T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

POLYHEDRAL ve BİNARY POLYHEDRAL GRUPLARIN PELL-PADOVAN ve JACOBSTHAL-PADOVAN UZUNLUKLARI

Yunus VARGÜN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Ömür DEVECİ

EYLÜL-2013

KARS

Doç. Dr. Ömür DEVECİ danışmanlığında Yunus Serhat VARGÜN ün Yüksek Lisans tezi olarak hazırladığı Polyhedral ve Binary Polyhedral Grupların Pell-Padovan ve Jacobsthal-Padovan Uzunlukları adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında oybirliği ile kabul edilmiştir.

…./…./….

Adı Soyadı	İmza
Başkan : Doç. Dr. Ömür DEVECİ	………………
Üye : Yrd. Doç. Dr. Güventürk UĞURLU	………………
Üye : Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	………………

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun …./…./…. Gün ve ………..../…………. Sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Muzaffer ALKAN

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Bu tez konusunu çalışmamı sağlayan, her adımda bilgilerini esirgemeyen, çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ömür DEVECİ'ye içten dileklerimle saygılarımı sunarım.

Yunus Serhat VARGÜN
Eylül - 2013

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tez çalışmasında gruplarda Pell-Padovan, co-Pell-Padovan ve Jacobsthal-Padovan dizileri ele alındı ve bu dizilerin sonlu gruplardaki uygulamaları üzerinde duruldu.

Bu çalışmanın 2. bölümünde üzerinde çalışılacak gruplar ve lineer indirgemeli diziler hakkında temel bilgiler verildi. Ayrıca 2. ve 3. bölümlerde, gerek üzerinde çalışılacak lineer indirgemeli dizilerin faklı gruplara uygulamaları gerekse üzerinde çalışılacak gruplara taşınmış farklı lineer indirgemeli diziler hakkında geniş bilgi verildi.

Bu çalışmanın 4. Bölümünde ise, $n \geq 3$ için $(n, 2,2)$, $(2, n, 2)$, $(2,2, n)$ polyhedral, $\langle n, 2,2\rangle$, $\langle 2, n, 2\rangle$ ve $\langle 2,2, n\rangle$ binary polyhedral gruplarının Pell-Padovan, co-Pell-Padovan ve Jacobsthal-Padovan uzunlukları hesaplanmıştır.

2013, 90 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Pell dizisi, Pell-Padovan dizisi, co-Pell-Padovan dizisi, Jacobsthal-Padovan dizisi, Polyhedral frup, binary polyhedral grup, orbit, periyot.

ABSTRACT

In this thesis, we discussed the Pell-Padovan, the co-Pell-Padovan and the Jacobstlah-Padovan sequences then we examined applications these sequences in finite groups.

In section 2, we given basic information about lineer recurrence sequences and groups which are studied in thesis. Furtermore, in section 2 and section 3, we given detailed information about both applications of lineer recurrence sequences in distinct groups and applications of distinct lineer recurrence sequences in groups which are studied in thesis.

In section 4 of this work, we obtain the Pell-Padovan length, the co-Pell-Padovan length, the Jacobsthal-Padovan length of the binary polyhedral groups $\langle n, 2,2\rangle$, $\langle 2, n, 2\rangle$, $\langle 2,2, n\rangle$ and the polyhedral groups $(n, 2,2)$, $(2, n, 2)$, $(2,2, n)$ for $n \geq 3$.

2013, 90 Pages

Key Words: The Pell sequence, The Pell-Padovan sequence, The co-Pell-Padovan sequence, The Jacobsthal-Padovan sequence, polyhedral group, binary polyhedral group, orbit, period.

