psi}_2(x,t)\right)\Delta\psi_2(x,t)dxdt \qquad (3.1.4.15)$$

(3.1.4.13) de k=2 alıp elde edilen eşitlikten (3.1.4.15)i taraf tarafa çıkaralım. Bu taktirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$-2\int_{\Omega} \left(\bar{\psi}_1(x,t) - \bar{\psi}_2(x,t)\right)\Delta\psi_2(x,t)dxdt = \int_{\Omega} \Delta v(x)\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)dxdt +$$

$$+\int_{\Omega} \Delta v(x)\Delta\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)dxdt \qquad .\ (3.1.4.16)$$

(3.1.4.14) ile (3.1.4.16) yı taraf tarafa toplayalım.

$$2\int_{\Omega} \left(\bar{\psi}_1(x,t) - \bar{\psi}_2(x,t)\right)\left(\Delta\psi_1(x,t) - \Delta\psi_2(x,t)\right)dxdt =$$

$$= \int_{\Omega} \left(\Delta v(x)\left(\psi_1(x,t)\bar{\Phi}_1(x,t) + \psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)\right)dxdt +$$

$$+\int_{\Omega} \Delta v(x)\left(\Delta\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \Delta\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)dxdt\ .$$

Bu eşitliği kompleks eşleniğiyle toplarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$2\int_{\Omega} \mathrm{Re}\left[\left(\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)\right)\left(\Delta\bar{\psi}_1(x,t) - \Delta\bar{\psi}_2(x,t)\right)\right]dxdt =$$

$$= \int_{\Omega} \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)\Delta v(x)dxdt +$$

$$+\int_{\Omega} \mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \Delta\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)\Delta v(x)dxdt\ . \qquad (3.1.4.17)$$

Bu eşitliği fonksiyonelin artışı için olan (3.1.4.8) formülünde dikkate alırsak fonksiyonelin artışını aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v)=\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t)+\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)\Delta v(x)dxdt+$$

$$+2\alpha\int_0^l \left(v(x)-\omega(x)\right)\Delta v(x)dxdt+R(\Delta v) \qquad (3.1.4.18)$$

Burada

$$R(\Delta v)=\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t)+\Delta\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)\Delta v(x)dx+$$

$$+\alpha\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,l)}+\left\|\Delta\psi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\Delta\psi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)}-$$

$$-2\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1(x,t)\Delta\bar{\psi}_2(x,t)\right)dxdt \qquad (3.1.4.19)$$

dir.

Şimdi $R(\Delta v)$ yi değerlendirelim. Cauchy- Bunjakovskii eşitsizliğini uygularsak $R(\Delta v)$ kalan terimini aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$\left|R(\Delta v)\right|\le\left\|\Delta v\right\|_{L_2(0,l)}\left[\left\|\Delta\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)}\left(\int_0^T\left\|\phi_1(.,t)\right\|^2_{L_\infty(0,l)}dt\right)^{1/2}\right]+$$

$$+\left\|\Delta v\right\|_{L_2(0,l)}\left[\left\|\Delta\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\left(\int_0^T\left\|\phi_2(.,t)\right\|^2_{L_\infty(0,l)}dt\right)^{1/2}\right]$$

$$+\alpha\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,l)}+2\left\|\Delta\psi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)}+2\left\|\Delta\psi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)} \qquad (3.1.4.20)$$

$\phi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega), \phi_2 \in \quad W_2^{2,1}(\Omega)$ olduğundan ve gömülme teoremine göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega), W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayları $L_2(0,T;C[0,l])$ uzayına gömüldüğünden aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\|\phi_1(.,t)\|_{L_2(0,T;C[0,l])} \le c_{35} \|\phi_1(.,t)\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \tag{3.1.4.21}$$

$$\|\phi_2(.,t)\|_{L_2(0,T;C[0,l])} \le c_{35} \|\phi_2(.,t)\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \ . \tag{3.1.4.22}$$

Bu eşitsizlikleri ve (3.1.4.5), (3.1.4.6) kestirimlerini dikkate aldığımızda aşağıdaki kestirimleri yazabiliriz:

$$\|\phi_k(.,t)\|_{L_2(0,T;C[0,l])} \le c_{36} \|\psi_1 - \psi_2\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} \ . \tag{3.1.4.23}$$

