T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

HİPERGEOMETRİK FONKSİYONLARIN GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Semra POLAT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Erhan DENİZ

HAZİRAN–2013
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Semra POLAT'ın Doç. Dr. Erhan DENİZ'in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Hipergeometrik Fonksiyonların Geometrik Özellikleri" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy .birliği.... ile kabul edilmiştir.

21 / 06 /2013

Adı ve Soyadı imza

Baskan :	Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	
Üye :	Yrd. Doç. Dr. Güventürk UĞURLU	
Üye :	Doç. Dr. Erhan DENİZ	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../2013. gün ve ..../ .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Muzaffer ALKAN
Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarım da etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erhan DENİZ'e, Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Doç. Dr. Nizami MUSTAFA' ya, Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fizik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Güventürk UĞURLU' ya teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Emekleri ve sevgileriyle beni bugüne getiren, beni hiç yalnız bırakmayan, her zaman yanımda olan ve çok sevdiğim aileme sonsuz teşekkür ederim.

Kars-2013 **Semra POLAT**

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında Gauss hipergeometrik fonksiyonların geometrik özellikleri ele alındı. Gauss hipergeometrik fonksiyonun belirttiği serinin katsayılarındaki sabitlerin durumuna bağlı olarak bu fonksiyonun yıldızıllığı, konveksliği ve konvekse yakınlığı için teoremler ispatlarıyla birlikte verildi. Gauss hipergeometrik fonksiyonun düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyon olması için bazı durumlarda gerek ve yeter şartlar bazı durumlarda da sadece yeter şartları içeren sonuçlar verildi. Ayrıca, Gauss hipergeometrik fonksiyonun integral operatörün geometrik özellikleri üzerine sonuçlar verildi.

2013, 70 Sayfa

Anahtar kelimeler: Analitik Fonksiyon, Ünivalent Fonksiyon, Hipergeometrik Fonksiyon, Yıldızıl ve Konveks Fonksiyon, Konvekse Yakın Fonksiyon, Düzgün Yıldızıl ve Düzgün Konveks Fonksiyon, Subordinasyon.

ABSTRACT

In this thesis we investigate the geometric properties of Gauss hypergeometric functions. We give the theorems with proofs for starlikeness, convexity and close to convexity of this function related to the situation of constants of the coefficients of the series of the function.

We also give the results that in some cases contains neccessary and sufficient conditions and in some other cases only sufficient conditions for the Gauss hypergeometric function to be uniformly starlike and uniformly convex.

Furthermore, we give the results on the geometric properties of the integral operator of Gauss hypergeometric function.

2013, 70 pages

Keywords: Analytic Function, Univalent Function, Hypergeometric Function, Starlike and Convex Function, Close-to-Convex Function, Uniformly Starlike and Uniformly Convex Function, Subordination

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks Düzlem
$\mathcal{U}$	Birim Disk
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathcal{A}$	Normalize Analitik Fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{P}$	U Birim Diskinde Caratheodory Fonksiyonların Sınıfı
$\mathcal{S}$	Normalleştirilmiş Ünivalent Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{S}^*$	Normalize Edilmiş Yıldızıl (Starlike) Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{S}^*(\beta)$	β Mertebeden Yıldızıl (Starlike) Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{C}$	Normalize Edilmiş Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{C}(\beta)$	$\beta.$ Mertebeden Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{K}$	Konvekse Yakın Fonksiyonların Sınıfı
$\mathcal{UST}$	Düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{S}_p$	Parabolik Düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{S}_p(\alpha,\beta)$	β mertebeden $\alpha-$Düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar Sınıfı

$\mathcal{UCV}$	Düzgün Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{UCV}(\alpha)$	$\alpha-$Düzgün Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\mathcal{UCV}(\alpha,\beta)$	β mertebeden $\alpha-$Düzgün Konveks Fonksiyonlar Sınıfı
$\Gamma(z)$	Kompleks Değerli Gama Fonksiyonu
$F(a,b,c;z)$	Gauss Hipergeometrik fonksiyonu
B	Beta fonksiyonu
$(\alpha)_n$	Pochhammer sembolü
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$\arg f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun argümanı
$\operatorname{Re} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun reel kısmı
$\operatorname{Im} f(z)$	$f(z)$ fonksiyonunun sanal kısmı

ŞEKİLLER DİZİNİ

1.GİRİŞ

Ünivalent fonksiyonlar teorisi 20.yüzyılın başlarında ortaya çıkmış eski teori olmasına rağmen, günümüz araştırmalarının aktif bir alanı olarak kalmayı başarmıştır. Bu alanın en önemli problemlerinden bir tanesi geçmişi 1916 yılına dayanan Bieberbach tahminidir. Bu tahmin, $\mathcal{S}$ sınıfındaki her bir fonksiyonun Taylor katsayıları için $|a_n| \le n$ eşitsizliğinin sağlandığını iddia eder.

Bu meşhur Bieberbach tahmininin doğruluğunu göstermek için yapılan ispatların yeniden gözden geçirilmesi, ünivalent fonksiyonlar teorisi üzerine çalışan matematikçilerin düşünce ufkunu önemli ölçüde genişletmiştir. Bieberbach tahmininin her n için çözülmüş olması, bu sahada çalışılacak problemlerin bitmesi anlamına gelmemektedir. Aksine ünivalent fonksiyonlar teorisi daha da zenginleşmiştir. Bu tahminin ispatında kullanılan araçlardan biri hipergeometrik fonksiyonlardır. Bu durum hipergeometrik fonksiyonlar ile geometrik fonksiyonlar (ünivalent fonksiyonlar) arasında önemli bir bağ kurar. Özel fonksiyonların önemli bir kısmını oluşturan hipergeometrik fonksiyonlar matematik, fizik, mühendislik ve olasılık teorisinde bir çok uygulamalarıyla karşımıza çıkar. Ünivalent fonksiyonlar ile ilgili olan kısmı hiç şüphesiz ki hipergeometrik fonksiyonların geometrik özelliklerini incelemek olacaktır.

Bu problem üzerine çalışmalardan ilki 1961 de E. P. Merkes ve W. T. Scott tarafından verilmiştir. Yazarlar çalışmada Gauss'un sürekli- kesir yöntemini kullanarak ve adına Gauss hipergeometrik (veya kısaca hipergeometrik) fonksiyonlar dediğimiz bu fonksiyonların ünivalentliğini ve yıldızıllığını incelemişlerdir. Aynı metodu kullanarak 1986 da S. Ruscheweyh ve V. Singh $a > 0$, $c = a + 1$ ve $-1 \le \rho b \le 1 + \rho a$ şartlarının sağlanması durumunda $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun kesin yıldızıllık mertebesini ve $0 \le a \le b \le c$ olduğunda da yıldızıllık mertebesini elde etmişlerdir.

Fonksiyonların geometrik özellikleri üzerine yapılan çalışmalar için farklı metodlar kullanarak farklı sonuçlar elde etmek mümkündür. Bu durum bu konu üzerine yapılan çalışmaları daha da zenginleştirmiştir. Öyle ki; 1987 de S. Owa ve H. M. Srivastava ünivalent fonksiyonlar teorisinde sıkça kullanılan meşhur Jack lemmasını kullanarak genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonların geometrik özelliklerini, 1990 da S. S. Miller ve P. T. Mocanu subordinasyon yöntemlerini uygulayarak hipergeometrik fonksiyonların yerel ünivalentliğini, yıldızıllığını ve konveksliğini incelemişlerdir. 1993 te H. Silverman yıldızıl ve konveks fonksiyonların katsayı eşitsizliklerini kullanarak hipergeometrik fonksiyonların yıldızıllığı ve konveksliği için bazı durumlarda yeter şartları bazılarında ise gerek ve yeter şartları içeren sonuçları vermişlerdir. Diğer taraftan 1996 da J. H. Choi, S. S. Miller ve P. T. Mocanu'nun 1990 daki sonuçlarının genelleştirmelerini ve farklı olarak fonksiyonların Hardly uzayları için genelleştirilmiş hipergeometrik fonksiyonları içeren bazı uygulamalarını verdiler.

Daha sonraki yıllarda bu konu üzerine sıkça S. Ponnusamy ve M. Vuorinen'nin çalışmalarını görmekteyiz. Yazarlar S. Miller ve P. T. Mocanu'nun sonuçlarının bazı genelleştirilmişlerini vermekle kalmayıp hipergeometrik fonksiyonların yıldızıllığı, konveksliği ve konvekse yakınlığı ile ilgili önemli şartları içeren teoremler verdiler.

Ayrıca birçok araştırmacı ünivalent fonksiyonların bazı önemli alt sınıfları için hipergeometrik fonksiyonların bu sınıflar üzerindeki özelliklerini incelemişlerdir. Bu tezde bu sınıflardan önemli olan düzgün yıldızıl (parabolik yıldızıl) ve düzgün konveks fonksiyonlar üzerindeki özellikleri verilmiştir. Bu sınıflar üzerine N. E. Cho, S. Y. Woo ve S. Owa, 2002 ve A. Swaminathan'nın 2004 yılındaki çalışmaları önem taşımaktadır.

Tezin kuramsal temeller bölümü tezin diğer bölümlerinde kullanılacak bazı önemli tanım ve teoremlerden oluşturulmuştur. Ayrıca ünivalent fonksiyonlar tanıtılarak $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlara ait önemli teoremler verilmiştir. Ayrıca bu bölümde $\mathcal{S}$ sınıfının önemli bazı alt sınıfları tanıtılarak bu alt sınıflara ait fonksiyonlarla ilgili önemli özellikler kapsamlı bir şekilde incelenmiştir.

Materyal ve yöntem olarak verilen üçüncü bölümde, hipergeometrik fonksiyonların yıldızılllığı, konveksliği, konvekse yakınlığı, düzgün yıldızıllığı ve düzgün konveksliği gibi ünivalent fonksiyonların önemli alt sınıfları üzerindeki özellikleri genellikle hipergeometrik fonksiyonların katsayılarına bağlı olarak tarihi seyir içerisinde verilmiştir. Ayrıca hipergeometrik fonksiyonların integral operatörünün geometrik özellikleri geniş bir şekilde incelenmiştir.

2.KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanacağımız temel kavramlar sunuldu.

Tanım 2.1.1 (r-komşuluğu): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $r > 0$ bir reel sayı olmak üzere z_0 merkezli, r yarıçaplı açık disk (veya z_0 noktasının $r-$komşuluğu) $U(z_0, r)$ olarak adlandırılır. $\overline{U}(z_0, r)$ ile $U(z_0, r)$ nin kapanışı $\partial U(z_0, r)$ ile de onun sınırı ve orijin merkezli r yarıçaplı diskde $U(0, r) = U_r$ ile gösterilecektir.

Özel durumda orijin merkezli açık birim disk $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $S \subset \mathbb{C}$ herhangi bir küme olsun. $z_0 \in S$ noktası için $U(z_0, r) \subset S$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına S kümesinin bir iç noktası denir.

Tanım 2.1.3 (Açık Küme): Bir $S \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. Eğer S kümesinin her noktası S nin bir iç noktası ise S kümesine açık küme denir.

Tanım 2.1.4 (Kapalı Küme): $S \subset \mathbb{C}$ olsun. S kümesinin tümleyeni açık küme ise, S kümesine kapalı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Bağlantılı Küme): Eğer $S \subset S_1 \cup S_2$, $S \cap S_1 \neq \varnothing$, $S \cap S_2 \neq \varnothing$ ve $S \cap S_1 \cap S_2 = \varnothing$ olacak şekilde S_1 ve S_2 gibi boş olmayan iki ayrık ve açık küme bulunamaz ise $S \subset \mathbb{C}$ kümesine bağlantılıdır denir. Aksi halde bağlantısız küme denir.

Tanım 2.1.6 (Bölge): Açık ve bağlantılı kümelere bölge denir.

Tanım 2.1.7 (Eğri): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde eğri (yol) denir. $\gamma(a)$ ve $\gamma(b)$ noktalarına da sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

Tanım 2.1.8 (Kapalı Eğri): $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ye bir eğri olsun. $\gamma(a)=\gamma(b)$ ise γ ya kapalı eğri denir.

Tanım 2.1.9 (Basit Kapalı Eğri): Uç noktaların çakışması hariç, kendini kesmeyen eğrilere basit eğri, hem basit hem de kapalı eğrilere de basit kapalı eğri veya Jordan eğrisi denir. Jordan eğrisi düzlemi Jordan eğrisinin içi ve dışı olmak üzere iki bölgeye ayırır. Jordan eğrisinin içine Jordan bölgesi denir. γ eğrisi $[a,b]$ kapalı aralığında türevlenebilir olsun. Eğer $[a,b]$ kapalı aralığında γ' türevi sürekli ve sıfırdan farklı ise γ eğrisine düzgün eğri denir. t, a dan b ye artarken, buna karşılık gelen $\gamma(t)$ değerlerinin $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ ye doğru sıralanması eğrinin pozitif yönünü belirtir. Kapalı bir eğrinin yönü ya pozitif veya negatiftir. Kapalı olmayan eğriler için başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru sıralama yön olarak alınır.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Bu kısımda analitik ve ünivalent fonksiyon kavramları tanıtılacak ve bu fonksiyonlar yardımıyla bazı tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.2.1 (Diferansiyellenebilme): $A\subset\mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f:A\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ ye bir fonksiyon ve $z_0\in A$ olsun. Eğer

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

sonlu limiti varsa $f(z)$ fonksiyonu $z_0\in A$ noktasında diferansiyellenebilirdir (türevlenebilirdir) denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $z=z_0$ noktasında $f(z)$ fonksiyonunun türevi olarak adlandırılır.

Tanım 2.2.2 (Analitiklik): Bir f kompleks fonksiyonu bir z_0 noktasında ve bu noktanın belli bir $U(z_0,\varepsilon)$ komşuluğundaki bütün noktalarında diferansiyellenebiliyorsa f ye z_0 noktasında analitiktir denir. Eğer bu f kompleks fonksiyonu bir $S\subset\mathbb{C}$ kümesinin her noktasında analitikse f ye S kümesinde analitik denir. Tüm kompleks düzlemde analitik olan fonksiyonlara tam fonksiyon denir.

$z = x + iy$ olmak üzere $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ kompleks değişkenli kompleks değerli fonksiyonu analitik ise,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y)$$

olarak ifade edilen Cauchy-Riemann denklemlerini sağlar.

Kompleks fonksiyonlar teorisinde, analitik fonksiyonlar için önemli bir yere sahip olan Cauchy-Türev formülü aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.2.3 (Cauchy-Türev Formülü): f, pozitif yönlü basit kapalı γ eğrisi içinde ve üzerinde analitik bir fonksiyon ve z_0 bu eğrinin içinde bir nokta ise $n = 0,1,2...$ için

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

dır.

Cauchy-Türev formülünün en önemli sonuçlarından biri şudur: f, bir bölgede analitik bir fonksiyon ise bu bölgede her mertebeden türevi vardır ve bu türevler de o bölgede analitiktir. Bu durumda f analitik fonksiyonu z_0 noktasında

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = f^{(n)}(z_0)/n! \tag{2.2.1}$$

şeklinde bir Taylor açılımına sahiptir. Fakat reel değişkenli bir fonksiyonun bir noktada 1. mertebeden türevi varsa bu noktada daha yüksek mertebeden türevi vardır diyemeyiz. Örneğin, $f(x) = x^{2/3}$ reel değişkenli fonksiyonunun $x = 0$ noktasında birinci mertebeden türevi olduğu halde, aynı fonksiyonun $x = 0$ noktasında ikinci mertebeden türevi yoktur.

Tanım 2.2.4 (Ayrık Tekil nokta): Bir $w = f(z)$ fonksiyonu z_0 noktasının bir $U(z_0, r) - \{z_0\}$ delinmiş komşuluğunda analitik fakat z_0 noktasında analitik değilse f fonksiyonu için z_0 noktası bir ayrık tekil noktadır denir.

Teorem 2.2.5 (Laurent Teoremi): C_0 ve C_1, merkezleri z_0 noktasında bulunan pozitif yönde yönlendirilmiş iki çember olsun. $r_0 < r_1$ olmak üzere C_0, r_0 yarıçaplı ve C_1 de r_1 yarıçaplı çemberler olarak alınsın. Eğer bir f fonksiyonu C_0 ile C_1 in üzerinde ve bunların arasında kalan halka bölgenin tamamında analitik ise bu durumda bölgedeki her z noktasında $f(z)$ fonksiyonu a_n ve b_n kompleks sayılar olmak üzere

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n} \tag{2.2.2}$$

açılımı ile temsil edilir. Buna $f(z)$ fonksiyonunun z_0 noktasının delinmiş bir komşuluğundaki Laurent serisi (açılımı) denir.

Tanım 2.2.6 (Kutup Noktası): z_0, $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası olsun. Laurent açılımındaki b_n katsayılarından sadece sonlu tanesi sıfırdan farklı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 2.2.7 (Meromorf fonksiyon): Kompleks düzlemin bir A bölgesinde kutup noktaları hariç analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna A da meromorf fonksiyon denir.

Teorem 2.2.8 (Maksimum Modül Prensibi): f fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde analitik olsun. Bu fonksiyon A bölgesinde sabit olmadıkça, $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alamaz.

Sonuç 2.2.9: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve sabit olmayan f fonksiyonu da bu bölgenin sınırında sürekli ve içinde analitik olsun. Bu durumda $|f(z)|$ maksimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Maksimum prensibinin önemli sonuçlarından birisi Schwarz lemmasıdır.

Lemma 2.2.10 (Schwarz lemması): f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik ve $f(0)=0$ olsun. Eğer $\mathcal{U}$ birim diskinde $|f(z)|\leq 1$ ise bu durumda $|f'(0)|\leq 1$ ve $|f(z)|\leq |z|$ dır. Eşitlik sadece $\theta\in\mathbb{R}$ olmak üzere $f(z)=e^{i\theta}z$ fonksiyonu ile sağlanır. (Ponnusamy and Silverman 2006).

Teorem 2.2.11 (Minimum Prensibi): $f(z)$ fonksiyonu kompleks düzlemin bir A bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in A$ için $f(z)\neq 0$ olsun. Bu durumda $|f(z)|$, A bölgesinde minimum değer alamaz.

Sonuç 2.2.12: A kompleks düzlemde sınırlı bir bölge, $f(z)$ sabit olmayan bir fonksiyon ve her $z\in A$ için $f(z)\neq 0$ olsun. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun A bölgesinin içinde analitik, sınırında sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $|f(z)|$ minimum değerini A bölgesinin sınırında alır.

Tanım 2.2.13 (Ünivalent fonksiyon): f, $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $z_1,z_2\in A$ için $f(z_1)=f(z_2)$ olması sadece $z_1=z_2$ olmasını gerektiriyorsa (veya $z_1\neq z_2$ olduğunda $f(z_1)\neq f(z_2)$ gerçekleşiyorsa) f fonksiyonuna A bölgesinde ünivalent (yalınkat veya schlicht) fonksiyon denir (Duren 1983).

