T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

κ - DÜZGÜN YILDIZIL VE κ - DÜZGÜN KONVEKS FONKSİYONLAR

Tuba YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Erhan DENİZ

ŞUBAT–2012

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Tuba YILMAZ'ın Yrd. Doç. Dr. Erhan DENİZ'in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "k-Düzgün Yıldızıl ve k-Düzgün Konveks Fonksiyonlar" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

12/02/2012

Adı ve Soyadı | **İmza**

Başkan: Doç. Dr. Halit ORHAN

Üye: Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

Üye : Yrd. Doç. Dr. Erhan DENİZ

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../...... gün ve .../ .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Muzaffer ALKAN
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Erhan DENİZ'e, Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi ve Bölüm Başkanı Sayın Doç. Dr. Nizami MUSTAFA'ya, Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Doç. Dr. Halit ORHAN'a ve takıldığım noktada benimle içtenlikle ilgilenen, tezin yazımı sırasında yardımlarını esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Elemanı Sayın Arş. Gör. Murat ÇAĞLAR'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Emekleri ve güvenleriyle beni bugüne getiren, beni hiç yalnız bırakmayan, her zaman arkamda bir dağ olarak bildiğim aileme sonsuz teşekkür ederim.

Kars–2012 Tuba YILMAZ

İÇİNDEKİLER

ÖZET	*ii*
ABSTRACT	*iii*
SİMGELER DİZİNİ	*iv*
ŞEKİLLER DİZİNİ	*vi*
1.GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Genel Kavramlar	3
2.2**.** Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar	4
2.3. Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar	10
2.4. Ünivalent fonksiyonların bazı alt sınıfları için bükülme (distortion) ve genişleme(growth) sonuçları	21
3. MATERYAL VE YÖNTEM	**31**
3.1. Düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar	31
3.2**.** Düzgün Konveks Fonksiyonlar	34
3.3. $k-$Düzgün Konveks Fonksiyonlar	
3.4. $k-$Düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar	49
3.5. β Mertebeden $k-$Düzgün Yıldızıl ve $k-$Düzgün Konveks Fonksiyonlar	51
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	68
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	69
KAYNAKLAR	70
ÖZGEÇMİŞ	74

ÖZET

Bu tez çalışmasında “β tipli $k-$düzgün yıldızıl ve β tipli $k-$düzgün konveks fonksiyonlar” geometrik ve analitik olarak ele alındı.

Bu çalışmanın 3.1. ve 3.2. bölümlerinde sırasıyla düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyonlar tanıtılarak bunların geometrik ve analitik özellikleri verildi. Daha sonraki 3.3 ve 3.4 bölümlerde bu fonksiyonların genel hali olan $k-$düzgün yıldızıl ve $k-$düzgün konveks fonksiyonlar tanıtılarak bu fonksiyonların oluşturduğu $k-\mathcal{UST}$ ve $k-\mathcal{UCV}$ sınıfları için bazı sonuçlar verildi.

Son olarak çalışmanın 3.5. bölümünde β tipli $k-$düzgün yıldızıl ve β tipli $k-$düzgün konveks fonksiyonların sırasıyla $k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ sınıfları tanıtıldı. Öncelikle bu sınıfların geometrik ve analitik özellikleri çalışıldı. Daha sonra bu sınıflar için katsayı bağıntıları, Fekete-Szegö problemi, Hadamard çarpımı ve Subordinasyon gibi önemli özellikleri ispatlarıyla birlikte verildi.

2012, 74 Sayfa

Anahtar kelimeler: Analitik Fonksiyon, Ünivalent Fonksiyon, Düzgün Yıldızıl ve Konveks Fonksiyon, Fekete-Szegö Problemi, Hadamard Çarpım, Subordinasyon

ABSTRACT

In this thesis "$k-$uniformly starlike of type β and $k-$uniformly convex functions of type β" is considered as geometrically and analytically.

In the sections 3.1 and 3.2 of this study the definitions of uniformly starlike and uniformly convex functions and their geometric and analytic properties are given, respectively. In the next sections 3.3 and 3.4 the generalizations of these functions, $k-$uniformly starlike and $k-$uniformly convex functions are defined and some results about the classes $k-\mathcal{UST}$ and $k-\mathcal{UCV}$ formed by these functions are given.

Finally, in the section 3.5 the classes $k-\mathcal{UST}(\beta)$ and $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ that belongs to $k-$uniformly starlike of type β and $k-$uniformly convex functions of type β are defined, respectively. First of all the geometric and analytic properties of these classes are studied. After than, important properties such as the coefficient relations, Fekete-Szegö problem, Hadamard product and subordination for these classes are given with their proofs.

2012, 74 Pages

Keywords: Analytic Functions, Univalent Functions, Uniformly Starlike and Uniformly Convex Functions, Fekete-Szegö Problem, Hadamard Product, Subordination

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks Düzlem
U	Birim Disk
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Eksen
$\mathcal{A}$	Normalleştirilmiş Analitik Fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	U Birim Diskinde Caratheodory Fonksiyonların Sınıfı
$\mathcal{S}$	Normalleştirilmiş Ünivalent Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Normalize Edilmiş Yıldızıl (Starlike) Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{S}^*(\beta)$	β. Mertebeden Yıldızıl (Starlike) Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{C}$	Normalize Edilmiş Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{C}(\beta)$	β. Mertebeden Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{UST}$	Düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{S}_p$	Parabolik Düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı
$k-\mathcal{UST}$	$k-$Düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı
$k-\mathcal{UST}(\beta)$	β tipli $k-$Düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı

$\mathcal{UCV}$	Düzgün Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$k-\mathcal{UCV}$	$k-$ Düzgün Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$k-\mathcal{UCV}(\beta)$	β tipli $k-$ Düzgün Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$\arg f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\operatorname{Re} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun sanal kısmı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Koebe fonksiyonu 14

Şekil 2.2. $f \prec g$ subordinasyonu.. 18

Şekil 2.3. U_r nin $p \in \mathcal{P}$ altındaki görüntüsü 26

Şekil 3.1. $k-$düzgün konveks fonksiyon 45

Şekil 3.2. $\Omega_{k,\beta}(z)$ konik bölgesi.. 55

1. GİRİŞ

Geometrik fonksiyonlar teorisinin en önemli konularından birisi ünivalent fonksiyonlar teorisidir. Kompleks düzlemin basit bağlantılı bir öz altkümesini birim diske konform olarak dönüştüren fonksiyonun varlığı Riemann dönüşüm teoremi ile bilinir. Bu nedenle keyfi basit bağlantılı bölgeler üzerinde tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak yerine birim diskde tanımlanan ünivalent fonksiyonlarla çalışmak çok kez kolaylık sağlar. Ünivalent fonksiyonlar üzerindeki çalışmalar,

$$U=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$$

birim diskinde analitik, ünivalent ve $f(0)=0$, $f'(0)=1$ şartlarını sağlayan fonksiyonların oluşturduğu bir $\mathcal{S}$ sınıfı üzerinde yoğunlaşmıştır.

1907 yılında Koebe, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar altında U birim diskinin görüntüsünü incelemiş ve U birim diskinin $f\in\mathcal{S}$ altındaki görüntüsünün sınırı olan $\partial f(U)$ nun orijine olan uzaklığının $1/4$ den küçük olamayacağını ispatlamıştır.

1916 yılında Bieberbach tarafından ileri sürülen $z\in U$ olmak üzere $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n$ biçiminde bir Taylor açılımına sahipse $n=2,3,\ldots$ için $|a_n|\le n$ tahmini uzun yıllar matematikçileri devamlı meşgul eden bir problem olarak güncelliğini korumuş ve 1985 yılında Branges tarafından ispatlanmıştır.

Bieberbach teoreminin çok önemli sonuçlarından birisi de $\mathcal{S}$ sınıfına ait bir f fonksiyonu için $|a_2|\le 2$ sonucu kullanılarak Koebe tarafından verilen ve bükülme (Distortion) ve genişleme (Growth) teoremleri olarak bilinen $|f(z)|$, $|f'(z)|$, $\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|$ nin sınırlarının elde edilmesi problemidir.

Bieberbach tahmininin Branges tarafından çözülmesine kadar problemin çözümü ile ilgilenen matematikçiler $\mathcal{S}$ sınıfının bazı alt sınıflarını tanımlamak suretiyle bu alt sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili ilginç bağıntılar elde etmişlerdir. Bu alt sınıfların en önemlilerinden ikisi yıldızıl (starlike) ve konveks (convex) fonksiyonlardan oluşan alt sınıflardır. Bu alt sınıfların çoğu analitik ve geometrik olarak karakterize edilebilir. Yıldızıl ve konveks fonksiyonlar arasındaki ilginç bağıntı ilk kez Alexander tarafından verilmiştir.

Sunulan bu tezde yıldızıl (starlike) ve konveks (convex) fonksiyonların alt sınıflarından önemli olan düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyonların sınıfları çalışılmıştır. Düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyonların genel hali olan β mertebeden $k-$düzgün yıldızıl ve β mertebeden $k-$düzgün konveks fonksiyonlar için katsayı eşitsizlikleri, Fekete-Szegö problemi ve son olarak Hadamard ve subordinasyon sonuçları geniş bir şekilde incelenmiştir

Tezin kuramsal temeller bölümü tezin diğer bölümlerinde kullanılacak bazı önemli tanım ve teoremlerden oluşturulmuştur. Ayrıca ünivalent fonksiyonlar tanıtılarak $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlara ait önemli teoremler ispatlarıyla verilmiştir. Ayrıca bu bölümde pozitif reel kısımlı fonksiyonlar ve subordination kavramı üzerinde durulmuştur. Son olarak $\mathcal{S}$ sınıfının $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ ile gösterilen iki alt sınıfına ait fonksiyonlarla ilgili önemli özellikler kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

Materyal ve yöntem olarak verilen üçüncü bölümde düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyonlar kavramı verilmiş, bu sınıfların tarihi seyir içerisindeki genelleştirmeleri, geometrik gösterimi, katsayı bağıntıları, Fekete-Szegö problemi, Hadamard çarpım ve subordinasyon sonuçları gibi önemli bazı özellikleri sunulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel kavramlar sunuldu.

Tanım 2.1.1 (r-komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r>0$ bir reel sayı olmak üzere $U(z_0,r)=\{z \in \mathbb{C} : |z-z_0|<r\}$ ifadesi z_0 merkezli, r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının $r-$komşuluğu) olarak adlandırılır. $\overline{U}(z_0,r)$ ile $U(z_0,r)$ nin kapanışı $\partial U(z_0,r)$ ile de onun sınırı ve orijin merkezli r yarıçaplı disk $U(0,r)=U_r$ ile gösterilecektir.

Özel durumda orijin merkezli açık birim disk $U=\{z \in \mathbb{C} : |z|<1\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $U(z_0,r) \subset S$ olacak şekilde bir $r>0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \varnothing$, $S \cap S_2 \neq \varnothing$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 = \varnothing$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 2.1.7 (Süreklilik): $S \subset \mathbb{C}$, $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $z_0 \in S$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $|z - z_0| < \delta$ olduğunda $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ olacak biçimde $\delta = \delta(z_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye z_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu S kümesinin her bir noktasında sürekli ise f ye S kümesinde sürekli fonksiyon denir.

Tanım 2.1.8 (Eğri): $[a,b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım 2.1.9 (Kapalı Eğri): $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ ye bir eğri olsun. $\gamma(a) = \gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.1.10 (Basit Kapalı Eğri): Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü ya pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Diferansiyellenebilme): $A \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0 \in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0 \in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z = z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2 (Analitiklik): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $U(z_0, \varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarında diferansiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \text{ ve } \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Teorem 2.2.3 (Liouville Teoremi): Bir $f(z)$ tam fonksiyonu sınırlı ise, sabittir.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.4 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0, 1, 2...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dır.

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f, bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{2.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada 1. mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin, $f(x) = x^{2/3}$ reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevi yoktur.

Tanım 2.2.5 (Ayrık Tekil nokta): Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir.

Teorem 2.2.6 (Laurent Teoremi): C_0 ve C_1, merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere C_0, r_0 yarıçaplı ve C_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu C_0 ile C_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{2.2}$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir.

Tanım 2.2.7 (Kutup Noktası): z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 2.2.8 (Meromorf fonksiyon): Kompleks düzlemin bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A da meromorf fonksiyon denir.

Teorem 2.2.9 (Maksimum Modül Prensibi): f fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon A bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alamaz.

Sonuç 2.2.10: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonuda bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.2.11 (Schwarz lemması): f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer U birim diskinde $|f(z)|\leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq |z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile sağlanır. (Ponnusamy and Silverman 2006).

Teorem 2.2.12 (Minimum Prensibi): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in A$ için $f(z)\neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz.

Sonuç 2.2.13: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in A$ için $f(z)\neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Tanım 2.2.14 (Ünivalent fonksiyon): f, $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1, z_2 \in A$ için $f(z_1) = f(z_2)$ olması sadece $z_1 = z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1 \neq z_2$ olduğunda $f(z_1) \neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir (Duren 1983).

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.15: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0) \neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

Ayrıca $f'(z_0) \neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani sadece f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0) \neq 0.$ Tersi daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez.

Örnek 2.2.16: $f(z) = z^2$ fonksiyonu $A = \{z : 1 < |z| < 2,\, 0 < \arg z < 3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z) = z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0 \in A$ için $f'(z_0) \neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}} + i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}} - i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right) = i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z) = z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z \in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilaveten, $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z) = |f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.12 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.17 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $A \subset \mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir. Örneğin $f(z) = e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 2.2.18: f fonksiyonun analitik olduğu her z noktasında $f'(z) \neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur.

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a, b, c, d kompleks sabitler olmak üzere

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad - bc \neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

$z-$düzlemindeki $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ bölgesini, $w-$düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f analitik fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 2.2.19 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}\ (\mathcal{D} \neq \mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak U birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0 \in \mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0) = 0$ ve $f'(z_0) > 0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$ yi U birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren 1983).

2.3 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı sunacağız. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine U açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0)=0,\quad f'(0)=1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (2.1) serisi

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n, \quad (z\in U) \tag{2.3}$$

şeklini alır. Burada (2.3) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz ve kısaca

$$\mathcal{A}=\left\{ f:\forall z\in U \text{ için } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_n z^n \text{ şeklindeki analitik fonksiyon}\right\}$$

şeklinde yazılır.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin temel taşı olan bir sınıfı aşağıda tanımlayalım.

2.3.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): U birim diskinde ünivalent olan $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve kısaca

$$\mathcal{S}=\left\{ f\in\mathcal{A}:\forall z\in U \text{ için } f-\text{ünivalent}\right\}$$

şeklinde gösterilir (Pommerenke 1975; Goodman 1983; Duren 1983).

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örneklerini aşağıda verelim.

(i) $w=f(z)=z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathrm{Re}(w)>-1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z)=z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C}-\{(-\infty,-1/2]\cup(1/2,\infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z)=z(1-z)^{-2}$ *Koebe* fonksiyonu U birim diskini $\mathbb{C}-(-\infty,-1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z)=\frac{z}{1-z} \text{ ve } f_2(z)=\frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z)=\frac{1}{(1-z)^2} \text{ ve } f_2'(z)=\frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z)+f_2'(z)=\frac{2-2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z=\dfrac{1+i}{2}\in U$ noktasında $f_1'(z)+f_2'(z)=0$ olduğu görülür. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.3.2: $f\in\mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur (Duren 1983):

(i) Eşlenik alma: $g(z)=\overline{f(\overline{z})}=z+\overline{a}_2z^2+\ldots$ ise, $g\in\mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z)=e^{-i\theta}f(e^{i\theta}z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_ne^{i(n-1)\theta}z^n, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $0<r<1$ olmak üzere

$$g(z)=r^{-1}f(rz)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nr^{n-1}z^n, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in U$ olmak üzere

$$g(z)=\frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z}_0 z}\right)-f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(U)$ da ünivalent ve $\psi(0)=0$ $\psi'(0)=1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi\circ f\in\mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w\notin f(U)$ olsun. Bu durumda

$$g(z)=\frac{f(z)}{1-f(z)/w}, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) $n.$ kök dönüşümü: Eğer $n=2,3,\ldots$ ise

$$g(z)=\sqrt[n]{f(z^n)}=z+\frac{a_2}{n}z^{n+1}+\frac{1}{2n^2}(2na_3-(n-1)a_2^2)z^{2n+1}+\ldots, \quad (z\in U)$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.3 ($\mathcal{P}$ sınıfı): U birim diskinde $p(0)=1$, $\operatorname{Re} p(z)>0$ koşullarını sağlayan $p(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir (Duren 1983).

Örneğin; $p(z)=(1+z)/(1-z),\ z\in U$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, U birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n\in\mathbb{N}_0,\ n\geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.4 (Ω sınıfı): U birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir (Duren 1983).

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)},\quad \phi(z)\in\Omega.$$

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının iki önemli alt sınıfını aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Tanım 2.3.5 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $B\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w\in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna w_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon* denir. Özel durumda, f fonksiyonu $\mathbb{U}$ birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna *yıldızıl fonksiyon* denir. $f\in\mathcal{A}$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir (Pommerenke 1975; Duren 1983).

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.3.6: $f\in\mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z)\in\mathcal{S}^*\Leftrightarrow\frac{zf'(z)}{f(z)}\in\mathcal{P}$$

dır. Ayrıca $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{S}^*\Rightarrow|a_n|\le n\ (n=2,3...)$ değerlendirmesi doğrudur (Pommerenke 1975; Goodman 1983).