SİMGELER DİZİNİ

G	Grup
e	Grubun birim elemanı
$\|\mathrm{G}\|$	G grubunun mertebesi
$G = \langle A \rangle$	A dan üretilen grup
(l, m, n)	Polyhedral grup
$\langle l, m, n \rangle$	Binary polyhedral grup
$f_n^{(k)}$	$1 \leq i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ sınır şartıyla tanımlı, $n > k$ için $f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}{}^{(k)}$ k-basamak Fibonacci dizisinin n. elemanı
$f(k, m)$	$f_n^{(k)}$ nin m ye göre modülü
$\{P_n\}$	Pell dizisi
$\{P_n^{(\alpha)}\}$	Genelleştirilmiş Pell dizisi
$\{P_n^k\}$	Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi
$\{P_n^{(\alpha),k}\}$	k-basamak genelleştirilmiş Pell dizisi
$\{J_n\}$	Jacobsthal dizisi
$\{P(n)\}$	Pell-Padovan dizisi
$\{J(n)\}$	Jacobsthal-Padovan dizisi

$\{P^{k,m}\}$	m modülüne göre k-mertebeden Pell dizisi
$hP_k(m)$	$\{P^{k,m}\}$ nin periyodu
$hP^{(\alpha),k,m}$	m modülüne göre k-basamak genelleştirilmiş Pell dizisi
$\{hP_k^{(\alpha)}(m)\}$	$\{hP^{(\alpha),k,m}\}$ nin periyodu
$\{P^{(m)}(n)\}$	m modülüne göre Pell-Padovan dizisi
$hP^{(m)}$	$\{P^{(m)}(n)\}$ nin periyodu
$\{J^{(m)}(n)\}$	m modülüne göre Jacobsthal-Padovan dizisi
$hJ^{(m)}$	$\{J^{(m)}(n)\}$ nin periyodu
$F_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$	G grubunda $x_0, x_1, \dots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları ile elde edilmiş k-nacci dizisi
$P_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$	$F_k(G; x_0, x_1, \dots, x_{j-1})$ k-nacci dizisinin periyodu
$P_A^{(\alpha)}(G)$	$G = \langle A \rangle$ olmak üzere G grubunun A geren kümesi için orbiti
$LEN_A P(G)$	$P_A^{(\alpha)}(G)$ nin periyodunun uzunluğu
$P_{x,y,y}(G)$	$(x, y) \in G$ geren çifti için G nin Pell-Padovan orbiti
$c - P_{x,y,y}(G)$	$(x, y) \in G$ geren çifti için G nin co-Pell-Padovan orbiti
$LP_{x,y,y}(G)$	$P_{x,y,y}(G)$ nin periyodunun uzunluğu
$Lc - P_{x,y,y}(G)$	$c - P_{x,y,y}(G)$ nin periyodunun uzunluğu
$F(r, 2)$	$r^2 - 1$ mertebeli Fibonacci grubu
$J_{x,y,y}(G)$	$(x, y) \in G$ geren çifti için G nin Jacobsthal-Padovan orbiti

$LJ_{x,y,y}(G)$	$J_{x,y,y}(G)$ nin periyodunun uzunluğu

ÇİZELGELER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Lineer indirgemeli diziler matematik ve fizikten bilgisayar bilimleri ve güzel sanatlara kadar bir çok bilimsel alandaki modern araştırmalarda karşımıza çıkmaktadır. Örneğin; [2-4, 15, 16, 23, 27, 33-35]

Gruplarda lineer indirgemeli diziler ilk olarak Wall ([37]) tarafından çalışılmıştır. Wall bu çalışmasında devirli gruplarda 2-basamak Fibonacci dizilerini incelemiştir.

Daha sonra yapılan bir çok çalışmada, çeşitli lineer indirgemeli diziler gruplara taşınarak konsept genişletilmiştir.

Deveci [7] deki çalışmasında gruplarda Pell-Padocan ve Jacobsthal-Padovan dizilerini incelemiş ve 2-gerenli gruplar için Pell-Padovan, Co-Pell-Padovan ve Jacobsthal-Padovan orbitlerini tanımlamış ve Fibonacci gruplarının Pell-Padovan, Co-Pell-Padovan ve Jacobsthal—adovan orbitlerinin periyotlarını elde etmiştir.

Deveci *et. al.* [13] deki çalışmalarında $n \geq 3$ için $(n, 2,2)$, $(2, n, 2)$, $(2,2, n)$ polyhedral, $\langle n, 2,2\rangle$, $\langle 2, n, 2\rangle$ ve $\langle 2,2, n\rangle$ binary polyhedral gruplarının Pell-Padovan, co-Pell-Padovan ve Jacobsthal-Padovan orbitlerini incelemiş ve bu orbitlerin periyotlarını elde etmişlerdir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Grup Takdimleri

Tanım 2.1.1: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin her elemanı S nin elemanlarının ve bu elemanların terslerinin sonlu bir çarpımı olarak yazılabiliyorsa S kumesi, G grubunun gerenlerinin bir kumesi olarak adlandırılır (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.1.2: Bir gruptaki gerenlerin sağladıkları denklemlere bu gruptaki bağıntılar denir (Dummit and Foote 2004).