Eğer f, z_0 noktasının bir komşuluğunda ünivalent ise f ye yerel ünivalent fonksiyon denir.

Teorem 2.2.14: Analitik bir f fonksiyonunun z_0 noktasında yerel ünivalent olması için gerek ve yeterli koşul $f'(z_0)\neq 0$ olmasıdır (Duren 1983).

Ayrıca $f'(z_0)\neq 0$ şartı $f(z)$ fonksiyonunun ünivalentliği için gerek şarttır fakat yeterli değildir. Yani f analitik fonksiyonu ünivalent ise $f'(z_0)\neq 0.$ Tersi daima doğru değildir. Bir kümede yerel ünivalent olan analitik fonksiyonların, bu kümede ünivalent olması gerekmez. Bunun doğruluğu aşağıda ki örnekte görülür.

Örnek 2.2.15: $f(z)=z^2$ fonksiyonu $A=\{z:1<|z|<2,\ 0<\arg z<3\pi/2\}$ bölgesinde yerel ünivalent olmasına rağmen ünivalent değildir. Gerçekten $f(z)=z^2$ fonksiyonu, A bölgesinde analitik ve her $z_0\in A$ için $f'(z_0)\neq 0$ sağlandığından yerel ünivalenttir. Fakat

$$f\left(\frac{5}{3\sqrt{2}}+i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=f\left(-\frac{5}{3\sqrt{2}}-i\frac{5}{3\sqrt{2}}\right)=i\frac{25}{9}$$

olduğundan $f(z)=z^2$ fonksiyonu A bölgesinde ünivalent değildir.

Eğer $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinde f analitik fonksiyonu yerel ünivalent ise, bu durumda $z\in A$ noktasında $f'(z)$ türevi, f nin yerel geometrik davranışını belirler. $|f'(z)|$ ve $\arg f'(z)$ değerleri sırasıyla yerel büyüme (uzunluklar için) ve yerel dönme etkenleridir. Buna ilaveten, $f:A\subset\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ analitik dönüşümünün Jacobian determinantı $Jf(z)=|f'(z)|^2$ ile verilmektedir. Jacobian determinantının $|f'(z)|^2$ ifadesine eşit olduğu Cauchy-Riemann denklemlerinden kolayca görülür. Böylece Teorem 2.2.11 den analitik fonksiyonlar için Jacobian determinantının sıfırdan farklı olması, yerel ünivalentlik için gerek ve yeter şarttır.

Tanım 2.2.16 (Konform dönüşüm): Eğer bir dönüşüm, belli bir noktadan geçen iki düzgün eğri arasındaki açının büyüklüğünü ve yönünü koruyorsa, bu dönüşüme bu noktada konform dönüşüm denir. Eğer bir f fonksiyonu, bir $A\subset\mathbb{C}$ bölgesinin tüm noktalarında konform ise, f fonksiyonu A bölgesinde konformdur denir.

Örneğin $f(z)=e^z$ dönüşümü $\mathbb{C}$ düzleminin tamamında konformdur.

Teorem 2.2.17: f fonksiyonunun analitik olduğu her z noktasında $f'(z)\neq 0$ koşulu sağlanıyorsa, f fonksiyonu konformdur.

Dolayısıyla bir bölgede analitik ve ünivalent bir fonksiyon konformdur. En önemli konform dönüşümlerden biri Möbius dönüşümüdür. Bu dönüşüm; a,b,c,d kompleks sabitler olmak üzere

$$w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0$$

genişletilmiş kompleks düzlemi $\left(\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\right)$ kendi üzerine konform olarak resmeder.

$z-$düzleminde ki $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}\ (\mathcal{D}\neq\mathbb{C})$ bölgesini, $w-$düzlemindeki $\mathcal{D}_1$ bölgesi üzerine resmeden f konform fonksiyonunun varlığı 1851 yılında Riemann tarafından ortaya atılmıştır.

Teorem 2.2.18 (Riemann Dönüşüm Teoremi): Kompleks düzlemin her $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}\ (\mathcal{D}\neq\mathbb{C})$ basit bağlantılı bölgesi konform olarak $\mathcal{U}$ birim diski üzerine resmedilir. Ayrıca, $z_0\in\mathcal{D}$ olmak üzere $f(z_0)=0$ ve $f'(z_0)>0$ koşullarını sağlayan ve $\mathcal{D}$'yi $\mathcal{U}$ birim diski üzerine resmeden bir tek konform dönüşüm vardır (Duren 1983).

2.3 Normalize Edilmiş Ünivalent Fonksiyonlar

Bu bölümde geometrik fonksiyonlar teorisinin özel bir konusu olan ünivalent fonksiyonları biraz daha ayrıntılı sunacağız. Analitik olarak, bir ünivalent fonksiyon sıfırdan farklı türeve sahip iken; geometrik olarak da basit eğrileri basit eğrilere dönüştürür. Hem analitik hem de ünivalent fonksiyon ise basit bağlantılı bölgeleri basit bağlantılı bölgelere dönüştürür. Riemann dönüşüm teoreminden, keyfi bir basit bağlantılı bölgede tanımlı f ünivalent fonksiyonu yerine $\mathcal{U}$ açık birim diskte tanımlı bir f ünivalent fonksiyonu seçilebilir. Bu fonksiyon için $f(0)=0,\ f'(0)=1$ normalizasyon şartları göz önüne alınırsa (2.2.1) serisi

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n,\quad (z\in\mathcal{U}) \tag{2.3.1}$$

şeklini alır. Burada (2.3.1) şeklinde tanımlanmış fonksiyona normalize edilmiş analitik fonksiyon denir. Normalize edilmiş analitik fonksiyonların sınıfını $\mathcal{A}$ ile göstereceğiz ve kısaca

$$\mathcal{A}=\left\{f:\forall z\in\mathcal{U}\text{ için } f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n\text{ şeklindeki analitik fonksiyon}\right\}$$

şeklinde yazılır.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinin temel taşı olan bir sınıfı aşağıda tanımlayalım.

2.3.1 ($\mathcal{S}$ Sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde ünivalent olan $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonların oluşturduğu sınıfa $\mathcal{S}$ sınıfı denir ve kısaca

$$\mathcal{S}=\{f\in\mathcal{A}:\forall z\in\mathcal{U}\ \text{ için }\ f-\text{ünivalent}\}$$

şeklinde gösterilir (Pommerenke 1975; Goodman 1983; Duren 1983).

$\mathcal{S}$ sınıfına ait bazı fonksiyon örneklerini aşağıda verelim.

(i) $w = f(z) = z(1-z)^{-1}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathrm{Re}(w) > -1/2$ sağ yarı düzlemine resmeder.

(ii) $f(z) = z(1-z^2)^{-1}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - \{(-\infty, -1/2] \cup (1/2, \infty]\}$ bölgesi üzerine resmeder.

(iii) $f(z) = z(1-z)^{-2}$ *Koebe* fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $\mathbb{C} - (-\infty, -1/4]$ bölgesi üzerine resmeder.

Ayrıca şunu da belirtelim ki, $\mathcal{S}$ sınıfına ait iki fonksiyonun toplamı $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmayabilir. Örneğin;

$$f_1(z) = \frac{z}{1-z} \quad \text{ve} \quad f_2(z) = \frac{z}{1+iz}$$

fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait olmasına rağmen

$$f_1'(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \quad \text{ve} \quad f_2'(z) = \frac{1}{(1+iz)^2}$$

türevlerinden

$$f_1'(z) + f_2'(z) = \frac{2 - 2(1-i)z}{(1-z)^2(1+iz)^2}$$

elde edilir. Buradan $z = \dfrac{1+i}{2} \in \mathcal{U}$ noktasında $f_1'(z) + f_2'(z) = 0$ olduğu görülür. Bununla beraber $\mathcal{S}$ sınıfındaki birçok özellik bazı dönüşümler altında korunur.

Teorem 2.3.2: $f \in \mathcal{S}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur (Duren 1983):

(i) Eşlenik alma: $g(z) = \overline{f(\overline{z})} = z + \overline{a}_2 z^2 + \ldots$ ise, $g \in \mathcal{S}$ dir.

(ii) Döndürme (Rotasyon): $\theta \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$g(z) = e^{-i\theta} f(e^{i\theta} z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{i(n-1)\theta} z^n, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iii) Genişleme (Dilatasyon): $0 < r < 1$ olmak üzere

$$g(z) = r^{-1} f(rz) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n-1} z^n, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(iv) Disk otomorfizmi (Koebe veya Bieberbach dönüşümü): $z_0 \in \mathcal{U}$ olmak üzere

$$g(z) = \frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)\, f'(z_0)}, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(v) Değer bölgesi dönüşümü: ψ fonksiyonu $f(\mathcal{U})$ da ünivalent ve $\psi(0) = 0$ $\psi'(0) = 1$ koşulunu gerçekleyen bir fonksiyon ise $\psi \circ f \in \mathcal{S}$ dir.

(vi) Çıkarılmış değer dönüşümü: $w \notin f(\mathcal{U})$ olsun. Bu durumda

$$g(z) = \frac{f(z)}{1 - f(z)/w}, \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

(vii) $n.$ kök dönüşümü: Eğer $n = 2,3,...$ ise

$$g(z) = \sqrt[n]{f(z^n)} = z + \frac{a_2}{n} z^{n+1} + \frac{1}{2n^2}(2na_3 - (n-1)a_2^2) z^{2n+1} + ..., \quad (z \in \mathcal{U})$$

fonksiyonu $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.3.3 ($\mathcal{P}$ sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $p(0) = 1$, $\operatorname{Re} p(z) > 0$ koşullarını sağlayan $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Caratheodory sınıfı veya $\mathcal{P}$ sınıfı denir (Duren 1983).

Örneğin; $p(z)=(1+z)/(1-z),\quad z\in\mathcal{U}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olup, $\mathcal{U}$ birim diskini sağ yarı düzlem üzerine resmeden bir konform dönüşümdür. Ayrıca $\mathcal{P}$ sınıfına ait bir fonksiyonun ünivalent olması gerekmez. Örneğin; $f(z)=1+z^n$ fonksiyonu $\mathcal{P}$ sınıfına ait olmasına rağmen $n\in\mathbb{N},\ n\geq 2$ için ünivalent değildir.

Tanım 2.3.4 (Ω sınıfı): $\mathcal{U}$ birim diskinde $\phi(0)=0$ ve $|\phi(z)|<1$ koşullarını sağlayan analitik fonksiyonların oluşturduğu sınıfa Schwarz fonksiyonlarının sınıfı denir ve Ω ile gösterilir (Duren 1983).

Bunların yanı sıra, $\mathcal{P}$ sınıfı ile Schwarz fonksiyonları arasında aşağıda olduğu gibi önemli bir bağ vardır:

$$p(z)\in\mathcal{P}\Leftrightarrow p(z)=\frac{1+\phi(z)}{1-\phi(z)},\quad \phi(z)\in\Omega.$$

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer işgal eden subordinasyon kavramını verelim.

Tanım 2.3.5: f ve g fonksiyonları $\mathcal{U}$ birim diskinde tanımlı iki analitik fonksiyon olsun. $\mathcal{U}$ birim diskinde $f(z)=g(\omega(z))$ olacak şekilde bir $\omega\in\Omega$ fonksiyonu varsa, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ da g fonksiyonuna subordinedir denir ve $f\prec g$ ile gösterilir (Duren 1983).

Eğer g ünivalent ise $f\prec g \Leftrightarrow f(0)=g(0)$ ve $f(\mathcal{U})\subseteq g(\mathcal{U})$ gerektirmesi doğrudur.

Subordinasyon prensibi (Lindelöf Prensibi): Eğer f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik, ünivalent ve g fonksiyonu da $\mathcal{U}$ birim diskinde analitik bir fonksiyon ayrıca $g(0)=f(0)$ ve $g(\mathcal{U})\subset f(\mathcal{U})$ ise, bu durumda $\mathcal{U}_r$ diskinde her $r<1$ için $|g'(0)|\leq|f'(0)|$ ve $g(\mathcal{U}_r)\subset f(\mathcal{U}_r)$ dir (Duren 1983).

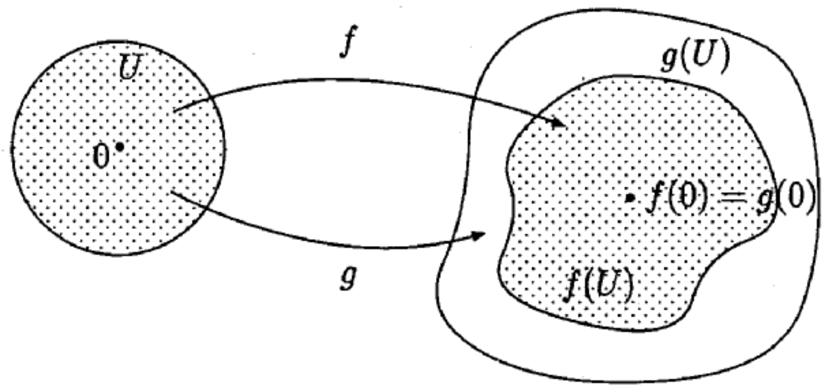
Özellikle, eğer $f\prec g$ ise

$$\max_{|z|\leq r}|f(z)|\leq\max_{|z|\leq r}|g(z)|,\quad (r\in(0,1))$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca,

$$p(z) \in \mathcal{P} \;\Leftrightarrow\; p(z) \prec \frac{1+z}{1-z} \text{ ve } \phi(z) \in \Omega \;\Leftrightarrow\; \phi(z) \prec z$$

gerektirmeleri yazılır.



Şekil 2.1: $f \prec g$ Subordinasyonu

Tanım 2.3.6: $f, g \in \mathcal{A}$ fonksiyonları

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \quad \text{ve} \quad g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n$$

şeklinde verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımları

$$(f * g)(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n b_n z^n = (g * f)(z)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $"*"$ Hadamard çarpımını gösterir (Ruscheweyh ve Sheil-Small 1973; Duren 1983).

2.4. Ünivalent Fonksiyonların Temel Sınıfları

$\mathcal{P}$ ve Ω sınıflarını tanımladıktan sonra, $\mathcal{S}$ sınıfının önemli bazı alt sınıflarını aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.4.1 ($\mathcal{S}^*$ sınıfı): $B \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. B kümesindeki sabit bir w_0 noktasını her $w \in B$ noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B kümesinde kalıyorsa, B ye w_0 noktasına göre yıldızıl küme denir. w_0 noktası özel olarak orijin seçilirse, bu kümeye orijine göre yıldızıl küme veya kısaca yıldızıl küme adı verilir. Eğer bir f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini w_0 noktasına göre bir yıldızıl kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna "w_0 *noktasına göre yıldızıl fonksiyon"* denir. Özel durumda, f fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini yıldızıl bir kümeye resmediyorsa, f fonksiyonuna *yıldızıl fonksiyon* denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterilir (Pommerenke 1975; Duren 1983).

Yıldızıl fonksiyonların yukarıdaki geometrik tanımını analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.4.2: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z) \in \mathcal{S}^* \Leftrightarrow \frac{zf'(z)}{f(z)} \in \mathcal{P}$$

dır. Ayrıca $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{S}^* \Rightarrow |a_n| \le n \; (n = 2,3...)$ değerlendirmesi doğrudur (Pommerenke 1975; Goodman 1983).

Kısaca yıldızıl fonksiyonları

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \forall z \in \mathcal{U} \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right) > 0 \right\}$$

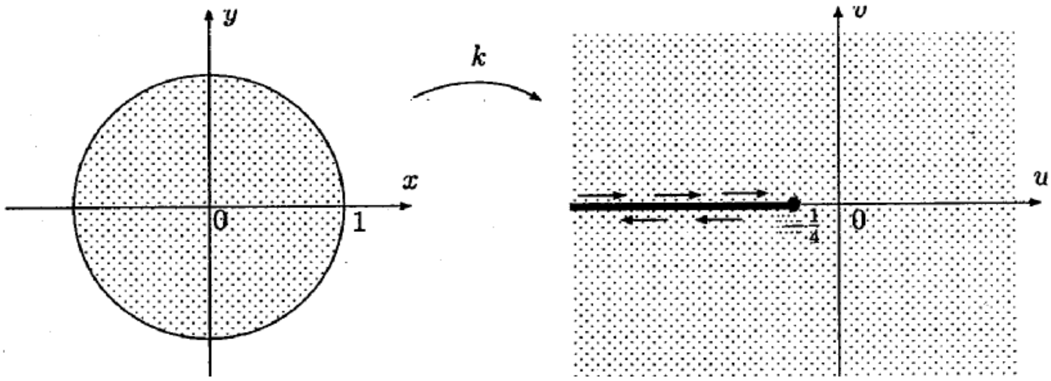
şeklinde gösterebiliriz. Örneğin, $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardan en önemlilerinden birisi $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere,

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde tanımlanan *Koebe fonksiyonudur*. Bu fonksiyonu $k(z) = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2 - 1 \right]$ şeklinde yazabiliriz. Ayrıca $k(z)$ fonksiyonu

$$u(z) = \frac{1+z}{1-z}, \; g(z) = u^2(z), \; k(z) = \frac{1}{4}\left[g(z) - 1 \right]$$

biçiminde yazılarak $\mathcal{U}$ birim diskini $-\infty$ dan $-1/4$ e kadar negatif reel ekseni çıkartılmış kompleks düzlem üzerine konform olarak dönüştürdüğünü görebiliriz. $k(z)$ dönüşüm ünivalent fonksiyonlar teorisinde çok sayıda problemde önemli rol oynar.



Şekil 2.2: Koebe Fonksiyonu

Yukarıdaki şekilden de görüldüğü gibi $k(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}=z+\sum_{n=2}^{\infty} nz^n \in \mathcal{S}^*$ dır. Ayrıca Teorem 2.4.2 kullanılarak da $z=re^{i\theta}$ ve $(0\le r<1, 0\le\theta\le 2\pi)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)&=\mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\mathrm{Re}\left(\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right)\\&=\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\ge\frac{1+r}{1-r}>0\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da $k(z)\in\mathcal{S}^*$ olduğu görülür.

Koebe fonksiyonunun dönmeleri (rotation), her $z\in\mathcal{U}$ için,

$$k_\theta(z)=\frac{z}{(1-e^{i\theta}z)^2}$$

şeklinde tanımlanır ve $k_\theta(z)$ fonksiyonları $\mathcal{S}$ sınıfına ait fonksiyonlardır. Bu dönüşüm ile birim diskin görüntüsü $+\infty$ dan $-e^{-i\theta}/4$ ışın hariç kompleks düzlem olur. $\alpha\in(0,2]$ ve $z\in\mathcal{U}$ olmak üzere $f(z)=\dfrac{1}{2\alpha}\left[\left(\dfrac{1+z}{1-z}\right)^{\alpha}-1\right]$ fonksiyonu, "*genelleştirilmiş Koebe fonksiyonu*" olarak adlandırılır ve $\mathcal{S}$ sınıfına aittir.