Kısaca yıldızıl fonksiyonları

$$\mathcal{S}^{*}=\left\{ f\in\mathcal{A}:\forall z\in U \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>0\right\}$$

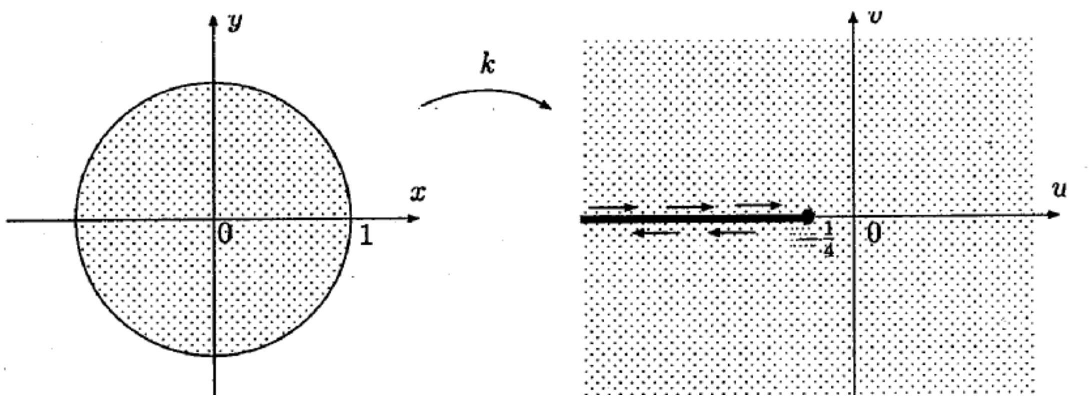
şeklinde gösterebiliriz. Örneğin, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z\in U$ olmak üzere,

$$k(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan *Koebe fonksiyonudur*. Bu fonksiyonu $k(z)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2-1\right]$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu

$$u(z)=\frac{1+z}{1-z},\quad g(z)=u^2(z),\quad k(z)=\frac{1}{4}\left[g(z)-1\right]$$

biçiminde yazılarak U birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğünü görebiliriz. $k(z)$ dönüşümü ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 2.1: Koebe Fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}=z+\sum\limits_{n=2}^{\infty}nz^n\in\mathcal{S}^{*}$ dır. Ayrıca Teorem 2.3.6 kullanılarak da $z=re^{i\theta}$ ve $(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)$$

$$=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\geq\frac{1+r}{1-r}>0$$

elde edilir. Buradan da $k(z)\in\mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $z\in U$ için,

$$k_\theta(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

şeklinde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışın hariç kompleks düzlem olur. $\alpha\in(0,2]$ ve $z\in U$ olmak üzere $f(z)=\frac{1}{2\alpha}\left[\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^\alpha-1\right]$ fonksiyonu, "*genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu*" olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.7 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $B\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1,w_2\in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. $f\in\mathcal{A}$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir (Pommerenke 1975; Duren 1983).

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.3.8: $f\in\mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z)\in\mathcal{C}\Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\in\mathcal{P}$$

dır. Ayrıca $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\in\mathcal{C}\Rightarrow|a_n|\leq 1\ (n=2,3...)$ değerlendirmesi doğrudur. (Pommerenke 1975; Goodman 1983).

Örneğin; $f(z)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n-1}z^{2n-1}\in\mathcal{C}$ dır. Gerçekten $z=re^{i\theta}$ $(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}=\mathrm{Re}\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1+r^2e^{i2\theta}}{1-r^2e^{i2\theta}}\right)$$

$$=\frac{1-r^4}{1+r^4-2r^2\cos 2\theta}\ge\frac{1-r^2}{1+r^2}>0$$

elde edilir.

Teorem 2.3.6. ve 2.3.8. in bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

Teorem 2.3.9 (Alexander Teoremi): $f\in\mathcal{A}$ ve $z\in U$ olmak üzere $g(z)=zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f\in\mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g\in\mathcal{S}^*$ olmasıdır (Pommerenke 1975; Goodman 1983; Duren 1983).

İspat : $f\in\mathcal{C}$ olsun. İspatlamalıyız ki $g\in\mathcal{S}^*$ dır. $f\in\mathcal{C}$ olduğundan

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0$$

yazılır. $g(z)=zf'(z)$ ise $g'(z)=f'(z)+zf''(z)$ yazılabileceğinden,

$$\frac{zg'(z)}{g(z)}=z\frac{f'(z)+zf''(z)}{zf'(z)}=\frac{f'(z)+zf''(z)}{f'(z)}=1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\mathrm{Re}\left(1+z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)>0$$

olduğundan

$$\mathrm{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right)>0$$

olup, $g\in\mathcal{S}^*$ dır.

Şimdi de $g \in \mathcal{S}^*$ olduğunu kabul ederek $f \in \mathcal{C}$ olduğunu gösterelim. $g \in \mathcal{S}^*$ olduğundan

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zg'(z)}{g(z)}\right) > 0$$

yazılır. $g(z)$ nin tanımı kullanılırsa

$$\operatorname{Re}\left(z\,\frac{f'(z)+zf''(z)}{zf'(z)}\right) > 0$$

yazılabileceğinden

$$\operatorname{Re}\left(1+z\,\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) > 0$$

elde edilir. O halde $f \in \mathcal{C}$ dır. Bununla teoremin ispatı tamamdır.

Ayrıca yukarıdaki tanımlardan anlaşıldığı üzere bu sınıflar arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Ünivalentlikle ilgili kriterlerden en kolay ifade edilen ve ispatlananlardan biri aşağıdaki Noshiro, Warschawski ve Wolff' un kriteridir:

• ' f fonksiyonu konveks bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z \in D$ için $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise f fonksiyonu D bölgesi üzerinde ünivalenttir.'

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorinde önemli bir yer işgal eden subordinasyon ve Hadamard çarpım kavramlarını verelim.

Tanım 2.3.10: f ve g fonksiyonları U birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. U birim diskinde $f(z) = g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega \in \Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu U da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir (Duren 1983).

Eğer g ünivalent ise $f \prec g \;\Leftrightarrow\; f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subseteq g(U)$ gerektirmesi doğrudur.

Subordinasyon prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu U birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da U birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0)=f(0)$ ve $g(U)\subset f(U)$ ise, bu durumda U_r diskinde her $r<1$ için $|g'(0)|\leq|f'(0)|$ ve $g(U_r)\subset f(U_r)$ dir (Duren 1983).

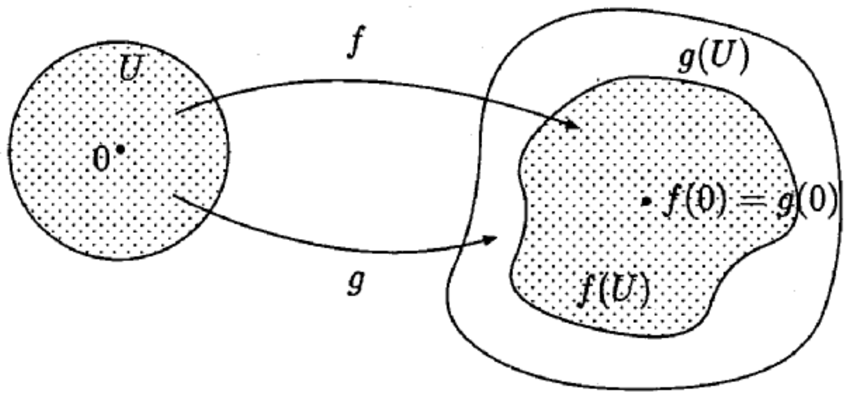
Özellikle, eğer $f\prec g$ ise

$$\max_{|z|\leq r}|f(z)|\leq\max_{|z|\leq r}|g(z)|,\quad (r\in(0,1))$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca,

$$p(z)\in\mathcal{P}\iff p(z)\prec\frac{1+z}{1-z}\quad \text{ve}\quad \phi(z)\in\Omega\iff\phi(z)\prec z$$

gerektirmeleri yazılır.



Şekil 2.2: $f\prec g$ Subordinasyonu

Tanım 2.3.11: $f,g\in\mathcal{A}$ fonksiyonları

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n \text{ ve } g(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}b_nz^n$$

şeklinde verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımları

$$(f*g)(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nb_nz^n=(g*f)(z)$$

şeklinde tanımlanır. Burada "$*$" Hadamard çarpımını gösterir (Ruscheweyh ve Sheil-Small 1973; Duren 1983).

Tanım 2.3.12. ($\mathcal{S}^*(\beta)$ sınıfı): Her $z \in U$ ve $0 \le \beta < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β. mertebeden yıldızıl fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da β. mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\beta)$ ile gösterilir (Goodman 1983).

Tanım 2.3.13. ($\mathcal{C}(\beta)$ sınıfı): Her $z \in U$ ve $0 \le \beta < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β. mertebeden konveks fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da β. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{C}(\beta)$ ile gösterilir (Goodman 1983).

Subordinasyonu kullanarak $\mathcal{S}^*(\beta)$ ve $\mathcal{C}(\beta)$ fonksiyonlarını

$$\mathcal{S}^*(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

ve

$$\mathcal{C}(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1+(1-2\beta)z}{1-z}, 0 \le \beta < 1 \right\}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Tanım 2.3.14 ($\mathcal{R}_\beta$ sınıfı): Her $z \in U$ ve $0 \le \beta \le 1$ olmak üzere

$$\begin{cases} f * \dfrac{z}{(1-z)^{2-2\beta}} \in \mathcal{S}^*(\beta); & \beta < 1 \\ \operatorname{Re}\left(\dfrac{f(z)}{z}\right) > \dfrac{1}{2}; & \beta = 1 \end{cases}$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonların oluşurduğu sınıfa β. mertebeden önyıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{R}_\beta$ ile gösterilir (Goodman 1983).

Özel olarak $\mathcal{S}^*(0)=\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}(0)=\mathcal{C}$ yazılır. Buradan da anlaşıldığı üzere $\mathcal{S}^*(\beta)\subset\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}(\beta)\subset\mathcal{C}$ dır. Ayrıca $\mathcal{R}_0=\mathcal{C}$ ve $\mathcal{R}_{1/2}=\mathcal{S}^*(1/2)$ dır.

Ünivalent fonksiyonların önemli ve ilk çalışmalarından birisi $\mathcal{S}$ sınıfına ait katsayı eşitsizliklerinin elde edilmesidir. Bu probleme ilk cevabı Bieberbach 1916 yılında aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 2.3.15 (Bieberbach Teoremi): $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu için $|a_2|\le 2$ dir. Eşitlik hali $z\in U$ olmak üzere Koebe fonksiyonunun dönmeleri için yani $k_\theta(z)=\dfrac{z}{\left(1-e^{i\theta}z\right)^2}$ şeklindeki fonksiyonlar için geçerlidir (Pommerenke 1975; Duren 1983).

Teorem 2.3.16 (Bieberbach Tahmini): $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $n=2,3,4,...$ için $|a_n|\le n$ eşitsizliği vardır. Eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun dönmeleri olmasıdır (Pommerenke 1975; Duren 1983).

Bu tahmin için bulunan sonuçlar aşağıdaki tarihsel seyir içerisinde elde edilmiştir.

$|a_2|\le 2,$ Bieberbach (1916)

$|a_3|\le 3,$ Löwner (1923) (Löwner diferensiyel Denklemi)

$|a_4|\le 4,$ Garabedian, Schiffer (1955), (Grunsky eşitsizliği)

$|a_6|\le 6,$ Pederson (1968), Ozawa (1969)

$|a_5|\le 5,$ Pederson, Schiffer (1972)

$|a_n|\le e.n,$ Littlewood (1925)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{n}=1,$ Hayman (1955)

$|a_n|\le\sqrt{7/6}\,n<1.081n,$ FitsGerald (1972)

*** $|a_n|\le n,\ n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$ L. De Branges (1984).

2.4. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Alt Sınıfları İçin Bükülme (Distortion) ve Genişleme (Growth) Sonuçları

$\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar için Teorem 2.3.15 de verilen $|a_2| \leq 2$ tahmini, bu sınıftaki fonksiyonlar hakkındaki bazı önemli teoremlerin esasını oluşturur. Burada ilk olarak Koebe çeyrek teoremini ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 2.4.1: $f \in \mathcal{S}$ olsun. $f(U) \supseteq U_{1/4}$ dir. Bu sonuç Koebe fonksiyonunun dönmeleri için kesindir. Üstelik $\bigcap_{f \in S} f(U) = U_{1/4}$ dir (Duren 1983).

İspat: $w_0 \notin f(U)$ olacak şekilde $w_0 \in \mathbb{C}$ sayısının varlığı kabul edelim. İspatlamalıyız ki $|w_0| \geq 1/4$ dir. Ayrıca $|w_0| = 1/4$ eşitliğinin olması için gerek ve yeter şart f nin Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olmasıdır. Bunun için $z \in U$ olmak üzere,

$$g(z) = \frac{w_0 f(z)}{w_0 - f(z)}$$

şeklinde tanımlanan $g : U \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Teorem 2.3.2 in (vi). kısmından dolayı $g \in \mathcal{S}$ dir ve g fonksiyonu $z \in U$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{w_0 f(z)}{w_0 - f(z)} &= \frac{w_0 [z + a_2 z^2 + \ldots]}{w_0 - [z + a_2 z^2 + \ldots]} \\ &= w_0 \left\{ \frac{z}{w_0} + \frac{1}{w_0} \left(a_2 + \frac{1}{w_0} \right) z^2 + \ldots \right\} \\ &= z + \left(a_2 + \frac{1}{w_0} \right) z^2 + \ldots \end{aligned}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. $g \in \mathcal{S}$ olduğundan z^2 li terimin katsayısının modülünün 2 den büyük olamayacağı düşünülürse $\left| a_2 + \frac{1}{w_0} \right| \leq 2$ yazılır. Böylece,

$$\left| a_2 + \frac{1}{w_0} \right| \leq 2 \Rightarrow \left| \frac{1}{w_0} \right| - |a_2| \leq 2$$

yazılabileceğinden,

$$\left|\frac{1}{w_0}\right| \le |a_2| + 2$$

elde edilir. Böylece $|a_2| \le 2$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\left|\frac{1}{w_0}\right| \le 4 \Rightarrow |w_0| \ge \frac{1}{4}$$

olur. Diğer yandan $|w_0| = 1/4$ olması için gerek ve yeter şart $|a_2| = 2$ ve $\left|a_2 + \frac{1}{w_0}\right| = 2$ olmasıdır. Bu durumda f fonksiyonu Koebe fonksiyonunun bir dönmesi olmalıdır. $\bigcap_{f\in S} f(U) = U_{1/4}$ olduğunu göstermek için $\theta \in \mathbb{R}$ ve $z \in U$ olmak üzere,

$$k_\theta(z) = \frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

ile verilen Koebe fonksiyonunun dönmelerini göz önüne alalım. $\partial U_{1/4}$ çemberinin her bir noktası $k_\theta(U)$ bölgelerinin her birinin sınır noktasıdır ve böylece $\bigcap_{\theta\in R} k_\theta(U) = U_{1/4}$ olur. Bu nedenle $\bigcap_{f\in S} f(U) = U_{1/4}$ olmak zorundadır. O halde $U_{1/4}$ diski $\mathcal{S}$ sınıfındaki her bir fonksiyonun görüntüsünde ihtiva edilen orijin merkezli en geniş disktir.

Bieberbach teoreminin çok önemli bir başka sonucu $\mathcal{S}$ sınıfındaki bir fonksiyonun a_2 katsayısı ile bağlantılı olan ve Koebe bükülme (distortion) teoremi olarak bilinen aşağıdaki teoremdir.

Teorem 2.4.2: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda bütün $z \in U$ lar için

$$\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \le |f(z)| \le \frac{|z|}{(1-|z|)^2}, \qquad \text{(Genişleme (Growth))}$$

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \le |f'(z)| \le \frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}, \qquad \text{(Bükülme (Distorsion))}$$

ve

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \le \left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \le \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Bu eşitsizliklerin her birininin eşitlik halinin olması Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi ile gerçekleşir (Goodman 1983; Duren 1983).

Biz burada sadece bükülme eşitsizliğinin ispatını vereceğiz.

