T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS POTANSİYELLİ SCHRÖDİNGER DENKLEMİ İÇİN LİONS FONKSİYONELLİ BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

SERAY SALTAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY

EYLÜL-2013

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı öğrencisi Seray SALTAŞ'ın Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY'un danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Kompleks Potansiyelli Schrödinger Denklemi için Lions Fonksiyonelli Bir Optimal Kontrol Problemi'' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy.....birliği............ ile kabul edilmiştir.

.06/.09./2013.

		Adı Soyadı	İmza
Başkan	:	Prof. Dr. Emine MISIRLI	....
Üye	:	Prof. Dr. Gabil YAGUB	....
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ....../...../20.... gün ve ....../........................ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç.Dr. Muzaffer ALKAN

Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışmada kompleks potansiyelli Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli bir optimal kontrol problemi ele alındı. İlk bölümde optimal kontrol teorisi hakkında genel bir giriş yapılmış olup ikinci bölümde bu çalışmada kullanılan teoremler, lemmalar ve bazı matematiksel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde ele alınan optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Daha sonra amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğu gösterilerek, optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde bir gerek şart elde edilmiştir. Dördüncü bölümde elde edilen bulgular verilmiş olup, beşinci bölümde ise bu tezin önceki çalışmlalardan farklılığı vurgulanmıştır.

2013, 39 sayfa

Anahtar Kelimeler: Schrödinger denklemi, optimal kontrol problemi, Lions fonksiyoneli.

ABSTRACT

In this study, an optimal control problem with Lions functional for Schrödinger equation with complex potential is considered. In first chapter, a general introduction about optimal control theory is given and, in second chapter, theorems, lemmas and some mathematical concepts used in this study is stated. In third chapter, the existence and uniqueness of the solution of considered optimal control problem is shown. Later, proving the differentiable of cost functional, a neccesary condition in variation inequality form is obtained for the solution of optimal control problem. In forth chapter, obtained findings is given and, in fifth chapter, it is emphasized that this thesis is different from previous studies.

2013, 39 pages

Keywords: Schrödinger equation, optimal control problem, Lions functional.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmada, fikirleriyle bana yol gösteren, hiçbir özveriden kaçınmayıp değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen değerli danışmanım "Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY" hocama ve çalışmalarım esnasında yine katkılarını esirgemeyen "Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB" hocama en içten şükran ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca tezin hazırlanması sürecinde manevi desteğini her zaman hissettiğim aileme teşekkürlerimi sunarım.

Seray SALTAŞ

Kars-2013

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
$\overset{0}{\forall}$	Hemen hemen her yerde
$i=\sqrt{-1}$	Sanal birim
$l>0$	Verilen sayı
$T>0$	Verilen sayı
R^n	n boyutlu Eucliden uzayı
$H=L_2(0,T)\times L_2(0,T)$	Hilbert uzayı
B	Banach uzayı
$x\in[0,l]$	Bağımsız değişken
$t\in[0,T]$	Bağımsız değişken
$\langle .,. \rangle$	İç çarpım işareti
$\Omega=(0,l)x(0,T)$	Verilen bölge

1. GİRİŞ

Optimal kontrol teorisi günlük yaşamda hemen her alanda karşımıza çıktığından aslında çok eski bir tarihe dayanır. Var olan alternatifler arasında "en iyi, en mükemmel" olanı seçmek her zaman olağandır. Matematikte de bu "en iyi, en mükemmel" olanı tercih etmek ve ya bulmak "optimal" olarak ifade edilir.

İnsanlar yüzyıllar boyunca karşılaştıkları problemlere "en iyi çözümü getirmek" gibi bir ihtiyaçla karşılaşmışlardır. Karşılaşılan problemler hep kendine özgü yöntemlerle çözülmüş ve tüm problemlerin çözümüne yol gösterecek yaklaşımlar oluşmamıştır. Ancak daha sonraları "birçok doğa yasasının varyasyon prensipleriyle ifade edilebilir" olmasının anlaşılmasıyla matematiğin çok önemli bir dalı olan "varyasyon hesabı" oluşmuştur.

Fakat son 50-60 yılda teknolojinin hızla gelişmesi sonucu, yeni metodlar gelişmiştir. Bu süreçte, Dinamik programlama ve Pontryagin'in maksimum prensibinin formülüzasyonu ile 1950 lerde modern anlamda optimal kontrol teorisinin temelleri atılmış oldu.

Schrödinger denklemi ile ifade edilen kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol teorisi de modern optimal kontrol teorisinin önemli alanlarından biridir. Bu teorinin problemleri çoğunlukla kuantum mekaniğinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çağdaş fiziğin ve tekniğin farklı alanlarında ortaya çıktığından böyle problemlerin incelenmesi her yönden büyük bir öneme sahiptir[1], [11], [17].

Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri ilk önce farklı çalışmalarda ele alınmıştır[2], [7], [13], [14], [15], [18], [19]. [7], [18] çalışmalarında hem lineer hem de lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol teorisi oluşturulmuş ve geliştirilmiştir. Ayrıca [20] çalışmasında kompleks potansiyelli lineer Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmış ve problemin çözümünün varlığına ve tekliğine ait sorular cevaplandırılmıştır. [21] çalışmasında ise kompleks katsayılı lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi incelenmiştir.

Lions tipli fonksiyoneller ise ilk kez Fransız matematikçi Lions tarafından sunulmuştur[12]. Bu tipli fonksiyoneller katsayı ile kontrol edilen sistemler için kontrol problemlerinde ilk kez İskenderov'un çalışmalarında sunulmuştur ve analiz edilmiştir[6]. Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi İskenderov ve Mahmudov'un çalışmalarında incelenmiş ve problemin iyi konulmasına ve çözüm için gerek şartlara ait sonuçlar elde edilmiştir[7], [13].

Bu tez çalışmasında kompleks potansiyelli Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Göz önüne alınan problem için önce problemin iyi konulmasına ait olan sorular cevaplandırılmıştır, yani optimal kontrol probleminin çözümünde varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlanmıştır. Sonra problemde kullanılan amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilmesi incelenmiş ve onun gradyenti için formül elde edilmiştir. Gradyent için elde edilen formülü kullanarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde bu çalışmada kullanacağımız teoremler, lemmalar ile bazı uzay ve kavramların tanımlarını vereceğiz:

Tanım 2.1: $L_2(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemanları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm,

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)\bar{v}(x)dx$$

$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.2: $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları Ω bölgesinde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm,

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)\bar{v}(x)dx$$

$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.3: $L_\infty(0,l)$ Banach uzayı olup elemanları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|u\|_{L_\infty(0,l)} = vrai\sup_{x\in(0,l)}|u(x)| = ess\sup\left\{|u(x)| : x\in(0,l)\right\}$$

$$= \inf\left\{c \geq 0 : \overset{0}{\forall} x\in(0,l) için |u(x)| \leq c\right\}$$

normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.4: $L_\infty(\Omega)$ Banach uzayı olup Ω bölgesinde ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} = vrai\sup_{(x,t)\in\Omega}|\psi(x,t)|$$

normuna sahip $\psi=\psi\left(x,t\right)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.5: $C^0\left(\left[0,T\right],B\right)$ Banach uzayı olup elemanları $\left[0,T\right]$ aralığında sürekli olan ve değerlerini B Banach uzayından alan fonksiyonların uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\|u\|_{C^0([0,T],B)}=\max_{t\in(0,t)}\|u(t)\|_B\,.$$

Tanım 2.6: $L_2\left(\left[0,T\right],B\right)$ Banach uzayı olup, $\left[0,T\right]$ aralığında tanımlı ölçülebilir, karesel integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\|u\|_{L_2([0,T],B)}=\left(\int_0^T\left\|u\left(.,t\right)\right\|_B^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty.$$

Tanım 2.7: $W_2^1\left(0,l\right)$ Hilbert uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2\left(0,l\right)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\left\langle\psi,\phi\right\rangle_{W_2^1(0,l)}=\int_0^l\left(\psi\left(x\right)\overline{\phi}\left(x\right)+\frac{\partial\psi\left(x\right)}{\partial\left(x\right)}\frac{\partial\overline{\phi}\left(x\right)}{\partial\left(x\right)}\right)dx,$$
$$\|\psi\|_{W_2^1(0,l)}=\sqrt{\left\langle\psi,\psi\right\rangle_{W_2^1(0,l)}}$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ uzayı $W_2^1\left(0,l\right)$ uzayının alt uzayı olup, $\left(0,l\right)$ aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.8: $W_2^2\left(0,l\right)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2\left(0,l\right)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x)\overline{\phi}(x) + \frac{\partial\psi(x)}{\partial(x)}\frac{\partial\overline{\phi}(x)}{\partial(x)} + \frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\overline{\phi}(x)}{\partial x^2} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^2(0,l)}},$$

$$\overset{0}{W}{}_2^2 \equiv W_2^2(0,l) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(0,l).$$

Tanım 2.9: $W_2^{0,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır . Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.10: $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup, elemanlarının kendisi ve x değişkenine göre II. mertebeden, t değişkenine göre I.mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\langle \psi,\phi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial\overline{\phi}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2\overline{\phi}(x,t)}{\partial x^2} + \right.$$
$$\left. \frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.11: $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Tanım 2.12: $\{x_n\}$, H Hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall\, y \in H$ için $\lim_{n\to\infty}(x_n, y)_H = (x, y)_H$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsar denir.

Tanım 2.13: $\{x_n\}$, $(x,\|\ \|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ elemanına normda ya da kuvvetli yakınsar denir.

Tanım 2.14: $\{f_n\}$, bir X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her bir $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ oluyorsa, $\{f_n\}$ dizisi X üzerinde bir f fonksiyonuna noktasal yakınsar denir. Yani, verilen $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(x,\varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Tanım 2.15: V, X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $u, v \in V$ ve $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha u + (1-\alpha)v \in V$ oluyorsa, V kümesine X de konveks(dışbükey) küme denir.

Tanım 2.16: $(X,\|\ \|)$ normlu bir uzay olsun. $0 < \varepsilon \leq 2$ şartını sağlayan her ε sayısı için, eğer $x, y \in X$ için $\|x\| = \|y\| = 1$ ve $\|x - y\| \geq \varepsilon$ iken $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq 1 - \delta(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa $(X,\|\ \|)$ uzayına düzgün konveks uzay denir. $1 < p < \infty$ için $L_p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks uzaydır.

Tanım 2.17: $(X,\|\ \|)$ bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. E içindeki her dizinin E de bir limit noktası varsa E kümesine X 'de kompakt küme denir.

Tanım 2.18: E, $(X,\|\ \|)$ Banach uzayının bir altkümesi olsun. Eğer E içindeki her $\{x_n\}$ dizisinin bir $x \in E$ noktasına zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa E kümesine

$(X,\|\ \|)$ de zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa E kümesine $(X,\|\ \|)$ de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.19: X normlu uzayında bir E kümesi verilsin. Eğer E deki bütün yakınsak dizilerin limit noktaları E deyse E kümesine X 'de kapalı küme denir.