Tanım 2.4.3 ($\mathcal{C}$ sınıfı): $B\subset\mathbb{C}$ kümesi verilsin. Her $w_1,w_2\in B$ için w_1 noktasını w_2 noktasına birleştiren doğru parçası tamamen B içinde kalıyorsa B ye konveks küme denir. Eğer bir f fonksiyonu birim diski, konveks bir kümeye resmediyorsa f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir. $f \in \mathcal{A}$ olması durumunda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{C}$ ile gösterilir (Pommerenke 1975; Duren 1983).

Konveks fonksiyonları analitik olarak ifade eden en önemli teorem aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.4.4: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Bu halde

$$f(z) \in \mathcal{C} \Leftrightarrow 1+\frac{zf''(z)}{f'(z)} \in \mathcal{P}$$

dır.

Ayrıca $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \in \mathcal{C} \Rightarrow |a_n| \leq 1 \; (n=2,3...)$ değerlendirmesi doğrudur. (Pommerenke 1975; Goodman 1983).

Örneğin;

$$f(z)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n-1}z^{2n-1} \in \mathcal{C}$$

dır. Gerçekten $z=re^{i\theta}$ $\left(0 \leq r<1,\; 0 \leq \theta \leq 2\pi\right)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} &= \operatorname{Re}\left(\frac{1+z^2}{1-z^2}\right)=\operatorname{Re}\left(\frac{1+r^2e^{i2\theta}}{1-r^2e^{i2\theta}}\right)\\ &= \frac{1-r^4}{1+r^4-2r^2\cos 2\theta} \geq \frac{1-r^2}{1+r^2}>0\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.4.2. ve 2.4.4. ün bir sonucu olarak ilk kez Alexander tarafından verilmiş olan aşağıdaki teorem $\mathcal{S}^*$ ve $\mathcal{C}$ sınıflarına ait fonksiyonlar arasındaki çok önemli bir bağlantıyı ifade eder.

Teorem 2.4.5 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{A}$ ve $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $g(z)=zf'(z)$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{C}$ olması için gerek ve yeter şart $g \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır (Pommerenke 1975; Goodman 1983; Duren 1983).

Tanım 2.4.6 ($\mathcal{K}$ sınıfı): $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer $z \in \mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f'(z)}{g'(z)}\right) \geq 0$$

olacak şekilde bir $g \in \mathcal{C}$ varsa f fonksiyonuna konvekse yakın fonksiyon denir. Konvekse yakın fonksiyonların sınıfı "$\mathcal{K}$" ile gösterilir.

Aynı zamanda S.Ponnusamy 1997 yılında ki çalışmasında $g \in \mathcal{S}^*$ ve $\eta \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)$ olmak üzere $\beta(\beta < 1)$ mertebeden konvekse yakın fonksiyonların sınıfını $\mathcal{K}(\beta; g)$ ile

$$\operatorname{Re}\left[e^{i\eta}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)} - \beta\right)\right] > 0, \quad z \in \mathcal{U}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı olarak tanımlamıştır. Yani

$$\mathcal{K}(\beta, g) = \left\{ f \in \mathcal{A}: \ \operatorname{Re}\left[e^{i\eta}\left(\frac{zf'(z)}{g(z)} - \beta\right)\right] > 0, \ g \in \mathcal{S}^*, \eta \in \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\right)\right\}$$

dır.

Yukarıdaki Tanım 2.4.6 dan açık olarak her konveks fonksiyonun konvekse yakın fonksiyon olduğu görülür. Daha genel olarak her yıldızıl fonksiyon konvekse yakın fonksiyondur.

Ayrıca yukarıdaki tanımlardan anlaşıldığı üzere bu sınıflar arasında $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}^* \subset \mathcal{K} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ şeklinde bir ilişki vardır.

Bir fonksiyonun ünivalentliğini test eden ve uygulaması kolay olan teoremlerden biri Noshiro, Warschawski ve Wolff' a aittir.

Teorem 2.4.7: f fonksiyonu konveks bir $D \subset \mathbb{C}$ bölgesinde analitik ve her $z \in D$ için $\operatorname{Re} f'(z) > 0$ ise f fonksiyonu D bölgesi üzerinde ünivalenttir.

Tanım 2.4.8 ($\mathcal{S}^*(\beta)$ sınıfı): Her $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β. mertebeden yıldızıl fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da β. mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{S}^*(\beta)$ ile gösterilir (Goodman 1983).

Aşağıda ki sınıf $\mathcal{S}^*(\beta)$ sınıfı ile yakından ilgili olup;

$$\mathcal{S}_1^*(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \quad \left| \frac{zf'}{f} - 1 \right| < 1 - \beta \ , \ \mathrm{z} \in \mathcal{U} \right\}$$

şeklinde tanımlanır (D.J.Wrıght 1969). Burada $\mathcal{S}_1^*(\beta) \subset \mathcal{S}^*(\beta)$ olduğu açıktır.

Tanım 2.4.9 ($\mathcal{C}(\beta)$ sınıfı): Her $z \in \mathcal{U}$ ve $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere

$$\mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \beta$$

koşulunu sağlayan $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonuna β. mertebeden konveks fonksiyon ve bu fonksiyonların oluşurduğu sınıfa da β. mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı denir ve $\mathcal{C}(\beta)$ ile gösterilir (Goodman 1983).

Subordinasyonu kullanarak $\mathcal{S}^*(\beta)$ ve $\mathcal{C}(\beta)$ fonksiyonlarını

$$\mathcal{S}^*(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \frac{1 + (1 - 2\beta)\mathrm{z}}{1 - z} , 0 \leq \beta < 1 \right\}$$

ve

$$\mathcal{C}(\beta) = \left\{ f \in \mathcal{A} : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \frac{1 + (1 - 2\beta)\mathrm{z}}{1 - z} , 0 \leq \beta < 1 \right\}$$

şeklinde de yazabiliriz.

Aşağıdaki sınıf $\mathcal{C}(\beta)$ sınıfı ile yakından ilgili olup;

$$\mathcal{C}_1(\beta)=\left\{ f\in\mathcal{A}:\ \left|\frac{zf''}{f'}\right|<1-\beta,\ \ z\in\mathcal{U}\right\}$$

şeklinde tanımlanır (H.Silverman 1993). Burada $\mathcal{C}_1(\beta)\subset\mathcal{C}(\beta)$ olduğu açıktır.

Bu tezin ana çalışmasını oluşturacak teoremlerin ispatında kullanılan ve esasen yıldızıllık, konvekslik, ve konvekse yakınlık için yeter şartları içeren bazı teoremleri aşağıda verelim.

Teorem 2.4.10: $f\in\mathcal{A}$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$1\geq 2a_2\geq\cdots\geq na_n\geq\cdots\geq 0 \quad \text{yada} \quad 1\leq 2a_2\leq\cdots\leq na_n\leq\cdots\leq 2$$

olsun. Bu durumda f fonksiyonu $-\log(1-z)$ ye göre konvekse yakın fonksiyondur (S.Ozaki 1935).

Teorem 2.4.11: $f\in\mathcal{A}$ ve f tek fonksiyonu için

$$1\geq 3a_3\geq\cdots\geq(2n+1)a_{2n+1}\geq\cdots\geq 0 \quad \text{yada} \quad 1\leq 3\mathrm{a}_3\leq\cdots\leq(2n+1)a_{2n+1}\leq\cdots\leq 2$$

olsun. Bu durumda $f\in\mathcal{S}$ dır. Ayrıca $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonu $\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ ye göre konvekse yakındır (S.Ozaki 1935).

Teorem 2.4.12: Eğer $a_n\geq 0$ ve hem (na_n) hem de $\left(na_n-(n+1)a_{n+1}\right)$ dizilerinin her ikiside artmayan ise bu durumda (2.3.1) ile tanımlanan f fonksiyonu $\mathcal{S}^*$ sınıfındandır (L.Fejer 1936).

Aşağıda verilen lemma hipergeometrik fonksiyonların yıldızıllığıyla ilgili sonuçların ispatında kullanılan önemli bir araçtır.

Lemma 2.4.13: $\Delta\in\mathbb{C}$ olsun. Farzedelimki $\varphi:\mathbb{C}^2\times\mathcal{U}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu, $\mathrm{s}\leq-\left(1+r^2\right)/2$ ve r reel olduğu durumda $\varphi(ir,s:z)\notin\Delta$ şartı sağlansın. Eğer p fonksiyonu *her* $\mathrm{z}\in\mathcal{U}$ için $\varphi\left(p(z),zp'(z);z\right)\in\Delta$ ve $p(0)=1$ koşullarını sağlayan birim diskte analitikse, bu fonksiyon bu durumda $\mathcal{U}$ birim diskinde $\mathrm{Re}\left(p(z)\right)>0$ dır (S. S. Miller ve P. T. Mocanu 1987)

2.5. Ünivalent Fonksiyonların Bazı Özel Alt Sınıfları

Düzgün Yıldızıl ve Düzgün Konveks Fonksiyonlar

Düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyonların tanımı ilk kez 1991 yılında Goodman tarafından aşağıdaki şekillerde yapılmıştır.

Tanım 2.5.1 ($\mathcal{UST}$ sınıfı): Eğer $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde kalan $\zeta \in \mathcal{U}$ merkezli her dairesel γ yayını, $f(\zeta)$ ye göre yıldızıl bir yay üzerine dönüştürüyorsa f ye düzgün yıldızıl fonksiyon denir (Goodman 1991).

$\mathcal{U}$ da düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfını $\mathcal{UST}$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.5.2 ($\mathcal{UCV}$ sınıfı): Eğer $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskinde kalan $\zeta \in \mathcal{U}$ merkezli her dairesel γ yayını, konveks bir yay üzerine dönüştürüyorsa f ye düzgün konveks fonksiyon denir.

$\mathcal{U}$ da düzgün konveks fonksiyonların sınıfını $\mathcal{UCV}$ ile göstereceğiz.

Teorem 2.5.3: $f \in \mathcal{UST}$ olması için gerek ve yeter şart her $z \in \mathcal{U}$, $|x| = 1$ için

$$\operatorname{Re}\left(\frac{f(z) - f(xz)}{(1-x)zf'(z)} \right) \geq 0$$

dır (Ronning 1994).

1994 de F. Ronning düzgün yıldızıl fonksiyonları analitik olarak ifade eden ve uygulaması en kolay olan bir eşitsizlikle aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 2.5.4: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Her $z \in \mathcal{U}$ için, $f \in \mathcal{UCV}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right) > \left| \frac{zf''(z)}{f'(z)} \right|$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır (Ronning 1993).

$\mathcal{UCV}$ sınıfını ve Alexander Teoremini kullanarak Ronning aşağıdaki tanımı vermiştir.

Tanım 2.5.5: $f \in \mathcal{A}$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna parabolik düzgün yıldızıl fonksiyon denir. Bu fonksiyonların oluşturduğu sınıf $\mathcal{S}_p$ ile gösterilir (Ronning 1993).

Bu durumda $f \in \mathcal{UCV} \Leftrightarrow zf' \in \mathcal{S}_p$ yazılır.

1994 te Ronning $\mathcal{S}_p$ sınıfı ile $\mathcal{UST}$ sınıfı arasında herhangi bir içerme bağıntısının olmadığını göstermiştir. Yani

$$\mathcal{S}_p \not\subset \mathcal{UST} \quad ve \quad \mathcal{UST} \not\subset \mathcal{S}_p$$

dır.

$f(z) = z - \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, $\mathrm{a}_n \geq 0$ olacak şekilde fonksiyonların sınıfını $\mathcal{T}$ ile gösterelim. Bundan sonra

$$\mathcal{S}_p\mathcal{T} = \mathcal{T} \cap \mathcal{S}_p \ ve \ \mathcal{UCT} = \mathcal{T} \cap \mathcal{UCV}$$

ifadeleri kullanılacaktır.

Aşağıda $\mathcal{T}$ sınıfının özel alt sınıflarını tanımlayalım

Tanım 2.5.6: $f \in \mathcal{T}$, $z \in \mathcal{U}$, $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq \beta < 1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{\alpha zf'(z) + (1-\alpha) f(z)}\right\} > \beta$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfına $\mathcal{S}^*\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfı denir.

Burada $\alpha=0$ için $\mathcal{S}^*\mathcal{T}(0,\beta)=\mathcal{T}\cap\mathcal{S}^*(\beta)$ sınıfı elde edilir. Bu sınıf negatif katsayılı β mertebeden yıldızıl fonksyonların sınıfını oluşturur.

Tanım 2.5.7: $f\in\mathcal{T}, z\in\mathcal{U},\ 0\leq\alpha<1,\ 0\leq\beta<1$ olmak üzere

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{f'(z)+zf''(z)}{f'(z)+\alpha zf''(z)}\right\}>\beta$$

şartını sağlayan fonksiyonların sınıfına $\mathcal{CT}(\alpha,\beta)$ sınıfı denir.

Burada $\alpha=0$ için $\mathcal{CT}(0,\beta)=\mathcal{T}\cap\mathcal{C}(\beta)$ sınıfı elde edilir. Bu sınıf negatif katsayılı β mertebeden konveks fonksiyonların sınıfını oluşturur.

Tanım 2.5.8: $f\in\mathcal{T}, z\in\mathcal{U},\ 0\leq\alpha<1,\ 0\leq\beta<1$ olmak üzere

$$\left|\frac{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}-1}{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}+1-2\alpha}\right|<\beta$$

şartını sağlayan fonksiyonların sınıfına $\mathcal{S}_1^*\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfı denir.

Tanım 2.5.9: $f\in\mathcal{T}, z\in\mathcal{U},\ 0\leq\alpha<1,\ 0\leq\beta<1$ olmak üzere

$$\left|\frac{\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}}{\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}+2(1-\alpha)}\right|<\beta$$

şartını sağlayan fonksiyonların sınıfına $\mathcal{C}_1\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfı denir.

$\alpha-$Düzgün Konveks ve $\alpha-$Düzgün Yıldızıl Fonksiyonlar

Düzgün konveks fonksiyonların geneli olan α-Düzgün konveks fonksiyonlar üzerine ilk çalışma Kanas ve Wisniowska tarafından 1999 yılında verilmiştir. Yazarlar α-Düzgün konveks fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

Tanım 2.5.10: $0 \leq \alpha < \infty$ olsun. Eğer $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da $|\zeta| \leq \alpha$ olacak şekilde ζ merkezli her γ dairesel yayın görüntüsünü konveks bir bölgeye resmediyorsa $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna $\alpha-$Düzgün konveks fonksiyon denir. Bütün α-Düzgün konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{UCV}(\alpha)$ ile gösterilir (Kanas ve Wisniowska 1999).

Yukarıdaki tanımı analitik olarak ifade eden teoremi verelim.

Teorem 2.5.11: $f \in \mathcal{A}$ ve $0 \leq \alpha < \infty$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{UCV}(\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| \tag{2.5.1}$$

olmasıdır (Kanas ve Wisniowska 1999).

Düzgün yıldızıl fonksiyonların geneli olan α-düzgün yıldızıl fonksiyonlar üzerine ilk çalışma Kanas ve Wisniowska tarafından 2000 yılında verilmiştir. Yazarlar α- Düzgün yıldızıl fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.5.12: $0 \leq \alpha < \infty$olsun. Eğer $\mathcal{U}$ da $|\zeta| \leq \alpha$ olacak şekilde ζ merkezli her γ dairesel yayın görüntüsü $f(\zeta)$ ye göre yıldızıl ise $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonuna α- düzgün yıldızıl fonksiyon denir.

2000 yılında Kanas ve Wisniowska $\mathcal{UCV}(\alpha)$ sınıfından yola çıkarak aşağıdaki $\alpha-$düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfını tanımladı.

Tanım 2.5.13: $f \in \mathcal{A}$ ve $0 \leq \alpha < \infty$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna $\alpha -$düzgün yıldızıl fonksiyon denir (Kanas ve Wisniowska 2000).

Bütün α - düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}_p(\alpha)$ ile gösterilir.

β Mertebeden $\alpha -$Düzgün Yıldızıl ve $\alpha -$Düzgün Konveks Fonksiyonlar

$\alpha -$düzgün yıldızıl fonksiyonların geneli olan β mertebeden α - düzgün yıldızıl fonksiyonlar üzerine ilk çalışma Shams, Kulkarni ve Jahangiri tarafından 2004 yılında verilmiştir. Yazarlar β mertebeden α - düzgün yıldızıl fonksiyonları aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

Tanım 2.5.14: $f \in \mathcal{A},$ $0 \leq \alpha < \infty$ ve $0 \leq \beta < 1$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha\left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - 1\right| + \beta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna β mertebeden $\alpha -$düzgün yıldızıl fonksiyon denir (Shams, Kulkarni ve Jahangiri 2004).

Bütün β mertebeden $\alpha -$düzgün yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}_p(\alpha, \beta)$ ile gösterilir

Tanım 2.5.15: $f \in \mathcal{A},$ $0 \leq \alpha < \infty$ ve $0 \leq \beta < 1$ olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\mathrm{Re}\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right| + \beta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna β mertebeden $\alpha -$düzgün konveks fonksiyon denir (Shams, Kulkarni ve Jahangiri 2004).

Bütün β mertebeden α - düzgün konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{UCV}(\alpha,\beta)$ ile gösterilir.

$\mathcal{S}_p(\alpha,\beta)$ ve $\mathcal{UCV}(\alpha,\beta)$ sınıfları ünivalent fonksiyonlar teorisinde bilinen bir çok sınıfın (örneğin yıldızıl, konveks v.s. gibi) genelleştirilmiş halidir.

Teorem 2.5.16 (Bieberbach Teoremi): $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu için $|a_2|\le 2$ dir. Eşitlik hali $z\in\mathcal{U}$ olmak üzere Koebe fonksiyonunun dönmeleri için yani $k_\theta(z)=\dfrac{z}{\left(1-e^{i\theta}z\right)^2}$ şeklindeki fonksiyonlar için geçerlidir (Pommerenke 1975; Duren 1983).

Teorem 2.5.17 (Bieberbach Tahmini): $f\in\mathcal{S}$ fonksiyonu $n=2,3,4,...$ için $|a_n|\le n$ eşitsizliği vardır. Burada eşitliğin olması için gerek ve yeter şart f fonksiyonunun Koebe fonksiyonunun dönmeleri olmasıdır (Pommerenke 1975; Duren 1983).

Bu tahmin için bulunan sonuçlar aşağıdaki tarihsel seyir içerisinde elde edilmiştir.