Tanım 2.1.3: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. $s_1, s_2, \dots, s_n$, S nin elemanları ve her bir $\alpha_i = \pm 1$ olmak üzere, S deki bir kelime $s_1^{\alpha_1} s_2^{\alpha_2} \dots s_n^{\alpha_n}$ şeklinde ifade edilir.

S deki her bir kelime, G nin bir elemanını temsil eder. Bu anlamda boş kelime G nin birim elemanını temsil eder ve boş kelime uzunluğu sıfır olan tek kelimedir.

Tanım 2.1.4: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. Eğer G nin herhangi bir elemanı S nin sonlu sayıdaki elamanlarının ve bu elemanların terslerinin bir çarpımı olarak tek türlü yazılabiliyorsa G grubuna S kümesi üzerinde serbesttir denir.

Tanım 2.1.5: X bir küme, $F(x)$, X üzerinde serbest bir grup ve $R \subseteq F(x)$ olsun. $G = \langle X : R \rangle$ a G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi ve $r \in R$ için $r = e$ olacak şekildeki denklemlerinin kümesine ise tanımlayıcı bağıntılar kümesi denir. r elemanlarına da bağıntılar denir.

Hem X hemde R sonlu kümeler olmak üzere, eğer bir G grubu $\langle X: R\rangle$ şeklinde takdim edilirse bu gruba sonlu takdim edilmiş grup denir.

Lemma 2.1.1: Eğer G ve H sırası ile $\langle X: R\rangle$ ve $\langle X: S\rangle$ şeklinde takdim edilmiş gruplar ise $[X, Y]$, $\{x^{-1}y^{-1}xy: x \in X, y \in Y\}$ şeklinde komütatörlerin kümesi olmak üzere, bu grupların $G \times H$ direkt çarpımı, $\langle X, Y: R, S, [X, Y]\rangle$ şeklinde takdim edilir (Johnson 1997; Sims 1994)

Tanım 2.1.6: $(G,*)$ ve $(H,\circ)$ iki grup olmak üzere eğer $\varphi: G \to H$ dönüşümü $\forall x, y \in G$ için

$$\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

şartını sağlarsa φ ye bir grup homomorfizmi ya da kısaca bir homomorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.7: $\varphi: G \to H$, örten bir grup homomorfizmi ise φ ye bir epimorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.8: $\varphi: G \to H$, 1-1 bir grup homomorfizmi ise φ ye bir monomorfizm denir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.9: $\varphi: G \to H$, 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ye bir grup izomorfizmi denir ve $G \cong H$ şeklinde gösterilir. (Taşçı 2007).

İzomorf gruplar arasında birebir eşleme olup grup yapıları da bu eşleme altında bozulmaz.

Tanım 2.1.10: $\varphi: G \to G$, grup homomorfizmine endomorfizm denir. Eğer φ, 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ye bir grup otomorfizmi denir.

Tanım 2.1.11: G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $\forall x \in G$ için

$$\mathrm{I}_a(x) = axa^{-1}$$

İle tanımlanan

$$\mathrm{I}_a : G \to G$$

otomorfizmine G grubunun iç otomorfizmi denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesi $\mathrm{I}(G)$, bütün otomorfizmlerinin kümesi de $Aut(G)$ ile gösterilir (Taşçı 2007).

Tanım 2.1.12: G bir grup ve S de G nin bir alt kümesi olsun. G nin S alt kümesini kapsayan en küçük normal alt grubuna S alt kümesinin normal kapanışı denir.

Tanım 2.1.13: X bir küme, $F(x)$, X üzerinde serbest grup, $R \subseteq F(x)$ ve $\overline{R}$, $F(x)$ deki R kümesinin normal kapanışı olsun, yani $\langle g^{-1}rg : g \in F(x), r \in R \rangle$ kümesi ile $F(x)$ in alt grubu gerilmiş olsun. Bu durumda eğer $G \cong F(x)/\overline{R}$ ise G grubu, $\langle X : R \rangle$ şeklindeki takdim ile tanımlanmıştır denilir (Campell 2003).