Tanım 2.20: X, bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer X 'in her bir x elemanı, E 'nin elemanlarının bir dizisinin limiti ise E 'ye X 'de yoğundur denir.

Tanım 2.21: F, bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer $\forall t \in I$ ve $\forall f \in F$ için $|f(t)| \leq M$ olacak şekilde negatif olmayan bir M sayısı varsa F 'ye I üzerinde sınırlıdır denir.

Tanım 2.22: X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer,

i) X, Y 'nin bir alt vektör uzayı ve

ii) $\forall x \in X$ için $Ix = x$ olarak tanımlanan $I : X \to Y$ özdeşlik operatörü sürekliyse X uzayı Y uzayına (sürekli) gömülür denir. Yani, $X \subset Y$ ve $\forall x \in X$ için $\|Ix\|_Y \leq M \|x\|_X$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Eğer I operatörü kompakt ise X uzayı Y uzayına kompakt gömülür denir.

Tanım 2.23: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına kuvvetli yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\lim_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan yarı süreklidir denir.

Tanım 2.24: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\lim_{k\to\infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı süreklidir denir.

Tanım 2.25: B herhangi bir Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $w(u,\gamma) = \{v : v \in B, \|v-u\| < \gamma\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B \to 0} \frac{o(h,u)}{\|h\|_B} = 0$$

olacak şekilde,

$$\Delta J(u) = J(u+h) - J(u) = \left(J'(u), h\right)_B + o(h,u)$$

şartını sağlayan $J'(u) \in B^*$ elemanı varsa, bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir denir.

Teorem 2.1: $D \subset R^n$ herhangi bir bölge olsun. Herhangi $u(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(D)$ fonksiyonu ve $m \geq 1,\ r \geq 1$ sayıları için $\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$ olmak üzere

$$\|u\|_{L_q(D)} \leq \beta \|u_x\|_{L_m(D)}^{\alpha} \|u\|_{L_r(D)}^{1-\alpha}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca,

1. $m \geq n = 1$ için $q \in [r, \infty]$ ve $\beta = \left(1 + \frac{(m-1)r}{m}\right)^{\alpha}$ dır.

2. $n > 1$ ve $m < n$ için $\beta = \left(\frac{(n-1)m}{n-m}\right)^{\alpha}$ ve eğer, $r \leq \frac{nm}{n-m}$ ise $q \in \left[r, \frac{nm}{n-m}\right]$ ve $r \geq \frac{nm}{n-m}$ ise $q \in \left[\frac{nm}{n-m}, r\right]$ dir.

3. $m > n > 1$ için $q \in [r, \infty)$ ve $\beta = \max\left\{\frac{q(n-1)}{n}, 1 + (m-1)mr\right\}^{\alpha}$ dır[10].

Teorem 2.2 (Weirstrass Teoremi): U, B Banach uzayında zayıf kompakt bir küme olsun. $J(u)$ ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli bir fonksiyonel olsun. Bu takdirde $J_* = \inf_U J(u) > -\infty,\ U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \varnothing$, zayıf kompakttır ve U 'dan alınan herhangi minimalleştirici dizi, minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar[16].

Teorem 2.3: Kabul edelim ki, $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $a > 0,\ \beta \geq 1$, verilen sayılar olsun. Bu takdirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle bir G alt kümesi vardır ki, $\forall w \in G$ için,

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - w\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır[3].

Teorem 2.4: U, B Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede birinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyonel ve $U_* = \left\{ u \in U : J(u) = J_* = \inf_U J(u) \right\}$ kümes $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u_* \in U_*$ ve $\forall u \in U$ için $\left(J'(u_*), u - u_* \right)_B \geq 0$ şartı sağlanır[16].

Teorem 2.5: $D \subset R^n$, C^1 sınıfının sınırlı bir bölgesi olsun.

1. Eğer $p \geq 1,\ 1 \leq q < \infty,\ 0 \leq r < m,\ m - r - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} \geq 0$ ise $W_p^m(D)$ uzayı $W_q^r(D)$ uzayına (sürekli) gömülür. Eğer $m - r - \frac{n}{p} + \frac{n}{q} > 0$ ise bu gömülme kompakt olur.

2. Eğer $p(m - r) > n$ ise $W_p^m(D)$ uzayı $C^r\left(\overline{D}\right)$ uzayına kompakt gömülür.

Lemma 2.1: $D \subset R^n$ herhangi bir bölge olsun. Eğer $\{u_k(x)\}$ fonksiyonlar dizisi $L_q(D)$ $(q \geq 1)$ uzayında bir $u(x)$ fonksiyonuna kuvvetli yakınsıyor ise bu takdirde $\{u_k(x)\}$ dizisinden $u(x)$ fonksiyonuna D' de hemen hemen yakınsayan bir alt dizi seçmek mümkündür. Ayrıca $\{u_k(x)\}$ dizisinin D üzerinde $u(x)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsaması, D üzerinde hemen hemen düzgün yakınsamayı gerektirir[10].

Lemma 2.2: $\{u_k(x)\}$ bir fonksiyonlar dizisi olmak üzere, eğer $q > 1$ ve $k = 1, 2, ...$ için $\|u_k\|_{L_q(D)} \leq c$ ise bu durumda $\{u_k(x)\}$' den $L_q(D)$ de zayıf yakınsayan bir alt dizi seçmek mümkündür. Eğer $k = 1, 2, ...$ için $\{u_k(x)\}, D$ üzerinde $u(x)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsıyorsa ve $q > 1$ için $\|u_k\|_{L_q(D)} \leq c$ ise bu durumda $\{u_k\}$ dizisi

$q^* < q$ için $L_{q^*}(D)$ de u' ya kuvvetli yakınsar; $L_q(D)$ de ise u' ya zayıf yakınsar[10].

Lemma 2.3: $f(x,t,u)$ fonksiyonu $\{(x,t)\in\Omega, u\in(-\infty,\infty)\}$ kümesinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon ve hemen hemen $(x,t)\in\Omega$ için u' ya göre sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $L_1(\Omega)$'dan olan $\{u_k(x,t)\}$ dizisi, $L_1(\Omega)$' dan olan $u(x,t)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsıyorsa ve $q>1$ için $\|f(.,.,u_k(.,.))\|_{L_q(\Omega)} \le c$ ise bu durumda $q^* < q$ için $f(x,t,u_k(x,t))$ fonksiyonlar dizisi $L_{q^*}(\Omega)$ normunda $f(x,t,u(x,t))$ fonksiyonuna yakınsar; $L_q(\Omega)$ da ise zayıf yakınsar. Eğer $\{u_k(x,t)\}$ dizisi $L_1(\Omega)$ da u fonksiyonuna kuvvetli yakınsıyorsa ve $q>1$ için $\|u_k\|_{L_q(\Omega)} \le c$ ise bu takdirde $\{u_k(x,t)\}$ dizisi u' ya $q^* < q$ için $L_{q^*}(\Omega)$ da kuvvetli yakınsar[10].

Lemma 2.4 (T. H. Gronwall): Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \le g(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde

$$0 \le g(t) \le K\exp\left(L(t-t_0)\right)$$

dır. Burada K ve L negatif olmayan sabitlerdir[4].

Lemma 2.5 (Cauchy-Bunjakovskii Eşitsizliği): $u,v\in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left|\int_\Omega u\bar{v}dxd\tau\right| \le \left(\int_\Omega |u|^2\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |v|^2\,dxd\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir[10].

Lemma 2.6(ε-Cauchy Eşitsizliği): Keyfi a,b sayıları ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir[10].

3. MATERYAL ve METOT

3.1. Kompleks Potansiyelli Schrödinger Denklemi İçin Lions Fonksiyonelli Optimal Kontrol Problemi

Bu bölümde kompleks potansiyelli Schrödinger denklemi için Lions fonksiyonelli optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Ele alınan problemin çözümü için önce varlık teklik teoremleri ispatlanır. Sonra fonksiyonelin diferansiyellenebilirliği incelenerek fonksiyonelin gradyenti için bir formül elde edilir. Bu formül kullanılarak varyasyon eşitsizliği biçiminde gerek şart elde edilir. Benzer problemler [5], [6], [7], [18], [19] çalışmalarında incelenmiştir.

3.1.1 Problemin Konulması

$l>0,\ T>0$ olmak üzere $x\in(0,l),\ t\in(0,T),\ \Omega_t=(0,l)x(0,t),\ \Omega=\Omega_T$ olsun.

$$J_\alpha(v)=\int_\Omega \left|\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)\right|^2 dxdt+\alpha\|v-w\|_H^2 \tag{1}$$

fonksiyonelinin,

$$V\equiv\left\{v=(v_0,v_1):v_j\in L_2(0,T),\left|v_j(t)\right|\le b_j,\ j=0,1,\overset{0}{\forall}t\in(0,T)\right\}$$

kümesi üzerinde,

$$i\frac{\partial\psi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2}-a(x)\psi_k-v_0(t)\psi_k-iv_1(t)\psi_k=f_k(x,t),\ k=1,2,\ (x,t)\in\Omega \tag{2}$$

$$\psi_k(x,0)=\varphi_k(x),\ k=1,2,\ x\in(0,l) \tag{3}$$

$$\psi_1(0,t)=\psi_1(l,t)=0,\ t\in(0,T) \tag{4}$$

$$\frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\psi_2(l,t)}{\partial x}=0,\ t\in(0,T) \tag{5}$$

şartları altında minimumunun bulunması problemini ele alalım. Burada, $\alpha\ge0$, $b_0>0,\ b_1>0,\ a_0>0$ verilen sayılar, $a(x)$ ölçülebilir sınırlı fonksiyon olup

$0 \le a(x) \le \mu_0,\ \overset{0}{\forall} x \in (0,l)$ şartını sağlar. $w \in L_2(0,T) \times L_2(0,T)$ verilen eleman, φ_1, φ_2, f_1, f_2 fonksiyonları

$$\varphi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l),\ \varphi_2 \in W_2^2(0,l),\ \frac{d\varphi_2(0)}{dx} = \frac{d\varphi_2(l)}{dx} = 0, \tag{6}$$

$$f_k \in \overset{0}{W}{}_2^{0,1}(\Omega),\ k = 1,2 \tag{7}$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlardır. $H = L_2(0,T) x L_2(0,T)$ dır. $\forall v \in V$ için (2)-(4) şartlarından $\psi_1 = \psi_1(x,t) \equiv \psi_1(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması, Schrödinger denklemi için I.çeşit sınır değer problemidir. (2), (3), (5) şartlarından $\psi_2 = \psi_2(x,t) \equiv \psi_2(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması da Schrödinger denklemi için II. çeşit başlangıç sınır değer problemidir.