$|a_2|\le 2,$ Bieberbach (1916)

$|a_3|\le 3,$ Löwner (1923) (Löwner Diferensiyel Denklemi)

$|a_4|\le 4,$ Garabedian, Schiffer (1955), (Grunsky eşitsizliği)

$|a_6|\le 6,$ Pederson (1968), Ozawa (1969)

$|a_5|\le 5,$ Pederson, Schiffer (1972)

$|a_n|\le e.n,$ Littlewood (1925)

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|a_n|}{n}=1,$ Hayman (1955)

$|a_n|\le\sqrt{7/6}\,n<1.081n,$ FitsGerald (1972)

*** $|a_n|\le n,\ n\in\mathbb{N},\ n\ge 2$ L. De Branges (1984).

2.6. Gama ve Beta fonksiyonları

Tanım 2.6.1: $z \in \mathbb{C}$ olmak üzere Kompleks değerli Gama fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımıyla tanımlanır.

$z = x + iy, \quad x > 0$ için bu integral mutlak yakınsaktır.

Gama fonksiyonu için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

1) $\Gamma(n+1) = n.\Gamma(n)$ **2)** $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n+1) = n!$

3) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ **4)** $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 ... (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$

5) $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad 0 < p < 1$

ifadeleri yazılır.

n' in yeteri kadar büyük değerleri için $\Gamma(n)$ hesaplaması zor olduğundan hesaplamanın kolaylığı açısından $\Gamma(n)$ için yeni bir formül verilir. Buna $\Gamma(n)$'in asimtotik formülü diyeceğiz. Bu formül

$$\Gamma(n) = \sqrt{2\pi n}.n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12(n+1)}}, \quad (n \in \mathbb{R})$$

şeklinde verilir.

Burada n'yi yeteri kadar büyük değerler alırsak $e^{\frac{\theta}{12(n+1)}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$'e yaklaşır. Bir anlık $n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$$\Gamma(n+1) = n! \approx \sqrt{2\pi n}$$

olur. Burada $n \in \mathbb{R}$ alındığında $n!$ özel olarak Stirling Kesirsel Yaklaşımı olarak adlandırılır.

Tanım 2.6.2: $m,n > 0$ olmak üzere

$$B(m,n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

fonksiyonuna Beta fonksiyonu denir.

Sonuç 2.6.3: $B(m,n) = B(n,m)$ dır.

Bu özellik Beta fonksiyonunun simetri özelliği olarak adlandırılır. Beta fonksiyonunun trigonometrik versiyonu

$$B(m,n) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta d\theta$$

şeklindedir. Beta fonksiyonunun diğer versiyonları ise

$$B(m,n) = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(1+y)^{m+n}}\,dy = \int_0^{\infty} \frac{y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}dy,$$

$$B(m,n) = \int_0^1 \frac{y^{m+1}+y^{n-1}}{(1+y)^{m+n}}dy$$

$$B(m,1-m) = \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{1+y}dy, \quad 0 < p < 1$$

$$B(m,n) = a^m b^n \int_0^{\infty} \frac{y^{m-1}}{(ay+b)^{m+n}}dy$$

şeklindedir.

Beta ve gama fonksiyonları arasındaki ilişkiyi anlatan en iyi sonuç aşağıdaki gibidir.

Sonuç 2.6.4: $m,n>0,\ \mathrm{B}(m,n)=\dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$ dır (R. Şahin 2011).

Şimdi gama ve beta fonksiyonları ile ilgili örnekler verelim

(i) $$\int_0^{+\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}dx=\beta\left(\frac{5}{4},\frac{3}{4}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)}$$

$$=\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(ii) $$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+x^3}=\left[x^3=s\ dersek\right]=\frac{1}{3}\int_0^{+\infty}\frac{s^{-\frac{2}{3}}}{1+s}ds=\frac{1}{3}\beta\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}\Gamma\left(1-\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

(iii) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6 x\cos^6 xdx=\left[\sin x=\sqrt{s}\ (s>0)\,dersek\right]=\frac{1}{2}\int_0^1(1-s)^{\frac{3}{2}}s^{\frac{5}{2}}ds$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)}{\Gamma(6)}=\left[\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\ ve\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{\pi}\right]$$
$$=\frac{3\pi}{512}$$

olur.

Gama fonksiyonuna bağlı olarak aşağıda vereceğimiz tanım hipergeometrik fonksiyonların katsayılarının belirlenmesin de önemli bir yer tutar.

Tanım 2.6.5: α reel yada kompleks bir sayı, n sıfır yada pozitif bir tamsayı olmak üzere $(\alpha)_n$ ifadesi

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1\,; & n=0 \\ \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)...(\alpha+n-1)\ ; & n=\{1,2,...\} \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu ifade Pochhammer Sembolü olarak bilinir (R. Şahin 2011)

Pochhammer sembolü aşağıdaki özelliklere sahiptir

$$(\alpha)_n = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$(\alpha)_{n+1} = \alpha(\alpha+1)_n$$

özel olarak ilk eşitlikte $n=0$ alınırsa $(\alpha)_0 = 1$ olur (R. Şahin 2011).

2.7 Gauss Diferansiyel Denklemi ve Hipergeometrik Fonksiyonlar

Özel fonksiyonlar ile fizik ve matematik uygulamalarında karşımıza çıkabilecek pek çok ikinci dereceden diferansiyel denklemi

$$z(1-z)y''(z)+[c-(a+b+1)z]y'(z)-aby(z)=0 \tag{2.7.1}$$

şeklinde ifade edilen Gauss diferansiyel denklemi ve $a,b,c\in\mathbb{C}$ ve $c\neq -1,-2,\dots$ gibi üç parametre cinsinden sınıflandırılabiliriz. Gauss diferansiyel denkleminin çözümleri ise hipergeometrik fonksiyonlar olarak bilinir.

Şimdi yukarıdaki diferansiyel denklemi çözelim

$$z(1-z)y''(z)+[c-(a+b+1)z]y'(z)-aby(z)=0$$

diferansiyel denkleminin

$$y=\sum_{r=0}^{\infty} a_r z^{s+r}$$

şeklinde bir seri çözümü olduğunu varsayalım. Bunu Gauss diferansiyel denkleminde yerine koyarsak

$$z(1-z)\sum_{r=0}^{\infty}a_r(s+r)(s+r-1)z^{s+r-2}+\left(c-(a+b+1)z\right)\sum_{r=0}^{\infty}a_r(s+r)z^{s+r-1}-ab\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^{r+s}=0$$

elde ederiz. Bu ise

$$\sum_{r=0}^{\infty}a_r(s+r)(s+r-1)z^{s+r-1}-\sum_{r=0}^{\infty}a_r(s+r)(s+r-1)z^{s+r}+c\sum_{r=0}^{\infty}a_r(s+r)z^{s+r-1}$$

$$-(a+b+1)\sum_{r=0}^{\infty}a_r(s+r)z^{s+r}-ab\sum_{r=0}^{\infty}a_r z^{r+s}=0$$

şeklinde yazılır. Bu denklem düzenlenirse

$$\sum_{r=0}^{\infty}[(s+r)(s+r-1)+c(s+r)]a_r z^{s+r-1}$$
$$-\sum_{r=1}^{\infty}[(s+r-1)(s+r-2)+(a+b+1)(s+r-1)+ab]a_{r-1}z^{s+r-1}=0$$

bulunur. Burada da ilk terimi açık olarak yazarsak

$$\left[s(s-1)+sc\right]a_0+\sum_{r=1}^{\infty}\left\{\begin{array}{l}\left[(s+r)(s+r-1)+c(s+r)\right]a_r\\ -a_{r-1}\left[(s+r-1)(s+r-2)+ab+(a+b+1)(s+r-1)\right]\end{array}\right\}z^{s+r-1}$$

elde ederiz. Bu bize indis denklemini

$$s(s-1)+sc=0$$

şeklinde ve tekrarlama bağıntısını da

$$a_r=\frac{(s+r-1+a)(s+r-1+b)}{(s+r)(s+r-1+c)}a_{r-1},\quad \mathrm{r}\geq 1$$

olarak verir. İndis denkleminin kökleri ise

$$s=0 \quad \text{ve} \quad s=1-c$$

olarak bulunur. $s=0$ kökü için tekrarlama bağıntısı

$$a_r=\frac{(r-1+a)(r-1+b)}{(r-1+c)r}a_{r-1},\quad \mathrm{r}\geq 1$$

şeklini alır. Serinin katsayıları ise

$$a_1 = \frac{ab}{c} a_0,$$

$$a_2 = \frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)2} a_1$$

ve

$$a_3 = \frac{(a+2)(b+2)}{(c+2)3} a_2$$

olarak bulunur. Genel terimi

$$a_k = \frac{a(a+1)(a+2)...(a+k-1)b(b+1)...(b+k-1)}{c(c+1)...(c+k-1)k!}$$

şeklinde ifade edilebilen bu serinin kendiside

$$y_1(z) = a_0 \left[1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)2!} z^2 + ... \right]$$

şeklinde verilir. Bu çözümde c değerleri $c \neq 0,-1,-2,...$ olmalıdır. Benzer şekilde indis denkleminin, $s = 1-c$ kökünü ele alırsak tekrarlama formülü

$$a_r = a_{r-1} \frac{(a+r-c)(r+b-c)}{r(1-c+r)}, \quad \mathrm{r} \geq 1$$

şeklinde olur. Dolayısıyla

$$a_1 = a_0 \frac{(a+1-c)(1+b-c)}{(2-c)},$$

$$a_2 = a_1 \frac{(a-c+2)(b-c+2)}{2(3-c)}$$

ve genel terimi

$$a_k = a_0 \left[\frac{(a-c+1)(a-c+2)...(a-c+k)(b-c+1)...(b-c+k)}{(2-c)(3-c)...(k+1-c)k!} \right]$$

şeklinde olur. Çözüm ise

$$y_2(z) = a_0 z^{1-c} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

ve dolayısıyla

$$y_2(z)=a_0z^{1-c}\left[\sum_{k=0}^{\infty}1+\frac{(a+1-c)(b+1-c)}{(2-c)}z\right]$$

olarak bulunur. $y_1(z)$ fonksiyonun da a_0 değerini 1 olarak aldığımız da Gauss diferansiyel denkleminin çözümü hipergeometrik olarak

$$y_1(z)=F(a,b,c;z)$$

şeklinde yazılır.

Bu çözüm $|z|<1$ aralığında yakınsaktır. $z=1$ noktasında yakınsak olması için $c>a+b$ ve $z=-1$ noktasında yakınsak olması içinse $c>a+b+1$ olmalıdır. Aynı şekilde, $y_2(z)$ çözümünü de hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden

$$y_2(z)=F(a-c+1,b-c+1,2-c;z),\quad c\neq 2,3,4...$$

şeklinde ifade edebiliriz. Sonuç olarak, Gauss diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$y(z)=AF(a,b,c,z)+Bz^{1-c}F(a-c+1,b-c+1,2-c,z)$$

dir. Çözüm bu iki çözümün liner kombinasyonu olarak verilir.

Bundan sonra $y_1(z)$ ile tanımlanan $F(a,b,c;z)$ fonksiyonu

$$F(a,b,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n}\frac{z^n}{n!},\qquad |z|<1 \tag{2.7.2}$$

şeklinde yazacağız. Bu seri (Gauss) hipergeometrik seri olarak adlandırılır.

(2.7.1) de ifade edilen gauss denkleminde a ve b parametreleri negatif tamsayılar veya sıfır ise bu diferansiyel denklemin çözümü polinom şeklinde olup tüm düzlemde analitiktir. Parametrenin diğer değerleri için (2.7.2) serisi ancak birim diskte yakınsaktır. Aynı zamanda eğer $\mathrm{Re}(a+b-c)<0$ ise bu seri $|z|=1$ de yakınsaktır. Bu seri aynı zamanda $\mathrm{Re}(a+b-c)>1$ için $|z|=1$ de ıraksaktır.

Şimdi aşağıda Gauss hipergeometrik fonksiyonların bazı özelliklerini verelim.

1) Eğer $\mathrm{Re}(a+b-c)<0,\ \mathrm{Re}\,c>0,\ \mathrm{Re}(a-c)<0$ ve $\mathrm{Re}(b-c)<0$ ise

$$\lim_{z\to 1} F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c)\Gamma(c-b)}$$

dır.

2) Eğer $\operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re} b > 0,\ \operatorname{Re}(a+b) > 0$ ve $\operatorname{Re}(a+b-c) = 0$ ise

$$\lim_{z\to 1} \frac{F(a,b,a+b;z)}{\log(1-z)} = -\frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

dır.

3) Eğer $\operatorname{Re}(a+b-c) > 0,\ \operatorname{Re} a > 0,\ \operatorname{Re b} > 0,\ \operatorname{Re c} > 0$ ise

$$\lim_{z\to 1} (1-z)^{a+b-c} F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a-c)\Gamma(c-b)}$$

dır.

4) $\operatorname{Re} c > 0,\ \operatorname{Re b} > 0$ olsun. Bu durumda

$$F(a,b,c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}\,dt$$

dır. Bu integral temsile Eulerin integral temsili diyeceğiz.

5) $\operatorname{Re}(c-a-b) > 0$ için

$$F(a,b,c;1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \tag{2.7.3}$$

dır.

6) $$\lim_{n\to\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n (1)_n} = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}; & c+1 = a+b \\ 0\ ; & c+1 > a+b \\ \infty\ ; & c+1 < a+b \end{cases} \tag{2.7.4}$$

dır.

Aşağıda, hipergeometrik fonksiyonlarla ilgili örnekler verelim.

1) $$F(1,1,2,-z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n(1)_n}{(2)_n}\frac{(-z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!n!}{(n+1)!}\frac{(-z)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(-1)^n z^n=\frac{1}{z}\log(1+z)$$

2) $$F(a,b,b;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^n=\frac{1}{(1-z)^a}$$

3) $$F\left(\frac{1}{2},1,\frac{3}{2},z^2\right)=\frac{1}{2z}\log\frac{1+z}{1-z}$$

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Hipergeometrik fonksiyon $F(a,b,c;z)$ geometrik fonksiyonlar teorisinde (ünivalent fonksiyonlar teorisi) önemli bir rol oynar ve bir çok yazar tarafından incelenmiştir. Bu bölümde özellikle hipergeometrik fonksiyonların konveksliği, yıldızıllığı, konvekse yakınlığı için gerekli olan $a,b\ ve\ c$ katsayıları üzerine konulan şartlar ve yapılan katsayı tahminleri incelenmiştir.

3.1 Hipergeometrik Fonksiyonların Yıldızıllığı

Merkes ve Scott 1961 yılında $zF(a,b,c;z)$ hipergeometrik fonksiyonunun ünivalent, yıldızıl ve konvekslik yarıçapı üzerine aşağıdaki çalışmaları yapmıştır.

Aşağıda $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun ünivalent ve yıldızıl olduğu disk incelenmiştir.

Teorem 3.1.1: $0<a<c$ ve $-1<b\le a$ olsun. Bu durumda $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu

(i) $\rho=\dfrac{1}{1-b},\quad 1<\mathrm{b}<0$

(ii) $\rho=1,\quad 0\le \mathrm{b}\le 2$

(iii) $\rho=\dfrac{1}{b-1},\quad \mathrm{b}>2$

şartlarından herhangi birinin sağlandığı durumlarda $|z|<\rho$ diskinde ünivalent ve yıldızıldır (E. P. Merkes ve W.T. Scott 1961).

Sabit olmayan bir $f(z)$ analitik fonksiyonunun $|z|<\rho$ de ünivalent ve konveks olması için gerek ve yeter koşulun $|z|<p$ diskinde $zf'(z)$ fonksiyonunun ünivalent ve yıldızıl olması gerektiğini Alexander teoreminden biliyoruz. Böylece

$$czF'(a,b,c;z)=abcF(a+1,b+1,c+1;z)$$

eşitliği Teorem 3.1.1 de yerine yazılırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.2: $-1 < a < c,\ -2 < b < a,\ a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$ olmak üzere

(i) $\rho = -\dfrac{1}{b}, \quad -2 < b < -1$

(ii) $\rho = 1, \quad -1 \leq b \leq 1, \quad b \neq 0$

(iii) $\rho = \dfrac{1}{b}, \quad \mathrm{b} > 1$

şartlarından herhangi biri sağlansın. Bu durumda $F(a,b,c;z)$ fonksiyonu $|z| < \rho$ diskinde ünivalent ve konvekstir. (E. P. Merkes ve W. T. Scott 1961)

Aşağıdaki teoremler $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun birim diskte yıldızıl olması için a,b,c katsayıları üzerine konulan şartlar ile ilgilidir.

Teorem 3.1.3: $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a + \dfrac{1}{2} \geq \left| b + \dfrac{1}{2} \right|$ olsun. Bu durumda $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $zF(a+b+1, 1+b+ic, 1+a+ic; z)$ fonksiyonu $(1-a-b)/2$ mertebeden yıldızıldır (ST. Ruscheweyh ve V. Sıngh 1986).

Teorem 3.1.4: $a,b,c \in \mathbb{R},\ a \leq b \leq c$ olsun. Bu durumda $z \in \mathcal{U}$ olmak üzere $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu $(1-a/2)$ mertebeden yıldızıldır (ST. Ruscheweyh ve V. Sıngh 1986).

Teorem 3.1.5: $a,b,\rho \in \mathbb{R},\ 0 < \rho \leq 1,\ a > 0$ ve $-1 \leq \rho b \leq 1 + \rho a$ olsun. Bu durumda $z \in \mathcal{U}$ için

$$\gamma = 1 - a + \left[\int_0^1 t^{a-1} \left(\frac{1+\varepsilon\rho}{1+\varepsilon\rho t} \right)^b dt \right]^{-1}, \quad \varepsilon = \mathrm{sgn} b$$

olmak üzere $F(a,b;a+1;\rho z)$ fonksiyonu γ mertebeden yıldızıldır. Burada γ mümkün olan en iyi değerdir (ST. Ruscheweyh ve V. Sıngh 1986).

Diğer taraftan $u(z) = zF(a,b,a+1;\rho z)$ için $\mathrm{Re}\dfrac{zu'(z)}{u(z)} = 1 + \mathrm{Re}\dfrac{\rho z F'(a,b,a+1;\rho z)}{F(a,b,a+1;\rho z)}$ ifadesi $|z| < 1$ de $z = -\mathrm{sgn}\, b$ noktasında minimum değer alır.

Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.6: $a,b,\rho \in \mathbb{R},\ 0<\rho\le 1,\ 0\le a-1\le b\le a$ olsun. Bu durumda

$$\gamma = 2-a-(1+b-a)\frac{\rho}{1+\rho}+\left[\int_0^1 t^{a-2}\left(\frac{1+\rho}{1+t\rho}\right)^{a-b} dt\right]^{-1}$$

olmak üzere $u(z)=zF(1,b,a;\rho z)$ fonksiyonu γ mertebeden yıldızıldır (ST. Ruscheweyh ve V. Sıngh 1986).