İspat: z sabit ve $r \in (0,1)$ olmak üzere $|z| = r$ olsun $\varsigma \in U$ olmak üzere,

$$g(\varsigma) = \frac{f\left(\dfrac{\varsigma + z}{1 + \overline{z}\varsigma}\right) - f(z)}{(1 - |z|^2)\, f'(z)} = \varsigma + b_2 \varsigma^2 + \ldots \tag{2.4}$$

ile verilen f nin g Koebe dönüşümünü göz önüne alalım. Teorem 2.3.2 nin (iv) şıkkından $g \in \mathcal{S}$ dır. Ayrıca (2.4) den türev alarak

$$g'(\varsigma) = \frac{1}{\left(1 - |z|^2\right) f'(z)} \left\{ f'\left(\frac{\varsigma + z}{1 + \overline{z}\varsigma}\right) \frac{1 - |z|^2}{(1 + \overline{z}\varsigma)^2} \right\} = \frac{1}{f'(z)}\, f'\left(\frac{\varsigma + z}{1 + \overline{z}\varsigma}\right) \frac{1}{(1 + \overline{z}\varsigma)^2}$$

ve

$$g''(\varsigma) = \frac{1}{f'(z)} \left\{ f''\left(\frac{\varsigma + z}{1 + \overline{z}\varsigma}\right) \frac{1 - |z|^2}{(1 + \overline{z}\varsigma)^4} - \frac{2\overline{z}}{(1 + \overline{z}\varsigma)^3}\, f'\left(\frac{\varsigma + z}{1 + \overline{z}\varsigma}\right) \right\}$$

yazılır. Buradan $g''(0)$ hesaplanırsa,

$$\begin{aligned} g''(0) &= \frac{1}{f'(z)} \left\{ f''(z)\left(1 - |z|^2\right) - 2\overline{z} f'(z) \right\} \\ &= \left\{ \frac{f''(z)}{f'(z)} . \left(1 - |z|^2\right) - 2\overline{z} \right\} \end{aligned} \tag{2.5}$$

elde edilir. $g(\varsigma) = \varsigma + b_2 \varsigma^2 + \ldots$ ifadesinin ikinci türevinin $\varsigma = 0$ da ki değeri,

$$g''(0) = 2b_2 \tag{2.6}$$

olur. (2.5) ve (2.6) ifadelerinin eşitliğinden,

$$b_2 = \frac{1}{2} \left\{ \frac{f''(z)}{f'(z)} \left(1 - |z|^2\right) - 2\overline{z} \right\}$$

bulunur. $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar için $|b_2| \le 2$ olması gerektiğinden,

$$\left| (1 - |z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\overline{z} \right| \le 4$$

elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki yanı $|z|$ ile çarpılır ve $|z|=r$ olduğu düşünülürse

$$\left|\left(1-r^2\right)\frac{zf''(z)}{f'(z)}-2\bar{z}z\right|\leq 4|z|$$

ve buradan da,

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right|\leq\frac{4r}{1-r^2}$$

sonucu bulunur. $z\in\mathbb{C}$ için $|\operatorname{Re}z|\leq|z|$ olduğundan,

$$\left|\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right)\right|\leq\frac{4r}{1-r^2},$$

$$-\frac{4r}{1-r^2}\leq\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}-\frac{2r^2}{1-r^2}\right)\leq\frac{4r}{1-r^2}$$

ve

$$\frac{2r^2-4r}{1-r^2}\leq\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\leq\frac{4r+2r^2}{1-r^2} \tag{2.7}$$

elde edilir. Diğer yandan $f'(z)\neq 0$ ve $f'(0)=1$ olduğundan, $\log f'(z)\big|_{z=0}=0$ olacak şekilde $\log f'(z)$ nin bir analitik dalı vardır. $z=re^{i\theta}$ için,

$$\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f'(z)\right|=\frac{\partial}{\partial r}\operatorname{Re}\left\{\log f'(z)\right\}=\frac{1}{r}\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \tag{2.8}$$

yazabiliriz. (2.7) ve (2.8) i kullanarak,

$$\frac{2r-4}{1-r^2}\leq\frac{\partial}{\partial r}\log\left|f'(re^{i\theta})\right|\leq\frac{2r+4}{1-r^2} \tag{2.9}$$

eşitsizliğini elde ederiz. θ sabit tutulur ve $f'(0)=1$ olduğu göz önüne alınırsa (2.9) eşitsizliğinin her üç yanının integralinden,

$$\log\left(\frac{1-r}{(1+r)^3}\right)\leq\log\left|f'(re^{i\theta})\right|\leq\log\left(\frac{1+r}{(1-r)^3}\right)$$

bulunur. Böylece bu son eşitsizlikten de,

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\leq\left|f'\left(re^{i\theta}\right)\right|\leq\frac{1+r}{(1-r)^3}$$

ve dolayısıyla

$$\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leq |f'(z)| \leq \left[\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3}\right]$$

eşitsizliği elde edilir. Bu sınırlar kesindir.

Teorem 2.4.3: $\mathcal{S}$ sınıfı kopmaktır (Duren 1983).

İspat: $f \in \mathcal{S}$ için bükülme sınırındaki üst sınırdan $\mathcal{S}$ sınıfının yerel düzgün sınırlı bir aile olduğu ve bu nedenle de $\mathcal{S}$ nin bir normal aile olduğu söylenebilir. $\mathcal{S}$ nin kompakt olduğunu göstermek için $\mathcal{S}$ nin kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. $k \to \infty$ iken $f_k \to f$ (U da yerel düzgün) olacak şekilde $\mathcal{S}$ de $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dizisini göz önüne alalım. f ya ünivalent ya da sabit olmalıdır. $f(0)=0$ ve $f'(0) = \lim_{k\to\infty} f_k'(0) = 1$ olduğundan f ünivalent olmalıdır. Yani $f \in \mathcal{S}$ dir. $\mathcal{S}$ kapalı ve sınırlı olduğundan kompaktır.

Teorem 2.4.4: $f \in \mathcal{A}$ olsun. U birim diskinde $\operatorname{Re} f(z) \geq 0$ olması için gerek ve yeter şart $\mu(2\pi)-\mu(0) = \operatorname{Re} f(0)$ ve $z \in U$ olmak üzere,

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, d\mu(t) + i \operatorname{Im} f(0)$$

olacak şekilde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonu olmasıdır (Duren 1983).

Sonuç 2.4.5 (Herglotz formülü): $p \in \mathcal{P}$ fonksiyonu verilsin. Buna göre $p \in \mathcal{P}$ olması için gerek ve yeter şart U birim diskinde

$$p(z) = \int_0^{2\pi} \frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\, d\mu(t)$$

olacak şekilde ve $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ olmak üzere $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonunun olmasıdır (Duren 1983).

Herglotz formülü, pozitif reel kısma sahip fonksiyonlar için aşağıdaki bükülme (distortion) sonuçlarını verir.

Teorem 2.4.6: $p \in \mathcal{P}$ ve $|z| = r < 1$ ise

$$\frac{1-r}{1+r} \le |p(z)| \le \frac{1+r}{1-r}, \tag{2.10}$$

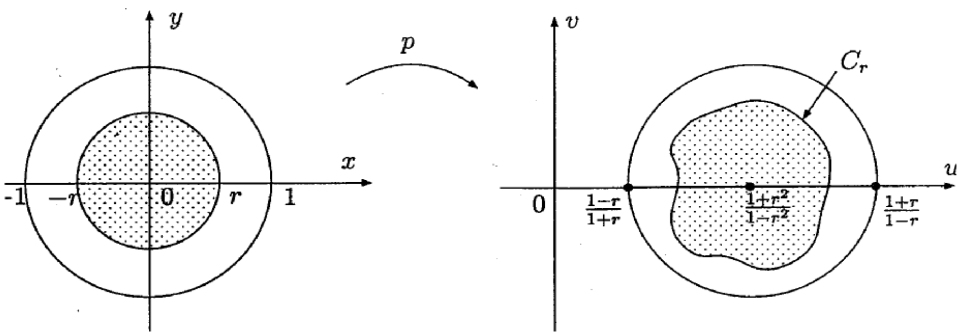
$$\frac{1-r}{1+r} \le \operatorname{Re} p(z) \le \frac{1+r}{1-r}, \tag{2.11}$$

$$|p'(z)| \le \frac{2\operatorname{Re} p(z)}{1-r^2} \le \frac{2}{(1-r)^2} \tag{2.12}$$

eşitsizlikleri vardır. Bu eşitsizlikler kesindir (Goodman 1983; Duren 1983).

Uyarı 2.4.7: (2.10) formülünü kullanarak $|z| = r < 1$ olmak üzere her bir sabit z noktası ve $p \in \mathcal{P}$ için $p(z)$ lerin $\frac{1+r^2}{1-r^2}$ merkezli ve $\frac{2r}{1-r^2}$ yarıçaplı kapalı disk içerisinde kaldığı kolayca görülür. Buna göre $p \in \mathcal{P}$ ise $|z| = r$ olmak üzere

$$\left| p(z) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \le \frac{2r}{1-r^2}.$$



Şekil 2.3: U_r nin $p \in \mathcal{P}$ altındaki görüntüsü

Ayrıca Herglotz formülü $\mathcal{P}$ sınıfındaki fonksiyonların katsayıları için aşağıdaki sınırları verir. Bu sonuç Carathéodory tarafından elde edilmiştir.

Teorem 2.4.8: $z \in U$ olmak üzere $p \in \mathcal{P}$ fonksiyonu, $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$ şeklinde bir açılımına sahipse her $n = 1,2,....$ için $|p_n| \le 2$ dir. Bu tahminler kesindir (Duren 1983).

İspat: $p\in\mathcal{P}$ olduğundan, $\mu(2\pi)-\mu(0)=1$ ve

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,d\mu(t)$$

olacak şekilde $[0,2\pi]$ aralığında azalmayan bir μ fonksiyonu vardır. İntegralin binomial açılımı her $n=1,2,....$ için

$$p_n=2\int_0^{2\pi}e^{-i\mathrm{nt}}d\mu(t)$$

eşitliğini verir. Buna göre, iddia edildiği gibi $|p_n|\le 2$ dir. Açık bir şekilde $|\lambda|=1$ olmak üzere $p(z)=\dfrac{1+\lambda z}{1-\lambda z}$ için $|p_n|=2$, $n=1,2,....$ dir.

Sonuç 3.4.9: $\mathcal{P}$ kompakt bir kümedir (Duren 1983).

Koebe fonksiyonu ve onun rotasyonları $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait olduğundan $\mathcal{S}$ sınıfındaki fonksiyonlar için elde edilmiş ve bükülme (distortion) ve genişleme (Growth) teoremi olarak bilinen teorem $\mathcal{S}^*$ sınıfına ait fonksiyonlar içinde doğrudur.

Teorem 2.4.10: $f\in\mathcal{S}^*$ ve $|z|=r<1$ olsun. Bu taktirde,

$$\frac{r}{(1+r)^2}\le|f(z)|\le\frac{r}{(1-r)^2} \tag{2.13}$$

ve

$$\frac{1-r}{(1+r)^3}\le|f'(z)|\le\frac{1+r}{(1-r)^3} \tag{2.14}$$

bağıntıları vardır. Bu tahminlerin hepsi kesindir. Koebe fonksiyonunun uygun bir dönmesi için bu bağıntıların her biri eşitlik hali için geçerli olur (Goodman 1983; Duren 1983).

Bu teoremin direkt sonucu şudur: $\mathcal{S}^*$ kümesi $\mathcal{A}$ nun kompakt alt kümesidir. Ayrıca $\mathcal{S}$ sınıfı içinde geçerli olan $1/4$ Koebe sabiti $\mathcal{S}^*$ sınıfı için de geçerlidir.

Normalize edilmiş konveks fonksiyonlar için aşağıdaki bükülme (distortion) ve genişleme (Growth) teoremi verilebilir.

Teorem 2.4.11: $f \in \mathcal{C}$ ve $|z| = r < 1$ olsun. Bu taktirde,

$$\frac{r}{1+r} \le |f(z)| \le \frac{r}{1-r} \tag{2.15}$$

ve

$$\frac{1}{(1+r)^2} \le |f'(z)| \le \frac{1}{(1-r)^2} \tag{2.16}$$

bağıntıları vardır. Bu tahminlerin hepsi kesindir. Eşitlik $\lambda \in \mathbb{C}$ ve $|\lambda| = 1$ olmak üzere $f(z) = \dfrac{z}{1-\lambda z}$ fonksiyonu için sağlanır (Goodman 1983; Duren 1983).

İspat: f, U da normalize edilmiş analitik fonksiyon ve $g(z) = zf'(z)$ iken $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır. Bu teorem ve

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |f(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa, $g \in \mathcal{S}^*$ olduğundan

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |g(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

ve buradan da

$$\frac{r}{(1+r)^2} \le |zf'(z)| \le \frac{r}{(1-r)^2}$$

yazılır. Böylece $|z| = r$ iken

$$\frac{1}{(1+r)^2} \le |f'(z)| \le \frac{1}{(1-r)^2}$$

elde edilir. Şimdi

$$\frac{r}{1+r} \le |f(z)| \le \frac{r}{1-r}$$

eşitsizliğinin alt sınırını elde etmek için z sabit olmak üzere $|z| = r < 1$ alalım. $f \in \mathcal{C}$ olduğundan, 0 ve $f(z)$ arasındaki kapalı Γ doğru parçası $f(U)$ da ihtiva edilir. γ, Γ

eğrisinin ters görüntüsü ise γ, 0 noktasını z noktasına birleştiren bir basit eğridir. O halde,

$$|f(z)| = \int_{\Gamma} |dw| = \int_{\gamma} |f'(\varsigma)|.|d\varsigma|$$

$$\geq \int_0^r |f'(\rho e^{i\theta})| d\rho \geq \int_0^r \frac{1}{(1+\rho)^2} d\rho = \left(-\frac{1}{1+\rho} \right)\Bigg|_0^r = \frac{r}{1+r}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.12: $f \in \mathcal{C}$ ise U birim diskinin f altındaki görüntüsü olan $f(U)$, $U_{1/2}$ diskini ihtiva eder. Bu sonuç kesindir (Duren 1983).

İspat: $f \in \mathcal{C}$ olduğundan Teorem 2.4.11 kullanılır ve $\dfrac{r}{1+r} < |f(z)|$ eşitsizliğinden $r \to 1$ için limit alınırsa alt sınır olarak $|f(z)| \geq 1/2$ elde edilir.

Bu teoremin bir başka ilginç ispatı 1964 yılında MacGregor tarafından aşağıdaki gibi verilmiştir.

$c \notin f(U)$ olduğunu kabul ederek $|c| \geq 1/2$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $f \in \mathcal{C}$ ve $f(z) \neq c$ olsun. $z \in U$ olmak üzere $g(z) = (f(z) - c)^2$ fonksiyonunu göz önüne alalım. g fonksiyonu ünivalenttir. Çünkü $z_1, z_2 \in U$ olmak üzere $z_1 \neq z_2$ iken $g(z_1) = g(z_2)$ olduğu kabul edildiğinde,

$$(f(z_1) - c)^2 = (f(z_2) - c)^2 \Rightarrow$$

$$f^2(z_1) - 2cf(z_1) + c^2 = f^2(z_2) - 2cf(z_2) + c^2 \Rightarrow$$

$$f^2(z_1) - f^2(z_2) = 2c[f(z_1) - f(z_2)] \Rightarrow$$

$$[f(z_1) - f(z_2)].[f(z_1) + f(z_2) - 2c] = 0$$

yazılabileceğinden

$$f(z_1) = f(z_2) \qquad \text{veya} \qquad f(z_1) + f(z_2) = 2c$$

elde edilir. f fonksiyonu U da ünivalent olduğundan $z_1 \neq z_2$ iken $f(z_1) = f(z_2)$ olamaz. f konveks olduğundan $\dfrac{f(z_1) + f(z_2)}{2} = c \in f(U)$ olmalıdır. Halbuki $c \notin f(U)$ dır. O halde g fonksiyonu $|z| < 1$ de ünivalenttir. Diğer yandan $z \in U$ olmak üzere;

$$h(z) = \frac{c^2 - g(z)}{2c}$$

fonksiyonu da $|z| < 1$ de ünivalenttir. Ayrıca $g(0) = c^2$ ve $g'(0) = -2c$ olduğundan $h(0) = 0,\ h'(0) = 1$ şartları da sağlanmaktadır. Yani $h \in \mathcal{S}$ dir. $f(z) \neq c$ iken $g(z) \neq 0$ olacağından $h(z) \neq c/2$ olup

$$\left|\frac{c}{2}\right| \geq \frac{1}{4} \Rightarrow |c| \geq \frac{1}{2}$$

elde edilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Düzgün Yıldızıl (Starlike) ve Düzgün Konveks (Convex) Fonksiyonlar

3.1 Düzgün Yıldızıl (Starlike) Fonksiyonlar

Düzgün yıldızıl fonksiyonların tanımı ilk kez 1991 yılında Goodman tarafından aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

Tanım 3.1.1: Eğer $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu U birim diskinde kalan $\zeta \in U$ merkezli her dairesel γ yayını , $f(\zeta)$ ye göre yıldızıl bir yay üzerine dönüştürüyorsa f ye düzgün yıldızıl fonksiyon denir (Goodman 1991).

U da düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfını $\mathcal{UST}$ ile göstereceğiz. Yukarıdaki tanım analitik olarak ilk kez 1991 yılında Goodman tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 3.1.2: $f \in \mathcal{UST}$ olması için gerek ve yeter şart, her $z;\zeta \in U$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{(z-\zeta)\,f'(z)}{f(z)-f(\zeta)}\right) \geq 0, \tag{3.1}$$

eşitlizliğinin sağlanmasıdır (Goodman 1991).

Teorem 3.1.2 de $\zeta = 0$ alındığında $\mathcal{UST} \subset \mathcal{S}^*$ olduğu anlaşılır. Bu yüzden, $f \in \mathcal{UST}$ için $|a_n| \leq 1$ dir. $f \in \mathcal{UST}$ için, bir en iyi sınırın $|a_n| \leq \frac{2}{n}$ olduğunun Charles Horowitz tarafından ispatlandığını Goodman [15] numaralı makalesinde belirtmiştir. Yukarıda bulunan katsayı tahminleri kesin değildir. Düzgün yıldızıl fonksiyonlar için kesin bir katsayı tahmini henüz çözülememiştir. Özel bir takım $f \in \mathcal{UST}$ fonksiyonları için katsayı tahminlerini 1991 yılında Goodman, Teorem 3.1.2 in bir uygulaması olarak

$$F_1(z) = \frac{z}{1-bz} \in \mathcal{UST} \Leftrightarrow |b| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

şeklinde olduğunu göstermiştir. Ayrıca eğer, $F_2(z)=z+bz^n, (n>1)$ ve $|b|\le \frac{\sqrt{2}}{2n}$ ise $F_2 \in \mathcal{UST}$ dir. 1992 yılında Merkes ve Salmassi yukarıdaki sonucu geliştirerek sınırı $|b|\le \sqrt{\frac{n+1}{2n^3}}$ olarak genelleştirdi. Fakat bu sınır $b\neq 2$ için kesin değildi. Bu sınırın kesinliği 1997 yılında Nezhmetdinov tarafından elde edildi. Ayrıca $b=\frac{1}{2}$ alınırsa , F_1 fonksiyonun disk otomorfizminin $\mathcal{UST}$ sınıfından olmadığı görülür.