Tanım 3.1.1.1: $\forall v \in V$ için (2)-(5) sınır değer probleminin çözümü olarak $\overset{0}{\forall}(x,t) \in \Omega$ için (2) - (5) şartlarını sağlayan ve sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$, $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarına ait olan $\psi_1 = \psi_1(x,t) \equiv \psi_1(x,t;v),\ \psi_2 = \psi_2(x,t) \equiv \psi_2(x,t;v)$ fonksiyonları anlaşılır.

[20] çalışmasına dayanarak $\forall v \in V$ için (2) – (5) sınır değer probleminin tek çözüme sahip olduğunu ve bu çözüm için aşağıdaki kestirimlerin geçerli olduğunu söyleyebiliriz:

$$\|\psi_1\| \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega) \le c_1\left(\|\psi_1\| \in \overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l) + \|f_1\|W_2^{0,1}(\Omega)\right) \tag{8}$$

$$\|\psi_2\| \in W_2^{2,1}(\Omega) \le c_2\left(\|\psi_2\| \in W_2^{2}(0,l) + \|f_2\|W_2^{0,1}(\Omega)\right) \tag{9}$$

Burada $c_1 > 0,\ c_2 > 0$ sayılarıdır.

3.1.2. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

(1) – (5) optimal kontrol problemini göz önüne alalım. Bu problem için çözümün varlığı ve tekliğini inceleyelim. İlk olarak $\alpha > 0$ için (1) – (5) optimal kontrol probleminin bir tek çözüme sahip olduğunu gösterelim:

Teorem 3.1.2.1: $H = L_2(0,T)xL_2(0,T)$ uzayında hemen hemen her yerde yoğun olan G alt kümesi vardır ki $\forall w \in G$ ve $\alpha > 0$ için (1) – (5) optimal kontrol problemi tek çözüme sahiptir.

İspat : Önce $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim.

$$J_0(v) = \int_\Omega |\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)|^2 dxdt \tag{10}$$

$B = L_\infty(0,T)xL_\infty(0,T)$ olmak üzere $\Delta v \in B,\ v + \Delta v \in V$ olacak şekilde herhangi bir v elemanına verilen artış olsun. Bu durumda ψ_k fonksiyonları $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,t) \equiv \psi_k(x,t;v+\Delta v) - \psi_k(x,t;v) = \psi_{k\Delta} - \psi_k$ artışına sahip olur. Burada $\psi_k(x,t;v+\Delta v)$ fonksiyonları (2) – (5) sınır değer probleminin $v+\Delta v$' ye karşılık gelen çözümleridir.

$\psi_{k\Delta}$ ve ψ_k, (2) denkleminin çözümleri olduğundan, sırasıyla

$$i\frac{\partial\psi_{k\Delta}}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi_{k\Delta}}{\partial x^2} - a(x)\psi_{k\Delta} - (v_0 + \Delta v_0)\psi_{k\Delta} - i(v_1 + \Delta v_1)\psi_{k\Delta} = f_k$$

$$i\frac{\partial\psi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2} - a(x)\psi_k - v_0\psi_k - iv_1\psi_k = f_k$$

yazılır. Bu iki denklemi taraf tarafa çıkarırsak:

$$\begin{aligned}&i\frac{\partial\psi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\psi_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi_k - (v_0 + \Delta v_0)(\psi_{k\Delta} - \psi_k) - i(v_1 + \Delta v_1)(\psi_{k\Delta} - \psi_k)\\ &= \Delta v_0\psi_k + i\Delta v_1\psi_k\end{aligned}$$

olup,

$$i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi_k - (v\ + \Delta v_0)\Delta\psi_k - i(v\ + \Delta v_1)\Delta\psi_k = \Delta v_0\psi_k + i\Delta v_1\psi_k$$

elde edilir. Buradaki $\Delta\psi_k,\ k=1,2$ fonksiyonları,

$$i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2}-a(x)\Delta\psi_k-(v_0+\Delta v_0)\Delta\psi_k-i(v_1+\Delta v_1)\Delta\psi_k$$
$$=\Delta v_0\psi_k+i\Delta v_1\psi_k,\ k=1,2,\ (x,t)\in\Omega \tag{11}$$

$$\Delta\psi_k(x,0)=0,\ x\in(0,l), \tag{12}$$

$$\Delta\psi_1(0,t)=\Delta\psi_1(l,t)=0,\ t\in(0,T), \tag{13}$$

$$\frac{\partial\Delta\psi_2(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\Delta\psi_2(l,t)}{\partial x}=0,\ t\in(0,T). \tag{14}$$

başlangıç sınır değer probleminin çözümleridir. (11) denkleminin her iki tarafını $\Delta\overline{\psi_k}(x,t),\ k=1,2$ ile çarpıp Ω_t bölgesi üzerinden integralleyelim:

$$\int_{\Omega t}\left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}\Delta\overline{\psi_k}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2}\Delta\overline{\psi_k}-a(x)|\Delta\psi_k|^2-(v_0+\Delta v_0)|\Delta\psi_k|^2-i(v_1+\Delta v_1)|\Delta\psi_k|^2\right)dxd\tau$$
$$=\int_{\Omega t}(\Delta v_0\psi_k+i\Delta v_1\psi_k)\Delta\overline{\psi_k}dxd\tau$$

olur. Bu eşitliğin sol tarafındaki ikinci terime kısmi integrasyon uygularsak

$$\int_{\Omega t}\left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}\Delta\overline{\psi_k}-a_0\left|\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial x}\right|^2-a(x)|\Delta\psi_k|^2-(v_0+\Delta v_0)|\Delta\psi_k|^2-i(v_1+\Delta v_1)|\Delta\psi_k|^2\right)dxd\tau$$
$$=\int_{\Omega t}(\Delta v_0\psi_k+i\Delta v_1\psi_k)\Delta\overline{\psi_k}dxd\tau$$

yazılır. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak;

$$\int_{\Omega t}\left(\left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}\Delta\overline{\psi_k}+i\frac{\partial\Delta\overline{\psi_k}}{\partial t}\Delta\psi_k\right)-i(v_1+\Delta v_1)|\Delta\psi_k|^2-i(v_1+\Delta v_1)|\Delta\psi_k|^2\right)dxd\tau$$
$$=\int_{\Omega t}\left(\Delta v_0\psi_k\Delta\overline{\psi_k}-\Delta v_0\overline{\psi_k}\Delta\psi_k+i\Delta v_1\psi_k\Delta\overline{\psi_k}+i\Delta v_1\overline{\psi_k}\Delta\psi_k\right)dxd\tau$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da,

$$\int\limits_{\Omega t}\left(i\frac{\partial\left(\Delta\psi_k\Delta\overline{\psi_k}\right)}{\partial t}-2i\left(v_1+\Delta v_1\right)\left|\Delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau=\int\limits_{\Omega t}\Delta v_0 2i\operatorname{Im}\left(\psi_k\Delta\overline{\psi_k}\right)+\int\limits_{\Omega t}\Delta v_1 2i\operatorname{Re}\left(\psi_k\Delta\overline{\psi_k}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\int\limits_0^l\int\limits_0^t\frac{\partial\left|\Delta\psi_k\right|^2}{\partial t}dxd\tau=\int\limits_{\Omega t}\left(2\left(v_1+\Delta v_1\right)\left|\Delta\psi_k\right|^2\right)dxd\tau+2\int\limits_{\Omega t}\Delta v_0\operatorname{Im}\left(\psi_k\Delta\overline{\psi_k}\right)+2\int\limits_{\Omega t}\Delta v_1\operatorname{Re}\left(\psi_k\Delta\overline{\psi_k}\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$\left\|\Delta\psi_k\right\|^2_{L_2(0,l)}=2\int\limits_{\Omega t}\left(v_1+\Delta v_1\right)\left|\Delta\psi_k\right|^2dxd\tau+2\int\limits_{\Omega t}\operatorname{Im}\left(\Delta v_0\psi_k\Delta\overline{\psi_k}\right)dxd\tau+2\int\limits_{\Omega t}\operatorname{Re}\left(\Delta v_1\psi_k\Delta\overline{\psi_k}\right)dxd\tau$$

elde edilir. Önce her iki tarafın mutlak değerini alır, sonra $\left|\operatorname{Im}a\right|\le\left|a\right|$, $\left|\operatorname{Re}a\right|\le\left|a\right|$ olduğunu

$$\left\|\Delta\psi_k\right\|^2_{L_2(0,l)}=2\int\limits_{\Omega t}\left|v_1+\Delta v_1\right|\left|\Delta\psi_k\right|^2dxd\tau+2\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta v_0\right|\left|\psi_k\right|\left|\Delta\psi_k\right|dxd\tau+2\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta v_1\right|\left|\psi_k\right|\left|\Delta\psi_k\right|dxd\tau$$

olur.

Buradan,

$$\begin{aligned}\left\|\Delta\psi_k\right\|^2_{L_2(0,l)}&\le 2\int\limits_{\Omega t}\left|v_1+\Delta v_1\right|\left|\Delta\psi_k\right|^2dxd\tau+\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta v_0\psi_k\right|^2dxd\tau+\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta\psi_k\right|^2dxd\tau\\&+\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta v_1\psi_k\right|^2dxd\tau+\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta\psi_k\right|^2dxd\tau\\&=\left(2b_1+2\right)\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta\psi_k\right|^2dxd\tau+\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta v_0\psi_k\right|^2dxd\tau+\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta v_1\psi_k\right|^2dxd\tau\end{aligned}$$

olup,

$$\left\|\Delta\psi_k\right\|^2_{L_2(0,l)}\le\left(2b_1+2\right)\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta\psi_k\right|^2dxd\tau+\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta v_0\psi_k\right|^2dxd\tau+\int\limits_{\Omega t}\left|\Delta v_1\psi_k\right|^2dxd\tau \qquad (15)$$

eşitsizliği elde edilir.

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_\infty\left(\left[0,T\right],\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)\right)$ uzayına, $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı da $L_\infty\left(\left[0,T\right],W_2^1(0,l)\right)$ uzayına sürekli gömüldüğünden,

$$\left\|\psi_1\right\|_{L_\infty\left(\left[0,T\right],\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)\right)}\le c_3\left\|\psi_1\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \qquad (16)$$

$$\|\psi_2\|_{L_\infty\left([0,T],W_2^1(0,l)\right)} \le c_4 \|\psi_2\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \tag{17}$$

eşitsizliklerini ve bu eşitsizliklerde de (8), (9) kestirimlerini kullanırsak

$$\|\psi_1\|_{L_\infty\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)\right)} \le c_3 \|\psi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \le c_3\left(c_1\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f_1\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right)$$

$$\|\psi_2\|_{L_\infty\left([0,T],W_2^1(0,l)\right)} \le c_4 \|\psi_2\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \le c_4\left(c_2\|\varphi_2\|_{W_2^2(0,l)} + \|f_2\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right)$$

olup,

$$\|\psi_1\|_{L_\infty\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)\right)} \le c_5\left(\|\varphi_1\|_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \|f_1\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{18}$$

$$\|\psi_2\|_{L_\infty\left([0,T],W_2^1(0,l)\right)} \le c_6\left(\|\varphi_2\|_{W_2^2(0,l)} + \|f_2\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) \tag{19}$$

kestirimlerini elde ederiz.