Teorem 3.1.7: $0\le a\le b\le c,\ 0<\rho\le 1$ olsun. Bu durumda

$$\gamma = 1-\frac{ab\rho(1+c+\rho c-\rho a)}{(c+b)(1+2c-a)+(c-b)(1+a)}$$

olmak üzere $zF(a,b,c;\rho z)$ fonksiyonu γ mertebeden yıldızıldır. Eğer $c\ge a+b$ ise γ

$$\gamma = (c-a-b)\frac{\rho}{1+\rho}+1-\frac{(c-b(c-a))(1+c+\rho a)}{(2c-b)(1+c+\rho a)+\rho b(1+c-a)}$$

olarak alınır (ST. Ruscheweyh ve V. Sıngh 1986).

Aşağıda $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}_1^*(\alpha)$ sınıfından olması için yeter şart ve ayrıca uygun a,b *ve* c katsayıları için $\mathcal{S}^*(\alpha)\left(\mathcal{S}_1^*(\alpha)\right)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşullar verildi.

Teorem 3.1.8: $a,b>0$ ve $c>a+b+1$ olsun. Bu durum da $0\le\alpha<1$ olmak üzere eğer

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[1+\frac{ab}{(1-\alpha)(c-a-b-1)}\right]\le 2 \qquad (3.1.1)$$

ise $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}_1^*(\alpha)$ sınıfındandır. Aynı zamanda (3.1.1) şartı $F_1(a,b,c;z)=z(2-F(a,b,c;z))$ fonksiyonunun $\mathcal{S}^*(\alpha)\left(\mathcal{S}_1^*(\alpha)\right)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şarttır (H. Silverman 1993).

Koşul (3.1.1) de $\alpha=0$ alınırsa $F_1(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul elde edilir.

Yukarıda ki teoremden farklı olarak aşağıda $a,b\ ve\ c$ katsayılarının daha farklı şartları altında $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun α mertebeden yıldızıl olması için gerek ve yeter şartları ihtiva eden sonuçlar verildi.

Teorem 3.1.9: Eğer $a,b>-1,\ c>0$ ve $ab<0$ ise $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonun $\mathcal{S}^*(\alpha)\left(\mathcal{S}_1^*(\alpha)\right)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul $c \geq a+b+1-ab/(1-\alpha)$ olmasıdır. Ayrıca $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul $c \geq a+b+1-ab$ olmasıdır (H. Sılverman 1993).

Hipergeometrik fonksiyonların geometrik özellikleri ile onların integrallerinin geometrik özellikleri benzerlik göstermeyebilir.

Özel bir integral operatör için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.1.10: (i) $a,b>0$ ve $c>a+b$ olsun. Eğer

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \leq 2$$

ise

$$G(a,b,c;z)=\int_0^z F(a,b,c;t)\,dt \tag{3.1.2}$$

fonksiyonu $\mathcal{S}^*$ sınıfındandır.

(ii) $a,b>-1,\ c>0$ ve $ab<0$ olsun**.** Bu durumda $G(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}$ yada $\mathcal{S}^*$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$c>\max\{a,b\}$$

olmasıdır (H.Silverman 1993).

Teorem 3.1.11: $\alpha \geq \beta > -\infty$ için $zF(1+\alpha+\beta,1+\beta,1+\alpha;z)$ fonksiyonu $(1-\alpha-\beta)/2$ mertebeden yıldızıldır (S. Ponnusamy ve M.Vuorınen 2001).

Şimdi ispatında Lemma 2.4.13 ü kullandığımız $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun β mertebeden yıldızıl olması için yeter şartı içeren önemli bir teoremi verelim.

Teorem 3.1.12: a,b,c sıfırdan farklı reel sayılar ve her $z\in\mathcal{U}$ için $zF(a,b,c;z)\neq 0$ olsun. Bu durumda eğer $\tilde{c}=c-1-(a+b)$, $\tilde{\beta}=1-\beta$, $A=\tilde{\beta}^2-\tilde{\beta}(a+b)+ab$, $B=\tilde{\beta}(a+b)-\tilde{\beta}^2$, $C=\tilde{\beta}\tilde{c}+ab$ ve $D=\tilde{\beta}\tilde{c}$ olmak üzere

1) $c\geq 1+a+b-\dfrac{ab}{\tilde{\beta}}$ $\left(\text{veya denk olarak}, C\geq 0\right)$

2) $C+\tilde{\beta}\geq 2A$

3) $\left(\tilde{\beta}+2\tilde{\beta}^2\right)C+2BD+D^2\geq 0$

şartları sağlanırsa $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu $\beta\in[0,1)$ mertebeden yıldızıldır (P. Hastö, S. Ponnusamy, M. Vuorınen 2010).

İspat: $\phi(z)=zF(a,b,c;z)$ ve $p(z)$ fonksiyonunu da $\dfrac{z\phi'(z)}{\phi(z)}=\beta+(1-\beta)p(z)$ ile tanımlayalım. Bu durumda $p(0)=1$ ve $p(z)$ nin birim diskte analitik olduğu açıktır. $F(z)=F(a,b,c;z)$ nin

$$z(1-z)F''(z)+\left[c-(1+a+b)z\right]F'(z)-abF(z)=0 \tag{3.1.3}$$

ikinci mertebeden (hipergeometrik) denklemi sağladığını biliyoruz. Basit bir hesaplamadan

$$\begin{aligned}&(1-z)(1-\beta)zp'(z)+(1-z)(1-\beta)^2p^2(z)\\&+p(z)\Big((1-\beta)\left[c-1-(a+b)z\right]-2(1-\beta)^2(1-z)\Big)\\&+(1-\beta)^2(1-z)-(1-\beta)\left[c-1-(a+b)z\right]-abz=0\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

olduğu kolayca görülür. Şimdi

$$\begin{aligned}\psi(r,s;z)=&(1-z)\tilde{\beta}s+(1-z)\tilde{\beta}^2r^2+\left(\tilde{\beta}\left[c-1-(a+b)z\right]-2\tilde{\beta}^2(1-z)\right)r\\&+\tilde{\beta}^2(1-z)-\tilde{\beta}\left[c-1-(a+b)z\right]-abz\end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda (3.1.4) eşitliğinden

$$\psi\left(p(z),zp'(z);z\right)=0$$

yazılır.

Teoremin ispatını sonlandırmak için Lemma 2.4.13 ü uygulayalım. Böylece birim diskte $\operatorname{Re}(p(z))>0$ olduğunu göstermek için, teoremin şartlarını sağlatmak yani her $r\in\mathbb{R}$ için $s\le-(1+r^2)/2$ ve $z\in\mathcal{U}$ için ψ nin sıfırdan farklı olduğunu göstermek yeterlidir. ψ fonksiyonunu $A=\tilde{\beta}^2-\tilde{\beta}(a+b)+ab,\quad B=\tilde{\beta}(a+b)-2\tilde{\beta}^2,\quad C=\tilde{\beta}\tilde{c}+ab,\quad D=\tilde{\beta}\tilde{c}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\psi(ir,s,z)&=\left[\tilde{\beta}s-\tilde{\beta}^2r^2+\tilde{\beta}^2-\tilde{\beta}(a+b)+ab+i\left(\tilde{\beta}(a+b)-2\tilde{\beta}^2\right)r\right](1-z)\\&-\tilde{\beta}\tilde{c}-ab+i\tilde{\beta}\tilde{c}r=\left[\tilde{\beta}s-\tilde{\beta}^2r^2+A+iBr\right](1-z)-C+iDr\end{aligned}$$

şeklinde yazalım. Böylece ψ nın sıfırı

$$z_0=1+\frac{-C+iDr}{\tilde{\beta}s-\tilde{\beta}^2r^2+A+iBr}$$

olarak bulunur. Bunun yanı sıra

$$|z_0|^2=1+\frac{-2\left(\tilde{\beta}s-\tilde{\beta}^2r^2+A\right)C+C^2+\left(2BD+D^2\right)r^2}{\left(\tilde{\beta}s-\tilde{\beta}^2r^2+A\right)^2+B^2r^2}$$

olduğu görülür.

z_0 ın birim diskte olmadığını göstermek için, z_0 ın bütün parametreleriyle birlikte $|z_0|\ge1$ olduğunu göstermek yeterlidir. $|z_0|^2$ nin paydası negatif olmadığından dolayı, payından

$$-2\left(\tilde{\beta}s-\tilde{\beta}^2r^2+A\right)C+C^2+\left(2BD+D^2\right)r^2\ge0$$

olduğunu göstermemiz gerekir. Bu şart her $r\in\mathbb{R}$ ve bütün $s\le-(1+r^2)/2$ için sağlamak zorundadır. $C\ge0$ olduğundan dolayı eşitsizlik sadece $s=-(1+r^2)/2$ değeri için kontrol edilir. Böylece

$$\begin{aligned}&\left(\tilde{\beta}(1+r^2)+2\tilde{\beta}^2r^2-2A\right)C+C^2+\left(2BD+D^2\right)r^2\\&=\left[\left(\tilde{\beta}+2\tilde{\beta}^2\right)C+2BD+D^2\right]r^2-2AC+C^2+\tilde{\beta}C\end{aligned}$$

değerinin negatif olmadığını göstermeliyiz. Hipotezden, yukarıdaki kapalı parantez ve sabit terimin negatif olmadığı görülür. Böylece Lemma 2.4.13 ten $\operatorname{Re}(p(z))>0$ ve dolayısıyla $\phi(z)\in\mathcal{S}^*(\beta)$ dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.1.12 den elde edilen bazı özel sonuçları aşağıda verelim.

Eğer biz Teorem 3.1.12 de $\beta = \frac{1}{2}$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.1.13: a,b,c sıfırdan farklı reel sayılar ve her $z \in \mathcal{U}$ için $F\left(a,b,c;z\right) \neq 0$ olsun. Eğer

$$c \geq \max\left\{1+a+b-2ab, 1+2ab, 1+\left|a-b\right|\right\}$$

olursa $F\left(a,b,c;z\right) \in \mathcal{S}^*\left(1/2\right)$ dır (P. Hastö, S. Ponnusamy, M. Vuorınen 2010).

Aşağıda vereceğimiz sonuç tek Gauss hipergeometrik fonksiyonunun yıldızıl olması için a,b *ve* c katsayıları üzerine konulan şartları içerir.

Sonuç 3.1.14: Farzedelim ki birim diskte $F\left(a,b,c;z\right) \neq 0$ olsun. Ayrıca a,b ve c reel sayıları

$$c \geq \max\left\{1+a+b-2ab,\ 1+2ab,\ 1+\left|a-b\right|\right\}$$

koşulunu sağlasın. Bu durumda $zF\left(a,b,c,z^2\right) \in \mathcal{S}^*$ dır (P. Hastö, S. Ponnusamy, M.Vuorınen 2010).

Sonuç 3.1.15: a,b,c sıfırdan farklı reel sayılar ve her $z \in \mathcal{U}$ için $F\left(a,b,c,z;\right) \neq 0$ olsun. Eğer

$$c \geq 1 + \frac{\left(a-b\right)^2}{a+b} \tag{3.1.5}$$

ise $zF\left(a,b,c;z\right)$ fonksiyonu $\mathcal{S}^*\left(1-\left(a+b\right)/2\right)$ sınıfındandır (P. Hastö, S. Ponnusamy, M.Vuorınen 2010).

İspat: Teorem 3.1.12 de $\beta = 1-\left(a+b\right)/2$ alalım. O zaman Teorem 3.1.12 deki $B=0$ ve $C \geq 0$ durumu (3.1.5) e denktir. Teorem 3.1.12 deki 2) şartının eşitsizliğinden

$$C \geq -\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{\left(a-b\right)^2}{2}$$

olduğu açıktır. $C \geq 0$ ve B=0 olduğundan 3) şartının sağlandığı açıktır. Böylece sonuç ispatlanmış olur.

Sonuç 3.1.16: a,b,c sıfırdan farklı reel sayılar ve her $z \in \mathcal{U}$ için $zF(a,b,c;z) \neq 0$ olsun. Eğer

1) $c \geq \max\{1+a+b-ab, 2+2ab-(a+b)\}$

2) $(c-1)(c-2) \geq a^2+b^2-ab-a-b$

şartları sağlanırsa $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu yıldızıldır (P. Hastö, S. Ponnusamy, M. Vuorınen 2010).

Yıldızıl fonksiyonların $\mathcal{S}^*$ sınıfının bir alt sınıfı olan $\mathcal{S}_1^*$ sınıfı için aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.1.17: $a,b,c \in \mathbb{R}$, $\alpha=(a-1)(b-1)$, $\beta=ab-1$ ve $\gamma=(a+1)(b+1)$ olsun. Farzedelim ki;

1) $c+1 \geq |1+\gamma|$

2) $c-1 \geq |1-\alpha|$

3) $2c^2+2-4\beta^2-2(1-\alpha)(1+\gamma) > -\sqrt{\left((c-1)^2-(1-\alpha)^2\right)\left((c+1)^2-(1+\gamma)^2\right)}$

şartları sağlansın. Eğer birim diskte $F(a,b,c;z) \neq 0$ ise o zaman $zF(a,b,c,;z) \in \mathcal{S}_1^*$ dır (P. Hastö, S. Ponnusamy, M. Vuorınen 2010).

3.2 Hipergeometrik Fonksiyonların Konveksliği

Bu bölümde $a,b \; ve \; c$ katsayılarının durumlarına göre $zF(a,b,c;z)$ hipergeometrik fonksiyonunun konveksliği incelenmiştir.

Bu konuda ki ilk çalışma Silverman tarafından verilmiştir.

Aşağıda vereceğimiz iki teorem hipergeometrik fonksiyonların yıldızıllığında verdiğimiz Teorem 3.1.8 ve Teorem 3.1.9 a paralel şeklindedir.

Teorem 3.2.1: $a,b>0$ ve $c>a+b+2$ olsun. Eğer

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[1+\left(\frac{3-\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{ab}{c-a-b-1}\right)+\frac{(a)_2(b)_2}{(1-\alpha)(c-a-b-2)_2}\right] \leq 2 \qquad (3.2.1)$$

ise $zF(a,b,c;z)\in\mathcal{C}_1(\alpha)$, $0\le\alpha<1$ dır. Ayrıca $F_1(a,b,c;z)=z\left(2-F(a,b,c;z)\right)$ fonksiyonunun $\mathcal{C}(\alpha)\left(\mathcal{C}_1(\alpha)\right)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul (3.2.1) şartının sağlanmasıdır (H. Silverman 1993).

Teorem 3.2.2: Eğer $a,b>-1,\ ab<0$ ve $c>a+b+2$ ise bu durumda $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{C}(\alpha)\left(\mathcal{C}_1(\alpha)\right)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$(a)_2(b)_2+(3-\alpha)ab(c-a-b-2)+(1-\alpha)(c-a-b-1)_2\ge 0$$

olmasıdır (H. Silverman 1993).

Teorem 3.1.10 da verilen (3.1.2) şeklinde tanımlanan integral operatörün $\mathcal{C}_1(\alpha)$ ve $\mathcal{C}(\alpha)$ sınıfları ile bağlantısını anlatan teoremi verelim.

Teorem 3.2.3: (i) $a,b>0$ ve $c>a+b+1$ olsun. Eğer

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[1+\frac{ab}{(1-\alpha)(c-a-b-1)}\right]\le 2$$

eşitsizliği sağlanırsa (3.1.2) şeklinde tanımlanan $G(a,b,c;z)$ fonksiyonu $\mathcal{C}_1(\alpha)$ sınıfındandır.

(ii) Eğer $a,b>-1,\ ab<0$ ve $c>a+b+2$ ise o zaman (3.1.2) de tanımlanan $G(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{C}(\alpha)\left(\mathcal{C}_1(\alpha)\right)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$c\ge a+b+1-\frac{ab}{1-\alpha}$$

olmasıdır (H. Silverman 1993).

Teorem 3.2.4: $a,b>0$ ve $c>a+b+2$ olsun. Eğer

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[1+\frac{3ab}{c-a-b-1}+\frac{(a)_2(b)_2}{(c-a-b-2)_2}\right]\le 2$$

eşitsizliği sağlanırsa $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu birim diskte konvekstir (H. Silverman 1993).

Teorem 3.2.5: $c\in\mathbb{R}$ *ve* $a,b\in\mathbb{C}$ olsun. $c>|a|+|b|+2$ ve

$$\frac{|ab|\Gamma(c)\Gamma(c-|a|-|b|-2)}{\Gamma(c-|a|)\Gamma(c-|b|)}\left(|ab|-|a|-|b|+2c-3\right)\leq\frac{1}{2}$$

şartları sağlanırsa $zF(a,b,c;z)$ birim diskte konvekstir (S. Kanas, A.Wisniowska 2000).

Aşağıda ki teorem $F(a,b,c;z)$ hipergeometrik fonksiyonunun β mertebeden konveks olması için a,b *ve* c katsayıları üzerine konulan şartlar ile ilgilidir.

Teorem 3.2.6: $a,b,c\in\mathbb{R}$, $(a+1)(b+1)\beta\leq 0$ ve birim diskte $F'(a,b,c;z)\neq 0$ olsun. Ayrıca

$$M_\beta(a,b)=\max\left\{2(1-\beta)+|a+b+2\beta|,1-ab-\frac{(a+1)(b+1)\beta}{1-\beta}\right\}$$

şeklinde tanımlansın. Eğer $c\geq M_\beta(a,b)$ ise bu durumda $F(a,b,c;z)\in\mathcal{C}(\beta)$ dır (S. Ponnusamy ve M. Vuorinen 2001).

İspat: Eğer $1+\dfrac{zF''(z)}{F'(z)}=\beta+(1-\beta)p(z)$ şeklinde yazılırsa bu durumda birim diskte p analitiktir ve $p(0)=1$ dır. Böylece teoremi ispatlamak için birim diskte $\operatorname{Re}(p(z))>0$ olduğunu göstermemiz gerekir. $w=F(a,b,c;z)$ hipergeometrik fonksiyonu

$$z(1-z)w''(z)+\left[c-(a+b+1)z\right]w'(z)-abw(z)=0$$

diferansiyel eşitliğini sağladığından dolayı p aşağıdaki gibi

$$(1-z)zp'(z)+(1-\beta)(1-z)p^2(z)+\left\{c-2(1-\beta)-(a+b+2\beta)z\right\}p(z)$$
$$+1-c-\beta-\left\{ab-\beta+(a+1)(b+1)\frac{\beta}{1-\beta}\right\}z=0$$

birinci mertebeden diferansiyel denklemini de sağlar. c üzerinde ki şarttan birim diskte

$$c-2(1-\beta)-(a+b+2\beta)z\neq 0$$

olduğu açıktır. Böylece

$$\psi(r,s;z)=J(z)\left[s+(1-\beta)r^2\right]+r+\frac{J(z)-H(z)}{2}$$

olmak üzere yukarıda ki denklemi $\psi(p(z),zp'(z);z)=0$ şeklinde yazabiliriz. Burada

$$J(z)=\frac{1-z}{c-2(1-\beta)-(a+b+2\beta)z}$$

ve

$$H(z)=\frac{2c-1+2\beta-\left[1-2ab+2\beta-\frac{2(a+1)(b+1)\beta}{1-\beta}\right]z}{c-2(1-\beta)-(a+b+2\beta)z}$$

şeklindedir.

