

**T.C.  
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**İKİNCİ MERTEBEDEN ADİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN  
LİONS FONKSİYONELLİ OPTİMAL  
KONTROL PROBLEMİ**

**Tayfun ÖZKURT**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**DANIŞMAN**

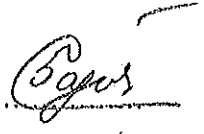

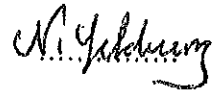
**Prof. Dr. Gabil YAGUBOV**

**HAZİRAN-2012**

**KARS**

Prof. Dr. Gabil YAGUBOV' un danışmanlığında Tayfun ÖZKURT' un Yüksek Lisans Tezi olarak hazırladığı "İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklemler İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemi" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında ...*Doç. Birliği*..... ile kabul edilmiştir.

13./06/2012

	Adı Soyadı	İmza
Başkan	: Prof. Dr. Gabil YAGUBOV	
Üye	: Prof. Dr. Mevlüt KARABULUT	
Üye	: Yrd. Doç. Dr. Nigar Y. AKSOY	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ...../...../20.... gün ve ...../..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Muzaffer ALKAN

Enstitü Müdürü

## ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Burada incelen problemde amaç fonksiyoneli olarak Lions fonksiyoneli kullanılmaktadır. Bu nedenle bu çalışma problemin konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden farklıdır.

Tez çalışmamda çok büyük emeği geçen, yoğun çalışmalarından bana zaman ayırarak derin bilgilerinden faydalanma fırsatı veren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum değerli bilim adamı, Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUBOV' a en içten teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım esnasında ve tezin hazırlanması sürecinde yine katkılarını esirgemeyen Sayın Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocama teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2012

Tayfun ÖZKURT

## İÇİNDEKİLER

ÖNSÖZ.....	i
İÇİNDEKİLER.....	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT.....	iv
SİMGELER DİZİNİ.....	v
1.GİRİŞ.....	1
2.KURAMSAL TEMELLER.....	3
3.MATERYAL VE YÖNTEM.....	6
3.1.İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması.....	6
3.1.1 Problemin Konulması.....	6
3.1.2 Optimal Kontrol Problemin Çözümünün Varlığı.....	8
3.1.3 Optimal Kontrol Problemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği.....	12
3.2. İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem için Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminde Çözüm İçin Gerek Şartlar.....	15
3.2.1 Fonksiyonelin Diferansiyellenebilirliği.....	15
3.2.2 Optimal Kontrol Problemi İçin Varyasyon Eşitsizliği Biçiminde Gerek Şart.....	21
3.2.3 Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözüm Algoritması.....	24
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	29
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	30
6.KAYNAKLAR.....	31
ÖZGEÇMİŞ.....	33

## ÖZET

Bu tezde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alındı. Bu çalışmanın 3.1. bölümünde önce ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için 1. ve 2. çeşit sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait teorem verildi. Bu teorem kullanılarak söz konusu optimal kontrol probleminin varlığını ve tekliğini içeren teoremler ispatlandı. Çalışmanın 3.2. bölümünde önce fonksiyonelin diferansiyellenebilir olduğu gösterildi ve onun gradiyenti için formül elde edildi. Son olarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart elde edildi ve problemin nümerik çözüm algoritması verildi.

**2012-40 Sayfa**

**Anahtar Kelimeler:** İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem, Optimal Kontrol Problemi, Lions Fonksiyoneli, Sınır Değer Problemi

## **ABSTRACT**

In this thesis, optimal control problem with Lions functional was taken up for second order ordinary differential equations. In the section 3.1. of this work for the second order ordinary differential equations, theorem relating to existence and uniqueness of generalized solutions of I<sup>th</sup> and II<sup>th</sup> type boundary value problems is given. By using this theorem, theorems which include the existence and uniqueness of solution of the optimal control problem were proved. In the section 3.2., first differentiability of the functional is proved and a formula is obtained for its gradient. Finally, for the solution of the optimal control problem the necessity condition in the form of variation inequality is proved and an algorithm was given for the numeric solution of optimal control problem.

**2012 - 40 Pages**

**Key Words:** Second Order Ordinary Differential Equations, Optimal Control Problems, Lions Functional, Boundary Value Problems

## SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	herhangi
$\overset{\circ}{\forall}$	hemen hemen her yerde
$l > 0$	verilen sayı
$x \in [0, l]$	bağımsız değişken
$[\dots]$	kaynak numarası
$\{\dots\}$	küme işareti
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	iç çarpım işareti
$v = (v_0, v_1)$	kontrol
$u_k = u_k(x), k = 1, 2$	sınır değer probleminin çözümü
$\psi_k = \psi_k(x), k = 1, 2$	eşlenik sistemin çözümü
$J_\alpha(v), v \in V, \alpha \geq 0$	fonksiyonel
$I_N([u]_N), [u]_N \in u_N$	fonksiyonelin diskrit aynısı
$\delta_{x^-} \phi_{kj} = (\phi_{kj} - \phi_{kj-1}) / h, k = 1, 2$	$x'$ e göre sol fark
$\delta_{x^+} \phi_{kj} = (\phi_{kj+1} - \phi_{kj}) / h, k = 1, 2$	$x'$ e göre sağ fark
$\delta_{xx^-} \phi_{kj} = (\phi_{kj+1} - 2\phi_{kj} + \phi_{kj-1}) / h^2, k = 1, 2$	$x'$ e göre 2. mertebeden fark
$h = \frac{l}{M}, M > 0$	verilen tam sayı

## 1. GİRİŞ

Adi diferansiyel denklemlerle ifade edilen sistemler için optimal kontrol teorisi optimal süreçler teorisinin ve adi diferansiyel denklemler teorisinin ana bölümlerini içermektedir. Optimal kontrol probleminin incelenmesi durumunda ortaya aşağıdaki sorular çıkar:

- a) Optimal kontrol probleminin iyi konulup konulmaması;
- b) Gerek ve yeterli şartların elde edilebilmesi;
- c) Optimal kontrol problemlerinin çözümü için nümerik çözüm yöntemlerinin oluşturulabilmesi.

Bu sorular toplanmış parametrelili ve dağılımı parametrelili sistemler için optimal kontrol problemleri üzerine farklı yazarlarca [1–11,14,16–19,21,23,24] vb. kaynaklarda incelenmiştir.

Sunulan bu tezde de ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için optimal kontrol problemi ele alındı. Ancak burada incelenen problem gerek konulma açısından, gerek kullanılan amaç fonksiyoneli açısından önceki çalışmalardaki problemlerden farklıdır. Burada incelenen problemde amaç fonksiyoneli olarak Lions fonksiyoneli kullanılmaktadır. Lions fonksiyoneli tipli fonksiyoneller ilk kez Fransız matematikçisi Lions tarafından sunulmuştur[17]. Bu tür fonksiyoneller matematiksel fiziğin denklemlerinin katsayısı ile kontrol edilen sistemler için kontrol problemlerinde ilk kez İskenderov'un çalışmalarında sunulmuştur ve analiz edilmiştir[9]. Sonralarda ise Lions fonksiyoneli tipli fonksiyoneller Schrödinger denklemleri için optimal kontrol problemlerinde İskenderov ve Mahmudov'un çalışmalarında sıkça kullanılmıştır[7,18].

Görüldüğü üzere bu tezde sunulan optimal kontrol probleminde amaç fonksiyoneli olarak Lions fonksiyoneli kullanılmaktadır. İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için optimal kontrol problemlerinde bu tür fonksiyonellerin çok az



kullanılmasından dolayı sunulan problemin incelenmesi gerek teorik, gerekse pratik açıdan önem taşır.

Tezin içeriğinin materyal ve yöntem bölümü iki alt bölümden, yani 3.1, 3.2 bölümlerinden oluşmaktadır. 3.1 bölümünde ele alınan problemin iyi konulmasına ait sorular cevaplandırılmaktadır. Ele alınan problemi incelemek için ilk önce ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için I. ve II. tip sınır değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliğini gösteren hükümler verilmiştir. Bu hükümleri kullanarak optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğini gösteren teoremler ispatlanmıştır.

Tezin 3.2. bölümünde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için optimal kontrol probleminde gerek şartlar incelenmiştir. Bunun için önce sunulan amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği incelenmiş ve onun gradiyenti için formül ispatlanmıştır. Bu formülden yararlanarak problemin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanmıştır. Son olarak ele alınan optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için algoritma verilmiştir.

## 2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen kısımlarda geçen tanımlar ve teoremler verilecektir.

**Tanım 2.1:**  $L_2(a, b)$  uzayı, Hilbert uzayı olup, elemanları  $(a, b)$  aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle u, v \rangle_{L_2(a,b)} = \int_a^b u(x)v(x) dx$$

$$\|u\|_{L_2(a,b)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{L_2(a,b)}}$$

**Tanım 2.2:**  $L_\infty(a, b)$  uzayı, Banach uzayı olup, elemanları  $(a, b)$  aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L_\infty(a,b)} = \text{vrai max}_{x \in (a,b)} |u(x)|$$

**Tanım 2.3:**  $W_2^1(a, b)$  uzayı, Hilbert uzayı olup, elemanları ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri  $L_2(a, b)$  uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u, v \rangle_{W_2^1(a,b)} = \int_a^b \left( u(x)v(x) + \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \right) dx$$

$$\|u\|_{W_2^1(a,b)} = \sqrt{\langle u, u \rangle_{W_2^1(a,b)}}$$

**Tanım 2.4:**  $W_2^0(a, b)$  uzayı,  $W_2^1(a, b)$  uzayının alt uzayı olup,  $(a, b)$  aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

**Tanım 2.5:**  $X$  bir Banach uzayı ve  $E \subset X$  olsun. Eğer  $\{x_n\} \in E$  ve  $\{x_n\}$  dizisi bir  $x$  elemanına zayıf yakınsadığında  $x \in E$  ise  $E$  kümesine  $X$ ' de zayıf kapalıdır denir.