$\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ ve $W_2^1(0,l)$ uzayları $L_\infty(0,l)$ uzayına gömüldüğünden aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz.

$$\|\psi_k\|_{L_\infty(\Omega)} \le \|\psi_k\|_{W_2^1(0,l)} \le c_7, \ \|\psi_{k\Delta}\|_{L_\infty(\Omega)} \le c_8, \ k=1,2 \tag{20}$$

(15) den;

$$\begin{aligned}
\|\Delta\psi_k\|_{L_2(0,l)}^2 &\le (2b_1+2)\int_0^t \|\Delta\psi_k(.,\tau)\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau + ess\sup_{(x,t)\in\Omega}|\psi_k|^2 \int_{\Omega_T} |\Delta v_0|^2 dx d\tau \\
&\quad + ess\sup_{(x,t)\in\Omega}|\psi_k(x,t)|^2 \int_{\Omega_T} |\Delta v_1|^2 dx d\tau \\
&= (2b_1+2)\int_0^t \|\Delta\psi_k(.,\tau)\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau + \|\psi_k\|_{L_\infty(\Omega)}^2 l\int_0^T |\Delta v_0|^2 dt + \|\psi_k\|_{L_\infty(\Omega)}^2 l\int_0^T |\Delta v_1|^2 dt \\
&\le (2b_1+2)\int_0^t \|\Delta\psi_k(.,\tau)\|_{L_2(0,l)}^2 d\tau + c_7 l\left(\int_0^T |\Delta v_0|^2 dt + \int_0^T |\Delta v_1|^2 dt\right)
\end{aligned}$$

olup Gronwall lemması kullanılırsa:

$$\|\Delta\psi_k\|_{L_2(0,l)}^2 \le c_7 l\left(\int_0^T |\Delta v_0|^2 dt + \int_0^T |\Delta v_1|^2 dt\right) e^{(2b_1+2)t}$$

olup,

$$\left\|\Delta\psi_k\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_8\left(\int_0^T\left|\Delta v_0\right|^2dt+\int_0^T\left|\Delta v_1\right|^2dt\right)=c_8\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,T)\times L_2(0,T)=H}$$

yazılır. Burada da L_∞ uzayı ile L_2 uzayının gömülme özelliklerini kullanırsak $H=L_2(0,T)xL_2(0,T),\ B=L_\infty(0,T)xL_\infty(0,T)$, olmak üzere;

$$\left\|\Delta\psi_k\right\|^2_{L_2(0,l)} \le c_8\left\|\Delta v\right\|^2_H \le c_9\left\|\Delta v\right\|^2_B,\ \ \forall t\in[0,T],\ k=1,2 \tag{21}$$

kestirimi elde edilir.

Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin artışını hesaplayalım. Bunun için (1) formülünü kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\Delta J_0(v) &= J_0(v+\Delta v)-J_0(v)\\
&=\int_\Omega\left|\psi_1(x,t;v+\Delta v)-\psi_2(x,t;v+\Delta v)\right|^2dxdt-\int_\Omega\left|\psi_1(x,t;v)-\psi_2(x,t;v)\right|^2dxdt\\
&=\int_\Omega\left|\psi_{1\Delta}-\psi_{2\Delta}\right|^2dxdt-\int_\Omega\left|\psi_1-\psi_2\right|^2dxdt\\
&=\int_\Omega\left(\psi_{1\Delta}-\psi_{2\Delta}\right)\left(\bar\psi_{1\Delta}-\bar\psi_{2\Delta}\right)dxdt-\int_\Omega\left(\psi_1-\psi_2\right)\left(\bar\psi_1-\bar\psi_2\right)dxdt\\
&=\int_\Omega\left(\Delta\psi_1+\psi_1-\left(\Delta\psi_2+\psi_2\right)\right)\left(\Delta\bar\psi_1+\bar\psi_1-\left(\Delta\bar\psi_2+\bar\psi_2\right)\right)dxdt\\
&\quad-\int_\Omega\left(\left|\psi_1\right|^2-\psi_1\bar\psi_2-\psi_2\bar\psi_1+\left|\psi_2\right|^2\right)dxdt\\
&=\int_\Omega\Big(\left|\Delta\psi_1\right|^2+\Delta\psi_1\bar\psi_1-\Delta\psi_1\Delta\bar\psi_2-\Delta\psi_1\psi_2+\psi_1\Delta\bar\psi_1+\psi_1\bar\psi_1-\psi_1\Delta\bar\psi_2-\psi_1\bar\psi_2\\
&\quad-\Delta\psi_2\Delta\bar\psi_1-\Delta\psi_2\bar\psi_1+\left|\Delta\psi_2\right|^2-\Delta\psi_2\bar\psi_2-\psi_2\Delta\bar\psi_1-\psi_2\bar\psi_1\\
&\quad+\psi_2\Delta\bar\psi_2+\psi_2\bar\psi_2-\left|\psi_1\right|^2+\psi_1\bar\psi_2+\psi_2\bar\psi_1-\left|\psi_2\right|^2\Big)dxdt\\
&=\int_\Omega\Big(\Delta\psi_1\left(\bar\psi_1-\bar\psi_2\right)+\Delta\bar\psi_1\left(\psi_1-\psi_2\right)-\Delta\bar\psi_2\left(\psi_1-\psi_2\right)-\Delta\psi_2\left(\bar\psi_1-\bar\psi_2\right)\\
&\quad+\left|\Delta\psi_1\right|^2+\left|\Delta\psi_2\right|^2-\Delta\psi_1\Delta\bar\psi_2-\Delta\psi_2\Delta\bar\psi_1\Big)dxdt\\
&=\int_\Omega\Big(\left(\psi_1-\psi_2\right)\left(\Delta\bar\psi_1-\Delta\bar\psi_2\right)+\left(\bar\psi_1-\bar\psi_2\right)\left(\Delta\psi_1-\Delta\psi_2\right)+\left|\Delta\psi_1\right|^2+\left|\Delta\psi_2\right|^2\\
&\quad-\Delta\psi_1\Delta\overline{\psi}_2-\Delta\psi_2\Delta\overline{\psi}_1\Big)dxdt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&=\int_\Omega 2\,\mathrm{Re}\left(\left(\psi_1-\psi_2\right)\left(\Delta\overline{\psi}_1-\Delta\overline{\psi}_2\right)\right)dxdt-2\int_\Omega\mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1\Delta\overline{\psi}_2\right)dxdt\\
&\quad+\left\|\Delta\psi_1\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\left\|\Delta\psi_2\right\|^2_{L_2(\Omega)}
\end{aligned}\tag{22}$$

Burada Cauchy – Bunjakovskii eşitsizliğini uygulayıp (8) – (9) kestirimlerini kullanırsak:

$$|\Delta J_0(v)| \le 2\int_\Omega |\psi_1-\psi_2||\Delta\psi_1-\Delta\psi_2|\,dxdt + 2\int_\Omega |\Delta\psi_1||\Delta\psi_2|\,dxdt + \|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\le 2\int_\Omega \left(|\psi_1-\psi_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\Delta\psi_1-\Delta\psi_2|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \int_\Omega |\Delta\psi_1|^2\,dxdt + \int_\Omega |\Delta\psi_2|^2\,dxdt + \|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}$$

olup,

$$= 2\left(\|\psi_1-\psi_2\|_{L_2(\Omega)}\|\Delta\psi_1-\Delta\psi_2\|_{L_2(\Omega)}\right) + 2\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}$$

$$\le 2\left(\|\psi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi_2\|_{L_2(\Omega)}\right)\|\Delta\psi_1-\Delta\psi_2\|_{L_2(\Omega)} + 2\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} \tag{23}$$

$$|\Delta J_0(v)| \le c_{10}\left(\|\psi_1\|_{L_2(\Omega)} + \|\psi_2\|_{L_2(\Omega)}\right) + 2\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradaki $c_{10} > 0$ sayısı Δv ’ den bağımsızdır. Bu eşitsizliğin sağ tarafına (21) kestirimini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|\Delta J_0(v)| \le c_{11}\left(\|\Delta v\|_B + \|\Delta v\|_B^2\right) \tag{24}$$

Burada $c_{11} > 0$ sayısı Δv ’ den bağımsızdır. (24) eşitsizliğinden $\|\Delta v\|_{L_\infty(0,l)} \to 0$ için $\Delta J_0(v) \to 0$ olur. Dolayısıyla $J_0(v)$ fonksiyoneli v noktasında süreklidir. $v \in V$, V kümesinin herhangi bir elemanı olduğundan $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu ispat edilir. Böylelikle $\forall v \in V$ için $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli olduğu ispatlanmış olur. V kümesi H uzayında kapalı ve sınırlı kümedir. H uzayı ise Hilbert uzayı olduğundan düzgün konveks uzaydır[22].

$$I(v) = J_0(v),\ \tilde{X} = L_2(0,T),\ U = V$$

gösterimlerini kullanırsak Teorem 2.3’ ün şartlarının sağlandığını görürüz. Bu takdirde Teorem 2.3’ ün hükmünü kullanırsak H uzayında her yerde yoğun olan G alt kümesi bulunur ki, $\forall w \in G$ için $\alpha > 0$ olduğunda (1) – (5) optimal kontrol problemi bir tek çözüme sahip olur. Böylece teorem ispatlandı.

Şimdi (1) – (5) optimal kontrol probleminin $\alpha \geq 0$ için en az bir çözüme sahip olduğunu gösterelim:

Teorem 3.1.2.2 : Kabul edelim ki $\varphi_k(x),\ f_k(x,t),\ k=1,2$ fonksiyonları (6), (7) sağlamış olsun. Bu takdirde (1) – (5) optimal kontrol problemi $\alpha \geq 0$ için en az bir çözüme sahiptir.

İspat : Herhangi $\{v^m\} \in V$ minimalleştirici dizisini ele alalım.