Önerme 2.1.1: Aynı grubun sonlu iki takdimi verilmiş olsun. Tietze dönüşümlerinin sonlu bir dizisi kullanılarak verilen bir takdimden elde edilebilir (Johnson 1997).

Eğer G sonlu gerilmiş bir grup değil ise bu grup sonlu takdim edilemez. Bu durumda örnek olarak rasyonel sayıların normal toplama işlemine göre bir grup olan $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi verilebilir. Fakat bazı gruplar vardır ki sonlu gerilmiştir ama sonlu takdim edilemezler. Bu sonuç aşağıdaki iki teoremden elde edilir (Campell 2003).

Teorem 2.1.1: $2^{\aleph_0}$ tane nonizomorfik 2-gerenli grup vardır (Robinson 1982).

Teorem 2.1.2: Sayılabilir çoklukta nonizomorfik sonlu takdim edilmiş grup vardır (Campell 2003).

Lemma(von Dyck's Lemma) 2.1.2: $R \subseteq S \subseteq F(x)$ olmak üzere, $G = \langle X|R\rangle$ ve $H = \langle X|S\rangle$ ise her $x \in X$ elemanının sabitleyen ve $\mathrm{Ker}\phi = \overline{S \backslash R}$ olacak şekilde bir $\phi: G \to H$ epimorfizmi vardır. Tersine, $G = \langle X|R\rangle$ nin her bölüm grubu, $R \subseteq S$ olmak üzere $\langle X|S\rangle$ şeklinde bir takdime sahiptir (Johnson 1997).

Tanım 2.1.14: G, $\rho = \langle x_1, x_2, \dots, x_n : r_1, r_2, \dots, r_m\rangle$ takdimi ile tanımlanmış bir grup olsun. ρ nun bağıntı matrisi $m \times n$ tipinde bir matris olup, bu matrisin herhangi b_{ij} elemanı r_i bağıntısındaki x_j gerenlerinin üstlerinin toplamıdır.

Örneğin, G grubu, $\rho = \langle x, y, z : x^3 = y^3, zxz^{-1} = y, (zx)^3 = e, (zy)^2 = e\rangle$ şeklinde takdim edilsin. ρ nun bağıntı matrisi,

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edilir (Campell 2003).

Tanım 2.1.15: $l, m, n > 0$ için (l, m, n) şeklinde verilen polyhedral grup

$$\langle x, y, z : x^l = y^m = z^n = xyz = e\rangle$$

ya da

$$\langle x, y : x^l = y^m = (xy)^n = e\rangle$$

gösterimi ile tanımlanır. (l, m, n) şeklinde verilen polyhedral grubun sonlu olması için gerek ve yeter şart

$$k = lmn\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1\right) = mn + nl + lm - lmn$$

sayısının pazitif olmasıdır. Ayrıca (l, m, n) nin mertebesi $2lmn/k$ dır.

Tanım 2.1.16: $l, m, n > 0$ için $\langle l, m, n\rangle$ şeklinde verilen binary polyhedral grup

$$\langle x, y, z: x^l = y^m = z^n = xyz\rangle$$

gösterimi ile tanımlanır. Burada $l = 2$ alındığında $\langle 2, m, n\rangle$ için

$$\langle y, z: y^m = z^n = (yz)^2\rangle$$

gösterimi yazılabilir.

$\langle l, m, n\rangle$ şeklinde verilen binary polyhedral grubun sonu olması için gerek ve yeter şart

$$k = lmn\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1\right) = mn + nl + lm - lmn$$

sayısının pazitif olmasıdır. Ayrıca $\langle l, m, n\rangle$ nin mertebesi $4lmn/k$ dır (Kılıç and Taşçı 2006).