$\psi_1(x,t)$ ve $\psi_2(x,t)$ fonksiyonları için (3.1.2.56), (3.1.2.57) kestirimlerini dikkate aldığımızda aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$\|\phi_k\|_{L_2(0,T;L_\infty[0,l])} \le c_{37}, \text{ k=1,2.} \tag{3.1.4.24}$$

Bu eşitsizliği ve (3.1.3.10) kestirimlerini kullanırsak (3.1.4.20) nin yardımıyla $R(\Delta v)$ yi aşağıdaki gibi değerlendirebiliriz:

$$|R(\Delta v)| \le c_{38}\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}^2\right) \ . \tag{3.1.4.25}$$

Burada $c_{38} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Sonuncu eşitsizlik

$$R(\Delta v) = o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right) \tag{3.1.4.26}$$

olduğunu gösterir. Yani $R(\Delta v)$ kalanı $\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}$ miktarına göre yüksek mertebeden sonsuz küçüktür:

$$\lim_{\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\to\infty} \frac{o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right)}{\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}} = 0$$

dır. Bu taktirde (3.1.4.26) yı dikkate aldığımızda fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_0^l \left[\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\overline{\phi}_1(x,t) + \psi_2(x,t)\overline{\phi}_2(x,t)\right)dt + 2\alpha\left(v(x) - \omega(x)\right) \right] \times$$

$$\times \Delta v(x)dx + o\left(\|\Delta v\|_{L_2(0,l)}\right) \tag{3.1.4.27}$$

Fonksiyonellerin $L_2(0,l)$ uzayında Frechet anlamında diferensiyellenebilirliğin tanımını kullanırsak (3.1.4.27) bağıntısından kolaylıkla $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$ üzerinde Freschet anlamında diferensiyellenebilir olduğu ve onun gradyenti için

$$J'_\alpha(v) = \int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\overline{\phi}_1(x,t) + \psi_2(x,t)\overline{\phi}_2(x,t)\right)dt + 2\alpha\left(v(x) - \omega(x)\right)$$

formülünün geçerli olduğu elde edilir. $v \in V$ herhangi eleman oluğundan bu formülün geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Teorem 3.1.4.2 ispatlandı.

3.1.5 Optimal Kontrol Probleminin Çözümü İçin Gerek Şart

Bu alt bölümde (3.1.1.1)- (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin çözümü için gerek şartla ilgili soruyu inceleyeceğiz. Bir önceki alt bölümdeki fonksiyonelin gradyenti için elde ettiğimiz formülü kullanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart elde edeceğiz.

Teorem 3.1.5.1: Farz edelim ki teorem (3.1.4.2) nin şartları sağlansın ve

$$V_* = \left\{ v^* \in V : J_\alpha\left(v^*\right) = J_{\alpha *} = \inf_{v \in V} J_\alpha(v) \right\}$$

kümesi (3.1.1.1)- (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin çözümler kümesi olsun. Bu taktirde $\forall v^* \in V_*$ için

$$\int_0^l \left[\int_0^T \operatorname{Re}\left(\psi_1^*(x,t)\overline{\phi}_1^*(x,t) + \psi_2^*(x,t)\overline{\phi}_2^*(x,t) \right) dt + 2\alpha\left(v(x) - \omega(x)\right) \right] \times$$

$$\times\left[v(x) - v^*(x) \right] dx \geq 0, \ \forall v \in V \ \ (3.1.5.1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\psi_k^*\left(x,t\right) \equiv \psi_k\left(x,t;v^*\right)$, k=1,2 ve $\phi_k^*\left(x,t\right) \equiv \phi_k\left(x,t;v^*\right)$, k=1,2 sırasıyla (3.1.1.2)- (3.1.1.5) başlangıç sınır değer probleminin ve (3.1.4.1)-(3.1.4.4) eşlenik probleminin $v^* \in V$ için çözümleridir.