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha\left(v^m\right) = J_{\alpha^*} = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) \tag{25}$$

Her bir $v^m \in V,\ m=1,2,...$ için (2) – (5) sınır değer probleminin çözümünü,

$$\psi_k^m = \psi_k^m(x,t) \equiv \psi_k\left(x,t;v^m\right),\ k=1,2$$

şeklinde gösterelim. Bu takdirde (8) – (9) kestirimlerinden aşağıdaki kestirimleri elde ederiz:

$$\left\|\psi_1^m\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_5\left(\left\|\varphi_1\right\|_{\overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l)} + \left\|f_1\right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) = c_{12}, \tag{26}$$

$$\left\|\psi_2\right\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} \leq c_6\left(\left\|\varphi_2\right\|_{W_2^{2}(0,l)} + \left\|f_2\right\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}\right) = c_{13}. \tag{27}$$

Burada $c_{12}, c_{13} > 0$ sabitleri m' den bağımsızdır. V kümesi B uzayında sınırlı küme olduğundan $\{v^m\} \in V$ dizisinden bu uzayda $v \in B$ elemanına $(*)$- zayıf yakınsayan $\left\{v^{m_p}\right\}$ alt dizisi seçilebilir. Bu alt diziyi $\{v^m\}$ ile gösterelim. Bu takdirde;

$$m \to \infty \text{ için } v^m \to v, \text{ B de } (*)\text{-zayıf} \tag{28}$$

V kümesi B uzayında kapalı sınırlı ve konveks kümedir. Bu takdirde [8]' den bildiğimiz ilgili teoreme göre V kümesi B uzayında $(*)$ - zayıf kapalı küme olur. Yani $v \in V$ dir. Buna göre de (28) şartından aşağıdaki limit bağıntısını elde ederiz:

$$\int_0^t v_p^m(t)q(t)dt \to \int_0^t v_p(t)q(t)dt, m\to\infty, \forall q \in L_1(0,T), p=0,1 \tag{29}$$

(26) – (27) kestirimlerinden $\{\psi_k^m\}, k=1,2$ dizilerinin sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega),\ W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarının normlarında m' ye göre düzgün sınırlı olduğu elde edilir. Bu takdirde

$\{\psi_k^m\}, k=1,2$ dizilerinden $\psi_k \in W_2^{2,1}(\Omega)$ elemanlarına zayıf yakınsayan alt dizilerini seçmek mümkündür. Kolaylık için bu yakınsayan alt dizileri yine $\{\psi_k^m\},\ k=1,2$ ile gösterelim. Buna göre $m\to\infty$, k=1,2 için

$$\psi_k^m \to \psi_k \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da} \tag{30}$$

$$\frac{\partial \psi_k^m}{\partial t} \to \frac{\partial \psi_k}{\partial t} \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da} \tag{31}$$

$$\frac{\partial \psi_k^m}{\partial x} \to \frac{\partial \psi_k}{\partial x} \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da} \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_k^m}{\partial x^2} \to \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} \text{ zayıf } L_2(\Omega) \text{ da} \tag{33}$$

limit bağıntılarını elde ederiz. $\{\psi_1^m\},\ \{\psi_2^m\}$ dizilerinin elemanları (2) – (5) sınır değer probleminin sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ ve $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarına ait çözümü olduğundan her $m=1,2,...$ için aşağıdaki özdeşlikleri elde ederiz:

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[i\frac{\partial \psi_k^m}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \psi_k^m}{\partial x^2} - a(x)\psi_k^m - v_k^m(x)\psi_k^m - iv_1^m(x)\psi_k^m \right]\bar{\eta}_k dxdt \\ &= \int_\Omega f_k \bar{\eta}_k(x,t) dxdt. \text{ k=1,2, m=1,2,...}\end{aligned} \tag{34}$$

$\forall \eta_k = \eta_k(x,t) \in L_2(\Omega)$ ve aşağıdaki şartlar sağlanır:

$$\psi_k^m(x,0) = \varphi_k(x) \overset{0}{\forall} \in (0,l),\ \text{k=1,2.} \tag{35}$$

$$\psi_1^m(0,t) = \psi_1^m(l,t) = 0, \frac{\partial \psi_2^m(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_2^m(l,t)}{\partial x} = 0, \overset{0}{\forall} \in (0,T) \tag{36}$$

(30) – (33) limit bağıntılarını kullanırsak, $\forall \eta_k \in L_2(\Omega)$, k=1,2 için

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left[i\frac{\partial \psi_k^m}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \psi_k^m}{\partial x^2} - a(x)\psi_k^m \right]\bar{\eta}_k dxdt \to \\ &\to \int_\Omega \left[i\frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} - a(x)\psi_k \right]\bar{\eta}_k dxdt, \text{ k=1,2}\end{aligned} \tag{37}$$

limit bağıntıları elde edilir. Şimdi $m\to\infty$ için aşağıdaki limit bağıntılarının geçerli olduğunu ispatlayalım:

$$\int_{\Omega} v_0^m(x)\psi_k^m(x,t)\bar{\eta}_k(x,t)\,dxdt \to \int_{\Omega} v_0(x)\psi_k(x,t)\bar{\eta}_k(x,t)\,dxdt,\ k=1,2 \tag{38}$$

$$i\int_{\Omega} v_1^m(x)\psi_k^m\bar{\eta}_k\,dxdt \to i\int_{\Omega} v_1(x)\psi_k\bar{\eta}_k\,dxdt,\ k=1,2 \tag{39}$$

olup kolaylıkla aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} v_p^m\psi_k^m\bar{\eta}_k\,dxdt &= \int_{\Omega}\left(v_p^m - v_p\right)\psi_k\bar{\eta}_k\,dxdt + \\ &+\int_{\Omega} v_p^m\left(\psi_k^m - \psi_k\right)\bar{\eta}_k\,dxdt + \int_{\Omega} v_p\psi_k\bar{\eta}_k\,dxdt,\ k=1,2,\ p=0,1.\end{aligned} \tag{40}$$

$\psi_1 \in W_2^{2,1}(\Omega),\ \psi_2 \in W_2^{2,1}(\Omega),\ \eta_k \in L_2(\Omega),\ k=1,2$ şartları sağlandığından $\psi_k\bar{\eta}_k \in L_1(\Omega)$ olur. Bu takdirde (29) limit bağıntısını kullanırsak ; $m \to \infty$ için

$$\int_{\Omega}\left(v_p^m - v_p\right)\psi_k\bar{\eta}_k\,dxdt \to 0,\ k=1,2,\ p=0,1 \tag{41}$$

bağıntısını elde ederiz.

Şimdi (40) eşitliğinin sağ tarafındaki ikinci terimi kestirelim. Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini kullanıp $v^m \in V$ olduğunu göz önüne alırsak:

$$\left|\int_{\Omega} v_p^m\left(\psi_k^m - \psi_k\right)\bar{\eta}_k\,dxdt\right| \le c_{14}\left\|\psi_k^m - \psi_k\right\|_{L_2(\Omega)},\ k=1,2,\ p=0,1 \tag{42}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Burada $c_{14} > 0$, m'den bağımsızdır. $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega),\ W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayları $L_2(\Omega)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için

$$\psi_k^m \to \psi_k \text{ kuvvetli } L_2(\Omega) \text{ da},\ k=1,2 \tag{43}$$

limit bağıntısını kolaylıkla elde ederiz. Bu limit bağıntısını göz önüne alarak (42) eşitsizliğinin her iki tarafında limite geçersek aşağıdaki limit bağıntısının geçerli olur:

$$\int_{\Omega} v_p^m\left(\psi_k^m - \psi_k\right)\bar{\eta}_k\,dxdt \to 0,\ k=1,2,\ p=0,1 \tag{44}$$

(41) ve (43) limit bağıntılarını kullanarak (40) eşitliğinin her iki tarafında $m \to \infty$ için limite geçersek (38) ve (39) limit bağıntısının geçerli olduğunu elde ederiz.

(37) – (39) limit bağıntılarını kullanarak (34) ‘de $m \to \infty$ için limite geçersek aşağıdaki özdeşliğin geçerli olduğunu elde ederiz.

$$\int_{\Omega} \left[i \frac{\partial \psi_k}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_k}{\partial x^2} - a(x)\varphi_k - v_0(x)\psi_k - iv_1\psi_k \right] \bar{\eta}_k \, dxdt$$
$$= \int_{\Omega} f_k \bar{\eta}_k \, dxdt, \ \forall \eta_k \in L_2(\Omega) \tag{45}$$

Bu özdeşlikten $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayından olan $\psi_k = \psi_k(x,t), \ k=1,2$ limit fonksiyonlarının (2) denklemini sağladığını görüyoruz.

Şimdi $\psi_k(x,t), \ k=1,2$ fonksiyonlarının (3) başlangıç şartlarını sağladığını ispatlayalım.

Gömme teoremlerine göre $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega), \ W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayları $L_2(0,l)$ uzayına kompakt gömülürler. Bu nedenle $m \to \infty$ için

$$\psi_k^m(x,0) \to \psi_k(x,0), \ k=1,2, \ L_2(0,l) \text{ de kuvvetli} \tag{46}$$

limit bağıntısı geçerlidir. Diğer taraftan aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$\int_0^l \left|\psi_k(x,0) - \varphi_k(x)\right|^2 dx \le 2\int_0^l \left|\psi_k^m(x,0) - \psi_k(x)\right|^2 dx +$$
$$+2\int_0^l \left|\psi_k^m(x,0) - \varphi_k(x)\right|^2 dx, \ k=1,2 \tag{47}$$

(35) şartlarını ve (46) limit bağıntısını kullanarak (47) eşitsizliğinin her iki tarafında limite geçip:

$$\int_0^l \left|\psi_k(x,0) - \varphi_k(x)\right|^2 dx = 0, \ k=1,2$$

eşitliğini elde ederiz. Burada kolaylıkla $\psi_k(x,t), \ k=1,2$ fonksiyonlarının (3) başlangıç şartını sağladığı elde edilir.

Şimdi $\psi_k(x,t),\ k=1,2$ fonksiyonlarının (4) – (5) sınır şartlarını sağladığını ispatlayalım. $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $L_2(0,T)$ uzayına kompakt gömülür. Yani $m\to\infty$ için

$$\psi_1^m(0,t)\to\psi_1(0,t), L_2(0,T) \text{ de kuvvetli} \tag{48}$$

$$\psi_1^m(l,t)\to\psi_1(l,t), L_2(0,T) \text{ de kuvvetli} \tag{49}$$

limit bağıntıları geçerlidir. Bu takdirde (36) şartlarından birincisini kullanırsak (48) – (49) limit bağıntılarından ve

$$\int_0^T |\psi_1(0,t)|^2\,dt \le 2\int_0^T |\psi_1^m(0,t)-\psi_1(0,t)|^2\,dt + 2\int_0^T |\psi_1^m(0,t)|^2\,dt \tag{50}$$

$$\int_0^T |\psi_1(l,t)|^2\,dt \le 2\int_0^T |\psi_1^m(l,t)-\psi_1(l,t)|^2\,dt + 2\int_0^T |\psi_1^m(l,t)|^2\,dt \tag{51}$$

eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitlikleri elde ediyoruz:

$$\int_0^T |\psi_1(0,t)|^2\,dt = 0,\ \int_0^T |\psi_1(l,t)|^2\,dt = 0 \tag{52}$$

Bu eşitlikler $\psi_1(x,t)$ fonksiyonunun $x=0, x=l$ noktalarında $\forall t\in\overset{0}{(0,T)}$ için sınır şartlarının sağlandığı ispatlanmış olur.