**Tanım 2.6:**  $B$  herhangi bir Banach uzayı ve  $J(u)$  fonksiyoneli  $u$  noktasının herhangi bir  $w(u, \gamma) = \{v : v \in B, \|v - u\| < \gamma\}$  komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \rightarrow 0} \frac{o(h, u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde  $\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \langle J'(u), h \rangle_B + o(h, u)$  şartını sağlayan  $J'(u) \in B^*$  elemanı varsa, bu taktirde  $J(u)$  fonksiyoneli  $u$  noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilir. Burada  $B^*$  uzayı  $B$ ' nin eşlenik uzayıdır.

**Tanım 2.7:** Eğer  $B$  Banach uzayından olan  $\{u_k\}$  dizisi için  $\forall c \in B^*$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \langle c, u_k \rangle = \langle c, u \rangle$  şartı sağlanıyorsa bu taktirde  $\{u_k\}$  dizisi  $u \in B$  noktasına zayıf yakınsıyor denir. Burada  $B^*$  uzayı  $B$ ' nin eşlenik uzayıdır.

**Tanım 2.8:**  $U, B$  Banach uzayının bir kümesi olsun. Eğer,  $\forall \{u_k\} \in U$  dizisinden zayıf yakınsayan en azından bir alt dizi seçmek mümkün ise bu taktirde  $U$  kümesine  $B$  de zayıf kompakt küme denir.

**Tanım 2.9:**  $J(u)$  fonksiyoneli  $B$  Banach uzayının  $U$  alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer  $u \in U$  noktasına zayıf yakınsayan  $\{u_k\} \in U$  dizisi için  $\lim_{k \rightarrow \infty} J(u_k) \geq J(u)$  şartı sağlanıyorsa bu taktirde  $J(u)$  fonksiyoneline  $u$  noktasında alttan zayıf yarı sürekli denir.

**Teorem 2.10:** ([24])  $U, B$  Banach uzayının konveks alt kümesi,  $J(u)$  fonksiyoneli bu kümede 1. mertebeden sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonel ve

$U_* = \{u \in U : J(u) = J_* = \inf_U J(u)\}$  kümesi  $J(u)$  fonksiyonelinin minimum noktalar kümesi olsun. Bu taktirde  $\forall u_* \in U_*$  ve  $\forall u \in U$  için  $\langle J'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0$  şartı sağlanır.

**Teorem 2.11** ([24]):  $U, B$  Banach uzayında zayıf kompakt küme olsun.  $J(u)$  fonksiyoneli ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli olsun. Bu taktirde  $J_* = \inf_U J(u) > -\infty$ ,  $U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \emptyset$  zayıf kompakttır ve  $U$  kümesinden olan herhangi minimalleştirici dizi minimum noktalar kümesine zayıf yakınsar.

**Teorem 2.12 (Goebel [5]):** Kabul edelim ki,  $\tilde{X}$  düzgün konveks uzay,  $U$  kümesi  $\tilde{X}$  uzayının kapalı sınırlı kümesi,  $I(v)$  fonksiyoneli  $U$  kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve  $\alpha > 0$ ,  $\beta \geq 1$  verilen sayılar olsun. Bu taktirde  $\tilde{X}$  uzayında her yerde yoğun olan öyle  $G$  alt kümesi vardır ki,  $\forall w \in G$  için  $J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - w\|_X^\beta$  fonksiyoneli  $U$  kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer  $\beta > 1$  ise  $J_\alpha(v)$  fonksiyoneli için en küçük değerini  $U$  kümesi üzerinde bir tek noktada alır.

### 3.MATERYAL VE YÖNTEM

#### 3.1.İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel Denklem İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması

Bu bölümde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin iyi konulması ile ilgili sorular incelenecektir. Daha önceki çalışmalarda ifade edilen ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için göz önüne alınan sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliğine ait hükümler kullanarak ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için optimal kontrol problemin varlığına ve tekliğine ait teoremler ispatlanmıştır. Benzer problemler parabolik, hiperbolik ve Schrödinger denklemleri için daha önce [2,7,14] vb. çalışmalarında incelenmiştir.

##### 3.1.1. Problemin Konulması

Bu alt bölümde ele alınan optimal kontrol problemini tanımlayalım. Bu amaçla aşağıdaki problemi göz önüne alalım.

$$J_{\alpha}(v) = \|u_1 - u_2\|_{L_2(0,l)}^2 + \alpha \|v - w\|_H^2 \quad (3.1.1.1)$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \left\{ v = (v_0, v_1), v_0 \in L_{\infty}(0, l), b_0 \leq v_0(x) \leq \tilde{b}_0, \forall x \in (0, l), v_1 \in L_2(0, l), \|v_1\|_{L_2(0,l)} \leq b_1 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\frac{d}{dx} \left( a_0(x) \frac{du_k}{dx} \right) - v_0(x) u_k = v_1(x), x \in (0, l), \quad (3.1.1.2)$$

$$u_1(0) = u_1(l) = 0, \quad (3.1.1.3)$$

$$\frac{du_2(0)}{dx} = \frac{du_2(l)}{dx} = 0 \quad (3.1.1.4)$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Burada  $l > 0$ ,  $b_0 > 0$ ,  $\tilde{b}_0 > 0$ ,  $b_1 > 0$ ,  $\alpha \geq 0$ , verilen sayılar,  $\alpha_0(x)$  ölçülebilir sınırlı fonksiyon olup

$$0 \leq \mu_0 \leq \alpha_0(x) \leq \mu_1, \quad \forall x \in (0, l) \quad (3.1.1.5)$$

şartını sağlar. Burada  $H = L_2(0, l) \times L_2(0, l)$  olacak şekilde  $w \in H$  verilen elemandır.

$\forall v \in V$  için (3.1.1.2)-(3.1.1.3) şartlarından  $u_1(x) = u_1(x; v)$  fonksiyonunun bulunması ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için birinci çeşit sınır değer problemi, (3.1.1.2), (3.1.1.4) şartlarından  $u_2(x) = u_2(x; v)$  fonksiyonunun bulunması problemi ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için ikinci çeşit sınır değer problemidir.

**Tanım 3.1.1.1:**  $\forall v \in V$  (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin çözümü olarak  $\forall \eta_1 \in W_2^1(0, l)$ ,  $\forall \eta_2 \in W_2^1(0, l)$  için

$$\int_0^l \left( -\alpha_0(x) \frac{du_k}{dx} \frac{d\eta_k}{dx} - v_0(x) u_k \eta_k \right) dx = \int_0^l v_1(x) \eta_k(x) dx, \quad k = 1, 2 \quad (3.1.1.6)$$

integral özdeşliğini sağlayan  $\forall u_1 \in W_2^1(0, l)$ ,  $\forall u_2 \in W_2^1(0, l)$  fonksiyonları anlaşılır.

[15] çalışmalarından bildiğimiz üzere eliptik denklem için sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir. Bu kaynaklarda elde edilen sonuçlar kullanılarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

**Teorem 3.1.1.1:** Farz edelim ki  $\alpha_0(x)$  fonksiyonu (3.1.1.5) şartlarını sağlasın. Bu taktirde  $\forall v \in V$  için (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

$$\|u_1\|_{W_2^1(0, l)} \leq c_1 \|v_1\|_{L_2(0, l)}, \quad (3.1.1.7)$$

$$\|u_2\|_{W_2^1(0, l)} \leq c_2 \|v_1\|_{L_2(0, l)}. \quad (3.1.1.8)$$

Burada  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  sabitleri  $v_1$ 'den bağımsızdır.

### 3.1.2. Optimal Kontrol Problemin Çözümünün Varlığı

Bu alt bölümde ilk önce [16,17] çalışmalarından bildiğimiz yöntemi kullanarak (3.1.1.1)-(3.1.1.4) optimal kontrol probleminin çözümünün varlığını ispatlayacağız.

**Teorem 3.1.2.1.** Farz edelim ki teorem 3.1.1.1 in şartları sağlansın ve  $\alpha \geq 0$  verilen sayı  $w \in H = L_2(0, l) \times L_2(0, l)$  verilen eleman olsun. Bu taktirde (3.1.1.1)-(3.1.1.4) problemi en az bir çözüme sahiptir.