İspat: Teorem 3.1.4.2 nin şartları sağlandığından $J_\alpha\left(v\right)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğunu ve onun gradyenti için (3.1.4.7) formülünü ispatladık. Şimdi gradyentin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlamaya çalışalım. Bu amaçla $\forall v \in V$ için

$$\left\| J_\alpha^{'}\left(v + \Delta v\right) - J_\alpha^{'}\left(v\right) \right\|_{L_2(0,l)} \leq c_{39} \left\| \Delta v \right\|_{L_2(0,l)} \qquad (3.1.5.2)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu göstermek yeterlidir. Burada c_{39} >0 sayısı Δv den bağımsızdır.

Gerçekten (3.1.4.7) formülünü kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$J_\alpha^{'}\left(v+\Delta v\right)-J_\alpha^{'}\left(v\right)=\int_0^T \mathrm{Re}\Big(\psi_{1\Delta}(x,t)\overline{\phi}_{1\Delta}(x,t)+\psi_{2\Delta}(x,t)\overline{\phi}_{2\Delta}(x,t)\Big)dt+$$

$$+2\alpha\left(v(x)+\Delta v(x)-\omega(x)\right)-\int_0^T \mathrm{Re}\Big(\psi_1(x,t)\overline{\phi}_1(x,t)+\psi_2(x,t)\overline{\phi}_2(x,t)\Big)dt-$$

$$-2\alpha\left(v(x)-\omega(x)\right)=$$

$$=\int_0^T \mathrm{Re}\Big(\psi_{1\Delta}(x,t)\Delta\overline{\phi}_1(x,t)+\psi_{2\Delta}(x,t)\Delta\overline{\phi}_2(x,t)\Big)dt+$$

$$+\int_0^T \Big(\Delta\psi_1(x,t)\overline{\phi}_1(x,t)+\Delta\psi_2(x,t)\overline{\phi}_2(x,t)\Big)dt+2\alpha\Delta v(x)\,, \qquad (3.1.5.3)$$

Burada $\psi_{k\Delta}\left(x,t\right)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.1.2)- (3.1.1.5) başlangıç sınır değer probleminin $(v+\Delta v)\in V$ için çözümü $\Delta\psi_{k\Delta}\left(x,t\right)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.3.2)-(3.1.3.5) başlangıç sınır değer probleminin çözümü $\Delta\phi_k\left(x,t\right)=\phi_k\left(x,t;v+\Delta v\right)-\phi_k\left(x,t;v\right)$, k=1,2 fonksiyonları ise aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$i\frac{\partial\Delta\phi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\phi_k}{\partial x^2}+i\frac{\partial}{\partial x}\left(a_1(x)\Delta\phi_k\right)-a(x)\Delta\phi_k+\left(v(x)+\Delta v(x)\right)\Delta\phi_k=$$

$$=2\left(-1\right)^k\left(\Delta\psi_1\left(x,t\right)-\Delta\psi_2\left(x,t\right)\right)-v(x)\phi_k,\ \left(x,t\right)\in\Omega, \qquad (3.1.5.4)$$

$$\Delta\phi_k(x,T)=0,\ \text{k=1,2},\ x\in\left(0,l\right), \qquad (3.1.5.5)$$

$$\Delta\phi_1(0,t)=\Delta\phi_1(l,t)=0,\ t\in\left(0,T\right), \qquad (3.1.5.6)$$

$$\frac{\partial\Delta\phi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\Delta\phi_2(l,t)}{\partial x}=0,\ t\in\left(0,T\right). \qquad (3.1.5.7)$$

$\phi_k = \phi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonları (3.1.4.1)- (3.1.4.4) eşlenik probleminin çözümü olduğundan $\psi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $\psi_2 \in W_2^{2,1}(\Omega)$ şartlarını sağlar. Bu özelliği kullanarak (3.1.5.4)- (3.1.5.7) sınır değer probleminin çözümünü değerlendirelim. (3.1.4.5) in her iki tarafını $\Delta\overline{\phi}_k(x,t)$, k=1,2 ile çarpıp $\overline{\Omega}_t = (0,l)\times(t,T)$ aralığı üzerinden integralleyelim. Bu taktirde x değişkenine göre kısmi integrasyon formülünü uygulayıp, $\Delta\phi_k(x,t)$, k=1,2 fonksiyonu için (3.1.5.6)- (3.1.5.7) sınır şartlarını kullanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\overline{\Omega}_t} \Big(\frac{\partial \Delta\phi_k}{\partial t}\Delta\overline{\phi}_k - a_0\left|\frac{\partial \Delta\phi_k}{\partial x}\right|^2 + i\frac{\partial}{\partial x}\big(a_1(x)\Delta\phi_k\big)\Delta\overline{\phi}_k - a(x)\left|\Delta\phi_k\right|^2 +$$