Şimdi $\psi_2(x,t)$ fonksiyonunun (5) sınır şartlarını sağladığını gösterelim:

$\psi_2^m\in W_2^{2,1}(\Omega)$ olduğundan gömme teoremine göre aşağıdaki limit bağıntılarının geçerli olduğunu kolaylıkla elde ederiz: $m\to\infty$ için

$$\frac{\partial\psi_2^m(0,t)}{\partial x}\to\frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x}, L_2(0,T) \text{ de zayıf} \tag{53}$$

$$\frac{\partial\psi_2^m(l,t)}{\partial x}\to\frac{\partial\psi_2(l,t)}{\partial x}, L_2(0,T) \text{ de zayıf} \tag{54}$$

dır. Bu takdirde (36) ‘ daki ikinci şartı kullanırsak $\forall\eta\in L_2(0,T)$ için

$$\left|\int_0^T \frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x}\bar{\eta}(t)\,dt\right| \le \left|\int_0^T \left(\frac{\partial\psi_2^m(0,t)}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x}\right)\bar{\eta}(t)\,dt\right| + \left|\int_0^T \frac{\partial\psi_2^m(0,t)}{\partial x}\bar{\eta}(t)\,dt\right| \quad (55)$$

$$\left|\int_0^T \frac{\partial\psi_2(l,t)}{\partial x}\bar{\eta}(t)\,dt\right| \le \left|\int_0^T \left(\frac{\partial\psi_2^m(l,t)}{\partial x} - \frac{\partial\psi_2(l,t)}{\partial x}\right)\bar{\eta}(t)\,dt\right| + \left|\int_0^T \frac{\partial\psi_2^m(l,t)}{\partial x}\bar{\eta}(t)\,dt\right| \quad (56)$$

eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\int_0^T \frac{\partial\psi_2(0,t)}{\partial x}\bar{\eta}(t)\,dt = 0,\ \int_0^T \frac{\partial\psi_2(l,t)}{\partial x}\bar{\eta}(t)\,dt = 0 \quad (57)$$

Bu şartlar $\forall\eta \in L_2(0,T)$ için sağlandığından, buradan kolaylıkla $\psi_1(x,t)$ fonksiyonunun $x=0,\ x=l$ noktalarında II. çeşit sınır şartlarını sağladığı görülür.

Böylece $\{\psi_k^m\},\ k=1,2$ fonksiyonlar dizisinin limit fonksiyonları olan $\psi_k=\psi_k(x,t),\ k=1,2$ fonksiyonları (2) – (5) sınır değer probleminin $\{v^m\}\in V$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v=v(t)\in V$ 'ye karşılık gelen çözümüdür ve bu çözümler sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega),\ W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarına ait olan hemen hemen her yerde çözümleridir. Yani $\psi_k=\psi_k(x,t)\equiv\psi_k(x,t;v),\ k=1,2$ bilindiği gibi $L_2(\Omega),\ H$ uzaylarının normları alttan zayıf, yarı sürekli fonksiyonellerdir. Bu takdirde $\{v^m\}\in V$ dizisinin $v\in V$ elemanına $(*)$- zayıf yakınsadığında $\{\psi_k^m\},\ k=1,2$ dizilerinin $\psi_k,\ k=1,2$ fonksiyonlarına $L_2(\Omega)$ uzayında kuvvetli yakınsamasını, aynı zamanda zayıf yakınsamasını göz önüne alarak $\alpha\ge 0$ için aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$J_{\alpha^*} \le J_\alpha(v) \le \lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) = J_{\alpha^*}$$

Bu bağıntıdan $J_{\alpha^*}=J_\alpha(v)$ olduğu ispatlanır. Yani $v\in V$ elemanı $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin minimum noktasıdır. Böylece (2) – (5) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olması ispatlanmış olur.

3.1.3. Fonksiyonelin Diferansiyellenebilmesi

Bu bölümde (2) – (5) optimal kontrol problemi için amaç fonksiyonelin diferansiyellenebilmesi incelenir ve onun gradyenti için formül ispatlanır. Kabul edelim ki; $\phi_k = \phi_k(x,t),\ k = 1,2$ fonksiyonları aşağıdaki eşlenik problem denilen sınır değer probleminin çözümü olsun:

$$i\frac{\partial \phi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \phi_k}{\partial x^2} - a(x)\phi_k - v_0(t)\phi_k + iv_1(t)\phi_k = 2(-1)^k\left(\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)\right), \quad (x,t)\in\Omega \tag{58}$$

$$\phi_k(x,t) = 0,\ k = 1,2,\ x\in(0,l), \tag{59}$$

$$\phi_1(0,t) = \phi_1(l,t) = 0,\ t\in(0,T), \tag{60}$$

$$\frac{\partial \phi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_2(l,t)}{\partial x} = 0,\ t\in(0,T). \tag{61}$$

Burada $\psi_k = \psi_k(x,t),\ k = 1,2$ (2) – (5) sınır değer probleminin $v\in V$ ‘ ye karşılık gelen çözümüdür.

Tanım 3.1.3.1: (58)–(61) eşlenik sınır değer probleminin çözümü denirken; $C^0\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayına ait olan $\frac{\partial \eta_{12}(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial \eta_{12}(l,t)}{\partial x} = 0$ şartlarını sağlayan $\forall \eta_{11} \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega), \forall \eta_{12} \in W_2^{2,1}(\Omega)$ için,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi_k\left[-i\frac{\partial \bar{\eta}_{1k}}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \bar{\eta}_{1k}}{\partial x^2} - a(x)\bar{\eta}_{1k} - v_0(x)\bar{\eta}_{1k} + iv_1\bar{\eta}_{1k}\right]dxdt \\ &= (-1)^k\, 2\int_\Omega \left(\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)\right)\bar{\eta}_{1k}(x,t)\,dxdt + \\ &+ i\int_0^l \phi_k(x,0)\bar{\eta}_{1k}(x,0)\,dx,\ k = 1,2\end{aligned} \tag{62}$$

integral özdeşliğini sağlayan $\phi_k = \phi_k(x,t),\ k = 1,2$ fonksiyonları anlaşılmaktadır.

[19], [20] çalışmalarındaki sonuçlardan faydalanarak (58) – (61) sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve bir tekliğine ait olan hükmü elde edebiliriz. Ayrıca

bu sınır değer probleminin çözümü için aşağıdaki kestirimin geçerli olduğunu da söyleyebiliriz:

$$\forall t \in [0,T] \left\| \phi_k(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} \le c_{15} \left\| \psi_1 - \psi_2 \right\|_{L_2(\Omega)},\ k = 1,2 \tag{63}$$

Burada $c_{15} > 0$ sayısı t ‘ den bağımsızdır.

Aşağıdaki fonksiyonu göz önüne alalım:

$$\begin{aligned} & H\left(x,\varphi_1(x,.),\varphi_2(x,.),v_0^{(x)},v_1^{(\alpha)},\bar{\phi}_1(x,.),\bar{\phi}_2(x,.) \right) \\ & = \int_0^T \mathrm{Re}\left(\varphi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t)+\varphi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) \right) dt.v_0(t) - \\ & = \int_0^T \mathrm{Im}\left(\varphi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t)+\varphi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) \right) dt.v_1(t) - \\ & -\alpha\left[\left(v_0(t)-w_0(t) \right)^2 + \left(v_1(t)-w_1(t) \right)^2 \right] \end{aligned} \tag{64}$$

Bu fonksiyona (1) – (5) optimal kontrol problemi için Hamilton-Pontryagin fonksiyonu denir.

Teorem 3.1.3.2: Kabul edelim ki Teorem 3.1.2.2’ nin şartları sağlanmış olsun. Bu takdirde (1) – (5) optimal kontrol probleminin amaç fonksiyoneli olan $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onun gradyenti için,

$$J'_\alpha(v) = -\frac{\partial H}{\partial v} \tag{65}$$

formülü geçerlidir. Burada $H = H\left(t,\psi_1,\psi_2,v_0,v_1,\bar{\phi}_1,\bar{\phi}_2 \right)$ fonksiyonu (64) formüllü ile tanımlanır.

İspat: $\forall v \in V$ elemanını alalım ve bu eleman üzerinde $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışını hesaplayalım. (1) ve (17) formüllerini kullanırsak kolaylıkla aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\Delta J_\alpha(v) = J_\alpha(v+\Delta v) - J_\alpha(v)$$
$$= 2\int_\Omega \mathrm{Re}\left[\left(\psi_1(x,t) - \psi_2(x,t)\right)\left(\Delta\bar{\psi}_1(x,t) - \Delta\bar{\psi}_2(x,t)\right)\right]dxdt$$
$$+2\alpha\int_0^l \left(v_0(t) - w_0(t)\right)\Delta v_0(t)\,dx + \tag{66}$$
$$+2\alpha\int_0^l \left(v_1(t) - w_1(t)\right)\Delta v_1(t)\,dx + \|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} -$$
$$-2\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1(x,t)\Delta\bar{\psi}_2(x,t)\,dxdt + \alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(\Omega)}\right)$$

Burada $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,t),\ k=1,2$ fonksiyonları (12) – (14) sınır değer probleminin çözümüdür. Teoremin şartına göre teorem 3.1.2.2 ‘ nin şartları sağlanıyor. Bu nedenle (2) – (5) sınır değer probleminin çözümü olan $\psi_1(x,t)$ ve $\psi_2(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega),\ W_2^{2,1}(\Omega)$ uzaylarının elemanıdır ve problemin hemen hemen her yerde çözümüdür. Buna göre de $\Delta\psi_k = \Delta\psi_k(x,t) = \psi_k(x,t;v+\Delta v) - \psi_k(x,t;v)$, k=1,2

fonksiyonları için aşağıdaki integral özdeşlikleri yazılabilir:

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi_k - (v_0+\Delta v_0)\Delta\psi_k - i(v_1+\Delta v_1)\Delta\psi_k\right)\bar{\eta}_k\,dxdt$$
$$= \int_\Omega \Delta v_0\psi_k\bar{\eta}_k\,dxdt + i\int_\Omega \Delta v_1\psi_k\bar{\eta}_k\,dxdt \tag{67}$$

$\forall\eta_k = \eta_k(x,t) \in L_2(\Omega),\ k=1,2,\ \phi_k \in C^0\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ olduğundan bu integral özdeşliğinde $\bar{\eta}_k = \bar{\phi}_k$ alalım. Bu takdirde aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi_k - (v_0+\Delta v_0)\Delta\psi_k - i(v_1+\Delta v_1)\Delta\psi_k\right)\bar{\eta}_k\,dxdt$$
$$= \int_\Omega \Delta v_0(t)\psi_k(x,t)\bar{\phi}_k(x,t)\,dxdt + i\int_\Omega \Delta v_1(t)\psi_k(x,t)\bar{\phi}_k(x,t)\,dxdt \tag{68}$$

Bu eşitliğin kompleks eşleniğini yazarsak:

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial\Delta\bar{\psi}_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\bar{\psi}_k}{\partial x^2}-a(x)\Delta\bar{\psi}_k-(v_0+\Delta v_0)\Delta\bar{\psi}_k-i(v_1+\Delta v_1)\Delta\bar{\phi}_k\right)\phi_k(x,t)\,dxdt$$
$$=\int_{\Omega}\Delta v_0(t)\bar{\psi}_k(x,t)\phi_k(x,t)\,dxdt-i\int_{\Omega}\Delta v_1(t)\bar{\psi}_k(x,t)\phi_k(x,t)\,dxdt \tag{69}$$

elde edilir.