**İspat:**  $V$  kümesinden herhangi  $\{v^m\}$  minimalleştirici dizisini göz önüne alalım. Yani

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J_\alpha(v^m) = J_\alpha^* = \inf_{v \in V} J_\alpha(v) \quad \text{olsun.}$$

$m = 1, 2, \dots$  için (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin çözümü  $u_k^m = u_k^m(x) = u_k^m(x; v^m)$ ,  $k = 1, 2$  olsun. Teorem 3.1.1.1' e göre her bir  $\{v^m\} \in V$  için (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin bir tek çözümü vardır ve çözüm için aşağıdaki kestirimler geçerlidir:

$$\|u_1^m\|_{W_2^1(0, l)} \leq c_3 \|v_1\|_{L_2(0, l)}, \quad (3.1.2.1)$$

$$\|u_2^m\|_{W_2^1(0, l)} \leq c_4 \|v_1\|_{L_2(0, l)}. \quad (3.1.2.2)$$

Burada  $c_3 > 0$ ,  $c_4 > 0$  sabitleri  $m$ ' den bağımsızdır.  $V$  kümesi  $B = L_\infty(0, l) \times L_2(0, l)$  uzayında kapalı, sınırlı ve konveks küme olduğundan  $\{v^m\} \in V$  dizisinden bu uzayda  $v \in B$  elemanına (\*) - zayıf yakınsayan alt dizi seçebiliriz. Bu alt diziyi kolaylık olsun diye yine  $\{v^m\}$  ile gösterelim. Bu taktirde  $m \rightarrow \infty$  için

$$\int_0^l v_0^m(x) g(x) dx \rightarrow \int_0^l v_0(x) g(x) dx \quad \forall g \in L_1(0, l), \quad (3.1.2.3)$$

$$\int_0^l v_1^m(x) q(x) dx \rightarrow \int_0^l v_1(x) q(x) dx \quad \forall q \in L_2(0, l). \quad (3.1.2.4)$$

$\{v^m\} \in V$  karşılık gelen  $u_k^m = u_k^m(x) = u_k^m(x; v^m)$ ,  $k=1,2$  çözümleri yukarıdaki (3.1.2.1)-(3.1.2.2) kestirimlerine göre  $W_2^0(0, l)$  ve  $W_2^1(0, l)$  uzaylarına sınırlı dizi oluşturur. Bu taktirde  $\{u_k^m\}$ ,  $k=1,2$  dizilerinden  $W_2^0(0, l)$  ve  $W_2^1(0, l)$  uzaylarına (\*)-zayıf yakınsayan alt dizileri seçebiliriz. Yine kolaylık olsun diye yakınsak alt dizileri  $\{u_k^m\}$ ,  $k=1,2$  ile gösterelim. Bu taktirde  $m \rightarrow \infty$  için

$$u_k^m \rightarrow u_k, L_2(0, l) \text{ 'de zayıf,} \quad (3.1.2.5)$$

$$\frac{du_k^m}{dx} \rightarrow \frac{du_k}{dx}, L_2(0, l) \text{ 'de zayıf,} \quad (3.1.2.6)$$

$k=1,2$  limit bağıntıları geçerlidir.  $W_2^0(0, l)$  ve  $W_2^1(0, l)$  uzayları  $L_2(0, l)$  uzayına kompakt gömüldüğünden,  $m \rightarrow \infty$  için

$$u_k^m \rightarrow u_k, L_2(0, l) \text{ 'de kuvvetli } k=1,2 \quad (3.1.2.7)$$

limit bağıntılarını elde ederiz.

$\{u_k^m\}$ ,  $k=1,2$  dizilerinin elemanları (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin sırasıyla  $W_2^0(0, l)$  ve  $W_2^1(0, l)$  uzaylarına ait genelleştirilmiş çözümleri olduğundan her bir  $m=1,2,\dots$  için aşağıdaki integral özdeşliklerini sağladığını elde ederiz:

$$\forall \eta_1 \in W_2^0(0, l), \forall \eta_2 \in W_2^1(0, l) \text{ ve } m=1,2,\dots \text{ için}$$

$$\int_0^l \left( -\frac{du_k^m}{dx} \cdot \frac{d\eta_k}{dx} - v_0^m(x) u_k^m(x) \eta_k(x) \right) dx = \int_0^l v_1^m(x) \eta_k(x) dx, \quad k=1,2. \quad (3.1.2.8)$$

(3.1.2.5)-(3.1.2.6) limit bağıntılarını kullanırsak,  $m \rightarrow \infty$  için



$$\int_0^l \left( \frac{du_k^m}{dx} \cdot \frac{d\eta_k}{dx} \right) dx \rightarrow \int_0^l \left( \frac{du_k}{dx} \frac{d\eta_k}{dx} \right) dx, \quad k=1,2, \quad (3.1.2.9)$$

$$\int_0^l v_0^m(x) \eta_k(x) dx \rightarrow \int_0^l v_0(x) \eta_k(x) dx, \quad k=1,2, \quad (3.1.2.10)$$

$$\int_0^l v_1^m(x) \eta_k(x) dx \rightarrow \int_0^l v_1(x) \eta_k(x) dx, \quad k=1,2. \quad (3.1.2.11)$$

Şimdi aşağıdaki limit bağıntılarının geçerli olduğunu ispatlayalım:

$m \rightarrow \infty$  için

$$\int_0^l v_0^m(x) u_k^m(x) \eta_k(x) dx \rightarrow \int_0^l v_0(x) u_k(x) \eta_k(x) dx, \quad k=1,2, \quad (3.1.2.12)$$

Aşağıdaki eşitliklerin geçerli olduğu açıktır:

$$\begin{aligned} \int_0^l v_0^m(x) u_k^m(x) \eta_k(x) dx &= \int_0^l v_0^m(x) [u_k^m(x) - u_k(x)] \eta_k(x) dx + \\ &+ \int_0^l [v_0^m(x) - v_0(x)] u_k(x) \eta_k(x) dx + \int_0^l v_0(x) u_k(x) \eta_k(x) dx, \quad k=1,2, \end{aligned} \quad (3.1.2.13)$$

$$u_1, \eta_1 \in W_2^1(x), \quad u_2, \eta_2 \in W_2^1(0, l).$$

Burada sağ tarafta yer alan birinci ve ikinci terimlerin  $m \rightarrow \infty$  için limitlerinin sıfır olduğunu gösterelim:

(3.1.2.3)- (3.1.2.4) limit bağıntılarından,  $m \rightarrow \infty$  için

$$\int_0^l (v_0^m - v_0) u_k \eta_k dx \rightarrow 0, \quad k=1,2 \quad (3.1.2.14)$$

limit bağıntısı ispatlanır.

Şimdi (3.1.2.13) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terimi değerlendirelim. Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini kullanıp  $\{v^m\} \in V$  olduğunu göz önüne alırsak

$$\left| \int_0^l v_0^m (u_k^m - u_k) \eta_k dx \right| \leq \tilde{b}_0 \| \eta_k \|_{L_2(0,l)} \| u_k^m - u_k \|_{L_2(0,l)}, \quad k=1,2, \quad (3.1.2.15)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada (3.1.2.5) limit bağıntısını sonuncu eşitsizlikte dikkate alıp limite geçerse,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^l v_0^m (u_k^m - u_k) \eta_k dx = 0, \quad k = 1, 2 \quad (3.1.2.16)$$

bağıntısı elde edilir. Böylece (3.1.2.13) limit bağıntısının geçerli olduğunu ispatlamış olduk.

(3.1.2.8) integral özdeşliklerinde (3.1.2.12) -(3.1.2.13) limit bağıntılarını dikkate alıp limite geçerse,

$$\forall \eta_1 \in W_2^1(0, l) \text{ ve } \forall \eta_2 \in W_2^1(0, l),$$

için

$$\int_0^l \frac{du_k}{dx} \frac{d\eta_k}{dx} - v_0(x) u_k(x) \eta_k(x) dx = \int_0^l v_1(x) \eta_k(x) dx, \quad k = 1, 2 \quad (3.1.2.17)$$

elde ederiz.

Böylece  $\{u_k^m\}$   $k = 1, 2$  dizilerinin limit fonksiyonları  $u_k$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonlarının (3.1.2.17) integral özdeşliğini sağladığını elde ederiz.

$u_1 \in W_2^1(0, l)$  olduğunu gösterelim. Bu amaçla  $u_1(0) = u_1(l) = 0$  olduğunu gösterelim.

Burada  $u_1^m \in W_2^1(0, l)$  olduğundan

$$u_1^m(0) = u_1^m(l) = 0, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.1.2.18)$$

şartı sağlanır. Diğer yandan  $W_2^1(x)$  uzayı  $C[0, l]$  uzayına kompakt gömülür. Yani

$u_1^m(x) \rightarrow u_1(x)$  e düzgün yakınsar. Buradan;

$$u_1^m(0) \rightarrow u_1(0),$$

$$u_1^m(l) \rightarrow u_1(l) \text{ olur.}$$

$$|u_1(s)| \leq |u_1(s) - u_1^m(s)| + |u_1^m(s)|, \quad s = 0, l$$

eşitsizliğinde limite geçerse,

$$u_1(s) = 0, \quad s = 0, l, \quad u_1 \in W_2^1(0, l)$$

olur. Böylece  $\{u_k^m\}$ ,  $k=1,2$  fonksiyonlar dizisinin limit fonksiyonları olan  $u_k = u_k(x)$ ,  $k=1,2$  fonksiyonları (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin  $\{v^m\} \in V$  dizisinin limit fonksiyonu olan  $v \in V$  ' ye karşılık gelen  $W_2^1(0,l)$  uzayına ait olan (3.1.2.17) integral özdeşliklerini ve (3.1.2.18) başlangıç şartını sağlayan çözümlerdir. Yani  $u_k = u_k(x) = u_k(x;v)$ ,  $k=1,2$  dir.  $\{v^m\} \in V$  dizisi  $v \in V$  elemanına (\*)- zayıf yakınsadığında  $\{u_k^m\}$ ,  $k=1,2$  dizileri  $u_k(x)$ ,  $k=1,2$  fonksiyonlarına (\*)- zayıf yakınsar. Bu nedenle  $\|u_1 - u_2\|_{L_2(0,l)}^2$ ,  $\|v - w\|_H^2$  normlarının alttan zayıf yarı sürekli olduğunu ve  $\alpha \geq 0$  olduğunu göz önüne alırsak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$J_{\alpha^*} \leq J_{\alpha}(v) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} J_{\alpha}(v^m) = J_{\alpha^*} .$$

Bu bağıntıdan  $J_{\alpha^*} = J_{\alpha}(v)$  olduğu elde edilir. Yani  $v \in V$  elemanı  $J_{\alpha}(v)$  fonksiyonelinin  $V$  kümesi üzerinde minimum noktasıdır. Böylece  $\alpha \geq 0$  olduğunda (3.1.1.1)- (3.1.1.5) optimal kontrol probleminin ez az bir çözüme sahip olması ispatlanmış olur.