Teorem 3.1.2 in bir diğer uygulaması

$$\frac{(z-\zeta)\, f'(z)}{f(z)-f(\zeta)}$$

fonksiyonunu sırasıyla z ve ζ nin kuvvetlerine göre Taylor serisine açmaktır. U da pozitif reel kısma sahip $p(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+...$ fonksiyonu için $|c_n|\le 2\,\mathrm{Re}(c_0)$ eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki sonucu söyleyebiliriz.

Teorem 3.1.3: $f\in \mathcal{UST}$ olsun. Ayrıca p_0, p_1, q_0, q_1 fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlansın

$$p_0(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta},\ \ p_1(z)=\frac{f(\zeta)(1-2a_2\zeta)-\zeta}{\zeta^2}$$

$$q_0(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{zf'(\zeta)},\ \ q_1(z)=\frac{f(z)-z}{z^2 f'(z)}.$$

Bu durumda,

$$|p_1(\zeta)|\le 2\,\mathrm{Re}\big(p_0(\zeta)\big) \ \text{ ve } \ |q_1(z)|\le 2\,\mathrm{Re}\big(q_0(z)\big)$$

dır (Goodman 1991).

Teorem 3.1.3 ü ve $|a_n|\le \frac{2}{n}$ eşitsizliğini kullanarak $f\in \mathcal{UST}$ fonksiyonları için genişleme (growth) eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik

$$\frac{r}{1+2r}\le |f(z)|\le -r+2\ln\frac{1}{1-r},\quad |z|=r<1$$

şeklindedir. Teorem 3.1.3 in bir diğer uygulamasıyla

$$\frac{f(z)-f(\zeta)}{(z-\zeta)\,f'(z)}=\int_0^1 \frac{f'\big(tz+(1-t)\zeta\big)}{f'(z)}\,dt$$

yazılır. 1992 yılında, Merkes ve Salmassi bu eşitliği kullanarak her $z,\omega\in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(\omega)}{f'(z)}\right)\Rightarrow f\in \mathcal{UST}$$

ve

$$f\in \mathcal{UST}\Rightarrow \operatorname{Re}\left(\frac{f'(\omega)}{f'(z)}\right)^{1/2}$$

gerektirmelerinin doğru olduğunu göstermiştir. Burada $\frac{1}{2}$ sınırı en iyi sınırdır.

Merkes ve Salmassi aynı yıl düzgün yıldızıl fonksiyonlar ve Hadamard çarpımını ilişkilendirmek için aşağıda önemli bir sonuç ispatlamıştır.

Teorem 3.1.4: $f\in\mathcal{A}$ olsun. $f\in\mathcal{UST}$ olması için gerek ve yeter şart $|\alpha|<1$ ve $|\beta|<1$ olmak üzere $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ kompleks sayıları için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)*\dfrac{z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)}}{f(z)*\dfrac{z}{(1-\alpha z)^2}}\right)\geq 0,\quad z\in U$$

olmasıdır (Merkes ve Salmassi 1992).

1994 yılında Ronning $\mathcal{UST}$ sınıfını araştırmak için Hadamard çarpım tekniğinin daha kullanışlı olduğu sonucuna varmıştır.

Teorem 3.1.5: $f\in\mathcal{UST}$ olması için gerek ve yeter şart her $z\in U, |x|=1$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z)-f(xz)}{(1-x)\,zf'(z)}\right)\geq 0 \tag{3.2}$$

dir (Ronning 1994).

Tanım 3.1.6: $\mathcal{G}$ kümesi $\mathcal{A}$ nın $\mathcal{M}$ özelliğine sahip bir altkümesi olsun. $\mathcal{G}$ kümesindeki her f fonksiyonu U_r diskinde $\mathcal{M}$ özelliğine sahip olacak şekilde eğer R sayısı tüm r sayılarının en küçük üst sınırı ise R ye $\mathcal{G}$ kümesinde $\mathcal{M}$ özelliğinin yarıçapı denir.

Örneğin; bir yıldızıl fonksiyonun konveks olmasına gerek yoktur. Her yıldızıl fonksiyon $|z|<2-\sqrt{3}$ diskini konveks bir bölge üzerine resmeder. Bu yüzden yıldızıl fonksiyonların $\mathcal{S}^*$ sınıfının konvekslik yarıçapı $2-\sqrt{3}$ dir. Merkes ve Salmassi [30] ve Ronning [41] birbirlerinden bağımsız olarak konveks fonksiyonların $\mathcal{C}$ sınıfının $\mathcal{UST}$ yarıçapının $1/\sqrt{2}$ olduğunu göstermiştir. Yine Merkes ve Salamasi [30] ön yıldızıl fonksiyonların sınıfının $\mathcal{UST}$ yarıçapı için bir en düşük alt sınır elde etmiştir. Aşağıdaki teorem ünivalent fonksiyonların bilinen alt sınıfları için yarıçap sonuçlarını içerir.

Teorem 3.1.7:

(1) $\mathcal{S}$ ünivalent fonksiyonlarının sınıfı için $\mathcal{UST}$ -yarıçapı $r_0 = 0.3691$

(2) $\mathcal{S}^*$ yıldızıl fonksiyonların sınıfı için $\mathcal{UST}$ -yarıçapı $0.369 < r_0^* \leq 1/\sqrt{7}$

(3) $\mathcal{C}$ konveks fonksiyonların sınıfı için $\mathcal{UST}$ -yarıçapı $1/\sqrt{2}$

(4) $\mathcal{R}_\beta$ ön yıldızıl fonksiyonların sınıfı için $\mathcal{UST}$ - yarıçapı $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \leq \beta < 1$ için $(1+\beta)/(1-\beta)$

dır (Ali ve Ravichandran 2011).

3.2 Düzgün Konveks Fonksiyonlar:

Düzgün konveks fonksiyonların tanımı ilk kez 1991 yılında Goodman [14] tarafından aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

Tanım 3.2.1: Eğer $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu U birim diskinde kalan $\zeta \in U$ merkezli her dairesel γ yayını, konveks bir yay üzerine dönüştürüyorsa f ye düzgün konveks fonksiyon denir.

U da düzgün konveks fonksiyonların sınıfını $\mathcal{UCV}$ ile göstereceğiz. Yukarıdaki tanım analitik olarak ilk kez 1991 yılında Goodman tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 3.2.2: $f \in \mathcal{UCV}$ olması için gerek ve yeter şart, her $z;\zeta \in U$ için

$$\operatorname{Re}\left(1+(z-\zeta)\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) \geq 0, \tag{3.3}$$

eşitlizliğinin sağlanmasıdır (Goodman 1991).

Goodman aynı çalışmasında

$$F(z) = \frac{z}{1-Az}$$

olmak üzere $F \in \mathcal{UCV} \Leftrightarrow |A| \leq 1/3$ olduğunu göstermiştir. Teorem 3.2.2 de özel olarak $\zeta = 0$ alınırsa $\mathcal{UCV} \subset \mathcal{C}$ olduğu görülür. Ayrıca yine Teorem 3.2.2 de $\zeta = -z$ alınması durumunda $\mathcal{UCV} \subset \mathcal{C}(1/2)$ olduğu açıktır. Düzgün yıldızıl fonksiyonlar için iki değişkenli olarak verilen ve kullanışı bakımından zor olan Teorem 3.1.2 yi tek değişkenli olarak yazamıyoruz. Fakat Düzgün konveks fonksiyonlar için bu durum böyle değildir. Yani Teorem 3.2.2 yi tek değişkene bağlı olarak yazmak mümkündür. Bunu ilk defa 1992 yılında Ma ve Minda ve 1993 yılında Ronning aşağıdaki teoremle göstermiştir.

Teorem 3.2.3: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Her $z \in U$ için, $f \in \mathcal{UCV}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \tag{3.4}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Ronning 1993).

Şimdi (3.4) ün geometrik yorumunu verelim. (3.4) eşitsizliğinde $1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)} = \omega$ alalım ve

$$\Omega_p = \{\omega \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\omega > |\omega - 1|\}$$

kümesini tanımlayalım. Ω_p kümesinin $(\operatorname{Im}\omega)^2 = 2\operatorname{Re}\omega - 1$ parabolünün içi olduğu kolayca görülebilir. Böylece Ω_p kümesinin elemanları reel eksene göre simetrik olup ve tepe noktası $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ koordinatlarına sahip parabollerin bir kümesidir. Böylece

$$f \in \mathcal{UCV} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \Omega_p$$

gerektirmesi yazılır. 1993 yılında Ronning $\mathcal{UCV}$ sınıfından yola çıkarak aşağıdaki parabolik yıldızıl fonksiyonların sınıfını tanımladı.

Tanım 3.2.4: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna parabolik düzgün yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{S}_p$ ile gösterilir (Ronning 1993).

Diğer bir ifadeyle Alexander teoremini kullanarak $\mathcal{S}_p$ sınıfı $f \in \mathcal{UCV}$ olmak üzere $zf'(z)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf olarak tanımayabiliriz. Yani

$$\mathcal{S}_p = \{F \in \mathcal{A} :\ F = zf'(z),\ f \in \mathcal{UCV}\}$$

yazılır. Ω_p kümesi parabolik bir bölge olduğundan ve $\frac{zf'(z)}{f(z)} = \omega$ alınırsa

$$f \in \mathcal{S}_p \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \Omega_p$$

gerektirmesi yazılır. Dolayısıyla $f \in \mathcal{S}_p$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \frac{1}{2}$$

ve

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{\pi}{4}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Buradan $\mathcal{S}_p \subset \mathcal{S}^*(1/2)$ olduğu kolayca görülür. 1992 yılında Ma ve Minda ve bunlardan bağımsız olarak 1993 yılında Ronning $\mathbb{C}$ yi Ω_p bölgesi üzerine resmeden dönüşümü $\varphi_p : U \to \mathbb{C}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\varphi_p(z) &= 1 + \frac{2}{\pi^2}\left(\log\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2 \\ &= 1 + \frac{8}{\pi^2}\left(z + \frac{2}{3}z^2 + \frac{23}{45}z^3 + \frac{44}{105}z^4 + \ldots\right) \end{aligned} \tag{3.5}$$

şeklinde tanımladılar. Böylece $\mathcal{UCV}$ ve $\mathcal{S}_p$ sınıflarını subordinasyonu kullanarak

$$\mathcal{S}_p = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi_p(z) \right\}$$

ve

$$\mathcal{UCV} = \left\{ f \in \mathcal{A} : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi_p(z) \right\}$$

formda yazabiliriz. Ronning aynı makalesinde $\zeta(t)$ Riemann zeta fonksiyonu olmak üzere $f \in \mathcal{UCV}$ için,

$$|f'(z)| \le \exp\left(\frac{14\zeta(3)}{\pi^2}\right) \approx 5.502$$

bükülme eşitsizliğini ve ayrıca bu eşitsizliğin kesin old

,uğunu gösterdi. Alexander teoremini kullanarak $f \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow zf' \in \mathcal{C}$ ve $f \in \mathcal{S}_p \Leftrightarrow zf' \in \mathcal{UCV}$ olduğunu söylemiştik. Buna benzer bir sonucun $\mathcal{S}_p$ ve $\mathcal{UST}$ sınıfları için doğru olmadığını Ronning [39] çalışmasında göstermiştir. Yani

$$\mathcal{UST} \not\subset \mathcal{S}_p \quad \text{ve} \quad \mathcal{S}_p \not\subset \mathcal{UST}.$$

Ravichandran [36] ve [37] çalışmalarındada $\mathcal{UCV}$ ve $\mathcal{S}_p$ sınıfları için yeter şartları aşağıdaki şekilde elde etmiştir

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow f \in \mathcal{UCV}$$

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow f \in \mathcal{S}_p.$$

Bu eşitsizliklerin ispatı için

$$|\omega| < \frac{1}{2} \Rightarrow |\omega| < \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} < 1 - |\omega| < \operatorname{Re}(1+\omega)$$

gerektirmesi kullanılır. Goodman [13] çalışmasında $\mathcal{UCV}$ sınıfı için katsayı eşitsizliğini aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 3.2.5: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Eğer f fonksiyonu için

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| \leq \frac{1}{3}$$

eşitsizliği sağlanırsa $f \in \mathcal{UCV}$ dir (Goodman 1991).

Alexander teoremi kullanılarak $\sum_{n=2}^{\infty} (n-1)|a_n| \leq \frac{1}{3}$ eşitsizliğinin sağlanması durumunda $f \in \mathcal{S}_p$ olduğu görülür. Daha sonra Subramanian, Sudharsan, Balasubrahmanyam ve Silverman 1998 yılında negatif katsayılı fonksiyonlar için katsayı eşitsizliğini aşağıdaki biçimde elde etmiştir.

Teorem 3.2.6: $a_n \geq 0$ olmak üzere $f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda

$$f \in \mathcal{UCV} \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(2n-1)\, a_n \leq 1$$

$$f \in \mathcal{S}_p \Leftrightarrow \sum_{n=2}^{\infty} (2n-1)\, a_n \leq 1$$

gerektirmeleri sağlanır (Subramanian, Sudharsan, Balasubrahmanyam ve Silverman 1998).

Negatif katsayılı f fonksiyonlarının sınıfını $\mathcal{T}$ ile gösterelim. Ayrıca

$$\mathcal{TUCV} = \mathcal{T} \cap \mathcal{UCV}, \quad \mathcal{TS}_p = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}_p, \quad \mathcal{TS}^* = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}^*, \quad \mathcal{TC} = \mathcal{T} \cap \mathcal{C}$$

sınıflarını tanımlayalım. Yukarıdaki sınıflardan ve Teorem 3.2.6 dan sonuç olarak,

$$\mathcal{TUCV} = \mathcal{TC}(1/2) \text{ ve } \mathcal{TS}_P = \mathcal{TS}^*(1/2)$$

yazılabilir. Ayrıca Teorem 3.2.6 dan

$$f(z)=z-A_n z^n \in \mathcal{S}_p \Leftrightarrow |A_n| \le \frac{1}{2n-1}$$

ve

$$f \in \mathcal{UCV} \Leftrightarrow |A_n| \le \frac{1}{n(2n-1)}$$

olduğu kolayca görülür.

Katsayı eşitsizliği için yukarıda elde edilen sonuçlar daha genel dairesel bölgeler için genişletilebilir. Bunun için $a>1/2$ olsun. Böylece $|\omega-1|=\operatorname{Re}\omega$ parabolü üzerindeki noktaların $\omega=a$ noktasına olan minimum uzaklığın

$$R_a=\begin{cases} a-\frac{1}{2}; & \frac{1}{2}<a\le\frac{3}{2} \\ \sqrt{2a-2}; & a\ge\frac{3}{2} \end{cases}$$

olduğu görülür. Buradan yola çıkarak Shanmugam ve Ravichandran [47]

$$\left|1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}-a\right|<R_a \Rightarrow f\in\mathcal{UCV}$$

ve

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-a\right|<R_a \Rightarrow f\in\mathcal{S}_p$$

olduğunu göstermiştir.

Ronning [37] çalışmasında $f\in\mathcal{S}_p$ fonksiyonu için gerek şart problemi üzerine aşağıdaki teoremlari ispatlamıştır. Bu teoremlerin ispatını vermeden önce ispatlarda yardımcı olacak bir teorem verelim.

Rogosinski Teoremi $h(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^k$ fonksiyonu U diskinde $H(z)=1+\sum_{k=1}^{\infty}C_k z^k$ fonksiyonuna subordinate olsun. Eğer, $H(z)$ fonksiyonu U da ünivalent ve $H(U)$ kümeside konveks ise, $|c_n|\le|C_1|$ dir (Pommerenke 1975; Duren 1983).

Teorem 3.2.7: $f \in \mathcal{S}_p$ olsun. Bu durumda $c = 8/\pi^2$ olmak üzere

$$|a_2| \le c \text{ ve } |a_n| \le \frac{c}{n-1}\prod_{k=3}^{n}\left(1+\frac{c}{k-2}\right)$$

eşitsizliği sağlanır (Ronning 1993).

İspat: $f(z) = z + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{S}_p$ ve $P(z) = zf'(z)/f(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ olsun. O halde, (3.5) de tanımlanan φ fonsiyonu için $P \prec \varphi$ dir. $P(z)$ fonksiyonu U da ünivalent ve $P(U)$, $|\omega - 1| < \operatorname{Re}\omega$ olan konveks bir bölge olduğundan Rogosinski teoremine göre $\varphi(z) = 1 + (8/\pi^2)z + \ldots$ dir. Buradan $|c_n| \le 8/\pi^2 = c$ yazılır. Şimdi, $zf'(z) = P(z)f(z)$ de z^n nin katsayılarını karşılaştırırsak,

$$(n-1)a_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_{n-k} a_k$$

yazılır. Buradan, $|a_2| = |c_1| \le 8/\pi^2$ elde edilir. Eğer f için $zf'(z)/f(z) = P(z)$ seçimi yapılırsa $a_2 = 8/\pi^2$ ile $f \in \mathcal{S}_p$ yazılır. Buradan sonucun kesin olduğu görülür. Ayrıca, yukarıdaki eşitlikten

$$|a_3| \le \frac{1}{2}|c_2 + c_1 a_2| \le \frac{1}{2}\left(|c_2| + |c_1||a_2|\right) \le \frac{1}{2}c(1+c) \approx 0.73$$

elde edilir. Buradan sonra matematiksel tümevarım yöntemini kullanarak ispat yapılır. Bunun için

$$|a_k| \le \frac{c}{k-1}(1+c)\left(1+\frac{c}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{c}{k-2}\right), \quad k = 3,4,\ldots,n-1$$

olduğunu farz edelim. O halde,

$$\begin{aligned}(n-1)|a_n| &\le \sum_{k=1}^{n-1}|c_{n-k}||a_k| \le c\sum_{k=1}^{n-1}|a_k| \\ &\le c\left(1+c+\frac{c}{2}(1+c)+\frac{c}{3}(1+c)\left(1+\frac{c}{2}\right)+\ldots+\frac{c}{n-2}(1+c)\left(1+\frac{c}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{c}{n-3}\right)\right) \\ &= c(1+c)\left(1+\frac{c}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{c}{n-2}\right)\end{aligned}$$

ve

$$\left|a_n\right| \le \frac{c}{(n-1)} \prod_{k=3}^{n} \left(1 + \frac{c}{(k-2)}\right)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.8: $f(z) = z + a_n z^n$ fonksiyonunun $\mathcal{S}_p$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart

$$\left|a_n\right| \le 1/(2n-1)$$

olmasıdır (Ronning 1993).