$$+\big(v(x)+\Delta v(x)\big)\left|\Delta\phi_k\right|^2\Big)dxd\tau =$$

$$= \int_{\overline{\Omega}_t} 2(-1)^k\big(\Delta\psi_1(x,\tau) - \Delta\psi_2(x,\tau)\big)\Delta\overline{\phi}_k(x,\tau)\,dxd\tau -$$

$$-\int_{\Omega_t} \Delta v(x)\phi_k\Delta\phi_k\,dxd\tau \text{ ,k=1,2.}$$

Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak

$$\int_{\overline{\Omega}_t}\left(\frac{\partial \Delta\phi_k}{\partial t}\Delta\overline{\phi}_k + \frac{\partial \Delta\overline{\phi}_k}{\partial t}\Delta\phi_k\right)dxd\tau +$$

$$+\int_{\overline{\Omega}_t}\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(a_1(x)\Delta\phi_k\big)\Delta\overline{\phi}_k + \frac{\partial}{\partial x}\big(a_1(x)\Delta\overline{\phi}_k\big)\Delta\phi_k\right)dxd\tau -$$

$$= 4(-1)^k \int_{\overline{\Omega}_t} \mathrm{Im}\big[\big(\Delta\psi_1 - \Delta\psi_2\big)\Delta\overline{\phi}_k\big]dxd\tau -$$

$$-2\int_{\Omega_t} \mathrm{Im}\left(\phi_k\Delta\overline{\phi}_k\right)\Delta v(x)\,dxd\tau, \text{ k=1,2.} \qquad (3.1.5.8)$$

elde edilir. Burada k=1 alırsak aşağıdaki eşitliği kullanabiliriz:

$$\int\limits_{\bar{\Omega}_t} \frac{\partial}{\partial t}\left|\Delta\phi_1\right|^2 dxd\tau + \int\limits_{\bar{\Omega}_t} \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\left|\Delta\phi_1\right|^2\right)dx + \int\limits_{\bar{\Omega}_t} \frac{da_1(x)}{dx}\left|\Delta\phi_1\right|^2 dx =$$

$$= -4\int\limits_{\bar{\Omega}_t} \operatorname{Im}\left[\left(\Delta\psi_1 - \Delta\psi_2\right)\Delta\bar{\phi}_1\right]dxd\tau -$$

$$-2\int\limits_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(\phi_1\Delta\bar{\phi}_1\right)\Delta v(x)dxd\tau$$

Burada $\Delta\phi_1(x,T) = 0,\ \Delta\phi_1(0,t) = \Delta\phi_1(l,t) = 0$ şartlarını kullandığımızda

$$\int\limits_0^l \left|\Delta\phi_1(x,t)\right|^2 dx = \int\limits_{\bar{\Omega}_t} \frac{da_1(x)}{dx}\left|\Delta\phi_k\right|^2 dxd\tau +$$

$$+4\int\limits_{\bar{\Omega}_t} \operatorname{Im}\left[\left(\Delta\psi_1 - \Delta\psi_2\right)\Delta\bar{\phi}_1\right]dxd\tau -$$

$$-2\int\limits_{\Omega_t} \operatorname{Im}\left(\phi_1\Delta\bar{\phi}_1\right)\Delta v(x)dxd\tau$$

eşitliğini yazabiliriz. Buradan da (3.1.1.7) nin yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\Delta\phi_1(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le \mu_3\int\limits_t^T \left\|\Delta\phi_1(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} d\tau +$$

$$+4\int\limits_{\bar{\Omega}_t} \left(\left|\Delta\psi_1\right| + \left|\Delta\psi_2\right|\right)\left|\Delta\phi_1\right| dxd\tau + 2\int\limits_{\Omega_t} \left|\phi_1\right|\left|\Delta\phi_1\right|\left|\Delta v(x)\right| dxd\tau, \quad , \ \forall t \in [0,T] \ .$$