### 3.1.3 Optimal Kontrol Problemin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu alt bölümde (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu ispatlayacağız.

**Teorem 3.1.3.1:**  $L_2(0,l)$  uzayında her yerde yoğun olan öyle bir  $G$  alt kümesi vardır ki,  $\forall w \in G$  ve  $\alpha > 0$  için (3.1.1.1)-(3.1.1.4) optimal kontrol probleminin bir tek çözümü vardır.

**İspat:** Önce  $J_0(v)$  fonksiyonelinin  $V$  kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım.

Fonksiyonelin tanımına göre  $J_0(v)$  aşağıdaki gibidir:

$$J_0(v) = \int_0^l |u_1(x) - u_2(x)|^2 dx. \quad (3.1.3.1)$$

$\Delta v \in L_2(0, l)$  artışı  $v + \Delta v \in V$  olacak şekilde  $v \in V$  elemanına verilen bir artış olsun. Bu taktirde (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin çözümü olan  $u_k = u_k(x) = u_k(x; v)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonları  $\Delta u_k = \Delta u_k(x) = u_k(x; v + \Delta v) - u_k(x; v)$  artışına sahip olacaktır. Burada  $u_k(x; v + \Delta v)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonları (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin  $v + \Delta v$  elemanına karşılık gelen çözümüdür. (3.1.1.2)-(3.1.1.4) şartlarından  $\Delta u_k = \Delta u_k(x)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonlarının aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü olduğunu kolaylıkla elde ederiz:

$$\frac{d}{dx} \left( a_0(x) \frac{d\Delta u_k}{dx} \right) - (v_0 + \Delta v_0) \Delta u_k = \Delta v_0(x) u_k + \Delta v_1(x), \quad k = 1, 2, \quad (3.1.3.2)$$

$$\Delta u_1(0) = \Delta u_1(l) = 0, \quad (3.1.3.3)$$

$$\frac{d\Delta u_2(0)}{dx} = \frac{d\Delta u_2(l)}{dx} = 0. \quad (3.1.3.4)$$

Burada  $u_k = u_k(x) = u_k(x; v)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonları (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin  $v \in V$  ye karşılık gelen çözümüdür. Söylemek gerekir ki, (3.1.3.2)-(3.1.3.4) sınır değer problemi (3.1.1.2)-(3.1.1.4) gibidir. Bu nedenle (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin çözümüne ait olan düşünceleri kullanarak  $\Delta u_k = \Delta u_k(x)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonları için aşağıdaki kestirimlerin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\|\Delta u_1\|_{W_2^1(0, l)}^0 \leq c_5 \left( \|\Delta v_0 u_1\|_{L_2(0, l)} + \|\Delta v_1\|_{L_2(0, l)} \right), \quad (3.1.3.5)$$

$$\|\Delta u_2\|_{W_2^1(0, l)} \leq c_6 \left( \|\Delta v_0 u_2\|_{L_2(0, l)} + \|\Delta v_1\|_{L_2(0, l)} \right). \quad (3.1.3.6)$$

Burada  $c_5 > 0$ ,  $c_6 > 0$  sayıları  $\Delta v$ ' den bağımsızdır.  $u_1 \in W_2^1(0, l)$  ve  $u_2 \in W_2^1(0, l)$  olduğunu göz önüne alırsak,

$$\|\Delta u_1\|_{W_2^1(0,l)} \leq c_7 \|\Delta v\|_B, \quad (3.1.3.7)$$

$$\|\Delta u_2\|_{W_2^1(0,l)} \leq c_8 \|\Delta v\|_B \quad (3.1.3.8)$$

kestirimlerini ispatlayabiliriz. Burada  $c_7 > 0$ ,  $c_8 > 0$  sayıları  $\Delta v$  ' den bağımsızdır.

Şimdi  $J_0(v)$  fonksiyonelinin artışını bulalım. (3.1.3.1) formülünü kullanırsak aşağıdaki formülü kolaylıkla elde ederiz:

$$\begin{aligned} \Delta J_0(v) &= J_0(v + \Delta v) - J_0(v) = \\ &= 2 \int_0^l (u_1(x) - u_2(x)) (\Delta u_1(x) - \Delta u_2(x)) dx + \\ &+ \|\Delta u_1\|_{L_2(0,l)}^2 + \|\Delta u_2\|_{L_2(0,l)}^2 - 2 \int_0^l \Delta u_1(x) \Delta u_2(x) dx. \end{aligned} \quad (3.1.3.9)$$

Burada Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini uygulayıp (3.1.1.7)-(3.1.1.8) kestirimlerini kullanırsak ,

$$|\Delta J_0(v)| \leq c_9 \left( \|\Delta u_1\|_{L_2(0,l)} + \|\Delta u_2\|_{L_2(0,l)} + \|\Delta u_1\|_{L_2(0,l)}^2 + \|\Delta u_2\|_{L_2(0,l)}^2 \right)$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu elde ederiz. Bu eşitsizlikte (3.1.3.7)-(3.1.3.8) kestirimlerini uygularsak bir sonraki kestirim elde edilir:

$$|\Delta J_0(v)| \leq c_{10} \left( \|\Delta v\|_B + \|\Delta v\|_B^2 \right). \quad (3.1.3.10)$$

Burada  $c_{10} > 0$  sayısı  $\Delta v$  ' den bağımsızdır. (3.1.3.10) eşitsizliğinde  $\|\Delta v\|_B^2 \rightarrow 0$  için limite geçerse  $\Delta J_0(v) \rightarrow 0$  limit bağıntısı ispatlanmış olur. Dolayısıyla  $J_0(v)$  fonksiyoneli herhangi  $v \in V$  noktasında süreklidir, yani  $J_0(v)$  fonksiyoneli  $V$  kümesi üzerinde süreklidir. Diğer yandan  $J_0(v) \geq 0$ ,  $\forall v \in V$ , yani  $J_0(v)$  fonksiyoneli  $V$  kümesi üzerinde alttan sınırlıdır. Tanıma göre  $V$  kümesi  $H$  uzayında kapalı ve sınırlı kümedir.  $H$  uzayı ise Hilbert uzayı olduğundan düzgün konveks uzaydır [12].

$$I(v) = J_0(v), \quad \tilde{X} = L_2(0,l), \quad V = U$$

almış olursak kuramsal temeller bölümündeki teorem 2.12' nin şartlarının sağlandığını görürüz. Bu taktirde kuramsal temellerdeki teorem 2.12' nin hükmünü kullanırsak  $H$

uzayında her yerde yoğun olan öyle  $G$  alt kümesi bulunur ki,  $\forall w \in G$  için  $\alpha > 0$  olduğu taktirde (3.1.1.1)-(3.1.1.4) optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğu elde edilir. Teorem (3.1.3.1) ispatlandı.

### 3.2. İkinci Mertebeden Adi Diferansiyel denklemler için Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Probleminde Çözüm İçin Gerek Şartlar

Bu bölümde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için optimal kontrol probleminin çözümüne ait gerek şartlarla ilgili sorular incelenecektir. Bu nedenle önce göz önüne alınan problemde fonksiyonelin diferansiyellenebilirliği incelenip, onun gradiyenti için formül elde edilir. Bu formülün yardımıyla varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanır. Son olarak bu bölümde göz önüne alınan optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için algoritma verilmektedir.

#### 3.2.1. Fonksiyonelin Diferansiyellenebilirliği

Bu alt bölümde (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol probleminde amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği incelenir ve onun gradiyenti için formül ispatlanır.

Farz edelim ki,  $\psi_k = \psi_k(x)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonları aşağıdaki eşlenik problem denilen sınır değer probleminin çözümü olsun:

$$\frac{d}{dx} \left( a_0(x) \frac{d\psi_k}{dx} \right) - v_0(x) \psi_k = 2(-1)^k (u_1(x) - u_2(x)), \quad k = 1, 2, \quad (3.2.1.1)$$

$$\psi_1(0) = \psi_1(l) = 0, \quad (3.2.1.2)$$

$$\frac{d\psi_2(0)}{dx} = \frac{d\psi_2(l)}{dx} = 0. \quad (3.2.1.3)$$

Burada  $u_k = u_k(x)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonları (3.1.1.2)- (3.1.1.4) sınır değer probleminin  $v \in V$  için çözümüdür.

**Tanım 3.2.1.1:** (3.2.1.1.)-(3.1.1.3) eşlenik probleminin çözümü olarak herhangi  $\eta_{11} \in W_2^1(0, l)$ ,  $\eta_{12} \in W_2^1(0, l)$  için

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left( -a_0(x) \frac{d\psi_k}{dx} \frac{d\eta_{1k}}{dx} - v_0(x) \psi_k \eta_{1k} \right) dx = \\ & = \int_0^l 2(-1)^k (u_1(x) - u_2(x)) \eta_{1k}(x) dx, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.2.1.4)$$

integral özdeşliklerini sağlayan  $\psi_1 \in W_2^1(0, l)$ ,  $\psi_2 \in W_2^1(0, l)$  fonksiyonları anlaşılır.