İspat: Bunu göstermek için $|z| = 1$ alınarak, Tanım 3.2.4 ü kullanmak yeterli olur. $|a_n| = r$ ve $a_n z^{n-1} = re^{i\varphi}$ olsun. Böylece için, Tanım 3.2.4 de f fonksiyonu için

$$\left|\frac{(n-1)re^{i\varphi}}{1+re^{i\varphi}}\right| \le \operatorname{Re}\frac{1+nre^{i\varphi}}{1+re^{i\varphi}} \tag{3.6}$$

yazılır. Gerekli hesaplamalardan

$$\operatorname{Re}\frac{1+nre^{i\varphi}}{1+re^{i\varphi}} = \frac{1+nr^2+(n+1)r\cos\varphi}{\left|1+re^{i\varphi}\right|^2}$$

olduğu görülür. Bu yüzden, (3.6) denklemi

$$(n-1)r \le \frac{1+nr^2+(n+1)r\cos\varphi}{\left|1+re^{i\varphi}\right|^2} = \frac{1+nr^2+(n+1)r\cos\varphi}{\left(1+r^2+2r\cos\varphi\right)^{1/2}} \tag{3.7}$$

eşitsizliğine denk olur. (3.7) nin sağ tarafı $\varphi = \pi$ için minimum değere sahip olup bu minimum değer $1-nr$ dir. Bundan dolayı (3.7) için gerek ve yeter şart $(n-1)r \le 1-nr$ ya da $|a_n| = r \le 1/(2n-1)$ olmasıdır.

Sonuç 3.2.9: $g(z) = z + b_n z^n$ olsun. Bu fonksiyonun $\mathcal{UCV}$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart,

$$\left|b_n\right| \le 1/n(2n-1)$$

olmasıdır (Ronning 1993).

Teorem 3.2.10: $k(z) = z/(1 - Az)^2$ fonksiyonunun $\mathcal{S}_p$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart $|A| \le \dfrac{1}{3}$ olmasıdır (Ronning 1993).

$\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlar için $\mathcal{S}_p$ yarıçapına ilişkin teoremi Ronning 1993 yılında aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 3.2.11: Eğer $f \in \mathcal{S}$ ise $\dfrac{1}{r} f(rz) \in \mathcal{S}_p$ olması için gerek ve yeter şart, $r \le 0.33217...$ ve $\dfrac{1}{r} f(rz) \in \mathcal{S}^*(1/2)$ olması için gerek ve yeter şart $r \le \dfrac{1}{3}$ olmasıdır (Ronning 1993).

Sonuç 3.2.12: $f \in \mathcal{UCV}$ olsun. Bu durumda

$$F_1(z) = zf'(z);\ |z| < 1/3$$

$$F_2(z) = \frac{1}{2}\left[f(z) + zf'(z) \right];\ |z| < \left(\sqrt{17} - 3\right)\Big/2$$

$$F_3(z) = \frac{k+1}{z^k} \int_0^z \zeta^{k-1} f(\zeta)\, d\zeta;\ |z| < 1,\ \Re(k) > 0$$

$$F_4(z) = \int_0^z \frac{f(\zeta) - f(\eta\zeta)}{\zeta - \eta\zeta}\, d\zeta;\ |z| < 1,\ |\eta| \le 1; \eta \ne 1.$$

fonksiyonları için $F_i(z) \in \mathcal{UCV}, (i = 1, 2, 3, 4)$ dir (Ravichandran 2002).

Tanım 3.2.13: $a, b, c \in \mathbb{C};\ c \ne 0, -1, -2...$ olsun.

$$F(a, b, c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}$$

fonksiyonuna Gaussian hipergeometrik fonksiyon denir (Kim ve Ponnusamy 1999).

Burada $(\kappa)_n$ Pochhammer sombolü (veya *shifted faktoriyel*) olarak bilinir ve

$$(\kappa)_n = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ \kappa(\kappa+1)...(\kappa+n-1) & n \in \mathbb{N},\ \kappa \in \mathbb{C}. \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu seri normalleştirme şartlarına göre düzenlenirse $zF(a,b,c;z)\in\mathcal{A}$ olur.

Teorem 3.2.14: $a,b\in\mathbb{C}-\{0\}$ ve $c>|a|+|b|+2$ olsun. Eğer

$$\left(\frac{\Gamma(c-|a|-|b|)\Gamma(c)}{\Gamma(c-|a|)\Gamma(c-|b|)}\right)\left(1+\frac{2(|a|)_2(|b|)_2}{(c-|a|-|b|-2)_2}+\frac{5|ab|}{c-|a|-|b|-1}\right)\leq 2$$

eşitsizliği sağlanırsa $zF(a,b,c;z)\in\mathcal{UCV}$ dir (Kim ve Ponnusamy 1999).

3.3 $k-$Düzgün Konveks Fonksiyonlar

Düzgün konveks fonksiyonların geneli olan k- Düzgün konveks fonksiyonlar üzerine ilk çalışma Kanas ve Wisniowska tarafından 1999 yılında verilmiştir. Yazarlar k- Düzgün konveks fonksiyonları aşağıdaki şekilde yapılmıştır.

Tanım 3.3.1: $0\leq k<\infty$ olsun. Eğer $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu U da $|\zeta|\leq k$ olacak şekilde ζ merkezli her γ dairesel yayın görüntüsünü konveks bir bölgeye resmediyorsa $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonuna k- Düzgün konveks fonksiyon denir. Bütün k- Düzgün konveks fonksiyonların sınıfı $k-\mathcal{UCV}$ ile gösterilir (Kanas ve Wisniowska 1999).

Teorem 3.3.2: $f\in\mathcal{A}$ ve $0\leq k<\infty$ olsun. Bu durumda $f\in k-\mathcal{UCV}$ olması için gerek ve yeter şart $z\in U$ ve $|\zeta|\leq k$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(1+(z-\zeta)\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)\geq 0 \tag{3.8}$$

Olmasıdır (Kanas ve Wisniowska 1999).

Bu tanımdan görüldüğü üzere tanım iki değişkene bağlıdır. Bu tanımın tek değişkenli olduğu durumu ilk defa 1999 yılında Kanas ve Wisniowska tarafından verilmiştir.

Teorem 3.3.3: $f\in\mathcal{A}$ ve $0\leq k<\infty$ olsun. Bu durumda $f\in k-\mathcal{UCV}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \tag{3.9}$$

olmasıdır (Kanas ve Wisniowska 1999).

İspat: *Yeter şart:* (3.8) eşitsizliğinde $k=0$ alındığında sonuç konveks fonksiyonların sınıfı olan $\mathcal{C}$ ye ve $k=1$ alındığında da parabolik fonksiyonların sınıfı olan $\mathcal{S}_p$ ye indirgenir. Diğer taraftan $0<k<\infty$ ve $f\in k-\mathcal{UCV}$ olduğunu farz edelim. Bu durumda her $z\in U$ ve $0\leq|\zeta|\leq k$ için (3.8) eşitsizliği sağlanır. Şimdi $\theta=Arg\left[zf''(z)/f'(z)\right]$ ve $\zeta=kze^{-i\theta}$ seçelim. O halde (3.8) eşitsizliğinden

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\geq\operatorname{Re}\left\{\frac{\zeta f''(z)}{f'(z)}\right\}=k\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{-i\theta}zf''(z)}{f'(z)}\right\}=k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \tag{3.10}$$

elde edilir. $1+zf''(z)/f'(z)$ fonksiyonu U da analitik ve 0 ı 1 dönüştürdüğünden aşık değer teoremine göre, (3.10) daki eşitlik durumu mümkün değildir. Böylece $f\in k-\mathcal{UCV}$ olması için bir gerek şart elde ederiz.

Gerek şart: Kabul edelim ki $0<k<\infty$ için (3.9) şartı doğru olsun. Ayrıca $\omega=\zeta/k$ alalım. Şimdi birim diskte tüm ω ve z için

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\geq k\operatorname{Re}\left\{\frac{\omega f''(z)}{f'(z)}\right\} \tag{3.11}$$

olduğunu ispatlamak yeterli olacaktır. Bunun için Minimum prensibinden $1>|z|=R>|\omega|$ için (3.11) göstermek yeterlidir. (3.9) dan

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>k\operatorname{Re}\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|>\left|\frac{\omega f''(z)}{f'(z)}\right|$$

$$\geq k\operatorname{Re}\left\{\frac{\omega f''(z)}{f'(z)}\right\}=\operatorname{Re}\left\{\frac{\zeta zf''(z)}{f'(z)}\right\}$$

ve böylece (3.8) elde edilir.

Şimdi (3.9) ün geometrik yorumunu verelim. (3.9) eşitsizliğinde $1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}=\omega$ alalım

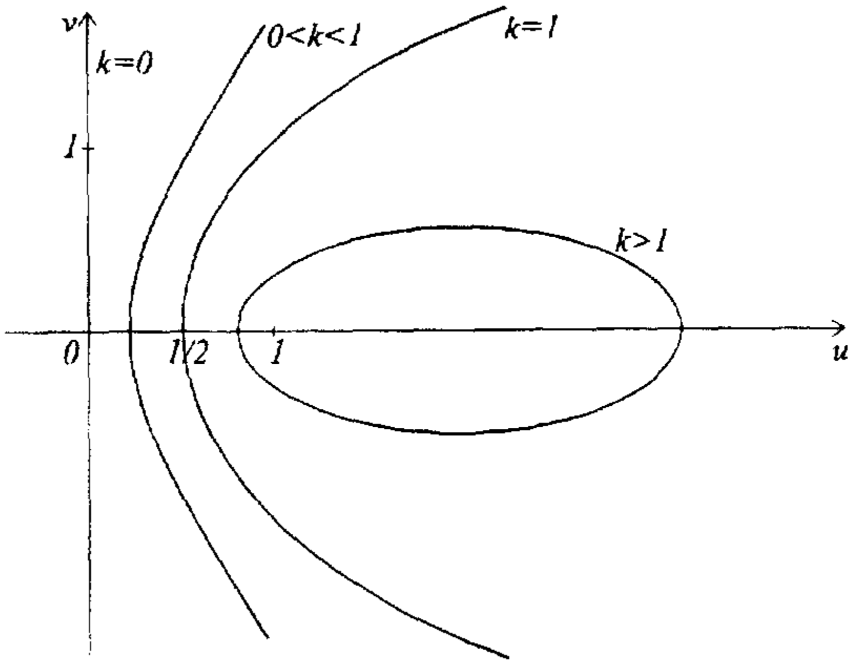
ve

$$\Omega_k = \{\omega \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\omega > k|\omega - 1|\}$$
$$= \left\{\omega = u + iv : u^2 > k^2(u-1)^2 + k^2v^2\right\}$$

kümesini tanımlayalım. Böylece

$$f \in k - \mathcal{UCV} \Leftrightarrow 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \Omega_k$$

gerektirmesi yazılır. Ω_k; $k > 1$ için eliptik bölge, $k = 1$ için parabolik bölge, $0 < k < 1$ için hiperbolik ve $k = 0$ için de sağ yarı düzlem elde edilir.



Şekil 3.1 k -düzgün konveks fonksiyon

Böylece $0 \le k < \infty$ $f \in k - \mathcal{UCV}$ için

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \frac{k}{k+1}$$

ve

$$\left|Arg\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}\right| < \begin{cases} \arctan\frac{1}{k}; & 0 < k < \infty \\ \frac{\pi}{2}; & k = 0 \end{cases}$$

yazılır. 1999 yılında Kanas ve Wisniowska $\mathbb{C}$ yi Ω_k bölgesi üzerine resmeden dönüşümü $\varphi_k : U \to \mathbb{C}$ ve $\varphi_k(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots$ olmak üzere

$$\varphi_k(z) = \begin{cases} \dfrac{1+z}{1-z}; & k = 0, \\ 1 + \dfrac{2}{\pi^2}\left(\log \dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2 & k = 1, \\ \dfrac{1}{1-k^2}\cos\left\{\dfrac{2}{\pi}(\arccos k) i \log \dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right\} - \dfrac{k^2}{1-k^2} & 0 < k < 1, \\ \dfrac{1}{1-k^2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2\mathcal{K}(t)} \displaystyle\int_0^{\frac{u(z)}{\sqrt{t}}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2x^2}}\, dx\right) + \dfrac{k^2}{k^2-1} & k > 1, \end{cases} \tag{3.12}$$

şeklinde elde ettiler. Burada $t \in (0,1)$, $u(z) = \dfrac{z-\sqrt{t}}{1-\sqrt{t}z}$ ve $\mathcal{K}(t)$ birinci çeşit Legendre eliptik integral olup

$$\mathcal{K}(t) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2x^2)}}, \quad k = \cosh \frac{\pi \mathcal{K}'(t)}{4\mathcal{K}(t)}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.3.4: $f \in k-\mathcal{UCV}$ olması için gerek ve yeter şart $\varphi(z) = 1 + zf''(z)/f'(z) \prec \varphi_k(z)$ olmasıdır (Kanas ve Wisniowska 1999).

Şimdi f_k fonksiyonları her $z \in U$ için

$$1 + \frac{zf_k''(z)}{f_k'(z)} = \varphi_k(z) \qquad f_k(0) = f_k'(0) - 1 = 0$$

olarak tanımlansın. O halde Teorem 3.3.4 den $f_k \in k-\mathcal{UCV}$ dir. f_k fonksiyonları $k-\mathcal{UCV}$ sınıfı için extremal fonksiyondur.

Teorem 3.3.5: $0 \le k < \infty$ ve $f \in k-\mathcal{UCV}$ olsun. Bu durumda

$$f'(z) \prec f_k'(z)$$

$$f_k'(-r) \le |f'(z)| \le f_k'(r), \quad |z| = r < 1$$

$$-f_k(-r) \le \left| f(z) \right| \le f_k(r), \quad |z| = r < 1$$

yazılır. Bazı $z_0 \ne 0$ için, eşitliğinin sağlanması ancak ve ancak, f fonksiyonunun f_k fonksiyonunun bir dönmesiyle gerçekleşir (Kanas ve Wisniowska 1999).

Teorem 3.3.6: $f \in \mathcal{S}$ olsun. $0 \le k < \infty$ için,

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)|a_n| \le \frac{1}{k+2}$$

sağlanırsa, $f \in k-\mathcal{UCV}$ dır. Burada $\dfrac{1}{k+2}$ sabiti en iyi sabittir (Kanas ve Wisniowska 1999).

Teorem 3.3.7: $\mathcal{S}$ sınıfında $k-\mathcal{UCV}$ yarıçapı

$$r_0 = \frac{2(k+1) - \sqrt{4k^2+6k+3}}{2k+1} = \frac{1}{2(k+1) + \sqrt{4k^2+6k+3}} \tag{3.13}$$

dir (Kanas ve Wisniowska 1999).

İspat: $f \in \mathcal{S}$ olsun. O halde, $|z| = r < 1$ için,

$$\left| 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \le \frac{4r}{1-r^2}$$

eşitsizliği veya buna denk olan

$$\left| \left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) - \frac{1+r^2}{1-r^2} \right| \le \frac{4r}{1-r^2} \tag{3.14}$$

eşitsizliği sağlanır. Yukarıdaki şart $\left((1+r^2-4r)/(1-r^2), 0 \right)$ ve $\left((1+r^2+4r)/(1-r^2), 0 \right)$ noktalarında reel eksenin bir disk ile kesişimidir.

Teorem 3.3.3 e göre Ω_k bölgesi göz önünde bulundurularak, (3.14) ün Ω_k bölgesi içinde kalacak şekilde en büyük $r = |z|$ değerini araştıracağız. Bütün konik bölgeler $\left(k/(k+1), 0 \right)$ noktasının bir tek tepe noktasına sahip olduğundan

$$\frac{1+r^2-4r}{1-r^2} \geq \frac{k}{k+1}$$

şartının sağlanması gerekir. Bu eşitsizlik (3.13) da verilen $r_0, 0 \leq r \leq r_0$ için sağlanır. Bunu r_0 için kontrol etmek yeterli olur. Buradan (3.14) ve $\partial\Omega_k$ konik bölgesinin sınırının

$$u_1 = \frac{1+r^2-4r}{1-r^2} = \frac{k}{k+1} \tag{3.15}$$

olacak şekilde $(u_1, 0)$ gibi tek bir ortak noktası vardır. Gerçektende (3.15) tarafından sınırlandırılan k nın değeri için

$$u^2 = k^2(u-1)^2 + k^2v^2$$

$$\left(u - \frac{1+r^2}{1-r^2}\right)^2 + v^2 = \frac{16r^2}{\left(1-r^2\right)^2} \tag{3.16}$$

denklemlerini çözmek yeterli olur. Buradan (3.15) de verilen u_1 ve $u_2 < 0$ olmak üzere $(u_1, 0)$ ve $(u_2, 0)$ gibi iki çözümü vardır. Böylece u_1 değeri (3.16) nın tek pozitif çözümüdür. Buradan $r \leq r_0$ için, (3.14) diskinin Ω_k bölgesinde kaldığını söyleriz.