Burada Cauchy- Bunjakovskii eşitsizliğini uygularsak ve $\phi_k \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ olduğunu dikkate alırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\|\Delta\phi_1(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le (\mu_3+3)\int_t^T \left\|\Delta\phi_1(.,\tau)\right\|^2_{L_2(0,l)} +$$

$$+4\left\|\Delta\psi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)} + 4\left\|\Delta\psi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)} + c_{40}\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,l)}, \forall \mathrm{t} \in (0,\mathrm{T}).$$

Burada (3.1.3.10) kestirimlerini kullanırsak ve elde edilen eşitsizliğe Gronwall lemmasını uygularsak:

$$\left\|\Delta\phi_1(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{41} + \left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,l)},\ \forall t \in [0,T]\ . \tag{3.1.5.9}$$

Burada $c_{41} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır.

Şimdi aynı şekilde (3.1.5.8) de k=2 alıp gereken işlemleri yaparsak $\Delta\phi_2(x,t)$ için de aşağıdaki kestirimi elde ederiz.

$$\left\|\Delta\phi_2(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{42}\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,l)},\ \forall t \in [0,T] \tag{3.1.5.10}$$

Burada $c_{42} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır.

(3.1.5.3) formülünde yer alan gradyentin artışını değerlendirirsek aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|J_\alpha^{'}(v+\Delta v) - J_\alpha^{'}(v)\right| \le \int_0^T (\left|\psi_{1\Delta}\right|\left|\Delta\phi_1\right| + \left|\psi_{2\Delta}\right|\left|\Delta\phi_2\right| +$$

$$+\left|\Delta\psi_1\right|\left|\phi_1\right| + \left|\Delta\psi_2\right|\left|\phi_2\right|)dt + 2\alpha\left|\Delta v\right|$$

Cauchy- Bunjakovskii eşitsizliğini uygularsak bu eşitsizlikten aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\left|J'_\alpha\left(v+\Delta v\right)-J'_\alpha\left(v\right)\right|\le\left\|\psi_{1\Delta}(x,.)\right\|_{L_2(0,T)}\left\|\Delta\phi_1(x,.)\right\|_{L_2(0,T)}+$$

$$+\left\|\psi_{2\Delta}(x,.)\right\|_{L_2(0,T)}\left\|\Delta\phi_2(x,.)\right\|_{L_2(0,T)}+$$

$$+\left\|\Delta\psi_1(x,.)\right\|_{L_2(0,T)}\left\|\phi_1(x,.)\right\|_{L_2(0,T)}+$$

$$+\left\|\Delta\psi_2(x,.)\right\|_{L_2(0,T)}\left\|\phi_2(x,.)\right\|_{L_2(0,T)}+\left|v(x)\right| \ .$$

Bunun her iki tarafının karesini bulup (0,l) aralığı üzerinden integrallemiş olursak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|J'_\alpha\left(v+\Delta v\right)-J'_\alpha\left(v\right)\right|^2_{L_2(0,l)}\le 5(\left\|\psi_{1\Delta}(x,.)\right\|^2_{L_2(0,T;C[0,l])}\left\|\Delta\phi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\left\|\psi_{2\Delta}(x,.)\right\|^2_{L_2(0,T;C[0,l])}\left\|\Delta\phi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\Delta\psi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)}\left\|\phi_1\right\|^2_{L_2(0,T;C[0,l])}+$$

$$+\left\|\Delta\psi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)}\left\|\phi_2\right\|^2_{L_2(0,T;C[0,l])}+\left\|v\right\|^2_{L_2(0,l)} \quad (3.1.5.11)$$