Görüldüğü üzere eşlenik problem (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer problemiyle benzer bir sınır değer problemi olduğundan ve  $2(-1)^k (u_1 - u_2)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonları  $L_2(0, l)$  uzayının elemanı olduğundan (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği hakkındaki düşüncelerimizi kullanarak tanım 3.2.1.1 anlamında bir tek çözüme sahip olduğuna ve aşağıdaki kestirimlerim geçerli olduğuna hükmedebiliriz:

$$\|\psi_1\|_{W_2^1(0, l)} \leq c_{11} \|u_1 - u_2\|_{L_2(0, l)} \quad (3.2.1.5)$$

$$\|\psi_2\|_{W_2^1(0, l)} \leq c_{12} \|u_1 - u_2\|_{L_2(0, l)} \quad (3.2.1.6)$$

Burada  $c_{11} > 0$ ,  $c_{12} > 0$  sabitlerdir.

Aşağıdaki gibi bir fonksiyon tanımlayalım:

$$\begin{aligned} & H(x, u_1(x), u_2(x), v_0(x), v_1(x), \psi_1(x), \psi_2(x)) = \\ & = (u_1(x)\psi_1(x) + u_2(x)\psi_2(x))v_0(x) + \\ & + (\psi_1(x) + \psi_2(x))v_1(x) - \alpha(v_0(x) - w_0(x))^2 - \alpha(v_1(x) - w_1(x))^2. \end{aligned} \quad (3.2.1.7)$$

Burada  $u_1(x)$ ,  $u_2(x)$  fonksiyonları (3.1.1.2)-(3.1.1.4) probleminin çözümü,  $\psi_1(x)$ ,  $\psi_2(x)$  fonksiyonları (3.2.1.1)-(3.2.1.3) problemlerinin  $v \in V$  için çözümüdür. Bu fonksiyonu (3.1.1.1)-(3.1.1.4) optimal kontrol problemi için Hamilton-Pontryagin fonksiyonu denir.

**Teorem 3.2.1.1:** Farz edelim ki, teorem 3.1.1.1' in şartları sağlanmış olsun ve  $w \in L_2(0, l)$  verilen eleman olsun. Bu taktirde  $J_\alpha(v)$  fonksiyoneli  $V$  kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilir ve onun gradiyenti için

$$J'_\alpha(v) = -\left(\frac{\partial H}{\partial v_0}, \frac{\partial H}{\partial v_1}\right), \quad (3.2.1.8)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v_0} = -(u_1(x)\psi_1(x) + u_2(x)\psi_2(x)) + 2\alpha(v_0(x) - w_0(x)), \quad (3.2.1.9)$$

$$\frac{\partial H}{\partial v_1} = -(\psi_1(x) + \psi_2(x)) + 2\alpha(v_1(x) - w_1(x)) \quad (3.2.1.10)$$

formülleri geçerlidir. Burada  $H = H(x, u_1(x), u_2(x), v_0(x), v_1(x), \psi_1(x), \psi_2(x))$  fonksiyonu (3.2.1.7) formülü ile tanımlanır.

**İspat:**  $\forall v \in V$  elemanını alalım ve bu eleman üzerinde  $J_\alpha(v)$  fonksiyonelinin artışını bulalım. (3.1.1.1) ve (3.1.3.9) formüllerini kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki formülü yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(v) &= J_\alpha(v + \Delta v) - J_\alpha(v) = 2 \int_0^l (u_1(x) - u_2(x)) (\Delta u_1(x) - \Delta u_2(x)) dx + \\ &+ 2\alpha \int_0^l (v_0(x) - w_0(x)) \Delta v_0(x) dx + 2\alpha \int_0^l (v_1(x) - w_1(x)) \Delta v_1(x) dx + \\ &+ \|\Delta u_1\|_{L_2(0, l)}^2 + \|\Delta u_2\|_{L_2(0, l)}^2 - 2\alpha \int_0^l \Delta u_1(x) \Delta u_2(x) dx + \alpha \|\Delta v\|_H^2. \end{aligned} \quad (3.2.1.11)$$

Burada  $\Delta u_k = \Delta u_k(x) = u_k(x, v + \Delta v) - u_k(x, v)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonları (3.1.3.2)-(3.1.3.4) sınır değer probleminin çözümüdür.



$u_1 \in W_2^0(0, l)$ ,  $u_2 \in W_2^1(0, l)$  fonksiyonları (3.1.1.2)-(3.1.1.4) sınır değer probleminin genelleştirilmiş çözümü olduğundan (3.1.2.14) özdeşliklerinin kullanarak (3.1.3.2)-(3.1.3.4) sınır değer probleminin çözümü olan  $\Delta u_k = \Delta u_k(x)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonları için aşağıdaki özdeşlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left( -a_0(x) \frac{d\Delta u_k}{dx} \frac{d\eta_k}{dx} - (v_0 + \Delta v_0) \Delta u_k \eta_k \right) dx = \\ & = \int_0^l (\Delta v_0(x) u_k(x) + \Delta v_1(x)) \eta_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (3.2.1.12)$$

$\forall \eta_1 \in W_2^0(0, l)$ ,  $\forall \eta_2 \in W_2^1(0, l)$ .

Bu integral özdeşliklerinde  $\forall \eta_1 \in W_2^0(0, l)$ ,  $\forall \eta_k \in W_2^1(0, l)$  fonksiyonlarının yerine  $\psi_1 \in W_2^0(0, l)$ ,  $\psi_2 \in W_2^1(0, l)$  fonksiyonlarını alabiliriz. Bu taktirde

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left( -a_0(x) \frac{d\Delta u_k}{dx} \frac{d\psi_k}{dx} - (v_0 + \Delta v_0) \Delta u_k \psi_k \right) dx = \\ & = \int_0^l (\Delta v_0(x) u_k(x) \psi_k(x) + \Delta v_1(x) \psi_k(x)) dx, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.2.1.13)$$

eşitliğini elde ederiz.  $\forall \Delta u_1 \in W_2^0(0, l)$ ,  $\forall \Delta u_2 \in W_2^1(0, l)$  olduğundan (3.2.1.2)-(3.2.1.4) özdeşliklerinde  $\eta_{1k}(x)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonlarının yerine  $\Delta u_k(x)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonlarını alalım. Bu taktirde aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left( -a_0(x) \frac{d\Delta \psi_k}{dx} \frac{d\Delta u_k}{dx} - v_0 \psi_k \Delta u_k \right) dx = \\ & = 2(-1)^k \int_0^l (u_1(x) - u_2(x)) \Delta u_k(x) dx, \quad k = 1, 2 \end{aligned} \quad (3.2.1.14)$$

(3.2.1.13)-(3.2.1.14) eşitliklerini taraf tarafa çıkarırsak, bir sonraki eşitlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
& -\int_0^l \Delta v_0(x) \Delta u_k(x) \psi_k(x) dx = \int_0^l \Delta v_0(x) u_k(x) \psi_k(x) dx - \\
& -2(-1)^k \int_0^l (u_1(x) - u_2(x)) \Delta u_k(x) dx + \int_0^l \Delta v_1(x) \psi_k(x) dx, \quad k=1,2
\end{aligned} \tag{3.2.1.15}$$

$k=1$  ve  $k=2$  için bu eşitlikler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^l (u_1(x) - u_2(x)) \Delta u_1 dx = - \int_0^l \Delta v_0(x) \Delta u_1 \psi_1 dx - \\
& - \int_0^l \Delta v_0(x) u_1 \psi_1 dx - \int_0^l \Delta v_1 \psi_1 dx,
\end{aligned} \tag{3.2.1.16}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \int_0^l (u_1(x) - u_2(x)) \Delta u_2 dx = - \int_0^l \Delta v_0(x) \Delta u_2 \psi_2 dx - \\
& - \int_0^l \Delta v_0(x) u_2 \psi_2 dx - \int_0^l \Delta v_1 \psi_2 dx.
\end{aligned} \tag{3.2.1.17}$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa toplarsak aşağıdaki eşitliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^l (u_1(x) - u_2(x)) (\Delta u_1(x) - \Delta u_2(x)) dx = - \int_0^l \Delta v_0(x) (u_1 \psi_1 + u_2 \psi_2) dx - \\
& - \int_0^l \Delta v_0(x) (\Delta u_1 \psi_1 + \Delta u_2 \psi_2) dx - \int_0^l \Delta v_1(x) (\psi_1(x) + \psi_2(x)) dx
\end{aligned} \tag{3.2.1.18}$$

Bu eşitliği fonksiyonelin artışı için olan (3.2.1.11) formülünde dikkate alırsak

$$\begin{aligned}
\Delta J_\alpha(v) &= - \int_0^l (u_1(x) \psi_1(x) + u_2(x) \psi_2(x)) \Delta v_0(x) dx - \\
& - \int_0^l (\psi_1(x) + \psi_2(x)) \Delta v_1(x) dx + R
\end{aligned} \tag{3.2.1.19}$$

formülünü elde ederiz. Burada  $R$  kalanı aşağıdaki formül ile tanımlanmaktadır:

$$\begin{aligned}
R &= - \int_0^l (\Delta u_1(x) \psi_1(x) + \Delta u_2(x) \psi_2(x)) \Delta v_0(x) dx + \\
& + \|\Delta u_1\|_{L_2(0,l)}^2 + \|\Delta u_2\|_{L_2(0,l)}^2 - 2 \int_0^l \Delta u_1(x) \Delta u_2(x) dx + \alpha \|\Delta v\|_H^2.
\end{aligned} \tag{3.2.1.20}$$