2.2. Lineer İndirgemeli Diziler

Tanım 2.2.1: $\boldsymbol{R}$ birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere $\boldsymbol{R}$ nin elemanlarının, $\boldsymbol{a_1}, \boldsymbol{a_2}, \dots, \boldsymbol{a_k}$ başlangıç elemanları ile $\boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{1}$ için

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \cdots + c_k a_n \tag{2.1}$$

şeklindeki homojen olmayan indirgemeli bağıntıyı sağlayan dizisine homojen lineer indirgemeli dizi denir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_k \in R$ sabit katsayılar olup c_k, R halkasının sıfır böleni olamaz (Everest *et. al*. 2003)

Tanım 2.2.2: $f(x) = x^k - c_1 x^{k-1} - \cdots - c_{k-1} x - c_k$ şeklindeki $k.$ dereceden polinoma (2.1) denkleminde ifade edilen homojen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir (Everest *et.al* 2003).

Eğer R sıfır bölene sahip değilse bu durumda $\{a\}$ dizisi minimal uzunluktaki bir indirgemeli bağıntıyı sağlar. Minimal uzunluktaki bağıntının karakteristik polinomu $\{a\}$ dizisinin minimal polinomudur. Minimal polinomun derecesine $\{a\}$ dizisinin mertebesi denir.

Tanım 2.2.3: $\{F_n\}$ Fibonacci dizisi $n \geq 0$ ve $F_0 = 0, F_1 = 1$ olmak üzere

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

şeklindedir. Yani Fibonacci dizisi

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

şeklindedir.

Silvester [31] de

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmiştir.

Honsberger [19] da Fibonacci sayılarının

$$Q = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir Q matrisi tarafından üretilebileceğini göstermiştir. Buradaki Q matrisine Fibonacci Q-marisi denir.

Tanım 2.2.4: $\{F_n^{(k)}\}$ k-basamak Fibonacci dizisi $n \geq 0$ ve $F_0 = F_1 = \cdots = F_{k-2} = 0$, $F_{k-1} = 1$ olmak üzere

$$F_{n+k}^{(k)} = F_{n+k-1}^{(k)} + F_{n+k-2}^{(k)} + \cdots + F_n^{(k)} \tag{2.1}$$

şeklindedir.

k-basamak Fibonacci dizisi [21] de Kalman tarafından bir lineer kombinasyon olarak tanımlanan

$$a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \cdots + c_{k-1} a_{n+k-1} \tag{2.2}$$

dizisinin özel bir halidir. Burada $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ reel sabitlerdir. Kalman [21] de

$$A_k = \left[a_{ij}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

matrisi yardımıyla (2.2) deki lineer indirgemeli diziler için

$$A_k^n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmiştir. Buradan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_n^{(k)} \\ F_{n+1}^{(k)} \\ F_{n+2}^{(k)} \\ \vdots \\ F_{n+k-2}^{(k)} \\ F_{n+k-1}^{(k)} \end{bmatrix}$$

eşitliği kolayca görülebilir.

Tanım 2.2.5: $\{P_n\}$ Pell dizisi $n \geq 0$ ve $P_0 = 0, P_1 = 1$ olmak üzere

$$P_{n+2} = 2P_{n+1} + P_n$$

şeklindedir. O halde Pell dizisi

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, \dots$$

şeklinde yazılabilir.

Horadam [18] de Pell sayılarının bazı özelliklerini elde edilmiştir ve Bicknell [1] de Pell sayılarının

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir M matrisi tarafından da üretilebileceğini göstermiştir.

Gandhi and Reddy [17] te $\alpha > 0$ sabit katsayısı için $\left\{P_n^{(\alpha)}\right\}$ genelleştirilmiş Pell dizisinin, $n > 0$ için

$$P_0^{(\alpha)} = 0, P_1^{(\alpha)} = 1 \text{ ve } P_{n+2}^{(\alpha)} = (\alpha + 1)P_{n+1}^{(\alpha)} + \tfrac{\alpha(\alpha+1)}{2} P_n^{(\alpha)}$$

şeklinde olduğunu göstermiştir.

Kılıç and Taşçı [22] de genelleştirilmiş k-mertebeden Pell sayılarının bir k dizisini, $n > 0$, $1 \leq i \leq k$ olmak üzere ve $1 - k \leq n \leq 0$ için

$$P_n^i = \begin{cases} 1 \ , & n = 1 - i \ \text{ ise} \\ 0 \ , & n \neq 1 - i \ \text{ ise} \end{cases}$$

başlangıç şartları ile birlikte

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + \cdots + P_{n-k}^i \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada P_n^i, i. dizinin n. terimidir. $i = k$ alınırsa $\{P_n^k\}$, genelleştirilmiş k-Pell sayıları elde edilir. Özel olarak $k = 2$ alınırsa $\{P_n^k\}$ genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi, $\{P_n\}$ standart Pell dizisine indirgenir.