Böylece Lemma 2.4.13 e göre r reel, $s\leq-\frac{(1+r^2)}{2}$ ve $z\in\mathcal{U}$ için $\psi(ir,s;z)\neq 0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bunun için

$$W(z)=\frac{1+Az}{1+Bz},\quad -1\leq A,\ \mathrm{B}\leq 1$$

fonksiyonu $\mathcal{U}$ birim diskini $B\neq\pm 1$ için

$$\left|w-\frac{1-AB}{1-B^2}\right|<\frac{|B-A|}{1-B^2} \tag{3.2.2}$$

diski üzerine ve $B\neq\pm 1$ için

$$\mathrm{Re}(w)>\begin{cases}\frac{1+A}{2} & \text{B=1 ise}\\ \frac{1-A}{2} & \text{B}=-1\text{ ise}\end{cases}$$

yarı düzlemi üzerine resmettiğini kolayca görebiliriz. Ayrıca (3.2.2) den $B\neq\pm 1$ için

$$\mathrm{Re}(w)>\begin{cases}\frac{1+A}{1+B}; & B>A\\ \frac{1-A}{1-B}; & B<A\end{cases}$$

olduğu açıktır. c üzerindeki şarttan öncelikle $c>2+a+b$ eşitsizliği yazılır. Diğer taraftan

$$A=-1\quad \text{ve}\quad \mathrm{B}=-\frac{a+b+2\beta}{c-2(1-\beta)}$$

seçersek o zaman $A<B$ ve $J(z)$ fonksiyonu $z\in\mathcal{U}$ için $\mathrm{Re}\,J(z)>0$ eşitsizliğini sağlar. $H(z)$ için de benzer bir durumu elde etmek için

$$A=-\left(1-2ab+2\beta-\frac{2(a+1)(b+1)\beta}{1-\beta}\right)\frac{1}{2c-1+2\beta}$$

$$\mathrm{B}=-\frac{a+b+2\beta}{c-2(1-\beta)}$$

seçilirse

$$H(z)=\frac{2c-1+2\beta}{c-2(1-\beta)}\left(\frac{1+Az}{1+Bz}\right)$$

biçiminde olur. Burada $c>2(1-\beta)+|a+b+2\beta|$ olduğundan dolayı

$$1\pm B=\frac{c-2(1-\beta)\pm(a+b+2\beta)}{c-2(1-\beta)}>0$$

olur. Bu gösterir ki $B\neq\pm1$ dir. Diğer taraftan

$$c>1-ab-\frac{[(a+1)(b+1)\beta]}{[1-\beta]}$$

olduğundan dolayı

$$1>\left\{1-2ab+2\beta-\frac{2(a+1)(b+1)\beta}{1-\beta}\right\}\frac{1}{2c-1+2\beta}$$

dır. Böylece $A+1>0$ dır. Sonra kolaylıkla gösterilir ki

$$c>1-ab-\frac{(a+1)(b+1)\beta}{1-\beta}\Leftrightarrow\beta<\frac{c-1+ab}{c-2-(a+b)}$$

dır. Dolayısıyla

$$\frac{c-1+ab}{c-2-(a+b)}\leq1\Leftrightarrow(a+1)(b+1)\leq0$$

yazılır. Benzer bir şekilde Teorem 3.2.6 nın hipotezleri altında, aynı zamanda $1-A$ pozitif alınabilir. Böylece $z\in\mathcal{U}$ için $\operatorname{Re}\mathrm{H}(z)>0$ dır. Tüm $r\in\mathbb{R}, s\leq-(1+r^2)/2$ ve $z\in\mathcal{U}$ için

$$\operatorname{Re}\psi(ir_2,s_1;z)=\operatorname{Re}\left\{J(z)\left[s_1-(1-\beta)r_2^2+\frac{J(z)-H(z)}{2}\right]\right\}$$

$$-\left[\frac{1+r_2^2}{2}+(1-\beta)r_2^2\right]\operatorname{Re}J(z)+\operatorname{Re}\left(\frac{J(z)-H(z)}{2}\right)$$

$$\leq\left[\frac{r_2^2}{2}+(1-\beta)r_2^2\right]\operatorname{Re}\mathrm{J}(z)-\operatorname{Re}\left(\frac{H(z)}{2}\right)$$

eşitsizliğini elde ederiz. $\mathcal{U}$ da $\operatorname{Re}J(z)>0$ ve $\operatorname{Re}\mathrm{H}(z)>0$ bilgileri kullanılarak $\operatorname{Re}\psi(ir_2,s_1;z)<0$ sonucu çıkarılabilir. Böylece Lemma 2.4.13 e göre birim diskte $\operatorname{Re}(p(z))>0$ olduğu elde edilir. Bu $F(a,b,c;z)$ nin β mertebeden konveks olduğunu gösterir.

Yukarıdaki teoremin daha fazla uygulamalarını elde etmek için $F'(a,b,c;z)\neq 0$ olduğu birim diskte $a,b\ ve\ c$ katsayıları üzerine koşullar elde etmemiz gerekir. Miller ve Mocanu

$$-1\leq b\leq c \text{ ve } a\in[-2,0)\cup[c-1,c+1]$$

koşulları altında birim diskte $F'(a,b,c;z)\neq 0$ olduğunu göstermiştir.

Böylece $|z|<1$ de $F'(a,b,c;z)\neq 0$ ile Teorem 3.2.6 koşulları altında Miller ve Mocanu 1990 yılında verdiği Teoremin genelleştirilmesini 2001 yılında Ponnusamy ve Vuorınen aşağıdaki teoremle vermiştir.

Teorem 3.2.7: $M_\beta(a,b)=\max\left\{2(1-\beta)+|a+b+2\beta|,1-ab-\dfrac{(a+1)(b+1)\beta}{1-\beta}\right\}$ olmak üzere eğer $-2\leq a<0,\ -1\leq b,\ \mathrm{b}\neq 0,\ (a+1)(b+1)\beta\leq 0$ ve $\mathrm{c}\geq M_\beta(a,b)$ şartları sağlanırsa bu durumda $F(a,b,c;z)$ fonksiyonu β mertebeden konvekstir (S. Ponnusamy ve M. Vuorinen 2001).

Yukarıdaki teoremde $\beta=\dfrac{1}{2}$ alırsak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.8: $M_{\frac{1}{2}}(a,b)=\max\{1+|a+b+1|,\ 1-ab-(a+1)(b+1)\}$ olmak üzere eğer $b\neq 0$, $-1\leq b, -2\leq a<-1$ ve $\mathrm{c}\geq \mathrm{M}_{\frac{1}{2}}(a,b)$ şartları sağlanırsa $F(a,b,c;z)$ fonksiyonu $\dfrac{1}{2}$ mertebeden konvekstir (S. Ponnusamy ve M. Vuorinen 2001).

Eğer $F(a,b,c;z)$ hipergeometrik fonksiyonu için

$$(a-1)(b-1)zF(a,b,c;z)=(c-1)zF'(a-1,b-1,c-1;z)$$

ifadesi kullanılırsa Teorem 3.2.7 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.2.9: $M_\beta(a,b)=\max\{2(1-\beta)+|a+b+2\beta|,1-ab-((a+1)(b+1)\beta/1-\beta)\}$ olmak üzere eğer $b\neq 1,\ 0\le b,\ -1\le a<1,\ ab\beta\le 0$ ve $c\ge 1+M_\beta(a-1,b-1)$ şartları sağlanırsa bu durumda $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu β mertebeden yıldızıldır (S. Ponnusamy ve M. Vuorinen 2001).

Eğer $f(z)=zF(a,b,c;z)$ ve $\mathrm{h}(z)=f(z^2)/z$ olarak alınırsa bu durumda

$$\frac{zh'(z)}{h(z)}=2\frac{z^2f'(z^2)}{f(z^2)}-1$$

eşitliği yazılır. Yukarıdaki eşitlik ve Teorem 3.2.9 dan aşağıdaki teorem yazılır.

Teorem 3.2.10: $M_\beta(a,b)=\max\{2(1-\beta)+|a+b+2\beta|,1-ab-((a+1)(b+1)\beta/1-\beta)\}$ olmak üzere eğer $-1\le a<0,\ 0\le b,\ b\neq 1$ ve $\mathrm{c}\ge 1+\mathrm{M}_\beta(a-1,b-1)$ şartları sağlanırsa bu durumda $zF(a,b,c;z^2)\in\mathcal{S}^*(2\beta-1)$ dır (S. Ponnusamy ve M. Vuorinen 2001).

Örnek 3.2.11: Eğer Teorem 3.2.7 de $a=-2,\ b=1\ ve\ \beta=\delta/(\delta+2)$ alınırsa o zaman $c\ge 3+\delta$ için

$$F(-2,1,c;z)=1-\frac{2}{c}z+\frac{2}{c(c+1)}z^2\in\mathcal{C}(\delta/\delta+2)$$

dır (S. Ponnusamy ve M. Vuorinen 2001).

Teorem 3.2.12: $b,c\in\mathbb{R}$ sayıları

(i) $0<b\le 3=c$

(ii) $c\ge 3+|b|,\quad b\neq 0$

şartlarından herhangi birini sağlasın**.** Bu durumda $(zF(1,b,c;z))'\neq 0$ olmak üzere $zF(1,b,c;z)$ fonksiyonu birim diskte konvekstir (A. Swaminathan 2007).

3.3 Hipergeometrik Fonksiyonların Konvekse Yakınlığı

Bu bölümde $zF(a,b,c;z)$ hipergeometrik fonksiyonunun konvekse yakın olması için $a,b\; ve\; c$ katsayıları üzerine konulan şartlar incelendi. Bununla ilgili olan çalışmalar S. Ponnusamy ve M. Vuorınen tarafından yapılmıştır.

Aşağıda hipergeometrik fonksiyonların konvekse yakınlığı için olan teoremler verildi.

Teorem 3.3.1: $a\; ve\; b$ sayıları için ya $a,b>0$ yada $a\in\mathbb{C}/\{0\},\; b=\overline{a}$ olsun. Ayrıca $\eta\in(-\pi/2,\pi/2)$ ve $\beta<1$ olmak üzere

(1) $a\in(0,\infty),\; b\in(0,1/a]$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(1-\Gamma(a+b)/\Gamma(a)\Gamma(b)\right)$

(2) $a\in(1/2,\infty),\; b\in[a/(2a-1),\infty)$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(\Gamma(a+b)/\Gamma(a)\Gamma(b)-1\right)$

(3) $\operatorname{Re}a>0,\; |a|\le\min\left\{1,\sqrt{\operatorname{Re}a}\right\},\; b=\overline{a}$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(1-\Gamma(2\operatorname{Re}a)\big/\Gamma(a)\Gamma(\overline{a})\right)$

(4) $\operatorname{Re}a>0,\; |a|\le\max\left\{1,\sqrt{\operatorname{Re}a}\right\},\; b=\overline{a}$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(\Gamma(2\operatorname{Re}a)\big/\Gamma(a)\Gamma(\overline{a})-1\right)$

(5) $c\ge\max\left\{a+b,a+b+(ab-1)/4,\left(3(a+b+ab)-1\right)/4\right\}$ ve

$\beta\le 1-\left(|c-2ab|+2ab\right)/(c\cos\eta)$

şartlarından herhangi biri sağlanırsa $zF(a,b,a+b;z)$ fonksiyonu $g(z)=z/(1-z)$ olmak üzere $\mathcal{K}(\beta,g)$ sınıfına aittir. Yani $zF(a,b,c;z)$ konvekse yakındır (S. Ponnusamy 1997).

Uyarı: Teorem 3.3.1 de $\eta=0$ olması durumunda Ponnusamy ve Vuorınen nin 1995 yılındaki sonuçları elde edilir (S.Ponnusamy 1997).

Şimdi ünivalent fonksiyonlar teorisinde kullanılan önemli bir dönüşümü verelim.

$f\in\mathcal{A}$ ve $\Lambda_f(z):\;\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ olmak üzere

$$\Lambda_f(z)=\int_0^z\frac{f(t)}{t}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n}{n}z^n$$

dönüşümüne f nin Alexander dönüşümü denir.

Şimdi Alexander dönüşümünün konvekse yakınlığı ile alakalı teoremi verelim

Teorem 3.3.2: Farzedelim ki a,b ve c sayıları için

(1) $a,b\in[1,\infty]$, $\mathrm{c}=a+b-1$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(\left(\Gamma(a+b-1)/\Gamma(a)\Gamma(b)\right)-1\right)$

(2) $a\in(0,1)$, $b\in(1-a,1)$, $\mathrm{c}=a+b-1$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(\left(\Gamma(a+b-1)/\Gamma(a)\Gamma(b)\right)-1\right)$

(3) $a\in(0,1)$, $b\in(1,\infty)$, $c=a+b-1$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(1-\left(\Gamma(a+b-1)/\Gamma(a)\Gamma(b)\right)\right)$

(4) $a,b\in(1,\infty)$ yada $a,b\in(0,1)$, $c\ge ab$ ve $\beta\le 1-1/\cos\eta$

(5) $a\in(1,\infty)$ ve $b\in(0,1]$, $c>a+b-1$ ve $\beta\le 1-1/\cos\eta$

(6) $\operatorname{Re}a>1/2$, $b=\bar{a}$, $c=2\operatorname{Re}a-1$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(\left(\Gamma(2\operatorname{Re}a-1)\big/\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})\right)-1\right)$

(7) $a\in\mathbb{C}/\{0,1\}$, $b=\bar{a}$, $0\ne c\ge\left\{0,\left|a^2\right|,2\operatorname{Re}a-1\right\}$ ve $\beta\le 1-1/\cos\eta$

şartlardan herhangi biri sağlansın. Bu durumda $f(z)=zF(a,b,c;z)$ ve $g(z)=z/1-z$ olmak üzere $\Lambda_f\in\mathcal{K}(\beta,g)$ dır (S. Ponnusamy 1997).

Sonuç 3.3.3: Farzedelim ki a,b *ve* c sayıları için

(1) $a\in(-1,0]$, $b\in[0,\infty]$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(1-\left(\Gamma(a+b+1)/\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\right)\right)$

(2) $a\in(-1,0]$, $b\in(-1-a,0]$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(\left(\Gamma(a+b+1)/\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\right)-1\right)$

(3) $a\in[0,\infty)$, $b\in(0,\infty)$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(\left(\Gamma(a+b+1)/\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)\right)-1\right)$

(4) $\operatorname{Re}a>-1/2$, $b=\bar{a}$ ve $\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(\left(\Gamma(2\operatorname{Re}a+1)\big/\Gamma(a+1)\Gamma(\bar{a}+1)\right)-1\right)$

şartlardan herhangi sağlansın. Bu durumda $\left((a+b)/ab\right)\left[F(a,b,a+b,z)-1\right]$ fonksiyonu $g(z)=\mathrm{z}/1-z$ olmak üzere $\mathcal{K}(\beta,g)$ sınıfına aittir (S. Ponnusamy 1997).

Teorem 3.3.4: Farzedelimki a,b,c sayıları için

(1) $a\in(-1,0)$, $b\in(-1,0)$ ve $\mathrm{c}\ge a+b+ab$

(2) $a\in(0,\infty)$, $b\in(0,\infty)$ ve $c\ge a+b+ab$

(3) $a\in\mathbb{C}/\{-1\}$, $b=\bar{a}$ ve $0\ne c\ge\max\left\{-1,2\operatorname{Re}a+\left|a\right|^2\right\}$, $\beta=0$

koşullarından herhangi biri sağlansın. Bu durumda $(c/ab)\left[F(a,b,c;z)-1\right]$ fonksiyonu $g(z)=z/1-z$ ve $\beta\le 1-1/\cos\eta$ olmak üzere $\mathcal{K}(\beta,g)$ sınıfındandır (S. Ponnusamy 1997).

Örnek 3.3.5: 1) $f(z)=z+\sum_{n=2}^{m}\frac{\left|(-m+1)_{n-1}\right|^{2}}{(c+1)_{n-1}(1)_{n}}z^{n}$ fonksiyonu $z/1-z$ ye göre konvekse yakındır dolayısıyla $\mathcal{U}$ da ünivalenttir (S. Ponnusamy 1997).

Çözüm: Teorem 3.3.4 teki 3.şıkta $\beta=\eta=0,\ a=-m,\ \mathrm{m}\ge 2,\ \mathrm{m}\in\mathbb{N}$ ve $0\ne c\ge m(m-2)$ alınırsa

$$\frac{c}{m^{2}}\left[F(-m,-m,c;z)-1\right]=z+\sum_{n=2}^{m}\frac{\left|(-m+1)_{n-1}\right|^{2}}{(c+1)_{n-1}(1)_{n}}z^{n}$$

fonksiyonunun $g(z)=z/1-z$ ye göre konvekse yakın olduğu görülür.

2) $f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left|(1+id)_{n-1}\right|^{2}}{(c+1)_{n-1}(1)_{n}}z^{n}$ fonksiyonu $z/1-z$ ye göre konvekse yakındır. Dolayısıyla $\mathcal{U}$ da ünivalenttir (S. Ponnusamy 1997).

Çözüm: Teorem 3.3.4 te ki 3.şıkta $c\ge d^{2}$ olduğu durumda $\beta=\eta=0,\ a=id,\ d\in\mathbb{R}/\{0\}$ alınırsa

$$\frac{c}{d^{2}}\left[F(id,-id,c;z)-1\right]=z+\sum_{n=2}^{m}\frac{\left|(1+id)_{n-1}\right|^{2}}{(c+1)_{n-1}(1)_{n}}z^{n}$$

fonksiyonu $z/1-z$ ye göre konvekse yakın olduğu görülür. Dolayısıyla $\mathcal{U}$ da ünivalenttir.

Teorem 3.3.6: Farzedelim ki a,b ve $\beta<1$ sayıları için

(1) $\operatorname{Re}a>0,\ |a|\le\min\left\{1/\sqrt{2},\sqrt{(2\operatorname{Re}a/3)}\right\},\ b=\bar{a}$ ve

$\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(1-\left(2\Gamma(2\operatorname{Re}a)/\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})\right)\right)$

(2) $\operatorname{Re}a>0,\ |a|\ge\max\left\{1/\sqrt{2},\sqrt{(2\operatorname{Re}a/3)}\right\},\ b=\bar{a}$ ve

$\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(\left(2\Gamma(2\operatorname{Re}a)/\Gamma(a)\Gamma(\bar{a})\right)-1\right)$

(3) $a\in(0,1/3]$, $b\in(0,1/2a]$ (yada $a\in(1/3,\infty)$ ve $b\le\min\{0,1/2a,a/(3a-1)\}$,

$\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(1-\left(2\Gamma(a+b)/\Gamma(a)\Gamma(b)\right)\right)$

(4) $a\in(1/3,\infty)$, $b\ge\max\{1/3,a/(3a-1)\}$ *ve*

$\beta\le 1-(1/\cos\eta)\left(\left(2\Gamma(a+b)/\Gamma(a)\Gamma(b)\right)-1\right)$

koşullarından herhangi biri sağlansın. Bu durumda $zF\left(a,b,a+b;z^2\right)$ fonksiyonu $g(z)=z/1-z$ ye göre $\mathcal{K}(\beta,g)$ sınıfındandır (S. Ponnusamy 1997).