Burada  $R$  için formülü ve Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|R| \leq \|v_0\|_{L_\infty(0,t)} \left( \|\Delta u_1\|_{L_2(0,t)} \|\psi_1\|_{L_2(0,t)} + \|\Delta u_2\|_{L_2(0,t)} \|\psi_2\|_{L_2(0,t)} \right) + \|\Delta u_1\|_{L_2(0,t)}^2 + \|\Delta u_2\|_{L_2(0,t)}^2 + 2\|\Delta u_1\|_{L_2(0,t)} \|\Delta u_2\|_{L_2(0,t)} + \alpha \|\Delta v\|_B^2. \quad (3.2.1.21)$$

Burada  $\Delta u_k, \psi_k, u_k, k=1,2$  için olan kestirimleri kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|R| \leq c_{13} \|\Delta v\|_B^2. \quad (3.2.1.22)$$

Burada  $c_{13} > 0$ ,  $\Delta v$  ' den bağımsızdır. Buradan

$$R = o(\|\Delta v\|_B) \quad (3.2.1.23)$$

olduğu elde edilir. Yani  $R$  kalamı  $\|\Delta v\|_B$  ' ye göre sonsuz küçüktür. Bu eşitliğin yardımıyla (3.2.1.20) formülünü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\begin{aligned} \Delta J_\alpha(v) &= -\int_0^t \left[ (u_1(x)\psi_1(x) + u_2(x)\psi_2(x)) + 2\alpha(v_0(x) - w_0(x)) \right] \Delta v_0(x) dx \\ &+ \int_0^t \left[ (\psi_1(x) + \psi_2(x)) + 2\alpha(v_1(x) - w_1(x)) \right] \Delta v_1(x) dx + o(\|\Delta v\|_{L_2(0,t)}). \end{aligned} \quad (3.2.1.24)$$

Fonksiyonelin Frechet anlamında türevinin tanımını kullanırsak (3.2.1.24) formülünden yola çıkarak  $J_\alpha(v)$  fonksiyonelinin  $\forall v \in \mathcal{V}$  üzerinde diferansiyellenebilir olduğunu ve onun gradiyenti için

$$J'_\alpha(v) = (J'_{\alpha_0}(v), J'_{\alpha_1}(v)), \quad (3.2.1.25)$$

$$J'_{\alpha_0}(v) = -(u_1(x)\psi_1(x) + u_2(x)\psi_2(x)) + 2\alpha(v_0(x) - w_0(x)), \quad (3.2.1.26)$$

$$J'_{\alpha_1}(v) = -(\psi_1(x) + \psi_2(x)) + 2\alpha(v_1(x) - w_1(x)) \quad (3.2.1.27)$$

formüllerini elde ederiz. Hamilton –Pontryagin fonksiyonu için olan formülü dikkate alırsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Teorem 3.2.1.1 ispatlandı.

### 3.2.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümü İçin Varyasyon Eşitsizliği Şeklinde Gerek Şart

Bu alt bölümde optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart ispatlanacaktır.

**Teorem 3.2.2.1:** Farz edelim ki, teorem 3.2.1.1' in şartları sağlanmış olsun ve  $v^* \in V$  kontrolü (3.1.1.1)- (3.1.1.4) optimal kontrol probleminin herhangi çözümü olsun. Bu takdirde  $v \in V$  için

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left[ -\left( u_1^*(x) \psi_1^*(x) + u_2^*(x) \psi_2^*(x) + 2\alpha (v_0^*(x) - w_0(x)) \right) \right] (v_0(x) - v_0^*(x)) dx + \\ & + \int_0^t \left[ -\left( \psi_1^*(x) + \psi_2^*(x) \right) + 2\alpha (v_1^*(x) - w_1(x)) \right] (v_1(x) - v_1^*(x)) dx \geq 0 \end{aligned} \quad (3.2.2.1)$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada  $u_k^*(x) = u_k(x; v^*)$ ,  $\psi_k^*(x) = \psi_k(x; v^*)$ ,  $k = 1, 2$  sırasıyla (3.1.1.2)-(3.1.1.4) ve (3.2.1.1)-(3.2.1.3) sınır değer problemlerinin çözümleridir.

**İspat:** Tanımda görüldüğü gibi  $V$  kümesi  $B$  uzayının konveks kümesidir. Diğer yandan  $J_\alpha(v)$  fonksiyoneli  $V$  kümesinde Frechet anlamında diferansiyellenebilir fonksiyoneldir ve onun gradiyenti için

$$J_{\alpha_0}(v) = -\left( u_1(x) \psi_1(x) + u_2(x) \psi_2(x) \right) + 2\alpha (v_0(x) - w_0(x)), \quad (3.2.2.2)$$

$$J_{\alpha_1}(v) = -\left( \psi_1(x) + \psi_2(x) \right) + 2\alpha (v_1(x) - w_1(x)) \quad (3.2.2.3)$$

formülleri geçerlidir.  $J'_\alpha(v)$ 'nin  $V$  kümesi üzerinde sürekli olduğunu ispatlayalım. Bu amaçla  $J'_\alpha(v)$ 'nin  $\forall v \in V$  için artışını bulalım. (3.2.2.2) formülünden yararlanarak

$$\begin{aligned}
\Delta J'_{\alpha_0}(v) &= J'_{\alpha_0}(v + \Delta v) - J'_{\alpha_0}(v) = \\
& -\Delta u_1(x)\psi_1(x) - u_1(x)\Delta\psi_1(x) - \Delta u_1(x)\Delta\psi_1(x) - \\
& -\Delta u_2(x)\psi_2(x) - u_2(x)\Delta\psi_2(x) - \Delta u_2(x)\Delta\psi_2(x) + \\
& + 2\alpha\Delta v_0(x),
\end{aligned} \tag{3.2.2.4}$$

$$\begin{aligned}
\Delta J'_{\alpha_1}(v) &= J'_{\alpha_1}(v + \Delta v) - J'_{\alpha_1}(v) = \\
& = -(\Delta\psi_1(x) + \Delta\psi_2(x)) + 2\alpha\Delta v_1(x).
\end{aligned} \tag{3.2.2.5}$$

Burada  $\Delta u_k = \Delta u_k(x)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonları (3.1.3.2)-(3.1.3.4) sınır değer probleminin çözümü  $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x) \equiv \psi_k(x, v + \Delta v) - \psi_k(x, v)$ ,  $k = 1, 2$  fonksiyonları için aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left( a_0(x) \frac{d\Delta\psi_k}{dx} \right) - (v_0(x) + \Delta v_0(x))\psi_k(x) &= \\
= \Delta v_0(x)\psi_k(x) + 2(-1)^k (\Delta u_1(x) - \Delta u_2(x)), \quad k = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3.2.2.6}$$

$$\Delta\psi_1(0) = \Delta\psi_1(l) = 0, \tag{3.2.2.7}$$

$$\frac{d\Delta\psi_2(0)}{dx} = \frac{d\Delta\psi_2(l)}{dx} = 0. \tag{3.2.2.8}$$

Görüldüğü gibi (3.2.2.5)-(3.2.2.7) sınır değer problemi (3.2.1.1)-(3.2.1.3) gibi aynı tipli sınır değer problemidir. Şimdi aşağıdaki kestirimlerin geçerli olduğunu yazabiliriz:

$$\|\Delta\psi_1\|_{W_2^1(0,l)}^0 \leq c_{14} \left( \|\Delta v_0\psi_1\|_{L_2(0,l)} + \|\Delta u_1 - \Delta u_2\|_{L_2(0,l)} \right) \tag{3.2.2.9}$$

$$\|\Delta\psi_2\|_{W_2^1(0,l)} \leq c_{15} \left( \|\Delta v_0\psi_2\|_{L_2(0,l)} + \|\Delta u_1 - \Delta u_2\|_{L_2(0,l)} \right) \tag{3.2.2.10}$$

Burada  $c_{14} > 0, c_{15} > 0$  sabitleri  $\Delta v$ ' den bağımsızdır. (3.2.1.5)-(3.2.1.6), (3.1.3.7)-(3.1.3.8) kestirimlerini (3.2.2.9)-(3.2.2.10) eşitsizliklerinde kullanırsak;

$$\|\Delta\psi_1\|_{W_2^1(0,l)}^0 \leq c_{16} \|\Delta v\|_B \tag{3.2.2.11}$$

$$\|\Delta\psi_2\|_{W_2^1(0,l)} \leq c_{17} \|\Delta v\|_B \tag{3.2.2.12}$$

kestirimlerini elde ederiz. Burada  $c_{16} > 0$ ,  $c_{17} > 0$  sabitleri  $\Delta v$  ' den bağımsızdır. Şimdi bu kestirimleri kullanarak  $\Delta J'_\alpha(v)$  ' ni kestirelim. Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğinden yararlanarak  $\Delta J'_\alpha(v)$  için aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} \|\Delta J'_{\alpha_0}(v)\|_{L_1(0,I)} &\leq c_{18} \left( \|\Delta u_1\|_{L_2(0,I)} \|\psi_1\|_{L_2(0,I)} + \|u_1\|_{L_2(0,I)} \|\Delta \psi_1\|_{L_2(0,I)} + \right. \\ &+ \|\Delta u_1\|_{L_2(0,I)} \|\Delta \psi_1\|_{L_2(0,I)} + \|\Delta u_2\|_{L_2(0,I)} \|\psi_2\|_{L_2(0,I)} + \\ &\left. + \|u_2\|_{L_2(0,I)} \|\Delta \psi_2\|_{L_2(0,I)} + \|\Delta u_2\|_{L_2(0,I)} \|\Delta \psi_2\|_{L_2(0,I)} + 2\alpha \|\Delta v_0\|_{L_1(0,I)} \right), \end{aligned} \quad (3.2.2.13)$$

$$\|\Delta J'_{\alpha_1}(v)\|_{L_1(0,I)} \leq c_{19} \left( \|\Delta \psi_1\|_{L_2(0,I)} + \|\Delta \psi_2\|_{L_2(0,I)} \right) + 2\alpha \|\Delta v_1\|_{L_2(0,I)}. \quad (3.2.2.14)$$

Bu eşitsizliklerde (3.1.3.5), (3.1.3.6), (3.1.1.7), (3.1.1.8), (3.2.1.5), (3.2.1.6), (3.2.2.10) (3.2.2.10) kestirimlerinden yararlanırsak,

$$\|J'_\alpha(v + \Delta v) - J'_\alpha(v)\|_{\tilde{B}} \leq c_{20} \|\Delta v\|_B \quad (3.2.2.15)$$

eşitsizliğinin  $\tilde{B} = L_1(0, I) \times L_2(0, I)$  olacak şekilde geçerli olduğunu ispatlamış oluruz.