Şimdi $k-\mathcal{UCV}$ sınıfı için Hadamard çarpım özelliğini verelim.

Teorem 3.3.8: $0 \leq k < \infty$ olsun. $f \in k-\mathcal{UCV}$ olması için gerek ve yeter şart

$$C(t) = kt \pm i\sqrt{t^2 - (kt-1)^2}$$

ve

$$G_t(z) = \frac{1}{1-C(t)} \frac{z}{(1-z)^2} \left(\frac{1+z}{1-z} - C(t)\right)$$

olmak üzere $t \geq 0$, $t^2 - (kt-1)^2 \geq 0$ ve $z \in U$ için

$$\frac{1}{z}(f * G_t)(z) \neq 0$$

olmasıdır (Kanas ve Wisniowska 1999).

3.4 $k-$Düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar

Düzgün yıldızıl fonksiyonların geneli olan k - düzgün yıldızıl fonksiyonlar üzerine ilk çalışma Kanas ve Wisniowska tarafından 2000 yılında verilmiştir. Yazarlar k - Düzgün yıldızıl fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 3.4.1: $0 \leq k < \infty$ olsun. Eğer U da $|\zeta| \leq k$ olacak şekilde ζ merkezli her γ dairesel yayın görüntüsü $f(\zeta)$ ye göre yıldızıl ise $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna k - düzgün yıldızıl fonksiyon denir.

2000 yılında Kanas ve Wisniowska $k-\mathcal{UCV}$ sınıfından yola çıkarak aşağıdaki düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfını tanımladı.

Tanım 3.4.2: $f \in \mathcal{S}$ ve $0 \leq k < \infty$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna $k-$düzgün yıldızıl fonksiyon denir (Kanas ve Wisniowska 2000).

Bütün k - düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı $k-\mathcal{UST}$ ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle Alexander teoremini kullanarak $k-\mathcal{UST}$ sınıfı $f \in k-\mathcal{UCV}$ olmak üzere $zf'(z)$ fonksiyonlarının oluşturduğu sınıf olarak tanımayabiliriz. Yani

$$k-\mathcal{UST} = \{F \in \mathcal{A} : \ F = zf'(z), \ f \in k-\mathcal{UCV}\}$$

yazılır. Ω_k kümesi konik bir bölge olduğundan ve $\dfrac{zf'(z)}{f(z)} = \omega$ alınırsa

$$f \in k-\mathcal{UST} \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \Omega_k$$

gerektirmesi yazılır.

Teorem 3.4.3: $0 \le k < \infty$ ve $f \in k-\mathcal{UST}$ olsun. Bu durumda p_1 (3.12) ile tanımlanan katsayı olmak üzere

$$|a_n| \le \frac{p_1(1+p_1)_{n-2}}{(2)_{n-2}}; \quad n = 2,3,...$$

eşitsizliği gerçeklenir (Kanas ve Wisniowska 2000).

Teorem 3.4.5: $0 \le k < \infty$ ve $f \in k-\mathcal{UST}$ olsun. Eğer

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[k(n-1)+n\right]|a_n| < 1$$

eşitsizliği sağlanırsa $f \in k-\mathcal{UST}$ dır (Kanas ve Wisniowska 2000).

Teorem 3.4.6: $0 \le k < \infty$ olsun. $f \in k-\mathcal{UST}$ olması için gerek ve yeter şart

$$C(t) = kt \pm \sqrt{t^2-(kt-1)^2}$$

ve

$$G_t(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\left(1-\frac{C(t)z}{C(t)-1}\right)$$

olmak üzere $t \ge 0$, $t^2-(kt-1)^2 \ge 0$ ve $z \in U$ için

$$\frac{1}{z}(f * G_t)(z) \ne 0$$

olmasıdır (Kanas ve Wisniowska 2000).

Lecko ve Wisniowska 2003 yılında $k-\mathcal{UST}$ sınıfı hakkında önemli geometrik sonuçlar vermiştir.

Teorem 3.4.7: $0 \le k < \infty$ olsun. Eğer $f \in k-\mathcal{UST}$ ise $0 \le R < 1$, $|\zeta| \le k$ ve $r \ge \sqrt{|\zeta|^2+R^2}$ olmak üzere her ζ, r ve R için $f\left(U(\zeta,r)\cap U(0,R)\right)$ yıldızıl bir bölgedir (Lecko ve Wisniowska 2003).

3.5 β Mertebeden $k-$Düzgün Yıldızıl ve $k-$Düzgün Konveks Fonksiyonlar

$k-$düzgün yıldızıl fonksiyonların geneli olan β mertebeden k- düzgün yıldızıl fonksiyonlar üzerine ilk çalışma Shams, Kulkarni ve Jahangiri tarafından 2004 yılında verilmiştir. Yazarlar β mertebeden k- düzgün yıldızıl fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 3.5.1: $f\in\mathcal{S},\ 0\le k<\infty$ ve $0\le\beta<1$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|+\beta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna β mertebeden $k-$düzgün yıldızıl fonksiyon denir (Shams, Kulkarni ve Jahangiri 2004).

Bütün β mertebeden $k-$düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı $k-\mathcal{UST}(\beta)$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.2: $f\in\mathcal{S},\ 0\le k<\infty$ ve $0\le\beta<1$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>k\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right|+\beta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna β mertebeden $k-$düzgün konveks fonksiyon denir (Shams, Kulkarni ve Jahangiri 2004).

Bütün β mertebeden k- düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ ile gösterilir. Yukarıdaki iki tanım arasında Alexander teoremi gereğince

$$f\in k-\mathcal{UST}(\beta)\Leftrightarrow\frac{1}{z}\int_0^z f(t)dt\in k-\mathcal{UCV}(\beta)$$

veya

$$f\in k-\mathcal{UCV}(\beta)\Leftrightarrow zf'\in k-\mathcal{UST}(\beta).$$

gerektirmeleri yazılır. $k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ sınıfları ünivalent fonksiyonlar teorisinde bilinen bir çok sınıfın genelleştirilmiş halidir. Buna ilişkin özel durumları aşağıdaki şekilde verebiliriz.

a. $0-\mathcal{UCV}(0)\equiv\mathcal{C}$ (Study 1913)

b. $0-\mathcal{UST}(0)\equiv\mathcal{S}^{*}$ (Nevanlinna 1921)

c. $0-\mathcal{UCV}(\beta)\equiv\mathcal{C}(\beta)$ (Robertson 1936)

d. $0-\mathcal{UST}(\beta)\equiv\mathcal{S}^{*}(\beta)$ (Robertson 1936)

e. $1-\mathcal{UCV}(0)\equiv\mathcal{UCV}$ (Goodman 1991)

f. $1-\mathcal{UST}(0)\equiv\mathcal{S}_{p}$ (Ma-Minda 1992, Ronning 1993)

g. $1-\mathcal{UST}(\beta)\equiv\mathcal{S}_{p}(\beta)$ (Ronning 1991)

h. $1-\mathcal{UCV}(\beta)\equiv\mathcal{UCV}(\beta)$ (Ronning 1991)

i. $1-\mathcal{UST}(2\rho-1)\equiv\mathcal{PS}^{*}(\rho)$ $\left(0\le\rho<1\right)$ (Ali 2005)

j. $1-\mathcal{UCV}(2\rho-1)\equiv\mathcal{UCV}(\rho)$ $\left(0\le\rho<1\right)$ (Ali 2005)

k. $k-\mathcal{UCV}(0)\equiv k-\mathcal{UCV}$ (Kanas ve Wisniowska 1999)

l. $k-\mathcal{UST}(0)\equiv k-\mathcal{UST}$ (Kanas ve Wisniowska 2000)

Geometrik Özelliği: Şimdi $k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ sınıflarının geometrik olarak neyi temsil ettiğini inceleyelim. Bunun için

$$\Omega_{k,\beta}=\left\{\omega=u+iv\in\mathbb{C}:\ u>k\sqrt{\left(u-1\right)^{2}+v^{2}}+\beta,\ k\ge 0,\ 0\le\beta<1\right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Ayrıca $p\left(z\right)=\dfrac{zf'\left(z\right)}{f\left(z\right)}$ ve $q\left(z\right)=1+\dfrac{zf''\left(z\right)}{f'\left(z\right)}$ fonksiyonlarını ele alalım. Tanım 3.5.1 ve 3.5.2 den

$$p(z)\in\Omega_{k,\beta}\quad\text{ve}\quad q(z)\in\Omega_{k,\beta}$$

olduğu görülür. Aghalary ve Azadi 2005 yılında $\mathbb{C}$ yi $\Omega_{k,\beta}$ bölgesi üzerine resmeden dönüşümü $\varphi_{k,\beta}:U\to\mathbb{C}$ ve $\varphi_{k,\beta}(z)=1+P_1z+P_2z^2+\ldots$ olmak üzere

$$\varphi_{k,\beta}(z)=\begin{cases}\dfrac{1+(1-2\beta)z}{1-z} & k=0,\\[2mm] 1+\dfrac{2(1-\beta)}{\pi^2}\left(\log\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right)^2 & k=1,\\[2mm] \dfrac{1-\beta}{1-k^2}\cos\left\{\dfrac{2}{\pi}(\arccos k)i\log\dfrac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}\right\}-\dfrac{k^2-\beta}{1-k^2} & 0<k<1,\\[2mm] \dfrac{1-\beta}{1-k^2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2\mathcal{K}(t)}\displaystyle\int_0^{\frac{u(z)}{\sqrt{t}}}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-t^2x^2}}dx\right)+\dfrac{k^2-\beta}{k^2-1} & k>1,\end{cases} \tag{3.17}$$

şeklinde elde etmişlerdir. Burada $t\in(0,1)$, $u(z)=\dfrac{z-\sqrt{t}}{1-\sqrt{tz}}$ ve $\mathcal{K}(t)$ birinci çeşit Legendre eliptik integral olup

$$\mathcal{K}(t)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-t^2x^2)}}$$

ve

$$k=\cosh\frac{\pi\mathcal{K}'(t)}{4\mathcal{K}(t)}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece Tanım 3.5.1 ve 3.5.2 den

$$p\prec\varphi_{k,\beta},\quad q\prec\varphi_{k,\beta}$$

yazılır. Ayrıca Tanım 3.5.1, Tanım 3.5.2 ve $\Omega_{k,\beta}(z)$ kümesinin özellikleri kullanılırsa

$$\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\frac{k+\beta}{1+k}>0$$

ve

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\}>\frac{k+\beta}{1+k}>0,$$

eşitsizlikleri elde edilir. Dolayısıyla

$$f\in k-\mathcal{UST}(\beta)\quad\Rightarrow\quad f\in\mathcal{S}^*\left(\frac{k+\beta}{k+1}\right)\subset\mathcal{S}^*$$

ve

$$f\in k-\mathcal{UCV}(\beta)\quad\Rightarrow\quad f\in\mathcal{C}\left(\frac{k+\beta}{1+k}\right)\subset\mathcal{C}$$

yazılır. Yukarıdaki ifadelerden

$$k-\mathcal{UST}(\beta)\subset\mathcal{S}^*\left(\frac{k+\beta}{k+1}\right)\subset\mathcal{S}^*$$

ve

$$k-\mathcal{UCV}(\beta)\subset\mathcal{C}\left(\frac{k+\beta}{k+1}\right)\subset\mathcal{C}$$

içerme bağıntıları elde edilir.

$\Omega_{k,\beta}(z)$ bölgesi k ve β nın durumlarına göre aşağıdaki biçimde konik bölgeler elde edilir.

- $k>1$ ise $\Omega_{k,\beta}(z)$ bölgesi kompleks düzlemde

$$\frac{\left(u-\dfrac{k^2-\beta}{k^2-1}\right)^2}{\left(\dfrac{k(1-\beta)}{k^2-1}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\dfrac{1-\beta}{\sqrt{k^2-1}}\right)^2}<1$$

şeklinde eliptik bölge olur.

- $k=1$ ise $\Omega_{k,\beta}(z)$ bölgesi kompleks düzlemde

$$u>\frac{v^2}{2(1-\beta)}+\frac{1+\beta}{2}$$

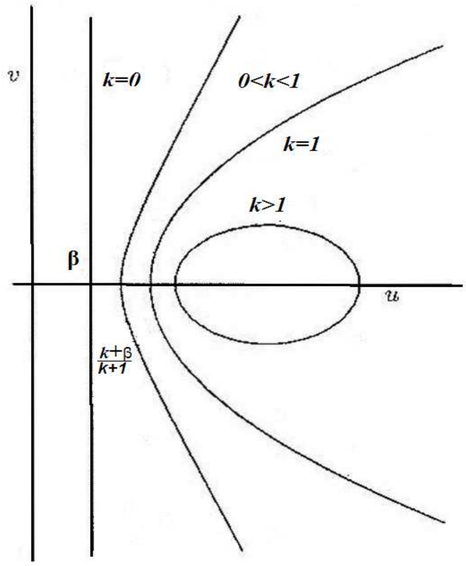
şeklinde parabolik bölge olur.

- $0<k<1$ ise $\Omega_{k,\beta}(z)$ bölgesi kompleks düzlemde

$$\frac{\left(u-\dfrac{k^2-\beta}{1-k^2}\right)^2}{\left(\dfrac{k(1-\beta)}{1-k^2}\right)}-\frac{v^2}{\left(\dfrac{1-\beta}{\sqrt{1-k^2}}\right)}>1$$

şeklinde hiperbolik bir bölge olur.

- $k=0$ ise $\Omega_{k,\beta}(z)$ bölgesi kompleks düzlemde $u>\beta$ şeklinde sağ yarı düzlem olur.



Şekil 3.2. $\Omega_{k,\beta}(z)$ konik bölgesi

$k-\mathcal{UST}(\beta)$ **ve** $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ **Sınıfları için Katsayı Bağıntıları**

Bu kısımda $k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ sınıflarına ait fonksiyonlar için katsayı bağıntılarını vereceğiz. İlk olarak $k-\mathcal{UST}(\beta)$ sınıfına ait fonksiyonların katsayılarını bulmak için ön hazırlık çalışması yapalım. $f_{k,\beta}(z)$ fonksiyonu $k-\mathcal{UST}(\beta)$ sınıfına ait extremal fonksiyon (3.17) de tanımlanan $\varphi_{k,\beta}(z)$ fonksiyonu için

$$\varphi_{k,\beta}(z)=\frac{zf'_{k,\beta}(z)}{f_{k,\beta}(z)} \tag{3.18}$$

eşitliğini yazalım. (3.17) de tanımlanan $\varphi_{k,\beta}(z)=1+P_1z+...,$ fonksiyonu ve

$$f_{k,\beta}(z)=z+A_2z^2+..., \tag{3.19}$$

fonksiyonu göz önünde bulundurulursa (3.18) den

$$(n-1)A_n=\sum_{j=1}^{n-1}P_{n-j}A_j, \quad A_1=1$$

bağıntısı yazılır. Özel durumda

$$A_2=P_1, \tag{3.20}$$

elde edilir. Buradan P_n ler negative olmadığından A_n ler de negative değildir.

Teorem 3.5.3: Eğer $f \in k-\mathcal{UST}(\beta)$ ise bu durumda

$$|a_n| \le \frac{(P_1)_{n-1}}{(n-1)!}, \qquad n \ge 2, \tag{3.21}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$P_1 := P_1(k,\beta) = \begin{cases} \dfrac{8(1-\beta)(\arccos\beta)^2}{\pi^2(1-k^2)} & 0 \le k < 1, \\ \dfrac{8(1-\beta)}{\pi^2} & k = 1, \\ \dfrac{\pi^2(1-\beta)}{4\sqrt{t}(1+t)(k^2-1)\mathcal{K}^2(t)} & k > 1 \end{cases} \tag{3.22}$$

dir. (3.21) deki eşitlik ancak $n=2$ veya $k=0$ için sağlanır.