Teorem 3.3.7: Eğer $a,b>0$ ve $\mathrm{T}_1(a,b)=\max\left\{a+b,a+b+\dfrac{ab-1}{2},2ab\right\}$ olmak üzere c sayısı ya

$$c\ge T_1(a,b) \tag{3.3.1}$$

yada $c=a+b$ olmak üzere

$$ab\ge 1,\ a+b\le 2ab,\ \text{ve}\ \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\le 2 \tag{3.3.2}$$

şartlarını sağlıyorsa $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu $-\log(1-z)$ ye göre konvekse yakındır (S. Ponnusamy ve M. Vuorınen 2001).

İspat: $f(z)=zF(a,b,c;z)$ olarak alalım. O zaman $f\in\mathcal{A}$ ve $n\ge 2$ için $A_n=\dfrac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}$ olmak üzere

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}A_nz^n\quad \text{ve}\quad A_1=1$$

biçimindedir. Böylece Pochammer sembolünden

$$A_{n+1}=\frac{(a+n-1)(b+n-1)}{(c+n-1)n}A_n \tag{3.3.3}$$

yazılır.

Teoremi ispatlamak için ilk olarak (3.3.1) kullanılır, ve sonra Teorem 2.4.10 uygulanır. Bu durumda pozitif reel sayıların (nA_n) dizisinin azalan olduğunu göstermemiz gerekir.

Hipotezden ve (3.3.3) den $\forall\, n \geq 1$ için A_n nin pozitif olduğu açıktır. Sonra (3.3.3) kullanarak

$$nA_n - (n+1)A_{n+1} = A_n\left[n - \frac{(n+1)(a+n-1)(b+n-1)}{(c+n-1)n}\right]$$

elde edilir. Böylece

$$X(n) = n^2(c-a-b) + n(1-ab) - (a-1)(b-1) \tag{3.3.4}$$

olmak üzere

$$nA_n - (n+1)A_{n+1} = \frac{A_n}{n(c+n-1)}X(n)$$

yazılır. İlk kısmı ispatlamak için $X(n)$ nin negatif olmadığını göstermemiz yeterli olacaktır. Teorem de $c \geq T_1(a,b)$ şartına dikkat edersek $c \geq a+b$ olur ve böylece (3.3.4) denkleminde ki n^2 nin katsayısının negatif olmadığı anlaşılır. Böylece tüm $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} X(n) &\geq (2n-1)(c-a-b) + n(1-ab) - (a-1)(b-1) \\ &= n\left[2(c-a-b)+1-ab\right] - c + 2(a+b) - 1 - ab = Y(n) \end{aligned}$$

yazılır. $c \geq T_1(a,b)$ den $c \geq a+b+(ab-1)/2$ olduğundan $Y(n)$ deki n nin katsayısı negatif değildir ve dolayısıyla

$$X(n) \geq Y(n) \geq Y(1) = c - 2ab$$

elde edilir. (3.3.1) den $c \geq 2ab$ olduğu için $Y(1) \geq 0$ olur ve bu $X(n)$ nin negatif olmadığı anlamına gelir. Buda $c \geq T_1(a,b)$ olması durumunda $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $-\log(1-z)$ ye göre konvekse yakın olduğunu gösterir.

İkinci kısmın ispatı için (nA_n) nin azalmayan ve limitinin ikiden küçük eşit olduğunu göster memiz gerekir. (3.3.2) den $c = a+b$ ve $ab \geq 1$ dır. Böylece bu durumda (3.3.2) den

$$X(n) = Y(n) \leq Y(1) = a + b - 2ab \leq 0$$

olur. Bu eşitsizliği kullanarak her $n \geq 1$ için $X(n)$ nin pozitif olmadığı elde edilir. Diğer bir deyişle (nA_n) dizisi artandır. Böylece Teorem 2.4.10 yardımıyla ispatı tamamlamak için limitinin 2 den küçük eşit olduğunu göstermemiz yeterlidir. Bu yüzden ikinci kısmın ispatı için

$$c = a+b \quad \text{ve} \quad \mathrm{nA}_n = \frac{(n-1)(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}} + \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}$$

yazalım. Bu eşitliği

$$nA_n = \frac{ab}{c}\frac{(a+1)_{n-2}(b+1)_{n-2}}{(c+1)_{n-2}(1)_{n-2}} + \frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}$$

şeklinde de yazabiliriz. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} nA_n = \frac{ab}{c}\lim_{n\to\infty}\frac{(a+1)_{n-2}(b+1)_{n-2}}{(c+1)_{n-2}(1)_{n-2}} + \lim_{n\to\infty}\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}$$

elde edilir. Gama fonksiyonunun özelliklerinden yani (2.7.4) eşitliğinden

$$\lim_{n\to\infty} nA_n = \frac{ab}{c}\frac{\Gamma(c+1)}{\Gamma(a+1)\Gamma(b+1)} + 0$$

ve $c = a+b$ olduğundan dolayı yukarıdaki eşitlikten

$$\lim_{n\to\infty} nA_n = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}$$

sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Diğer taraftan $a \in (-1,\infty)$, $b \in (-1,-a/a+1)$ ve $c \ge a+b+1$ olsun. Bu durumda 3.3.7 den $zF(a+1,b+1,c+1;z)$ (ve böylece $zF'(a,b,c;z)$) fonksiyonunun birim diskte ünivalent olduğu elde edilir. Bu bilgi ve Teorem 3.2.6 doğrultusunda aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.8: $M_0(a,b) = \max\{2+|a+b|, 1-ab\}$ olmak üzere eğer

$$a \in (-1,\infty),\ b \in (-1,-a/a+1],\ b \ne 0 \text{ ve } c \ge M_0(a,b)$$

şartları sağlanırsa $F(a,b,c;z)$ fonksiyonu birim diskte konvekstir (S. Ponnusamy ve M. Vuorinen 2001).

Eğer Teorem 3.2.6 da $a=1$ ve β=0 alınırsa $F'(a,b,c;z) \ne 0$ olmak üzere $b \in (-1,\infty)$, $b \ne 0$ *ve* $c \ge b+3$ için $F(1,b,c;z)$ fonksiyonu $\mathcal{U}$ da konvekstir.

$\mathcal{KS}^*$ olarak $\mathcal{U}$ birim diskin de yıldızıl ve $-\log(1-z)$ ye göre konvekse yakın olan fonksiyonların sınıfı gösterilir.

Aşağıda $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{KS}^*$ sınıfından olması için a,b ve c katsayıları üzerine şartlar verildi.

Teorem 3.3.9: $a,b>0$ olmak üzere

$$T(a,b)=\max\left\{a+b, a+b+(3ab-1)/2, \left(2+\sqrt{10}/2\right)ab\right\}$$

ve $c\geq T(a,b)$ olsun. Bu durumda $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu $\mathcal{KS}^*$ sınıfındandır (S. Ponnusamy ve M. Vuorınen 2001).

Teorem 3.3.10: Kabul edelim ki $\left[2\alpha^2+2\alpha(1-4ab)\right]-5ab+3ab(a+b)+3a^2b^2\geq 0$ olacak şekilde en az bir pozitif $a,b>0$, $\alpha=\alpha(a,b)$ sayıları var olsun. Eğer

$$T_2(a,b)=\max\left\{a+b, a+b+(3ab-1)/2, \alpha\right\} \text{ ve } \mathrm{c}\geq \mathrm{T}_2(a,b)$$

şartları sağlanırsa $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu $\mathcal{KS}^*$ sınıfındandır (S. Ponnusamy ve M. Vuorınen 2001)

Teorem 3.3.10 dan kullanışlı yıldızıllık kriterleri için birkaç basit örnek elde edilebilir. Bir f fonksiyonunun yıldızıl olabilmesi için $\mathrm{Re}\left(zf'(z)/f(z)\right)$ koşulunu sağlaması gerektiği bilinir. Fakat burada f hipergeometrik fonksiyon olarak düşünülürse bu koşulu kontrol etmek daha zordur.

Teorem 3.3.10 da $\alpha=1$ alınarak elde edilen aşağıdaki sonuç hipergeometrik fonksiyonların yıldızıllığını göstermek için kolaylık sağlar.

Sonuç 3.3.11: b ve c reel sayıları

(i) $b\in(0,1/3]$ ve $\mathrm{c}\geq b+1$

(ii) $b\in[1/3,\infty)$, $\mathrm{c}\geq(5b+1)/2$

şartlarından herhangi birini sağlasın. Bu durumda $zF(1,b,c;z)$ fonksiyonu $\mathcal{KS}^*$ sınıfındandır (S. Ponnusamy ve M. Vuorinen 2001).

Örnek 3.3.12: b ve c reel sayıları

(i) $b \in (0,1]$ ve $c \geq b+1$

(ii) $b \in [1,2]$ ve $c = b+1$

(iii) $b \in [1,\infty)$ ve $c \geq 2b$

şartlarından herhangi birini sağlasın. Bu durumda $zF(1,b,c;z)$ fonksiyonu $-\log(1-z)$ ye göre konvekse yakındır (S. Ponnusamy ve M. Vuorinen 2001).

Teorem 3.3.13: Eğer $a,b>0$ ve $N(a,b) = \max\{a+b,\ a+b+(2ab-1)/3,\ 3ab\}$ olmak üzere c sayısı ya

$$c \geq N(a,b)$$

yada

$$ab \geq 1/2,\ \mathrm{a}+b \leq 3ab \text{ ve } \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \leq 1$$

olmak üzere $c = a+b$ şartlarını sağlıyorsa $zF(a,b,c;z^2)$ fonksiyonu $(1/2)\log((1+z)/(1-z))$ e göre konvekse yakındır (S. Ponnusamy ve M. Vuorınen 2001).

3.4 Ünivalent Fonksiyonların Bazı Özel Sınıfları İçin Sonuçlar

Daha önceki bölümde Gauss hipergeometrik fonksiyonların ünivalentliği, yıldızıllığı konveks liği ve konvekse yakınlığı üzerine yapılan çalışmaları verdik. Bu bölümde de ünivalent fonksiyonların önemli alt sınıflarından olan düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyonların oluşturduğu sınıflar için sonuçlar verildi. Hipergeometrik fonksiyonların düzgün yıldızıllık ve düzgün konveksliği üzerine ilk çalışma 1999 yılında Y. C. Kim ve S. Ponnusamy, α mertebeden düzgün yıldızıl ve düzgün konveks fonksiyonlar için 2002 yılında N. E. Cho, S. Y. Woo, S. Owa ve β mertebeden α düzgün yıldızıl ve α düzgün konveks fonksiyonlar için de 2004 yılında A. Swaminathan tarafından verilmiştir. Bulunan sonuçlar daha önceki hipergeometrik fonksiyonların yıldızıllığı ve konveksliği için verilen sonuçların genelleştirilmesidir.

Teorem 3.4.1: $a,b\in\mathbb{C}/\{0\}$ ve $c>|a|+|b|+2$ olsun. Bu durumda eğer

$$\frac{\Gamma(c-|a|-|b|)\Gamma(c)}{\Gamma(c-|a|)\Gamma(c-|b|)}\left[1+\frac{2(|a|)_2(|b|)_2}{(c-2-|a|-|b|)_2}+\frac{5|ab|}{c-|a|-|b|-1}\right]\leq 2$$

eşitsizliği sağlanırsa $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu $\mathcal{UCV}$ sınıfındandır (Y. C. Kim ve S. Ponnusamy 1999).

Yukarıda ki teoremde $b=\bar{a}$ alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.4.2: Eğer $a\in\mathbb{C}/\{0\}$, $c>\max\{2+2\operatorname{Re}a,0\}$ ve

$$\frac{\Gamma(c-2\operatorname{Re}a)\Gamma(c)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-\bar{a})}\left[1+\frac{2|(a)_2|^2}{(c-2-2\operatorname{Re}a)_2}+\frac{5|a|^2}{c-1-2\operatorname{Re}a}\right]\leq 2$$

ise bu durumda $zF(a,\bar{a},c;z)$ fonksiyonu $\mathcal{UCV}$ sınıfındandır (Y. C. Kim ve S. Ponnusamy 1999).

Örnek 3.4.3:Eğer Teorem 3.4.2 de $a=-2$ alınırsa bu durumda $c\geq\left(\left(23+\sqrt{745}\right)/2\right)$ olur. Böylece

$$zF(-2,-2,c,z)=z+\frac{4}{c}z^2+\frac{2}{c(c+1)}z^3$$

fonksiyonu $c\geq\left(\left(23+\sqrt{745}\right)/2\right)$ koşuluyla $\mathcal{UCV}$ sınıfındandır (Y. C. Kim ve S. Ponnusamy 1999).

Teorem 3.4.4: $-1<a<0,\ b>0$ ve $c>a+b+1$ olsun. $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{UCT}(\alpha)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$a+b+1+\left[\frac{(1+\alpha)(a+1)(b+1)}{c-a-b-2}+3+2\alpha\right]|ab|\leq c$$

dır (Y. C. Kim ve S. Ponnusamy 1999).

Teorem 3.4.5: $a,b>0$, $c>a+b+2$ olsun. Eğer

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left(\frac{2(a)_2(b)_2}{(1-\alpha)(c-a-b-2)_2}+\left(\frac{5-\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{ab}{c-a-b-1}\right)+1\right)\leq 2$$

şartı sağlanırsa bu durumda $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu $\mathcal{UCV}(\alpha)$ $(-1\leq\alpha<1)$ sınıfındandır.

Aynı zamanda yukarıdaki şart $F_1(a,b,c;z)=z\left(2-F(a,b,c;z)\right)$ fonksiyonunun $\mathcal{UCT}(\alpha)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şarttır (N. E. Cho, S. Y. Woo ve S. Owa 2002).

Teorem 3.4.6: Eğer $a,b>-1$, $ab<0$, ve $c>0$ ise bu durumda $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}_p\mathcal{T}(\alpha)$ $(-1\leq\alpha<1)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$c\geq a+b+1-\frac{2ab}{1-\alpha}$$

olmasıdır (N. E. Cho, S.Y. Woo ve S. Owa 2002).

Teorem 3.4.7: Eğer $a,b>-1$, $ab<0$ ve $c>a+b+2$ ise $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{UCT}(\alpha)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$2(a)_2(b)_2+(5-\alpha)ab(c-a-b-2)+(1-\alpha)(c-a-b-1)\geq 0$$

olmasıdır (N. E. Cho, S. Y. Woo ve S. Owa 2002).

Aşağıda teoremlerin ispatında kullanılan katsayı tahminlerine dair lemmaları verelim

Lemma 3.4.8: f fonksiyonu (2.3.1) şeklinde olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\sum_{n=2}^{\infty}n\left[n(1+\alpha)-(\alpha+\beta)\right]a_n\leq 1-\beta \tag{3.4.1}$$

şartını sağlıyorsa $\mathcal{UCV}(\alpha,\beta)$ sınıfındandır. $f\in\mathcal{T}$ olmak üzere (3.4.1) şartı f fonksiyonunun $\mathcal{UCT}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşuldur (A. Swaminathan 2004).

Lemma 3.4.9: f fonksiyonu (2.3.1) şeklinde olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(1+\alpha)-(\alpha+\beta)\right]a_n\leq 1-\beta \tag{3.4.2}$$

şartını sağlıyorsa $\mathcal{S}_p(\alpha,\beta)$ sınıfındandır. $f \in \mathcal{T}$ olmak üzere (3.4.2) şartı f fonksiyonunun $\mathcal{S}_p\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşuldur (A. Swaminathan 2004).

Teorem 3.4.10: $a,b>0$ ve $c>a+b+1$ olsun. Eğer

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}\left\{1+\left(\frac{1+\alpha}{1-\beta}\right)\frac{ab}{c-a-b-1}\right\}\leq 2 \tag{3.4.3}$$

şartı sağlanırsa $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu $\mathcal{S}_p(\alpha,\beta)$ sınıfındandır (A. Swaminathan 2004).

İspat: $zF(a,b,c;z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}z^n$ olduğundan dolayı (3.4.2) yi uygulayarak

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(1+\alpha)-(\alpha+\beta)\right]\left\{\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}\right\}\leq 1-\beta$$

olduğunun gösterilmesi gerekir. Şimdi

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(1+\alpha)-(\alpha+\beta)\right]\left\{\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}\right\}=(1+\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_{n-1}}+(1-\beta)\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}$$

$(a)_n=a(a+1)_{n-1}$ özelliğini kullanarak yukarıdaki ifadenin sağ kısmı

$$(1+\alpha)\frac{ab}{c}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_n}+(1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(a)_n}$$

şeklinde yazılabilir. Burada (2.7.3) uygulanırsa

$$(1+\alpha)ab\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}+(1-\beta)\left\{\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}-1\right\}$$

elde edilir. Yukarıdaki tanım $1-\beta$ ile sınırlıdır. Buradan (3.4.3) ifadesi elde edilir.

Sonuç 3.4.11: Eğer $a,b>0$ ve $c>a+b+1$ ise yukarıdaki koşul $z(2-F(a,b,c;z))$ fonksiyonunun $\mathcal{S}_p\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şarttır (A. Swaminathan 2004).

Teorem 3.4.12: Eğer $a,b>1,$ c >0 ve $ab>0$ ise $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}_p\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul;

$$c \geq a+b+1-\frac{ab(1+\alpha)}{1-\beta}$$

olmasıdır (A. Swaminathan 2004).