Şimdi (62) integral özdeşliğinde $\bar{\eta}_{1,k}=\Delta\bar{\psi}_k,\ k=1,2$ alalım ve $\Delta\bar{\psi}_k(x,0)=0$ şartını kullanalım. Bu takdirde (62) özdeşliğinden aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega}\phi_k\left(-i\frac{\partial\Delta\bar{\psi}_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\bar{\psi}_k}{\partial x^2}-a(x)\Delta\bar{\psi}_k-v_0(t)\Delta\bar{\psi}_k+iv_1(t)\Delta\bar{\psi}_k\right)dxdt$$
$$=(-1)^k\,2\int_{\Omega}\left(\psi_1(x,t)-\psi_2(x,t)\right)\Delta\bar{\psi}_k\,dxdt \tag{70}$$

Aynı şekilde bu eşitliğin kompleks eşleniğini yazarsak;

$$\int_{\Omega}\bar{\phi}_k\left(i\frac{\partial\Delta\psi_k}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi_k}{\partial x^2}-a(x)\Delta\psi_k-v_0(x)\Delta\psi_k+iv_1(x)\Delta\psi_k\right)dxdt$$
$$=(-1)^k\,2\int_{\Omega}\left(\bar{\psi}_1(x,t)-\bar{\psi}_2(x,t)\right)\Delta\psi_k(x,t)\,dxdt \tag{71}$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi (68) eşitliğinden (71) eşitliğini ve (69) eşitliğinden (68) eşitliğini taraf tarafa çıkarırsak ve dönüşümler yaparsak kolaylıkla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$2\int_{\Omega}\mathrm{Re}\left[(\psi_1-\psi_2)\left(\Delta\bar{\psi}_1-\Delta\bar{\psi}_2\right)\right]dxdt$$
$$=-\int_{\Omega}\mathrm{Re}\left(\psi_1\bar{\phi}_1+\psi_2\bar{\phi}_2\right)\Delta v_0(t)\,dxdt-\int_{\Omega}\mathrm{Re}\left(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1+\Delta\psi_2\bar{\phi}_2\right)\Delta v_0(t)\,dxdt+ \tag{72}$$
$$+\int_{\Omega}\mathrm{Im}\left(\varphi_1\bar{\phi}_1+\varphi_2\bar{\phi}_2\right)\Delta v_1(t)\,dxdt+\int_{\Omega}\mathrm{Im}\left(\Delta\psi_1\bar{\phi}_1+\Delta\psi_2\bar{\phi}_2\right)\Delta v_1(t)\,dxdt$$

Bu eşitliği (66) formülünü dikkate alırsak fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_0^l \Big[-\int_0^T \mathrm{Re}\Big(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) \Big) dt +$$
$$2\alpha\big(v_0(t) - w_0(t)\big)\Big] \Delta v_0(t)\, dx +$$
$$\int_0^l \Big[\int_0^T \mathrm{Im}\Big(\varphi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \varphi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) \Big) dt +$$
$$2\alpha\big(v_1(t) - w_1(t)\big)\Big] \Delta v_1(t)\, dx + R \tag{73}$$

Burada R kalanı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$R = \|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\|\Delta v\|^2_H - 2\int_\Omega \mathrm{Re}\Big(\Delta\psi_1 \bar{\psi}_2 \Big) dxdt -$$
$$\int_\Omega \mathrm{Re}\Big(\Delta\psi_1 \bar{\phi}_1 + \Delta\psi_2 \bar{\phi}_2 \Big) \Delta v_0(t)\, dxdt +$$
$$\int_\Omega \mathrm{Im}\Big(\Delta\psi_1 \bar{\phi}_1 + \Delta\psi_2 \bar{\phi}_2 \Big) \Delta v_1(t)\, dxdt. \tag{74}$$

Öncelikle R kalanını kestirelim. R için olan formülü kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$|R| \le 2\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\|\Delta v\|^2_H +$$
$$\int_\Omega |\Delta v_0(x)| \big(|\Delta\psi_1\phi_1| + |\Delta\psi_2\phi_2| \big) dxdt + \int_\Omega |\Delta v_1(x)| \big(|\Delta\psi_1\phi_1| + |\Delta\psi_2\phi_2| \big) dxdt \tag{75}$$

Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini uygularsak, $\Delta v \in B,\ \phi_k \in C^0\big([0,T], L_2(0,l)\big)$ olduğunu ve (63), (8), (9) kestirimlerini dikkate alırsak sonuncu eşitsizlikten aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$|R| \le c_{16}\Big(\|\Delta\psi_1\|^2_{L_2(\Omega)} + 2\|\Delta\psi_2\|^2_{L_2(\Omega)} + \alpha\|\Delta v\|^2_B \Big) \tag{76}$$

Burada $c_{16} > 0$ sabiti Δv' den bağımsızdır. Bu eşitsizlikte $\Delta\psi_1$ ve $\Delta\psi_2$ için olan (21) kestirimlerini kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$|R| \le c_{17}\Big(\|\Delta v\|^2_B \Big) \tag{77}$$

Burada $c_{17} > 0$ sabiti Δv' den bağımsızdır. Böylece (76) kestirimini kullanırsak,

$$|R| = \circ\left(\|\Delta v\|_B\right) \tag{78}$$

bağıntısı elde edilir. Yani R kalanı, $\|\Delta v\|_B$ normuna göre yüksek mertebeden sonsuz küçüktür.

(78) bağıntısını kullanırsak fonksiyonelin artışı için olan ifadeyi aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha(v) = &\int_0^l \left[-\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) \right) dt + \right.\\ &\left. 2\alpha\left(v_0(t) - w_0(t)\right) \right] \Delta v_0(t)\, dx + \\ &\int_0^l \left[\int_0^T \mathrm{Im}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) \right) dt + \right.\\ &\left. 2\alpha\left(v_1(t) - w_1(t)\right) \right] \Delta v_1(t)\, dx + \circ\left(\|\Delta v\|_B\right).\end{aligned} \tag{79}$$

Fonksiyonellerin Frechet anlamında diferansiyellenebilirliğinin tanımını sonuncu formülde uygularsak ve Hamilton-Pontryagin fonksiyonunun ifadesini dikkate alırsak aşağıdaki bağıntıyı yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha(v) = &-\int_0^l \frac{\partial H\left(x, \psi_1(x,.), \psi_2(x,.), v_0(x), v_1(x), \bar{\phi}_1(x,.), \bar{\phi}_2(x,.) \right) v_0(t)}{\partial v_0} dx - \\ &\int_0^l \frac{\partial H\left(x, \psi_1(x,.), \psi_2(x,.), v_0(t), v_1(t), \bar{\phi}_1(x,.), \bar{\phi}_2(x,.) \right) v_1(t)}{\partial v_1} dx + \circ\left(\|\Delta v\|_B\right)\end{aligned}$$

Buradan da kolaylıkla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha(v) = &-\int_0^l \left\langle \frac{\partial H\left(x, \psi_1(x,.), \psi_2(x,.), v_0(t), v_1(t), \bar{\phi}_1(x,.), \bar{\phi}_2(x,.) \right)}{\partial v}, \Delta v \right\rangle_{R^2} dx \\ &+ \circ\left(\|\Delta v\|_B\right).\end{aligned} \tag{80}$$

Diğer yandan;

$$\Delta J_\alpha(v)=\int_0^l \left\langle \Delta J_\alpha'(v),\Delta v(t)\right\rangle_{R^2} dx+0\left(\|\Delta v\|_B\right) \tag{81}$$

dir. (80) ve (81)'i karşılaştırırsak teoremin hükmünü elde ederiz. Teorem ispatlandı.

3.1.4. Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Varyasyon Eşitsizliği Şeklinde Gerek Şart

Bu bölümde (1) – (5) optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde gerek şart ispatlanacaktır.

Teorem 3.1.4.1: Teorem 3.1.3.2' nin şartları sağlanmış olsun ve $v^*\in V$ kontrolü (1) – (5) probleminin bir çözümü olsun. Bu takdirde $\forall v\in V$ için,

$$\begin{aligned}
&\int_0^l\left[\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_1^*(x,t)\bar{\phi}_1^*(x,t)+\psi_2^*(x,t)\bar{\phi}_2^*(x,t)\right)dt+2\alpha\left(v_0^*(t)-w_0(t)\right)\right]\Delta v_0(t)\times\\
&\times\left[v_0(t)-v_0*(t)\right]dx-\int_0^l\left[\int_0^T \mathrm{Im}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t)+\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)dt+\right.\\
&\left.+2\alpha\left(v_1^*(t)-w_1(t)\right)\right]\left(v_1(t)-v_1^*(t)\right)dt\le 0
\end{aligned} \tag{82}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\psi_k^*(x,t)\equiv\psi_k\left(x,t;v^*\right)$, $\phi_k^*(x,t)\equiv\phi_k^*\left(x,t;v^*\right)$, $k=1,2$, sırasıyla (2)-(5) ve (58)-(61) sınır değer problemlerinin çözümleridir.

İspat: V kümesi konveks bir kümedir. Ayrıca Teorem 3.1.3.2' den $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde Frechet anlamda diferansiyellenebilir bir fonksiyonel olduğunu ve gradyenti için

$$\begin{aligned}
J_\alpha^*&=-\int_0^T \mathrm{Re}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t)+\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)dt+2\alpha\left(v_0(t)-w(t)\right)+\\
&+\int_0^T \mathrm{Im}\left(\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t)+\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t)\right)dt+2\alpha\left(v_1(t)-w(t)\right)
\end{aligned} \tag{83}$$

formülünün geçerli olduğunu kolaylıkla söyleyebiliriz. Önce $J_\alpha'(v)$ gradyentinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Bu amaçla $J_\alpha'(v)$ gradyentinin $\forall v\in V$

için artışını hesaplayalım. (82) formülünü kullanırsak fonksiyonelin gradyentinin v elemanı üzerinde artışı için

$$\Delta J_\alpha '(v) = J_\alpha '(v+\Delta v) - J_\alpha '(v)$$
$$= -\int_0^T \mathrm{Re}\Big(\Delta\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_1(x,t)\Delta\bar{\phi}_1(x,t) + \Delta\psi_1(x,t)\Delta\bar{\phi}_1(x,t) +$$
$$+\Delta\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) + \psi_2(x,t)\Delta\bar{\phi}_2(x,t) + \Delta\psi_2(x,t)\Delta\bar{\phi}_2(x,t)\Big) dt + 2\alpha\Delta v_1(t) +$$
$$+\int_0^T \mathrm{Im}\Big(\Delta\psi_1(x,t)\bar{\phi}_1(x,t) + \psi_1(x,t)\Delta\bar{\phi}_1(x,t) + \Delta\psi_1(x,t)\Delta\bar{\phi}_1(x,t) + \Delta\psi_2(x,t)\bar{\phi}_2(x,t) +$$
$$+\psi_2(x,t)\Delta\bar{\phi}_2(x,t) + \Delta\psi_2(x,t)\Delta\bar{\phi}_2(x,t)\Big) dt + 2\alpha\Delta v_1(t)$$