(3.1.3.8) ve (3.1.3.9) eşitsizliklerine denk olarak $\psi_{k\Delta}$, k=1,2 ve ϕ_k, k=1,2 fonksiyonları için aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\left\|\psi_{1\Delta}\right\|^2_{L_2(0,T;C[0,l])}\le c_{26}\left\|\psi_{1\Delta}\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}, \qquad (3.1.5.12)$$

$$\left\|\psi_{2\Delta}\right\|^2_{L_2(0,T;C[0,l])}\le c_{27}\left\|\psi_{2\Delta}\right\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)}, \qquad (3.1.5.13)$$

$$\left\|\phi_1\right\|^2_{L_2(0,T;C[0,l])}\le c_{26}\left\|\phi_1\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)}, \qquad (3.1.5.14)$$

$$\left\|\phi_2\right\|^2_{L_2(0,T;C[0,l])}\le c_{27}\left\|\phi_2\right\|^2_{W_2^{2,1}(\Omega)}. \qquad (3.1.5.15)$$

Bu eşitsizliklerden ve (3.1.2.56) , (3.1.2.57) , (3.1.3.10) , (3.1.4.5) , (3.1.4.6) , (3.1.5.9) , (3.1.5.10) kestirimlerinden faydalanarak (3.1.5.11) den aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|J'_\alpha\left(v+\Delta v\right)-J'_\alpha\left(v\right)\right|^2_{L_2(0,l)}\le c_{43}\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,l)} \ . \qquad (3.1.5.16)$$

Burada $c_{43} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Buradan da gereken (3.1.5.2) Bağıntısının geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin gradyentinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu elde ettik. Diğer taraftan $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli , $J_0(v)$ sürekli fonksiyoneli ile $\alpha\left|v-\omega\right|^2_{L_2(0,l)}$ sürekli fonksiyonelinin toplamı olduğundan V kümesi üzerinde sürekli olduğunu söyleyebiliriz. Elde edilen sonuçları dikkate alırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olduğunu hükmedebiliriz. Yani

$$J_\alpha(v) \in C^1(V)$$

dir. Diğer taraftan V kümesi $L_2(0,l)$ de merkezi sıfırda olan b_0 yarıçaplı kapalı küre olduğundan kapalı, sınırlı, konveks küme olur. Böylece $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin ve V kümesinin [21] çalışmasından bildiğimiz teoremin şartlarının sağlandığını görüyoruz. Bu teoreme dayanarak $\forall v^* \in V_*$ için aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left\langle J_\alpha(v^*), v - v^* \right\rangle_{L_2(0,l)} \geq 0,\ \forall v \in V\ . \qquad (3.1.5.17)$$

Burada gradyent için olan formülde v nin yerine v^* alırsak, v(x) yerine v^*(x) alırsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Teorem ispatlandı.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 3.1.2. bölümünde ele alınan Schrödinger denklemi için sınır değer problemlerinin genelleştirilmiş çözümlerinin varlığı ve tekliğine ait olan önermeler ispatlandı.

Tezin 3.1.3. bölümünde söz konusu optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini içeren teoremler ispatlandı.

Tezin 3.1.4. bölümünde fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğu ispatlandı ve onun gradyenti için formül elde edildi.

Tezin 3.1.5. bölümünde optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlandı.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Tezde ele alınan optimal kontrol problemi konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden ciddi biçimde farklıdır. Çünkü ilk kez bu çalışmada Schrödinger Schrödinger denklemi sanal katsayılı gradyent içermektedir. Önceki çalışmalarda Schrödinger denkleminde böyle bir terim yer almamaktadır. Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemleri çok az ele alındığından tez çalışması gerek teorik gerekse pratik önem taşır. Bu tezde Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemleri için elde edilen araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar, önceki çalışmalardaki sonuçlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

6. KAYNAKLAR

[1] Butkovskiy, **A.G.**, Samoilenko Y.I., "Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü", Nauka, Moscow, (1984) (Rusça).

[2] Dın Nıo Hao, "Kuantum Objektlerinin Optimal Kontrolü", Otomatik ve Telemakanik, No 2, s14-s20, (1986) (Rusça).

[3] Goebel , M., "On Existence Of Optimal Control", Math.Nacr, ,Vol.53, s67-s73,(1979).

[4] İskenderov,A.D. and Yagubov, G. Ya., "Lineer Olmayan Kuantum Mekanik Sistemlerin Optimal Kontrolü", Otomatik ve Telemekanik, No:12, s27-s38, (1989) (Rusça).