İspat: $f \in k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonu verilsin. Ayrıca

$$p = \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi_{k,\beta}$$

olduğunu biliyoruz. $h(z) = \dfrac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ olsun. $\varphi_{k,\beta}$ fonksiyonu U da univalent ve $\varphi_{k,\beta}(U)$, konik bölgesi de konveks bir bölge olduğundan, Rogosinski'nin teoremi uygulanabilir. Bu durumda (3.22) de verilen $P_1 = P_1(k,\beta)$ için

$$|c_n| \le P_1, \qquad n \ge 1, \tag{3.23}$$

elde edilir. Şimdi

$$zf'(z) = h(z) f(z)$$

eşitliği için her iki taraf için z^n katsayıları eşitlenirse

$$(n-1)a_n = \sum_{j=1}^{n-1} c_{n-j} a_j, \qquad a_1 = 1. \tag{3.24}$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.23) ve (3.24) den $|a_2| = |c_1| \le P_1$ bulunur. Böylece sonuç $n=2$ için doğrudur. Şimdi $n>2$ olmak üzere farz edelim ki $j \le n-1$ için (3.21) doğrudur. (3.23), (3.24) kullanılarak ve $|a_j|$ ye tüme varım yöntemini uygulayarak

$$\begin{aligned}|a_n| &\le \frac{1}{(n-1)}\left[|c_1|+\sum_{j=2}^{n-1}|c_{n-j}||a_j|\right]\\ &\le \frac{P_1}{(n-1)}\left[1+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{(P_1)_{j-1}}{(j-1)!}\right]\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.24) için yine tüme varım yöntemi uygulanırsa

$$1+\sum_{j=2}^{n-1}\frac{(P_1)_{j-1}}{(j-1)!}=\frac{(1+P_1)(2+P_1)...((n-2)+P_1)}{(n-2)!}.$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur. (3.20) dikkate alındığında $n=2$ için sonucun kesin olduğu görülür. Eğer $k=0$ alınırsa bu durumda $P_n(0,\beta)=P_1(0,\beta)=2(1-\beta),\ n=1,2,...$ olur ve (3.19) dikkate alındığında da

$$A_n=\frac{(P_1)_{n-1}}{(n-1)!},\qquad n\ge 2$$

bulunur. $k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ sınıfları için Alexander teoremini ve (3.18) denklemiyle verilen $f_{\beta,\gamma}(z)$ fonksiyonunu göz önünde bulundurursak $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ sınıfı için extremal fonksiyon

$$F_{\beta,\gamma}(z)=z+B_2z^2+...=\int_0^z\frac{f_{\beta,\gamma}(\xi)}{\xi}d\xi$$

olur. Ayrıca (3.20) den

$$B_2=\frac{P_1}{2}$$

elde edilir.

Teorem 3.5.4: Eğer $f\in k-\mathcal{UCV}(\beta)$ ise bu durumda

$$\begin{aligned}|a_2| &\le B_2\\ |a_n| &\le \frac{(P_1)_{n-1}}{n!},\qquad n>2,\end{aligned}\tag{3.25}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $P_1:=P_1(k,\beta)$ (3.22) ile tanımlanan sayıdır. (3.25) deki eşitlik ancak $n=2$ veya $k=0$ için sağlanır.

Aşağıdaki teorem $k-\mathcal{UST}(\beta)$ sınıfı için bir yeter şart problemi niteliği taşır.

Teorem 3.5.5: Eğer $f(z)\in\mathcal{A}$ fonksiyonu

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n(1+k)-(k+\beta)]\left|a_n\right|\le 1-\beta \qquad (3.26)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f(z)\in k-\mathcal{UST}(\beta)$ dir.

İspat: İspat için

$$k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|-\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right\}<1-\beta$$

eşitsizliğini göstermek yeterli olur. Teoremin hipotezinden $1-\sum_{n=2}^{\infty}\left|a_n\right|>0$ olur. Böylece

$$\begin{aligned}k\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|-\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right\} &\le (1+k)\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right|\\ &\le \frac{(1+k)\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left|a_n\right|\left|z\right|^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\left|a_n\right|\left|z\right|^{n-1}}\\ &< \frac{(1+k)\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\left|a_n\right|}{1-\sum_{n=2}^{\infty}\left|a_n\right|}\end{aligned}$$

elde edilir. (3.26) dan son eşitsizliğin $(1-\beta)$ ile sınırlandığı görülür.

Teorem 3.5.6: Eğer $f(z)\in\mathcal{A}$ fonksiyonu

$$\sum_{n=2}^{\infty}n[n(1+k)-(k+\beta)]\left|a_n\right|\le 1-\beta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $f\in k-\mathcal{UCV}(\beta)$ dir.

Sonuç 3.5.7: Eğer $\left|a_2\right|\le(1-\beta)/(2+k-\beta)$ ise $f(z)=z+a_2z^2\in k-\mathcal{UST}(\beta)$ dır.

Teorem 3.5.8: $f(z)\in\mathcal{A}$ fonksiyonu $n\ge 2$, $\tau\in\mathbb{R}$ ve $\arg(a_n)=\theta_n$ için $\theta_k+(n-1)\tau=\pi(\operatorname{mod}2\pi)$ eşitliğini sağlasın. Eğer $f(z)\in k-\mathcal{UST}(\beta)$ ise

$$\sum_{n=2}^{\infty}[n(1+k)-(k+\gamma)]\left|a_n\right|\le 1-\beta$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Eğer $f(z) \in k - \mathcal{UST}(\beta)$ ise tanımdan

$$k\left|\frac{z+\sum_{k=2}^{\infty} na_n z^n}{z+\sum_{k=2}^{\infty} a_n z^n}-1\right| \le \operatorname{Re}\left\{\frac{z+\sum_{k=2}^{\infty} na_n z^n}{z+\sum_{k=2}^{\infty} a_n z^n}-\beta\right\}$$

veya

$$k\left|\frac{\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)a_n z^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}}\right| \le \operatorname{Re}\left\{\frac{(1-\beta)+\sum_{n=2}^{\infty}(n-\beta)a_n z^{n-1}}{1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^{n-1}}\right\}$$

yazılır. Teorem 3.5.8 in hipotezinden, $z = re^{i\tau}$ alınırsa

$$\frac{\sum_{n=2}^{\infty} k(n-1)|a_n| r^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| r^{n-1}} \le \frac{(1-\beta)-\sum_{n=2}^{\infty}(n-\beta)|a_n| r^{n-1}}{1-\sum_{n=2}^{\infty}|a_n| r^{n-1}}$$

bulunur. Son eşitsizlikte $r \to 1^-$ alınırsa teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.5.9: $f(z) \in \mathcal{A}$ fonksiyonu $n \ge 2$, $\tau \in \mathbb{R}$ ve $\arg(a_n) = \theta_n$ için $\theta_k + (n-1)\tau = \pi (\operatorname{mod} 2\pi)$ eşitliğini sağlasın. Eğer $f(z) \in k - \mathcal{UCV}(\beta)$ ise

$$\sum_{n=2}^{\infty} n[n(1+k)-(k+\gamma)]|a_n| \le 1-\beta$$

eşitsizliği sağlanır.

$k - \mathcal{UST}(\beta)$ ve $k - \mathcal{UCV}(\beta)$ Sınıfları için Fekete-Szegö Problemi

Lemma 3.5.10: (3.17) de tanımlanan $\varphi_{k,\beta}(z) = 1 + P_1 z + P_2 z^2 + \ldots$ fonksiyonu ve $\mathcal{B} = \frac{2}{\pi}\arccos k$ için

$$P_1 = \begin{cases} \dfrac{2(1-\beta)\mathcal{B}^2}{(1-k^2)}; & 0 \le k < 1, \\[2ex] \dfrac{8(1-\beta)}{\pi^2}; & k = 1, \\[2ex] \dfrac{\pi^2 (1-\beta)}{4(k^2-1)\sqrt{t}\,(1+t)\mathcal{K}^2(t)}; & k > 1 \end{cases}$$

ve

$$P_2 = \begin{cases} \dfrac{\left(\mathcal{B}^2+2\right)}{3} P_1; & 0 \le k < 1, \\ \dfrac{2}{3} P_1; & k = 1, \\ \dfrac{\left[4\mathcal{K}^2(t)\left(t^2+6t+1\right)-\pi^2\right]}{24\sqrt{t}\,(1+t)\,\mathcal{K}^2(t)} P_1; & k > 1 \end{cases}$$

dır.

Aşağıdaki Lemma $k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ sınıfları için Fekete-Szegö problemini çözmede önemli rol oynar.

Lemma 3.5.11: $h \in \mathcal{P}$, fonksiyonu $h(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + ...$ şeklinde verilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$|c_n| \le 2, \ \left|c_2 - c_1^2\right| \le 2 \ \text{ve} \ \left|c_2 - \frac{1}{2}c_1^2\right| \le 2 - \frac{1}{2}|c_1|^2$$

eşitsizlikleri sağlanır (Koept 1987).

İlk olarak $k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ sınıfları için Fekete-Szegö problemi k nın farklı değer aralıklarına göre 2010 yılında Orhan, Deniz ve Raducanu tarafından çözüldü.

Teorem 3.5.12: $f \in k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $0 \le k < 1$ olsun. O halde,

$$\sigma_1 = \frac{1}{12(1-\beta)}\left(\frac{5\left(1-k^2\right)}{\mathcal{B}^2} + \left(7-6\beta-k^2\right)\right)$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{12(1-\beta)}\left(\left(7-6\beta-k^2\right) - \frac{1-k^2}{\mathcal{B}^2}\right)$$

şeklinde verilen σ_1 ve σ_2 değerleri için,

$$
\left|\mu a_2^2 - a_3\right| \le \begin{cases} \dfrac{2(1-\beta)\mathcal{B}^2}{(1-k^2)}\left(\dfrac{2(1-\beta)\mathcal{B}^2}{(1-k^2)}\mu - \dfrac{1}{3} - \dfrac{(7-6\beta-k^2)\mathcal{B}^2}{6(1-k^2)}\right); & \mu \ge \sigma_1 \\ \dfrac{(1-\beta)\mathcal{B}^2}{(1-k^2)}; & \sigma_2 \le \mu \le \sigma_1 \\ \dfrac{2(1-\beta)\mathcal{B}^2}{(1-k^2)}\left(\dfrac{(7-6\beta-k^2)\mathcal{B}^2}{6(1-k^2)} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{2(1-\beta)\mathcal{B}^2}{(1-k^2)}\mu\right); & \mu \le \sigma_2 \end{cases}
$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik $0 \le \theta \le 2\pi; 0 \le \tau \le 1$ için,

$$
\Phi(z,\theta,\tau) = z\exp\left(\int_0^z \left[\varphi_{k,\beta}\left(\frac{e^{i\theta}\zeta(\zeta+\tau)}{1+\tau\zeta}\right) - 1\right]\frac{d\zeta}{\zeta}\right) \tag{3.27}
$$

fonksiyonu ile sağlanır (Orhan, Deniz ve Raducanu 2010).

Teorem 3.5.13: $f \in k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k=1$ olsun. O halde,

$$
\delta_1 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{5\pi^2}{24(1-\beta)}\right)
$$

$$
\delta_2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\pi^2}{24(1-\beta)}\right)
$$

şeklinde verilen δ_1 ve δ_2 değerleri için,

$$
\left|\mu a_2^2 - a_3\right| \le \begin{cases} \dfrac{8(1-\beta)}{\pi^2}\left(\dfrac{8(1-\beta)}{\pi^2}\mu - \dfrac{1}{3} - \dfrac{4(1-\beta)}{\pi^2}\right); & \mu \ge \delta_1 \\ \dfrac{4(1-\beta)}{\pi^2}; & \delta_2 \le \mu \le \delta_1 \\ \dfrac{8(1-\beta)}{\pi^2}\left(\dfrac{4(1-\beta)}{\pi^2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{8(1-\beta)}{\pi^2}\mu\right); & \mu \le \delta_2 \end{cases}
$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik (3.27) de verilen $\Phi(z,\theta,\tau)$ fonksiyonu ile sağlanır. (Orhan, Deniz ve Raducanu 2010).

Teorem 3.5.14: $f \in k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $1 < k < \infty$ olsun. O halde,

$$
\rho_1 = \frac{1}{2P_1}\left(1 + P_1 + \frac{4\mathcal{K}^2(t)(t^2+6t+1) - \pi^2}{24\sqrt{t}(1+t)\mathcal{K}^2(t)}\right)
$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2P_1}\left(P_1 + \frac{4\mathcal{K}^2(t)\left(t^2+6t+1\right)-\pi^2}{24\sqrt{t}\,(1+t)\,\mathcal{K}^2(t)} - 1 \right)$$

şeklinde verilen ρ_1 ve ρ_2 değerleri için,

$$\left|\mu a_2^2 - a_3\right| \leq \begin{cases} \dfrac{P_1}{2}\left(2P_1\mu - P_1 - \dfrac{4\mathcal{K}^2(t)\left(t^2+6t+1\right)-\pi^2}{24\sqrt{t}\,(1+t)\,\mathcal{K}^2(t)} \right); & \mu \geq \rho_1 \\ \dfrac{P_1}{2}; & \rho_2 \leq \mu \leq \rho_1 \\ \dfrac{P_1}{2}\left(\dfrac{4\mathcal{K}^2(t)\left(t^2+6t+1\right)-\pi^2}{24\sqrt{t}\,(1+t)\,\mathcal{K}^2(t)} + P_1 - 2P_1\mu \right); & \mu \leq \rho_2 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik (3.27) de verilen $\Phi(z,\theta,\tau)$ fonksiyonu ile sağlanır. (Orhan, Deniz ve Raducanu 2010).

Teorem 3.5.15: $f \in k-\mathcal{UCV}(\beta)$ ve $0 \leq k < 1$ olsun. O halde,

$$\sigma_1^* = \frac{4}{36(1-\beta)}\left(\frac{5\left(1-k^2\right)}{\mathcal{B}^2} + \left(7-6\beta-k^2\right) \right)$$

$$\sigma_2^* = \frac{4}{36(1-\beta)}\left(\left(7-6\beta-k^2\right) - \frac{1-k^2}{\mathcal{B}^2} \right)$$

şeklinde verilen σ_1^* ve σ_2^* değerleri için,

$$\left|\mu a_2^2 - a_3\right| \leq \begin{cases} \dfrac{2(1-\beta)\mathcal{B}^2}{3\left(1-k^2\right)}\left(\dfrac{6(1-\beta)\mathcal{B}^2}{4\left(1-k^2\right)}\mu - \dfrac{1}{3} - \dfrac{\left(7-6\beta-k^2\right)\mathcal{B}^2}{6\left(1-k^2\right)} \right); & \mu \geq \sigma_1^* \\ \dfrac{(1-\beta)\mathcal{B}^2}{3\left(1-k^2\right)}; & \sigma_2^* \leq \mu \leq \sigma_1^* \\ \dfrac{2(1-\beta)\mathcal{B}^2}{3\left(1-k^2\right)}\left(\dfrac{\left(7-6\beta-k^2\right)\mathcal{B}^2}{6\left(1-k^2\right)} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{6(1-\beta)\mathcal{B}^2}{4\left(1-k^2\right)}\mu \right); & \mu \leq \sigma_2^* \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik (3.27) de verilen $\Phi(z,\theta,\tau)$ fonksiyonu ile sağlanır. (Orhan, Deniz ve Raducanu 2010).

Teorem 3.5.16: $f \in k-\mathcal{UCV}(\beta)$ ve $k=1$ olsun. O halde

$$\delta_1^* = \frac{4}{6}\left(1+\frac{5\pi^2}{24(1-\beta)}\right)$$

$$\delta_2^* = \frac{4}{6}\left(1-\frac{\pi^2}{24(1-\beta)}\right)$$

şeklinde verilen δ_1^* ve δ_2^* değerleri için,

$$\left|\mu a_2^2 - a_3\right| \le \begin{cases} \dfrac{8(1-\beta)}{3\pi^2}\left(\dfrac{24(1-\beta)}{4\pi^2}\mu - \dfrac{1}{3} - \dfrac{4(1-\beta)}{\pi^2}\right); & \mu \ge \delta_1^* \\ \dfrac{4(1-\beta)}{3\pi^2}; & \delta_2^* \le \mu \le \delta_1^* \\ \dfrac{8(1-\beta)}{3\pi^2}\left(\dfrac{4(1-\beta)}{\pi^2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{24(1-\beta)}{4\pi^2}\mu\right); & \mu \le \delta_2^* \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik (3.27) de verilen $\Phi(z,\theta,\tau)$ fonksiyonu ile sağlanır. (Orhan, Deniz ve Raducanu 2010).

Teorem 3.5.17: $f \in k-\mathcal{UCV}(\beta)$ ve $1<k<\infty$ olsun. O halde,

$$\rho_1^* = \frac{4}{6P_1}\left(1+P_1+\frac{4\mathcal{K}^2(t)\left(t^2+6t+1\right)-\pi^2}{24\sqrt{t}(1+t)\mathcal{K}^2(t)}\right)$$

$$\rho_2^* = \frac{4}{6P_1}\left(P_1+\frac{4\mathcal{K}^2(t)\left(t^2+6t+1\right)-\pi^2}{24\sqrt{t}(1+t)\mathcal{K}^2(t)}-1\right)$$

şeklinde verilen ρ_1^* ve ρ_2^* değerleri için,

$$\left|\mu a_2^2 - a_3\right| \le \begin{cases} \dfrac{P_1}{6}\left(\dfrac{6P_1}{4}\mu - P_1 - \dfrac{4\mathcal{K}^2(t)\left(t^2+6t+1\right)-\pi^2}{24\sqrt{t}(1+t)\mathcal{K}^2(t)}\right); & \mu \ge \rho_1^* \\ \dfrac{P_1}{6}; & \rho_2^* \le \mu \le \rho_1^* \\ \dfrac{P_1}{6}\left(\dfrac{4\mathcal{K}^2(t)\left(t^2+6t+1\right)-\pi^2}{24\sqrt{t}(1+t)\mathcal{K}^2(t)} + P_1 - \dfrac{6P_1}{4}\mu\right); & \mu \le \rho_2^* \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik (3.27) de verilen $\Phi(z,\theta,\tau)$ fonksiyonu ile sağlanır. (Orhan, Deniz ve Raducanu 2010).

$k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ Sınıfları İçin Hadamard Çarpım ve Subordinasyon Sonuçları

İlk olarak $k-\mathcal{UST}(\beta)$ sınıfına ilişkin Hadamard çarpım özelliğini verelim. Bunun için ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer eden ve aşağıdaki teoremin ispatında kullanılacak olan bir lemmayı verelim.

Lemma 3.5.18: $f \in \mathcal{S}^*$ ve $g \in \mathcal{C}$ veya $f, g \in \mathcal{S}^*\left(\frac{1}{2}\right)$ olsun. Bu durumda her analitik h fonksiyonu için

$$\frac{(f * hg)(U)}{(f * g)(U)} \subset \overline{co}h(U)$$

yazılır. Burada $\overline{co}h(U)$, $h(U)$ nın kapalı konveks kabuğudur (Ruscheweyh 1982).