İspat: $zF(a,b,c;z)=z+\frac{ab}{c}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_{n-2}(b)_{n-2}}{(c)_{n-2}(1)_{n-1}}z^n=z-\left|\frac{ab}{c}\right|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_{n-2}(b)_{n-2}}{(c)_{n-2}(1)_{n-1}}z^n$ olduğundan dolayı (3.4.2) ye göre

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[n(1+\alpha)-(\alpha+\beta)\right]\left\{\frac{(a+1)_{n-2}(b+1)_{n-2}}{(c+1)_{n-2}(1)_{n-1}}\right\}=\left|\frac{c}{ab}\right|(1-\beta) \qquad (3.4.4)$$

olduğunun gösterilmesi gerekir. Eğer $c\leq a+b+1$ ise (3.4.4) eşitliğinin sol tarafı ıraksaktır. Şimdi

$$\begin{aligned}&(1+\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_n}+(1-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_{n+1}}\\&=(1+\alpha)\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}+\frac{(1-\beta)c}{ab}\left\{\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}-1\right\}\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.4.4)

$$\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-b)\Gamma(c-a)}\left\{(\alpha+1)+(1-\beta)\frac{(c-a-b-1)}{ab}\right\}\leq(1-\beta)\left[\frac{c}{|ab|}+\frac{c}{ab}\right]=0$$

ifadesine denk olur. Yukarıda ki eşitlikten

$$(1+\alpha)+(1-\beta)\frac{(c-a-b-1)}{ab}\leq 0$$

bulunur. Bu ifade de

$$c\geq a+b+1-\frac{ab(1+\alpha)}{1-\beta}$$

yukarıda ki ifadeye denktir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.13: $a,b>0$ ve c $>a+b+2$ olsun. Eğer

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left\{1+\left(\frac{3+2\alpha-\beta}{1-\beta}\right)\left(\frac{ab}{c-a-b-1}\right)+\left(\frac{1+\alpha}{1-\beta}\right)\frac{(a)_2(b)_2}{(c-a-b-2)_2}\right\}\leq 2$$

ise $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonu $\mathcal{UCV}(\alpha,\beta)$ sınıfındandır (A. Swaminathan 2004).

İspat: Lemma 3.4.8 e göre

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left[n(1+\alpha)-(\alpha+\beta)\right]\left\{\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_{n-1}}\right\} \leq (1-\beta)$$

yada denk olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\left[(1+\alpha)(n+2)-(\alpha-\beta)\right]\left\{\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}}\right\} \leq (1-\beta)$$

olduğunun gösterilmesi gerekir. Bu eşitsizliğin sol kısmı

$$(1+\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)^2\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}}-(\alpha+\beta)\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} \tag{3.4.5}$$

olarak yazılır. Şimdi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} \tag{3.4.6}$$

ve

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)^2\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n}}+2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n+1}} \tag{3.4.7}$$

(3.4.5) ve (3.4.6) eşitliklerini kullanarak

$$(1+\alpha)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+2}(1)_{n}}+\left[3(1+\alpha)-(\alpha+\beta)\right]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_{n+1}(b)_{n+1}}{(c)_{n+1}(1)_{n}}+(1-\beta)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_{n}(b)_{n}}{(c)_{n}(1)_{n}}$$

yazılır. $(a)_{n+k}=(a)_n(a+k)_n$ özelliği kullanılarak yukarıdaki ifade

$$(1+\alpha)\frac{(a)_2(b)_2}{(c)_2}\frac{\Gamma(c+2)\Gamma(c-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}+(3+2\alpha-\beta)\frac{ab}{c}\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

$$+(1-\beta)\left\{\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}-1\right\}$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki ifade $1-\beta$ ile sınırlıdır. Buradan istenen sonuç elde edilir.

Teorem 3.4.13 ve $\mathcal{UCT}(\alpha,\beta)$ sınıfının tanımından aşağıdaki sonucu elde edebiliriz.

Sonuç 3.4.14: Eğer $a,b>0$ ve $c>a+b+2$ ise $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{UCT}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left\{1+\left(\frac{5-\alpha}{1-\alpha}\right)\left(\frac{ab}{c-a-b-1}\right)+\frac{2(a)_2(b)_2}{(1-\alpha)(c-a-b-2)_2}\right\}\leq 2$$

olmasıdır (A. Swaminathan 2004).

Teorem 3.4.15: Eğer $a,b>-1,\ ab<0$ ve $c>a+b+2$ ise $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{UCT}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$(1+\alpha)(a)_2(b)_2+(3+2\alpha-\beta)ab(c-a-b-2)+(1-\beta)(c-a-b-1)_2\geq 0 \qquad (3.4.8)$$

olmasıdır. (A. Swaminathan 2004)

İspat: $zF(a,b,c;z)=z+\frac{ab}{c}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_{n-2}(b)_{n-2}}{(c)_{n-2}(1)_{n-1}}z^n=z-\left|\frac{ab}{c}\right|\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_{n-2}(b)_{n-2}}{(c)_{n-2}(1)_{n-1}}z^n$ olduğundan dolayı (3.4.1) i uygulayarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}n\left[(1+\alpha)(n+2)-(\alpha+\beta)\right]\left\{\frac{(a+1)_{n-2}(b+1)_{n-2}}{(c+1)_{n-2}(1)_{n-1}}\right\}\leq(1-\beta)\left|\frac{c}{ab}\right| \qquad (2.4.9)$$

yazılır. Eğer $c\leq a+b+2$ olursa (3.4.9) eşitsizliğinin sol kısmı ıraksaktır. Böylece

$$(n+1)\left[(1+\alpha)(n+2)-(\alpha+\beta)\right]=(1+\alpha)(n+1)^2+(2+\alpha-\beta)(n+1)+(1-\beta)$$

şeklinde yazılır. Buradan (3.4.9)

$$(1+\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_{n-1}}+(3+2\alpha-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_n}+(1-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_{n+1}}$$

$$=(1+\alpha)\frac{(a+1)(b+1)}{(c+1)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+2)_n(b+2)_n}{(c+2)_n(1)_n}+(3+2\alpha-\beta)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+1)_n(b+1)_n}{(c+1)_n(1)_n}$$

$$+(1-\beta)\frac{c}{ab}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}$$

$$=(1+\alpha)(a+1)(b+1)\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

$$+(3+2\alpha-\beta)(c-a-b-2)\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$$

$$+\frac{(1-\beta)}{ab}(c-a-b-1)_2\frac{\Gamma(c+1)\Gamma(c-a-b-2)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}-(1-\beta)\frac{c}{ab}$$

yazılır. Bunun $\frac{c}{|ab|}(1-\beta)$ dan küçük eşit olması için gerek ve yeter şart (2.4.8) e denk olan

$$(1+\alpha)(a+1)(b+1)+(3+2\alpha-\beta)(c-a-b-2)+\frac{(1-\beta)}{ab}(c-a-b-1)_2 \leq 0$$

olmasıdır.

Aşağıdaki teoremler (3.1.2) ile tanımlanan integral operatörün düzgün yıldızıllığı ve düzgün konveksliği üzerinedir.

Teorem 3.4.16: Eğer $a,b>1\, ve\; c>a+b$ ise bu durumda

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left\{\frac{(1+\alpha)}{(1-\beta)}(c-a-b-1)-\frac{(\alpha+\beta)}{1-\beta}\frac{1}{(a-1)(b-1)}\right\}$$
$$\leq 2-\frac{(\alpha+\beta)(c-1)}{(1-\beta)(a-1)(b-1)}$$

eşitsizliği sağlanırsa (3.1.2) de verilen integral operatör $\mathcal{S}_p(\alpha,\beta)$ sınıfındandır

(A. Swaminathan 2004).

İspat: $G(a,b,c;z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_n}z^n$ olduğundan dolayı

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1+\alpha)n-(\alpha+\beta)\right]\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_n}$$

olduğunu göstermek gerekir. Dolayısıyla

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left[(1+\alpha)n-(\alpha+\beta)\right]\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_n}$$
$$=(1+\alpha)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n(1)_n}-\frac{(\alpha+\beta)(c-1)}{(a-1)(b-1)}\frac{(a)_{n-1}(b)_{n-1}}{(c)_{n-1}(1)_n}$$
$$=(1+\alpha)\left\{\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}-1\right\}$$
$$-(\alpha-\beta)\frac{(c-1)}{(a-1)(b-1)}\left\{\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}-\frac{(c-1)}{(a-1)(b-1)}-1\right\}$$

yukarıda ki eşitlik $1-\beta$ ile sınırlıdır. Buradan istenen ifade elde edilir.

Teorem 3.4.17: Eğer $a,b>-1,\, c>0\; ve\; ab<0$ ise bu durumda $a\neq 1,\, b\neq 1$ için (3.1.2) verilen integral operatörün $\mathcal{S}_p\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b-1)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[(1+\alpha)(c-a-b-1)-(\alpha+b)\right]+(\alpha+\beta)\frac{(c-1)_2}{(a-1)_2(b-1)_2}\leq 0$$

şartının sağlanmasıdır (A.Swaminathan 2004).

Teorem 3.4.18: (i) Eğer $a,b>0$ ve $c>a+b+1$ ise bu durumda

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left\{1+\left(\frac{1+\alpha}{1-\beta}\right)\frac{ab}{c-a-b-1}\right\}\leq 2$$

eşitsizliği sağlanırsa (3.1.2) de verilen integral operatör $\mathcal{UCV}(\alpha,\beta)$ sınıfındandır.

(ii) Eğer $a,b>1, c>0$ ve $ab<0$ ise bu durumda (3.1.2) de verilen integral operatörün $\mathcal{UCT}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart

$$c\geq a+b+1-\frac{ab(\alpha+1)}{1-\beta}$$

olmasıdır (A. Swaminathan 2004).

Teorem 3.4.19: (i) $a,b>-1,\ c>0$ ve $ab<0$ olsun. O zaman $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}^*\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$c>a+b+1-\frac{(1-\alpha\beta)ab}{(1-\beta)}$$

olmasıdır.

(ii) $a,b>0$ ve $c>a+b+1$ olsun. Bu durumda $F(a,b,c;z)=z\left[2-F(a,b,c;z)\right]$ fonksiyonunun $\mathcal{S}^*\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[1+\frac{(1-\alpha\beta)ab}{(1-\alpha)(c-a-b-1)}\right]\leq 2$$

olmasıdır (A. O. Mostafa 2009).

Teorem 3.4.20: (i) Eğer $a,b>-1,\ c>a+b+2$ ve $ab<0$ ise o zaman $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{CT}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$(1-\alpha\beta)(a)_2(b)_2+(3-2\alpha\beta-\beta)ab(c-a-b-2)+(1-\alpha)(c-a-b-2)_2\geq 0$$

olmasıdır.

(ii) Eğer $a,b>0$ ve $c>a+b+2$ ise bu durumda $F(a,b,c;z)=z\left[2-F(a,b,c;z)\right]$ fonksiyonunun $\mathcal{CT}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[1+\frac{(1-\alpha\beta)(a)_2(b)_2}{(1-\alpha)(c-a-b-2)_2}+\frac{(3-2\alpha\beta-\beta)}{(1-\beta)}\left(\frac{ab}{c-a-b-1}\right)\right]\leq 2$$

olmasıdır (A. O. Mostafa 2009).

Teorem 3.4.21: (i) $a,b>-1,\ c>0$ ve $ab<0$ olsun. O zaman $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{S}_1^*\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$c>a+b+1-\frac{(1+\beta)ab}{2\beta(1-\alpha)}$$

dır.

(ii) $a,b>0$ ve $c>a+b+1$ olsun. O zaman $F(a,b,c;z)=z\left[2-F(a,b,c;z)\right]$ fonksiyonunun $\mathcal{S}_1^*\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[1+\frac{(1+\beta)ab}{2\beta(1-\alpha)(c-a-b-1)}\right]\leq 2$$

olmasıdır (A. O. Mostafa 2010).

Teorem 3.4.22: (i) Eğer $a,b>-1,\ c>a+b+2$ ve $ab<0$ ise o zaman $zF(a,b,c;z)$ fonksiyonunun $\mathcal{C}_1\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$(1+\beta)(a)_2(b)_2+2(1+2\beta-\alpha\beta)ab(c-a-b-2)+2\beta(1-\alpha)(c-a-b-2)_2\geq 0$$

olmasıdır.

(ii) Eğer $a,b>0$ ve $c>a+b+2$ ise bu durumda $F(a,b,c;z)=z\left[2-F(a,b,c;z)\right]$ fonksiyonu nun $\mathcal{C}_1\mathcal{T}(\alpha,\beta)$ sınıfından olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}\left[1+\frac{(1+\beta)(a)_2(b)_2}{2\beta(1-\alpha)(c-a-b-2)_2}+\frac{(1+2\beta-\alpha\beta)}{\beta(1-\alpha)}\left(\frac{ab}{c-a-b-1}\right)\right]\leq 2$$

olmasıdır (A. O. Mostafa 2010).

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 3.1, 3.2 ve 3.3 bölümlerinde $F(a,b,c,z)$ hipergeometrik fonksiyonunun sırasıyla yıldızıl, konveks ve konvekse yakın fonksiyonların sınıflarından olması için gerek ve yeter şartları ve ayrıca sadece yeter şartları içeren teoremler verildi.

Tezin 3.4 bölümünde $F(a,b,c,z)$ hipergeometrik fonksiyonunun sırasıyla $\alpha-$düzgün yıldızıl ve $\alpha-$düzgün konveks fonksiyonların sınıflarından olması için gerekli ve yeterli şartları içeren teoremler verildi.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında Gauss hipergeometrik fonksiyonların geometrik özellikleri ele alındı. Gauss hipergeometrik fonksiyonun belirttiği serinin katsayılarındaki sabitlerin durumuna bağlı olarak bu fonksiyonun yıldızıllığı, konveksliği, konvekse yakınlığı, düzgün yıldızıllığı ve düzgün konveksliği üzerine teoremler ispatlarıyla birlikte verildi. Ayrıca Gauss hipergeometrik fonksiyonun integral operatörün geometrik özellikleri üzerine sonuçlar verildi.

KAYNAKÇA

[1] Branges, L. De., "A proof of the Bieberbach conjecture", Acta Math., 154(1-2), s137-s152, (1985).

[2] Cho, N. E., Woo, S.Y and Owa, S., " Uniform convexity properties for hypergeometric functions " Fract. Calc. Appl., 5(3), s303-s313, (2002).

[3] Choi, J. H., Kim, Y. C. and Srivastava, H. M., "Convex and starlike Generalized hypergeometric functions associated with the Hardly space ", Complex Variables Theory Appl., 31(4), s345-s355, (1996).

[4] Duren, P., "Univalent Functions", Springer, New York, (1983).

[5] Goodman, A. W., "On uniformly convex functions", Ann. Polon. Math., 56(1), s87-s92, (1991).

[6] Goodman, A. W., "On uniformly starlike functions", J. Math. Anal. Appl., 155, s364-s370, (1991).

[7] Goodman, A. W., "Univalent Functions", I. Mariner Publishing Company., Tapma, Florida., s-245, (1983).

[8] Goodman, A. W., "Univalent Functions", II. Mariner Publishing Company., Tapma, Florida., s-311, (1983).

[9] Hastö, P., Ponnusamy, S. and Vourinen M., "Starlikeness of the Gaussian Hypergeometric functions", 27(5) s1-s11, (2008).

[10] Kanas, S. and Wisniowska, A., "Conic regions and *k*-uniform convexity", J.Comput. Appl. Math., 105(1-2), s327-s336, (1999).

[11] Kanas, S. and Wisniowska, A., "Conic domains and starlike functions", Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 45(4), s647-s657, (2000).

[12] Kim, Y. C. and Ponnusamy, S., "Sufficiency for Gaussian hypergeometric functions to be uniformly convex", Int. J. Math. Math. Sci., 22 (4), MR1733277, s765-s773, (1999).

[13] Fejer. L., "Untersuchungen über Potenzreihen mit mehrfach monotoner Koeffizientenfolge", Acta Litterarum ac Scientiarum., s89-s115, (1936)

[14] Merkes, E. P. and Scott, B. T.,"Starlike hypergeometric functions", Proc. Amer. Math. Soc., 12, s885-s888, (1961)

[15] Miller. S. S., and Mocanu, P. T., "Univalence of Gaussian and confluent hypergeometric functions", Proc. Amer.Math.Soc., 110, s333-s342, (1990).

[16] Mostafa, A. O., "Starlikeness and concexity for hypergeometric functions" Computers and Mathematics with Aplications., 26(1), s2821-s2826, (2010).

[17] Mostafa, A. O., “Starlikeness and concexity for hypergeometric functions”, J. Inequal. Pure and Appl. Math., 10(3), s1-s8, (2009).

[18] Ozaki, S., “On the theory of multivalent functions”, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku. 2, s167-s188, (1935)

[19] Owa, S. and Srivastava, H.M., “Univalent and starlike generalized hypergeometric functions”, Canad. J. Math., 39(5), s1057-s1077, (1987)

[20] Pommerenke, Ch., “Univalent Functions”, Vandenhoeck and Ruprecht Company, Göttingen, Berlin., s-376, (1975).

[21] Ponnusamy, S., and Silverman, H., “Complex variables with Applications”, Birkhäuser. Boston., (2006).

[22] Ponnusamy, S. and Vuorinen M., “ Ünivalnece and convexity properties for Gaussian hypergeometric functions”, Rocky Mountain J. Math., 31(1), s327-s353, (2001).

[23] Ponnusamy, S., “ Close-to-convexity properties ıf Gaussıan hypergeometric functions”, Guwahati 78 1001, İndia 2(9), s327-s337, (1997).

[24] Rønning, F., “Uniformly convex functions and a corresponding class of starlike functions”, Proc. Amer. Math. Soc., 118(1), s189-s196, (1993).

[25] Rønning, F., “A survey on uniformly convex and uniformly starlike functions”, Ann. Univ. Mariae Curie-Sk lodowska Sect. A., 47, s123-s134, (1993).

[26] Rønning. F., “On uniform starlikeness and related properties of univalent functions”, Complex Variables Theory Appl., 24(3-4), s233s239, (1994)

[27] Ruscheweyh, St. and Sheil-Small, T., “Hadamard products of Schlicht functions and the Polya-Schoenberg conjecture”, Comment. Math. Helv., 48, s119-s135, (1973).

[28] Ruscheweyh, St. and V. Sıngh., “ On the order of starlikeness of hypergeometric functions”, Journal of Mathematıcal Analysıs and Applıcatıons., 113, s1-s11, (1986)

[29] Shams, S., Kulkarni, S. R., and Jahangiri, J. M., “Classes of uniformly starlike and convex functions”, Internat. J. Math. Math. Sci., 55, s2959-s2961, (2004).

[30] Silverman, H., “Starlike and convexity properties for hypergeometric functions”, Journal of Mathematical Analysis and Applications., 172, s574-s581, (1993)

[31] Swaminathan, A., “Convexity of the incomplete beta function”, Integral transforms spec. funct., 18, s521-s528, (2007)

[32] Swaminathan, A., “ Hypergeometric functions in the parabolic domain”, Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences., 20(1), s1-s16, (2004).

[33] Şahin, R., “Çok değişkenli hipergeometrik fonksiyonlar”, Ankara (2011)

[34] Wrıght, D. J., “On a class of starlike functions”, Compositio Math., 21, s122-s124, (1969).

ÖZGEÇMİŞ

1990 yılında Şanlıurfa da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Şanlıurfa da tamamladı. 2007 eğitim yılında Şanlıurfa Akabe Toki Lisesinden mezun oldu. 2007 eğitim yılında başladığı Kafkas Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümündeki lisans eğitimini bölüm üçüncülüğüyle 2011 yılında bitirdi. 2011 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine başladı.