[5] İskenderov A.D. , "Durgun Olmayan Schrödinger denkleminde Potansiyelin Bulunması", Matematik Modellenmenin ve Optimal Kontrolün Problemleri , s6-s36 , Bakü, (2001) (Rusça).

[6] İskenderov A.D., Mahmudov N.M., "Kuantum Mekaik Sistemler için Lions Kriterli Optimal Kontrol", AMEA'nın Haberleri Fizik Teknik Matematik Bilimleri Serisi, ,c.16,No:5-6-30-35,(1995) (Rusça).

[7] Iyosida,K., "Functional Analysis", M,:Mir,(1967), (Rusça).

[8] Kolmogorov A.N., Formin S.V., "Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları", Nauka, Moscow, (1989) , (Rusça).

[9] Ladyzenskaja, O.A., "Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri", Nauka, Moscow, (1973), (Rusça).

[10] Ladyzenskaja O.A., "Lineer ve Kuazilineer Parabolik Tip Denklemler", Nauka, Moscow, (1967).

[11] Landau L.D., Lifşis E.M., "Kuantum Mekaniği ", Fiz. Mat. Yayını, Cilt 3, (1963), Moscow, (Rusça).

[12] Lions J.L.,, “Optimal Control Of Systems Governed By Partial Differential Equations”, Springer- Verlag , Berlin Heidelberg , New York, (1971).

[13] Lions J.L. “Controle des systemes distribues singuleries gaulhier”, villars Bordas, Paris, (1983).

[14] Mahmudov N.M, “Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü”, Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri,c.7,(1997), (Rusça).

[15] Potapov M.M., Razgulin A.V.,Şameeva T.Y., “Schrödinger Tipli Optimal Kontrol Probleminin Yaklaşımı ve Regülarizasyonu”. Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri15(Nümerik Analiz ve Sibernetik), No:1-s8-s13,(1987) (Rusça)

[16]Razgulin A.V., “Lineer Olmayan Schrödinger denklemi İçin Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları”, Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri., Seri 1: (Nümerik Analiz ve Sibernetik), No:2-s28-s33 ,(1988),(Rusça).

[17] Samarskii, A.A., Andreev V.B., “Eliptik Denklemler İçin Fark Metodları” Nauka, Moscow, (1976), (Rusça).

[18] Samarskii, A.A., Lazarov R.D., Makarov V.L., “Genelleştirilmiş Çözümlü Diferansiyel Denklemler İçin Fark Şemaları”, Vıssaya Şkola , Moscow,(1987), (Rusça).

[19] Silla N., “Schrödinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler İçin Optimal Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü”, Doktora Tezi , Bakü Devlet Üniversitesi, Bakü, (1991), (Rusça).

[20] Tikonov, A.N., Arsenin,V.Ya., “Ill-Possed Problemlerin Çözüm Metodları”, Nauka, Moscow, (1979), (Rusça).

[21] Vasilyev, F.P., “Extremal Problemlerin Çözüm Metodları”, Nauka ,Moscow, (1981), (Rusça).

[22] Vorontsov, M.A., Shmalgauzen,V.I., “Adaptiv Optiğin Prensipleri”, Nauka, Moscow,(1984).

[23] Yagubov, G.Ya., Musayeva,M.A., “Lineer Olmayan Schrödinger denklemi İçin İdentifikasyon Problemi Hakkında”, Diferansiyel Denklemler , 33(12) ,s1691-s1698 , (1997) (Rusça).

[24] Yagubov, G.Ya., “Kuazi Lineer Schrödinger denkleminin Katsayı İle Optimal Kontrol”, Bilimler Doktora Tezi, Kiev, (1994)(Rusça).

[25] Yetişkin, H., ”Kompleks Potansiyelli Schrödinger denklemi İçin Optimal Kontrol Problemi Ve Onun Sonlu Fark Yaklaşımı”, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, 2005.

[26] Yıldırım Aksoy, N., “Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayısıyla Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı” , Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Gökçe Dilek AKBABA

Dogum Yeri : Kars

Dogum Tarihi : 1985

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Egitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise : Kars Anadolu Lisesi (2000-2003)

Lisans : Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (20042-008)

Yüksek Lisans: Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2008-2009), Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2009-2011)