Bu eşitsizlik herhangi  $v \in V$  için geçerli olduğundan  $J'_\alpha(v)$  gradyantının  $V$  kümesi üzerinde sürekli olduğu elde edilir. Böylece  $J'_\alpha(v)$  fonksiyonelinin  $V$  kümesi üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyon olduğu ispatlanmış oldu. Şunları dikkate alırsak, [23] çalışmalarından bildiğimiz teoremin şartlarını sağladığı görülür. (Bazı kuramsal temeller, Teorem 2.10) . Bu taktirde söz konusu teoreme göre  $v^* \in V$  çözümü için

$$\langle J'_\alpha(v^*), v - v^* \rangle_B \geq 0, \quad \forall v \in V$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu ispatlanır. Bu eşitsizlikte  $J'_\alpha(v)$  gradyanti ifadesinin yerine yazarsak teoremin hükmünün geçerli olduğu ispatlanır. Teorem 3.2.2.1 ispatlandı.

### 3.2.3. Optimal Kontrol Probleminin Nümerik Çözüm Algoritması

Bu alt bölümde (3.1.1.1)-(3.1.1.4) optimal kontrol probleminin çözümü için algoritmayı vereceğiz. Bu nedenle (3.1.1.1)-(3.1.1.4) optimal kontrol problemini içeren aşağıdaki optimal kontrol problemini göz önüne alalım.

$$J_{\alpha}(v) = \|u_1 - u_2\|_{L_2(0,l)}^2 + \alpha \|v - w\|_H^2 \quad (3.2.3.1)$$

fonksiyonelinin

$$\mathcal{V} \equiv \left\{ v = (v_0, v_1), v_0 \in L_{\infty}(0,l), b_0 \leq v_0(x) \leq \tilde{b}_0, \forall x \in (0,l), v_1 \in L_2(0,l), \|v_1\|_{L_2(0,l)} \leq b_1 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$\frac{d}{dx} \left( a_0(x) \frac{du_k}{dx} \right) - v_0(x) u_k = v_1(x), \quad x \in (0,l), \quad k = 1, 2, \quad (3.2.3.2)$$

$$u_1(0) = g_{10}, \quad u_1(l) = g_{11}, \quad (3.2.3.3)$$

$$\frac{du_2(0)}{dx} = g_{20}, \quad \frac{du_2(l)}{dx} = g_{21} \quad (3.2.3.4)$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir. Burada  $l > 0$ ,  $b_0 > 0$ ,  $\tilde{b}_0 > 0$ ,  $\alpha \geq 0$

verilen sayılar,  $a_0 \equiv a_0(x) > 0$  verilen fonksiyon ve  $g_{pm}$ ,  $p = 1, 2$ ,  $m = 0, 1$  verilen sabitlerdir.

Görüldüğü gibi (3.2.3.1)-(3.2.3.4) optimal kontrol probleminde  $g_{pm} = 0$   $p = 1, 2$ ,  $m = 0, 1$  alırsak (3.1.1.1)-(3.1.1.4) optimal kontrol problemini elde ederiz. Burada amacımız (3.1.1.1)-(3.1.1.4) optimal kontrol problemi için uygulanan çözüm algoritmasının daha genel biçimde olmasıdır.

(3.2.3.1)-(3.2.3.4) optimal kontrol problemi bir sonsuz boyutlu ekstremal problem olarak çözmek için gradiyantın izdüşümü metodunu kullanacağız.

Farz edelim ki  $v^0 = v^0(x) \in V$  elemanı verilsin. Gradyentin izdüşümü yöntemine göre  $v^m = v^m(x) \in V$ ,  $m = 1, 2, \dots$  dizisi aşağıdaki şema ile tanımlanmaktadır [23]:

$$v^{m+1}(x) = P_V \left( v^m(x) - \beta_m J'_\alpha(v^m) \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.3.5)$$

Burada  $P_V(z)$  ifadesi  $z = z(x)$  noktasının  $V$  kümesi üzerinde izdüşümüdür. [23] çalışmasından bildiğimiz formüle göre  $v^{m+1}(x)$  için

$$v_0^{m+1} = \left\{ \begin{array}{l} b_0, \quad v_0^m(x) - \beta_m J'_{\alpha_0}(v^m) < b_0 \\ \tilde{b}_0, \quad v_0^m(x) - \beta_m J'_{\alpha_0}(v^m) > \tilde{b}_0 \\ v_0^m(x) - \beta_m J'_{\alpha_0}(v^m), \quad b_0 < v_0^m(x) - \beta_m J'_{\alpha_0}(v^m) < \tilde{b}_0 \end{array} \right\} \quad (3.2.3.6)$$

$$v_1^{m+1}(x) = b_1 \frac{v_1^m(x) - \beta_m J'_{\alpha_1}(v^m)}{\|v_1^m(x) - \beta_m J'_{\alpha_1}(v^m)\|_{L_2(0,1)}} \quad (3.2.3.7)$$

formülünü elde ederiz. Burada  $\beta_m > 0$  sayısı bilinmeyen sayı olup çeşitli yöntemlerle bulunabilir. Mesela  $\beta_m > 0$  sayısını elde etmek için

$$J'_\alpha(v^{m+1}) \leq J'_\alpha(v^m) \quad (3.2.3.8)$$

şartlarını kullanabiliriz. (3.2.3.6)-(3.2.3.7) formüllerinde yer alan  $J'_\alpha(v^m)$  miktarı (3.2.3.1) fonksiyonelinin gradyentinin  $v^m \in V$  noktasındaki değerdir. (3.2.1.27)-(3.2.1.28) formüllerini kullanırsak  $J'_{\alpha_0}(v^m)$  ve  $J'_{\alpha_1}(v^m)$  için aşağıdaki formülleri yazabiliriz:

$$J'_{\alpha_0}(v^m) = -(u_{1m}(x)\psi_{1m}(x) + u_{2m}(x)\psi_{2m}(x)) + 2\alpha(v_0^m(x) - w_0(x)), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.3.9)$$

$$J'_{\alpha_1}(v^m) = -(\psi_{1m}(x) + \psi_{2m}(x)) + 2\alpha(v_1^m(x) - w_1(x)), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.3.10)$$

Burada  $u_{pm} = u_{pm}(x) = u_p(x; v^m)$ ,  $p = 1, 2$  fonksiyonları (3.2.3.2)-(3.2.3.4) sınır değer probleminin  $v^m \in V$  için karşılık gelen çözümdür.  $\psi_{pm} = \psi_{pm}(x) \equiv \psi_p(x; v^m)$   $p = 1, 2$



fonksiyonları ise (3.2.1.1)- (3.2.1.3) eşlenik probleminin  $v^m$  için karşılık gelen çözümüdür.

Şimdi (3.2.3.1)- (3.2.3.4) optimal kontrol probleminin nümerik çözüm algoritmasını açıklayalım. Bunun için önce (3.2.3.1)- (3.2.3.4) problemine sonlu farklar metodunu uygulayalım ve problemin sonlu farklı aynısını yazalım.

Fonksiyonelin kontroller kümesinin ve sınır değer probleminin sonlu farklı aynısını yazarak aşağıdaki problemi elde ederiz:

$$I_\alpha([v]_M) = h \sum_{j=1}^{M-1} |u_{1j} - u_{2j}|^2 + \alpha h \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{p=0}^1 |v_p^j - w_p^j|^2 \quad (3.2.3.11)$$

fonksiyonunun

$$V_M \equiv \left\{ [v]_M = ([v_0]_M, [v_1]_M), b_0 \leq v_0^j \leq \tilde{b}_0, j = \overline{1, M-1}, \left( h \sum_{j=1}^{M-1} (v_1^j)^2 \right)^{1/2} \leq b_1 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$a_0 \delta_{xx} u_{kj} - v_0^j u_{kj} = v_1^j, j = \overline{1, M-1}, k = 1, 2, \quad (3.2.3.12)$$

$$u_{10} = g_{10}, u_{1M} = g_{11}, \quad (3.2.3.13)$$

$$\delta_x u_{21} = g_{20}, \delta_x u_{2M} = g_{21} \quad (3.2.3.14)$$

şartları altında minimumunu bulmak gerekir.  $M$  verilen pozitif tam sayıdır ve  $g_{pm}, p = 1, 2, m = 0, 1$ , verilen sayılardır.

Görüldüğü gibi (3.2.3.10)-(3.2.3.14) problemi optimal kontrol probleminin sonlu farklı aynısıdır ve sadece sonlu boyutlu ekstremal problemidir. Bu problemin çözümünü bulmak için de gradyanın izdüşümü yöntemini kullanabiliriz.