Teorem 3.5.19: $f \in k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $h \in \mathcal{C}$ olsun. Bu durumda

$$f(z) * g(z) \in k-\mathcal{UST}(\beta)$$

dır.

İspat: $f \in k-\mathcal{UST}(\beta)$ olsun. $k-\mathcal{UST}(\beta)$ sınıfının geometrik özelliği gereğince

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \in \Omega_{k,\beta}$$

yazıldığını biliyoruz. İstenilen sonucu ispatlamak için

$$\frac{z\left(h(z) * f(z)\right)'}{h(z) * f(z)} \in \Omega_{k,\beta}$$

olduğunu göstermek yeterli olur. Burada $f \in k-\mathcal{UST}(\beta)$ için $f \in \mathcal{S}^*\left(\frac{k+\beta}{1+k}\right) \subset \mathcal{S}^*$ olduğunu biliyoruz. Böylece $h \in \mathcal{C}$ olduğundan ve Lemma 3.5.18 kullanarak

$$\frac{z\left(h(z)*f(z)\right)'}{h(z)*f(z)}=\frac{h(z)*\left[zf'(z)/f(z)\right]f(z)}{h(z)*f(z)}$$
$$\in\overline{co}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}(U)\right)\subseteq cl\Omega_{k,\beta}$$

bulunur. Buradan da $f(z)*h(z)\in k-\mathcal{UST}(\beta)$ sonucu elde edilir.

Şimdi subordinasyon sonuçlarını vermeden önce aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım. Bunun için $\varphi_{k,\beta}(z)$ (3.17) ile verilen fonksiyon olmak üzere

$$\mathcal{F}_{k,\beta}(z)=\exp\int_0^z\frac{\varphi_{k,\beta}(\xi)-1}{\xi}d\xi,$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Teorem 3.5.20: $f\in k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k+2\beta\geq 1$ olsun. O halde $\dfrac{f(z)}{z}\prec\mathcal{F}_{k,\beta}(z)$ yazılır.

İspat: $f\in k-\mathcal{UST}(\beta)$ olsun. Bu durumda

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}\prec\varphi_{k,\beta}(z)$$

ve

$$\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\prec\varphi_{k,\beta}(z)-1$$

olur. Dikkat edilirse, $\varphi_{k,\beta}(z)-1$ fonksiyonu U da konveks ve univalent bir fonksiyondur. Goluzin'in [12] da kullandığı sonuçtan

$$Log\frac{f(z)}{z}\prec\int_0^z\frac{\varphi_{k,\beta}(\xi)-1}{\xi}d\xi$$

elde edilir. Bu yüzden $z\in U$ için

$$Log\frac{f(z)}{z}=\int_0^z\frac{\varphi_{k,\beta}(\omega(\xi))-1}{\omega(\xi)}d\omega(\xi)$$

olacak şekilde $\omega\in\Omega$ fonksiyonu vardır. Dolayısıyla yukarıdaki ifadeden

$$\frac{f(z)}{z} \prec \exp\left(\int_0^z \frac{\varphi_{k,\beta}(\xi)-1}{\xi}\, d\xi\right) = \mathcal{F}_{k,\beta}(z)$$

bulunur. Böylece ispat tamamdır.

Teorem 3.5.21: $f \in k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k+2\beta \geq 1$ olsun. O halde

$$\mathcal{F}_{k,\beta}(-r) \leq \left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \mathcal{F}_{k,\beta}(r), \quad |z| = r < 1$$

ve

$$\left|Arg\, \frac{f(z_0)}{z_0}\right| \leq \max_{|z|=r}\{Arg\mathcal{F}_{k,\beta}(z)\}, \quad |z_0| < 1$$

eşitsizlikleri doğrudur. biçiminde ifade edilir. Yukarıdaki eşitsizliklerin eşitlik halinin olması ancak ve ancak bazı $z \neq 0$ için f nin $z\mathcal{F}_{k,\beta}$ nin bir dönmesiyle gerçekleşir.

İspat: $f \in k-\mathcal{UST}(\beta)$ olsun. O halde, Teorem 3.5.20 ve subordinasyon için Lindelöf prensibinden

$$\inf_{|z|\leq r} \mathrm{Re}\{\mathcal{F}_{k,\beta}(z)\} \leq \inf_{|z|\leq r} \mathrm{Re}\{\frac{f(z)}{z}\} \leq \sup_{|z|\leq r} \mathrm{Re}\{\frac{f(z)}{z}\} \leq \left|\frac{f(z)}{z}\right|$$
$$\leq \sup\left|\frac{f(z)}{z}\right| \leq \sup_{|z|\leq r} \mathrm{Re}\{\mathcal{F}_{k,\beta}(z)\}$$

elde edilir. $\mathcal{F}_{k,\beta}$ fonksiyonu konveks univalent ve reel katsayılara sahip olduğundan $\mathcal{F}_{k,\beta}(U)$ reel eksene göre konveks bir bölgedir. Böylece

$$\inf_{|z|\leq r} \mathrm{Re}\{\mathcal{F}_{k,\beta}(z)\} = \inf_{-r\leq x\leq r}\{\mathcal{F}_{k,\beta}(z))\} = \mathcal{F}_{k,\beta}(-r)$$

ve

$$\sup_{|z|\leq r} \mathrm{Re}\{\mathcal{F}_{k,\beta}(z)\} = \sup_{-r\leq x\leq r}\{\mathcal{F}_{k,\beta}(z)\} = \mathcal{F}_{k,\beta}(-r)$$

yazılır. Bu da Teoremdeki ilk eşitsizliğin ispatıdır. Benzer olarak, Teorem 3.5.20 den, Teoremdeki ikinci eşitsizlik ispatlanır. Teoremdeki eşitsizliklerin eşitlik halinin olması ancak ve ancak $z \neq 0, z_0 \neq 0,$ için f fonksiyonu $f_{k,\beta}(z) = z\mathcal{F}_{k,\beta}(z)$ fonksiyonunun dönmesiyle olur.

Teorem 3.5.20 ve 3.5.21 in $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ sınıfı için olan sonucu aşağıdadır.

Teorem 3.5.22: $f \in k - \mathcal{UCV}(\beta)$ ve $k + 2\beta \geq 1$ olsun. O halde

$$f'(z) \prec \mathcal{F}_{k,\beta}(z),$$

$$\mathcal{F}_{k,\beta}(-r) \leq \left| f'(z) \right| \leq \mathcal{F}_{k,\beta}(r), \quad |z| = r < 1$$

ve

$$\left| Arg f'(z_0) \right| \leq \max_{|z|=r} \{ Arg \mathcal{F}_{k,\beta}(z) \}, \quad |z_0| < 1$$

sonuçları doğrudur. Teoremdeki eşitsizliklerin eşitlik halinin olması ancak ve ancak $z \neq 0, z_0 \neq 0,$ için f nin $\mathcal{F}_{k,\beta}(z)$ fonksiyonunun bir dönmesiyle gerçeklenir.

Yukarıda bulunan sonuçlardan farklı olarak [1], [2], [4], [6]-[9], [11], [17]-[20], [22], [29], [32], [42] ve [43] çalışmalarında düzgün konveks, düzgün yıldızıl fonksiyonlar ve bu fonksiyonların genelleştirmeleriyle ilgili farklı uygulamalar bulununabilir.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 3.1 ve 3.2 bölümlerinde sırasıyla düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyon kavramları tanıtıldı. Bu fonksiyonların analitik olarak bazı özellikleri verildi.

Tezin 3.3 ve 3.4 bölümlerinde sırasıyla $k-$düzgün yıldızıl ve $k-$düzgün konveks fonksiyonların geometrik tanımı yapıldı. Bu tanımları analitik olarak en iyi şekilde ifade eden teoremler verildi.

Tezin 3.5 bölümünde β mertebeden $k-$düzgün yıldızıl ve β mertebeden $k-$düzgün konveks fonksiyonların sırasıyla $k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ sınıfları tanıtıldı. Bu sınıfların geometrik özelliklerinin yanı sıra katsayı bağıntıları, Fekete-Szegö eşitsizlikleri, Hadamard çarpımı ve subordinasyon gibi önemli özellikleri olan teoremler verilerek ispatlandı.

5.TARTIŞMA ve SONUÇ

Tezde ele alınan β mertebeden $k-$düzgün yıldızıl fonksiyonların $k-\mathcal{UST}(\beta)$ ve β mertebeden $k-$düzgün konveks fonksiyonların $k-\mathcal{UCV}(\beta)$ sınıfları daha önceden tanımlanan ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli yer işgal eden birçok sınıfın genelleştirilmiş halleridir. Dolayısıyla bu sınıflar için bulunan sonuçlar daha önceden bulunan sonuçları içermektedir.

4. KAYNAKLAR

[1] Aghalary, R., ve Kulkarni, S. R., “Certain properties of parabolic starlike and convex functions of order ρ “, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2) 26, No:2, s153-s162, (2003).

[2] Aghalary, R., and Azadi, G. H., “The Dziok.Srivastava operator and k-uniformly starlike functions”, J. Inequal. Pure Appl. Math. 6(2), 1.7, Article 52 (electronic), (2005).

[3] Ali, R. M., “Starlikeness associated with parabolic regions”, Int.J. Math. Math. Sci., No: 4, s561-s570, (2005).

[4] Ali, R. M., ve Singh, V., “Coefficients of parabolic starlike functions of order ρ”, In Computational methods and function 12 theory (Penang) (1994), volume 5 of Ser. Approx. Decompos, s23-s36, World Sci. Publ., River Edge, NJ, (1995).

[5] Ali, R. M., ve Ravichandran, V., “Uniformly Convex and Uniformly Starlike Functions”, arxiv:1106-4377V1, (2011).

[6] Bednarz, U., ve Kanas, S., “Generalized neighbourhoods and stability of convolution for the class of k-uniformly convex and k-starlike functions”, Zeszyty Nauk. Politech. Rzeszowskiej Mat., (23), s29-s38, (1999).

[7] Bednarz, U., ve Kanas, S., “Stability of the integral convolution of k- uniformly convex and k-starlike functions”, J. Appl. Anal., 10(1), s105-s115, (2004).

[8] Bharati, R., Parvatham, R., ve Swaminathan, A., “On subclasses of uniformly convex functions and corresponding classof starlike functions”, Tamkang J. Math., 28(1), s17-s32, (1997).

[9] Brown, J. E., “Images of Disks under Convex and Starlike Functions” Math. Z., 202, s457-s462, (1989).

[10] Branges, L. De., “A proof of the Bieberbach conjecture”, Acta Math., 154, No:1-2, s137-s152, (1985).

[11] Deniz, E., ve Orhan, H., “Subordination results for subclasses of analytic functions defined by a differential operator related to conic domains”, (Mathematica Pannonica dergisinde kabul edildi).

[12] Duren, P., “Univalent Functions”, Springer, New York, (1983).

[13] Goodman, A. W., “On uniformly convex functions”, Ann. Polon. Math., 56(1), s87-s92, (1991).

[14] Goodman, A. W., “On uniformly starlike functions”, J. Math.Anal. Appl., 155, s364-s370, (1991).

[15] Goodman, A. W., “Univalent Functions”, I. Mariner Publishing Company., s-245, Tapma, Florida, (1983).

[16] Goodman, A. W., “Univalent Functions”, II. Mariner Publishing Company., s-311, Tapma, Florida, (1983).

[17] Kanas, S., “Stability of convolution and dual sets for the class of *k*-uniformly convex and k-starlike functions”, Zeszyty Nauk, Politech, Rzeszowskiej Mat., (22), s51-s64, (1998).

[18] Kanas, S., “Uniformly alpha convex functions”, Int. J. Appl.Math., 1(3), s305-s310, (1999).

[19] Kanas, S., ve Yaguchi, T., “Subclasses of *k*-uniformly convex and starlike functions defined by generalized derivative”, 121231. IndianJ. Pure Appl. Math., 32(9), s1275-s1282, (2001).

[20] Kanas, S., ve Yaguchi, T., “Subclasses of *k*-uniformly convex and starlike functions defined by generalized derivative”, II.Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.), 69(83), s91-s100, (2001).

[21] Kanas, S., ve Wisniowska, A., “Conic regions and *k*-uniform convexity”, J.Comput. Appl. Math., 105(1-2), s327-s336, (1999), “Continued fractions and geometric function theory”, (CON-FUN), (Trondheim, 1997).

[22] Kanas, S., ve Wisniowska, A., “Conic regions and *k*-uniform convexity”, II.Zeszyty Nauk, Politech, Rzeszowskiej Mat., (22), s65-s78, (1998).

[23] Kanas, S., ve Wisniowska, A., “Conic domains and starlike functions”, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 45(4), s647-s657, (2001), (2000).

[24] Kim, Y. C., ve Ponnusamy, S., “Sufficiency for Gaussian hypergeometric functions to be uniformly convex”, Int. J. Math. Math. Sci. 22, No:4, s765-s773, MR1733277, (1999).

[25] Koept, W., “On the Fekete-Szegö Problem for Close to Convex Functions”, Proc. Amer. Math. Soc., 101 (1), s88-s95, (1987).

[26] Lecko, A., ve Wisniowska, A., “Geometrik Properties of Subclases of Starlike Functions”, J. Comput. Appl. Math., s383-s387, 155, (2003).

[27] Ma, W. C., ve Minda, D., “Uniformly convex functions”, Ann. Polon. Math., 57(2), s165-s175, (1992).

[28] Ma, W. C., ve Minda, D., “A unified treatment of some special classes of univalent functions”, in Proceedings of the Conferenceon Complex Analysis (Tianjin), s157-s169, Conf. Proc.Lecture Notes Anal., I Int. Press, Cambridge, MA, (1992).

[29] Ma, W. C., ve Minda, D.; “Uniformly convex functions”, II. Ann.Polon. Math., 58(3):s275-s285, (1993).

[30] Merkes, E., ve Salmassi, M., “Subclasses of uniformly starlike functions”, Internat. J. Math. & Math. Sci., 15 (3): s449-s454, (1992).

[31] Nezhmetdinov, R., “Classes of uniformly convex and uniformly starlike functions as dual sets”, J. Math. Anal. Appl., s4-s47, 216, (1997).

[32] Nezhmetdinov, I. R., “On the order of starlikeness of the class UST”, J. Math. Anal. Appl., s559-s566, 234, (1999).

[33] Orhan, H., Deniz, E., ve Raducanu, D., “The Fekete-Szegö problem for subclasses of analytic functions defined by a differential operator related to conic domains”, Comput. Math. Appl., s283-s295, 59(1), (2010).

[34] Ponnusamy, S., ve Silverman, H., “Complex variables with Applications”, Birkhäuser. Boston, (2006).

[35] Pommerenke, Ch., “Univalent Functions”, Vandenhoeck ve Ruprecht Company, s-376, Göttingen, Berlin, (1975).

[36] Ravichandran, V., “On uniformly convex functions. Ganita”, 53(2):s117-s124, (2002).

[37] Ravichandran, V., “Some sufficient conditions for starlike functions associated with parabolic regions”, Southeast Asian Bull.Math., 27(4):s697-s703, (2003).

[38] Ravichandran, V., Gangadharan, A., ve Shanmugam, T. N., “Sufficient conditions for starlikeness associated with parabolic region”, Int. J. Math. Sci., 32(5):s319-s324, (2002).

[39] Rønning, F., “A survey on uniformly convex and uniformly starlike functions”, Ann. Univ. Mariae Curie-Sk lodowska Sect. A, 47:s123-s134, (1993).

[40] Rønning, F., "Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions", Proc. Amer. Math. Soc., 118(1):s189-s196, (1993).

[41] Rønning. F., "On uniform starlikeness and related properties of univalent functions", Complex Variables Theory Appl., 24(3-4):s233s239, (1994).

[42] Rønning. F., "Integral representations of bounded starlike functions", Ann. Polon. Math., 60(3):s289-s297, (1995).

[43] Rønning, F., "Some radius results for univalent functions", J.Math. Anal. Appl., 194(1):s319-s327, (1995).

[44] Ruscheweyh, St., "Convolutions in Geometric Function Theory", Presses Univ.Montr´eal, Montreal, Que., (1982).

[45] Ruscheweyh, St., ve Sheil-Small, T., "Hadamard products of Schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture", Comment. Math. Helv. 48, s119-s135, (1973).

[46] Shams, S., Kulkarni, S. R., ve Jahangiri, J. M., "Classes of uniformly starlike and convex functions", Internat. J. Math. Math. Sci., s2959-s2961, 55, (2004).

[47] Shanmugam T. N., ve Ravichandran V., "Certain properties of uniformly convex functions", In Computational methods and function theory 1994 (Penang), volume 5 of Ser. Approx. Decompos. World Sci. Publ., River Edge, NJ, s319–s324, (1995).

[48] Subramanian, K. G., Sudharsan, T. V., Balasubrahmanyam, P., ve Silverman, H., "Classes of uniformly starlike functions", Publ. Math. Debrecen, 53(3-4): s309-s315, (1998).

ÖZGEÇMİŞ

1986 yılında İzmir'de doğdu. İlköğretimini İzmir'de liseyi Erzurum Merkez Anadolu Lisesinde tamamladı. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı ve 2009 yılında mezun oldu. Aynı yıl M.E.B. da vekil öğretmen olarak göreve başladı. Bir yıl özel bir dershanede Matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2010 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Halen özel bir dershanede Matematik öğretmeni olarak çalışmaktadır. Bekardır.