Ayrıca Kılıç and Taşçı [22] de genelleştirilmiş k-mertebeden Pell matrisini

$$R = \left[r_{ij}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlamışlardır. Aynı zamanda

$$E_n = \left[e_{ij}\right]_{k\times k} = \begin{bmatrix} P_n^1 & P_n^2 & \cdots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \cdots & P_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_{n-k+1}^1 & P_{n-k+1}^2 & \cdots & P_{n-k+1}^k \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

olmak üzere

$$E_{n+1} = R.E_n$$

olduğunu göstermişlerdir.

Lemma 2.2.1: R ve E_n sırasıyla (2.4) ve (2.5) teki gibi olsunlar. Bu durumda tüm $n \geq 0$ tamsayıları için

$$E_{n+1} = R^{n+1}$$

yazılabilir (Kılıç and Taşçı 2006).

Deveci and Karaduman [12] de genelleştirilmiş Pell dizilerinin matematiksel tümevarımla da ispatlanabilen, $\alpha > 0$ sabit katsayıları için

$$M^{(\alpha)}=\begin{bmatrix}\alpha+1 & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}\\ 1 & 0\end{bmatrix}, \qquad \left(M^{(\alpha)}\right)^n=\begin{bmatrix}P_{n+1}^{(\alpha)} & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}P_n^{(\alpha)}\\ P_n^{(\alpha)} & \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{2}P_{n-1}^{(\alpha)}\end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir $M^{(\alpha)}$ matrisiyle de oluşturulabileceğini göstermişlerdir.

Deveci and Karaduman aynı çalışmada $P_n^{(\alpha),k}$ k-basamak geneştirilmiş Pell dizisini, $\alpha>0$ sabit katsayılar, $n\geq 0$ ve $1\leq j\leq k-1$ için $\beta_j=\binom{\alpha+j}{j+1}$ olacak şekilde

$$P_0^{(\alpha).k}=0,\dots,P_{k-2}^{(\alpha).k}=0,P_{k-1}^{(\alpha).k}=1$$

başlangıç elamanları ile

$$P_{n+k}^{(\alpha).k}=(\alpha+1)P_{n+k-1}^{(\alpha).k}+\beta_1P_{n+k-2}^{(\alpha).k}+\cdots+\beta_{k-1}P_n^{(\alpha).k} \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlamıştır. Ayrıca burada $\left\{P_n^{(\alpha),2}\right\}=\left\{P_n^{(\alpha)}\right\}$ olduğuna dikkat edilmelidir.

Deveci and Karaduman yine [12] de k-basamak genelleştirilmiş Pell dizisi için

$$\begin{bmatrix}P_{n+k}^{(\alpha).k}\\ P_{n+k-1}^{(\alpha).k}\\ P_{n+k-2}^{(\alpha).k}\\ \vdots\\ P_{n+1}^{(\alpha).k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}P_{n+k-1}^{(\alpha).k}\\ P_{n+k-2}^{(\alpha).k}\\ P_{n+k-3}^{(\alpha).k}\\ \vdots\\ P_{n}^{(\alpha).k}\end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmişlerdir. Burada

$$U=\left[u_{ij}\right]_{k\times k}=\begin{bmatrix}(\alpha+1) & \beta_1 & \cdots & \beta_{k-2} & \beta_{k-1}\\ 1 & 9 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilen U matrisine k-basamak genelleştirilmiş Pell matrisi denir.

Tanım 2.2.6: $\{J_n\}$ Jacobsthal dizisi $n \geq 0$ ve $J_0 = 0, J_1 = 1$ olmak üzere

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n$$

şeklindedir. Yani Jacobsthal dizisi

$$0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, \ldots$$

şeklindedir.

Koken and Bozkurt [24] te Jacobsthal sayılarının

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad F^n = \begin{bmatrix} J_{n-1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix}$$

olacak şekilde bir F matrisi tarafından üretilebileceğini göstermiştir.