Farz edelim ki  $[v^0] \in V_M$  verilen kontrol olsun.  $\{[v^m]\}$  dizisinin elemanlarını bulmak için

$$[v^{m+1}] = P_{V_M} \left( [v^m] - \beta_m I'_\alpha ([v^m]) \right), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.3.15)$$

yineleme formülünü kullanabiliriz [8]. Burada  $\beta_m > 0$  bilinmeyen sayı olup,

$$I_\alpha ([v^{m+1}]) < I_\alpha ([v^m]) \quad (3.2.3.16)$$

şartından seçilebilir.  $I'_\alpha ([v^m])$  türevi  $I_\alpha ([v])$  fonksiyonunun gradyantının  $[v^m]$  noktasındaki değeridir ve bu vektörün bileşenleri aşağıdaki formül ile tanımlanmaktadır:

$$I'_\alpha ([v]) = (I'_{\alpha_0} ([v]), I'_{\alpha_1} ([v])), \quad (3.2.3.17)$$

$$I'_{\alpha_0} ([v]) = -(u_{1j} ([v]) \phi_{1j} ([v]) + u_{2j} ([v]) \phi_{2j} ([v])) + 2\alpha (v_0^j - w_0^j), \quad j = \overline{1, M-1}, \quad (3.2.3.18)$$

$$I'_{\alpha_1} ([v]) = -(\phi_{1j} ([v]) + \phi_{2j} ([v])) + 2\alpha (v_1^j - w_1^j), \quad j = \overline{1, M-1}. \quad (3.2.3.19)$$

Burada  $u_{pj} ([v])$ ,  $p = 1, 2$  ağ fonksiyonları  $[v] \in V_p$  için (3.2.3.12)-(3.2.3.14) fark şemasının çözümüdür.  $\phi_{pj} [v]$ ,  $p = 1, 2$  ise aşağıdaki eşlenik problemin  $[v] \in V_M$  için çözümüdür:

$$\alpha_0 \delta_{xx} \phi_{kj} - v_0^j \phi_{kj} = (-1)^p 2(u_{1j} - u_{2j}), \quad j = \overline{1, M-1}, \quad p = 1, 2, \quad (3.2.3.20)$$

$$\phi_{10} = 0, \quad \phi_{1M} = 0, \quad (3.2.3.21)$$

$$\delta_{x^p} \phi_{21} = 0, \quad \delta_{x^p} \phi_{2M} = 0. \quad (3.2.3.22)$$

(3.2.3.15) formülünde yer alan  $\beta_m$  parametresi üstte söylediğimiz gibi (3.2.3.16) biçiminde olan ve monotonluk şartı denilen şartın yardımıyla geçilebilir. Bunun için  $\beta_m = \beta = \text{sabit}$  alıp (3.2.3.16) şartının sağlanıp sağlanmadığını kontrol ediyoruz. Eğer (3.2.3.16) şartı sağlanıyor ise, bu taktirde (3.2.3.15) formülünde  $\beta_m = \beta = \text{sabit}$  olarak

bulunan parametre olur. Aksi halde, yani (3.2.3.16) şartı sağlanamadığından  $\beta$  sayısını 1' den büyük sayıya  $\beta_m = \beta$  için (3.2.3.16) şartı sağlanana kadar bölüyoruz.

(3.2.3.16) yineleme formülünde iterasyonların bulunması süreci

$$\left( \sum_{p=0}^1 \sum_{j=1}^{M-1} |v_{pj}^{m+1} - v_{pj}^m|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon, \quad m = 1, 2, \dots \quad (3.2.3.23)$$

şartının sağlanması halinde durdurulur. Burada  $\varepsilon < 0$  sayısı önceden bilinen sayıdır.

Fonksiyonelin gradiyenti için olan formülden görüldüğü gibi, bir adımda gradiyanti bulmak için iki tane (3.2.3.12)-(3.2.3.14), (3.2.3.20)-(3.2.3.22) fark şemalarının çözümlerini bulmak gerekir. Bu şemaların çözümünü bulmak için kovma metodunu kullanabiliriz [20].

Böylece (3.1.1.1)-(3.1.1.4) optimal kontrol probleminin nümerik çözüm algoritması açıklanmış oldu.

#### **4.ARAŞTIRMA BULGULARI**

Tezin 3.1. bölümünde ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem için Lions fonksiyonelli optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliğine ait teoremler ispatlandı.

Tezin 3.2. bölümünde ise göz önüne alınan optimal kontrol probleminde amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğu gösterildi ve onun gradiyenti için formül elde edildi. Son olarak ele alınan optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlandı ve optimal kontrol probleminin çözümü için algoritma verildi.

## 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezde ele alınan optimal kontrol problemi konulma açısından önceki çalışmalardaki problemlerden ciddi biçimde farklılaŐmaktadır. İkinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemleri çok az ele alındığından tez çalıŐması gerek teorik, gerekse pratik önem taşır. Bu tezde Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemleri için elde edilen sonuçlar, önceki çalışmalardaki sonuçlardan farklıdır.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] Butkovskiy, A.G., “Dağılmış Parametrelili Sistemlerin Optimal Kontrolü”, Moskova, Nauka, 1975 (Rusça)
- [2] Beyhan, S., “Hiperbolik Tip Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması ve Onun Nümerik Çözümünün Algoritması”, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Kars, 2007
- [3] Egorov, Yu. V., “Banach Uzayında Optimal Kontrol”, DAN, R, 1963, T.150, No:2 S.241-244 (Rusça)
- [4] Emanuilov, D. Yu., “Singüler Dağılmış Sistemlerin kontrol Problemlerinin Çözümünün Varlık Teoremleri. – Matem”, Sbornik, 1990, 181, No:3 s. 321-333.(Rusça)
- [5] Goebel, M., “On Existence of Optimal Control ”, Math. Nacr., 1979, Vol.93, pp.67-73.
- [6] Iskenderov, A.D., “Matematiksel Fiziğin Çok Boyutlu Ters Problemlerin Varyasyon Konulmaları Hakkında.”, DAN SSR, 1984, 274, No:3 s. 531-533 (Rusça)
- [7] Iskenderov A.D., Mahmudov N.M., “Kuantum Mekanik Sistemler için Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol”, AMBA’ nin Haberleri, Fizik Teknik, Matematik Bilimleri Serisi 1915, 18 No:5-6 s.30-35 /Rusça)
- [8] Iskenderov, A.D., Tagiyev R.G., Yagubov G., Ya. “Optimizasyon Metodları”, Bakü, 2001
- [9] Iskenderov A.D., Tagiyev R.G., “Durgun Olmayan Kuazilineer Denklemlerin Katsayılarında Kontrol Varolan Optimizasyon Problemleri”, DAN Az. SSR, 1981, No:8 S.G-11 (Rusça)
- [10] Iskenderov, A.D., Tagiyev R.G., “Parabolik Denklemlerin Katsayılarında Kontrol Olan Optimizasyon Problemi. Dif. Denklemler”, 1983, Cilt 19, No. 8, s. 1324-1334.
- [11] Iskenderov A.D., Nittiyev A.A., “Kuazilineer Evolasyon Denklemler için Optimal Kontrol Problemi” DAN Az. SSR, 1986, 42 No:5 s.7-10, (Rusça)
- [12] Iyosido, K., “Functional Analysis”, M. Miv, 1967.
- [13] Kolmogorov A.N., Fomin S.V., “Fonksiyonlar Teorisinin ve Fonksiyonel Analizin Elemanları”, Moskova, Nauka, 1989

- [14] Korkmaz Erdoğan, B., “Parabolik Tip Denklem İçin Optimal Kontrol Probleminin İyi Konulması ve Onun Nümerik Çözümünün Algoritması”, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi, Kars, 2008
- [15] Ladyzenskaja, O.A., “Matematiksel Fiziğin Sınır Değer Problemleri.”, Moskova, Nauka, 1973 (Rusça)
- [16] Lions, J.L., “Optimal des systemes Distribues Singuliers. Gauthier Villars. (singüler Dağılmış Parametrelili Sistemlerin Kontrolü)”, Moskova, Nauka, 1987 (Rusça)
- [17] Lions, J.L., “Optimal Control Systems Governed by Partial Differential Equations”, Springe-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972
- [18] Mahmudov, N.M., “Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü” ABA’ nın Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri, 1997, 7, s.79-82
- [19] Pontryagin, L.S., B., “Optimal Süreçlerin Matematik Teorisi.-M.”, Nauka, 1969
- [20] Samarskii, A.A., Fark Şemaları Teorisi, Moskova, Nauka, 1977
- [21] Sirazettinov, T.K., “Dağılmış Parametrelili Sistemlerin Optimal Kontrolü”, Moskova, Nauka, 1977 (Rusça)
- [22] Tikhonov, A.N., Samarskii, A.A., “Matematiksel Fiziğin Denklemleri”, Moskova, Nauka, 1972 (Rusça)
- [23] Vasilyev, F.P., “Ekstramal Problemlerin Çözüm Metodları”, Moskova, Nauka, 1981, (Rusça)
- [24] Yegorov, A.İ., Isı ve Diffüzyon Süreçlerin Optimal Kontrolü”, M.: Nauka,1978, 468 Sayfa

## ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Tayfun ÖZKURT

Doğum Yeri: Akçaabat/TRABZON

Doğum Tarihi: 1985

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

### Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Akçaabat Lisesi (2000-2003)

Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü  
(2006-2010)

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik  
Bölümü (2010-2012)