(84)

Burada $\Delta\psi_k \equiv \Delta\psi_k(x,t),\ k=1,2$ fonksiyonları (11)-(14) sınır değer probleminin, $\Delta\phi_k(x,t) = \Delta\phi_k(x,t) \equiv \phi_k(x,t;v+\Delta v) - \phi_k(x,t;v),\ k=1,2$ fonksiyonları ise aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$i\frac{\partial\Delta\phi_k}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\phi_k}{\partial x^2} - a(x)\Delta\phi_k - (v_0+\Delta v_0)\Delta\phi_k - i(v_1+\Delta v_1)\Delta\phi_k$$
$$= \Delta v_0\phi_k(x,t;v) + i\Delta v_1\phi_k(x,t;v) + 2(-1)^k\left[\Delta\psi_1(x,t) - \Delta\psi_1(x,t)\right] \tag{85}$$

$$\Delta\phi_k(x,T) = 0,\ \text{k=1,2},\ x\in(0,l), \tag{86}$$

$$\Delta\phi_1(0,t) = \Delta\phi_1(l,t) = 0,\ t\in(0,T), \tag{87}$$

$$\frac{\partial\Delta\phi_2(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial\Delta\phi_2(l,t)}{\partial x} = 0,\ t\in(0,T). \tag{88}$$

(84) – (87) sınır değer problemi (58) – (61) sınır değer probleminin (2) – (5) sınır değer problemi ile aynı biçimde olduğu kolaylıkla görülür. Buna göre,

$$\left\|\Delta\phi_k(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le c_{18}\left(\left\|\Delta\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\Delta\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|\Delta v\right\|_B\right) \tag{89}$$

$\forall t\in[0,T],\ k=1,2$ kestirimini yazabiliriz. Burada $c_{18}>0$ sabiti Δv ve $\Delta\psi_k,\ k=1,2$' den bağımsızdır. Burada (24) kestirimini dikkate alırsak, (88) eşitsizliğinde aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\left\|\Delta\phi_k(.,t)\right\|_{L_2(0,l)} \le c_{19}\left\|\Delta v\right\|_B \tag{90}$$

Burada $c_{19} > 0$ sabiti Δv 'den bağımsızdır.

Şimdi $\Delta J_\alpha{}'(v)$ artışını değerlendirelim. (83) formülünde Cauchy-Bunjakovskii eşitsizliğini kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned}\left\|\Delta J_\alpha{}'(v)\right\|_{L_1^2(0,T)} \le\, & 2\left\|\Delta\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\phi_1\right\|_{L_2(\Omega)} + 2\left\|\Delta\phi_1\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)} + \\ & +2\left\|\Delta\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\phi_2\right\|_{L_2(\Omega)} + 2\left\|\Delta\phi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)} + \\ & +2\left\|\Delta\psi_1\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\Delta\phi_1\right\|_{L_2(\Omega)} + 2\left\|\Delta\psi_2\right\|_{L_2(\Omega)}\left\|\Delta\phi_2\right\|_{L_2(\Omega)} + 4\alpha\sqrt{\ell}\left\|\Delta v\right\|_B\end{aligned} \tag{91}$$

Burada $L_1^2(0,T) = L_1(0,T)xL_1(0,T)$ dir. (8), (9), (24) ve (89) kestirimlerini kullanıp $\Delta v \in B$ olduğunu dikkate alırsak kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left\|\Delta J_\alpha{}'(v)\right\|^2_{L_1(0,l)} \le c_{20}\left\|\Delta v\right\|_B \tag{92}$$

Burada $c_{20} > 0$ sabiti Δv ' den bağımsızdır. Bu eşitlikten $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin gradyentinin $\forall v \in V$ elemanı üzerinde sürekli olduğu görülür. Buradan $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde Frechet anlamında sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonel olduğu ispatlanmış olur. Böylece [16]'daki teoremin şartlarının sağlandığını gördük. Bu takdirde söz konusu teoreme göre $v^* \in V$ çözümü için;

$$\left\langle J_\alpha{}'(v^*), v - v^*\right\rangle_B \ge 0,\ \forall v \in V$$

eşitsizliğinin geçerli olduğu ispat edilir. Burada $J_\alpha{}'(v)$ fonksiyonelinin gradyenti için formülü dikkate alırsak elde edilen bağıntıyı (-1) ile çarptığımızda teoremin hükmünün geçerli olduğu ispatlanmış olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu çalışmada durumu Schrödinger denklemiyle ifade edilen başlangıç sınır değer problemi için Lions fonksiyoneli kullanılarak bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır.

Optimal kontrol probleminin çözümünün varlığını ve tekliğini incelemeden önce sınır değer problemlerinin çözümü kavramı, çözümlerinin varlığı, tekliği ve çözümler için hangi kestirimlerin geçerli olduğu verilmiştir. Daha sonra bu kestirimler kullanılarak optimal kontrol probleminin iyi konulup konulmadığı incelenmiştir. Bu amaçla optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Ayrıca amaç fonksiyoneli olarak kullanılan Lions fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiş ve gradyenti elde edilmiştir. Elde edilen gradyent formülü kullanılarak optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde bir gerek şart elde edilmiştir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışma, ele alınan optimal kontrol probleminin konulması açısından bundan sonraki yapılacak çalışmalara bir katkı sağlaması bakımından önem taşımaktadır. İncelenen optimal kontrol probleminde Schrödinger denklemi kompleks potansiyele sahip olup amaç fonksiyoneli olarak Lions fonksiyoneli kullanılmaktadır. Ayrıca olası kontroller kümesi olarak (0,T) aralığında ölçülebilir, modülünün karesiyle integrallenebilir, sınırlı fonksiyonlar uzayı dikkate alınmaktadır. Ele alınan optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı, tekliği, amaç fonksiyonelinin diferansiyellenebilirliği ayrıntılı bir biçimde gösterilmiş ve çözüm için bir gerek şart elde edilmiştir.

Önceki çalışmalarda kullanılan kontroller çoğu zaman x değişkenine bağlıdır. Ancak, bu çalışmada kontroller zaman değişkeni olan t'ye bağlıdır. Dolayısıyla bu çalışmada elde edilen sonuçlar önceki çalışmalardan farklıdır.

6. KAYNAKLAR

[1] Butkovskiy, A.G., Samoilenko Yu.İ., “Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü”, Nauka, 256 s, Moscow. (Rusça).

[2] Dın Nıo Hao, “Kuantum objektlerinin optimal kontrolü”, Nauka, Moscow, N. 2, 14-20, 1986. (Rusça).

[3] Goebel, M., “On existence of optimal control”, Math. Nachr., Vol 93, 1979.

[4] Hsieh, P. F., Sibuya, Y., “Basic theory of ordinary differential equations”, Springer Verlag, 468 s, New york, 1999.

[5] İskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., “A variational method for solving the inverse problem of determining the quantum-mechanical potential”, Soviet Math. Dok 1., 38(3), 637-641, 1989.

[6] İskenderov, A.D., “Durgun olmayan Schrödinger denkleminde potansiyelin bulunması”, Matematik Modellemenin ve Optimal Kontrolün Problemleri Dergisi, Baku, 6-36, 2001. (Rusça).

[7] İskenderov, A.D., Mahmudov, N.M., “Kuantum mekanik sistemler için Lions kriterli optimal kontrol”, AMEA’ nın Haberleri Fizik Teknik Matematik Bilimleri Serisi, c.16, No:5-6-30-35, 1995.

[8] Kolmogorov, A. N., Fomin, S.V., “Fonksiyonlar teorisinin ve fonksiyonel analizin elemanları”, Nauka, 624 s, Moscow, 1989. (Rusça).

[9] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V.A., Ural’ceva, N.N., “Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type”, Nauka, 736 s, Moscow, 1967. (Rusça).

[10] Ladyzenskaja, O. A., Ural’ceva, N. N., “Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type”, Nauka, Moscow, 1973. (Rusça).

[11] Landau, L.D., Lifşis E.M. “Kuantum Mekaniği”, Cilt 3-M, 702 s, 1963. (Rusça).

[12] Lions, J.L., “Optimal Control of Systems Governed By Partial Differential Equations”, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 400 s, New York, 1971.

[13] Mahmudov, N. M., “Lions fonksiyonelli kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol problemlerinin farklar metoduyla çözümü”, Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri, 7, 79-82, 1997. (Rusça).

[14] Razgulin, A.V., “Lineer olmayan Schrödinger denklemi için kontrol problemlerinin yaklaşımları”, Moskova Devlet Üniversitesinin Haberleri. Seri 15 “Nümerik Analiz ve Sibernetik.” 15(2), 28-33, 1998. (Rusça).

[15] Silla, N., “Schrödinger tipli kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol problemlerinin nümerik çözümü”, Doktora Tezi, Bakü Devlet Üniversitesi, 165 s, Bakü, 1991.

[16] Vasilyev, F.P., “Ekstremal problemlerin çözüm metodları”, Nauka, 400 s, Moskova, 1981. (Rusça).

[17] Vorontsov, M.A., Shmalqauzen, V. I., “Adaptiv optiğin prensipleri”, Nauka, 336 s, Moskova, 1985. (Rusça).

[18] Yagubov, G. Ya., Musayeva, M.A., “Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için İdentifikasyon Problemi Hakkında”, Diferansiyel Denklemler, 33(12), 1691-1698, 1997. (Rusça).

[19] Yagubov, G. Ya., “Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Optimal Kontrol”, Kiev, 318 s, 1994.

[20] Yetişkin, H., “Kompleks potansiyelli Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemi ve onun sonlu fark yaklaşımı”, Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Erzurum, 2005.

[21] Yıldırım Aksoy, Nigar. Vd, “Variational problem with complex coefficient of a nonlinear Schrodinger equation”, Proc. Indian Acad. Sc. (Math. Sci.), Vol.122, No:3, pp.469-484, (2012).

[22] Yosida, K., “Functional Analysis”, Springer-Verlag, 624 s, New York, 1980.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Seray SALTAŞ

Doğum Yeri : Ardahan

Doğum Tarihi: 12.09.1987

Medeni Hali : Bekar

Yabancı Dili : İngilizce

Eğitim Durumu

Lise : Kars Cumhuriyet Lisesi(Y.D.A)(2001-2005)

Lisans : Atatürk Üniversitesi(2006-2010)

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi(2011-2013)

Çalıştığı Kurum/Kurumlar:

Kars Milli Eğitim(2010-2012)

Kars Çalışma ve İş Kurumu İl Müdürlüğü(2013-Halen)