Tanım 2.2.7: $\{P(n)\}$ Padovan dizisi $n \geq 3$ ve $P(0) = P(1) = P(2) = 1$ olmak üzere

$$P(n) = P(n-2) + P(n-3)$$

şeklindedir. Yani Padovan dizisi

$$1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, 16, \ldots$$

şeklindedir.

Lien [26] da Padovan sayıları için

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$Q^n = \begin{bmatrix} P(n-5) & P(n-3) & P(n-4) \\ P(n-4) & P(n-2) & P(n-3) \\ P(n-3) & P(n-1) & P(n-2) \end{bmatrix}$$

eşitliğini elde etmişlerdir.

Tanım 2.2.8: $\{P(n)\}$ Pell-Padovan dizisi $n \geq 0$ ve $P(0) = P(1) = P(2) = 1$ olmak üzere

$$P(n+3) = 2P(n+1) + P(n) \tag{2.7}$$

şeklindedir (Shannon *et. al.* 2006). Yani Pell-Padovan dizisi

$$1, 1, 1, 3, 3, 7, 9, 17, 25, 43, 67, 111, \ldots$$

şeklindedir.

Deveci [7] de Pell-Padovan sayılarının

$$\begin{bmatrix} P(n) \\ P(n+1) \\ P(n+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(n-1) \\ P(n) \\ P(n+1) \end{bmatrix}$$

şeklindeki eşitlik yardımıyla üretilebileceğini göstermiştir.

$$E = \left[e_{ij}\right]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindeki E matrisi Pell-Padovan matrisi olarak adlandırılmıştır.

Deveci [7] de $\{J(n)\}$ Jacobsthal-Padovan dizisini $n \geq 0$ ve $J(-1) = 0$ ve $J(0) = J(1) = 1$ olmak üzere

$$J(n+2) = J(n) + 2J(n-1) \tag{2.8}$$

şeklinde tanımlamış , G Jacobsthal-Padovan matrisini

$$G = \left[g_{ij}\right]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade etmiş ve ayrıca

$$\begin{bmatrix} J(n) \\ J(n+1) \\ J(n+2) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} J(n-1) \\ J(n) \\ J(n+1) \end{bmatrix} \quad , \quad G^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(n) \\ J(n+1) \\ J(n+2) \end{bmatrix}$$

olduğunu göstermiştir.

2.3. m Modülüne Göre Lineer İndirgemeli Diziler

2.3.1. m Modülüne Göre Genelleştirilmiş k-Mertebeden Pell Dizileri

Bu bölümde bir m modülüne göre genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizileri araştırılmıştır.

Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi m modülüne göre indirgenerek,

$$\{P^{k,m}\} = \left\{P_{1-k}^{k,m}, P_{2-k}^{k,m}, \dots, P_0^{k,m}, P_1^{k,m}, P_2^{k,m}, \dots, P_n^{k,m}, \dots\right\}$$

ile gösterilen ve idirgemeli bir dizi elde edilebilir. Burada $P_n^{k,m} = P_n^k (\operatorname{mod} m)$ dir. Ayrıca bu dizi (2.3) teki dizi ile aynı indirgemeli bağıntıya sahiptir (Deveci and Karaduman, Baskıda).

Teorem 2.3.1.1: $\{P^{k,m}\}$ periyodik bir dizidir (Deveci and Karaduman, Baskıda).

İspat: $U_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) |\ 0 \leq \mathrm{x_i} \leq m-1\}$ olsun. Bu durumda $|U_k| = m^k$ sonlu olur. Yani herhangi bir $a \geq 0$ için $P_{a+1}^{k,m} = P_{b+1}^{k,m}, \dots, P_{a+k}^{k,m} = P_{b+k}^{k,m}$ olacak şekilde $b \geq a$ mevcuttur. $\{P_n^k\}$ genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin tanımından

$$P_n^k = P_{n+k}^k - 2P_{n+k-1}^k - P_{n+k-2}^k - \cdots - P_{n+1}^k$$

olacaktır. Böylece,

$$P_a^{k,m} = P_b^{k,m} \quad , \quad P_{a-1}^{k,m} = P_{b-1}^{k,m}, \dots, P_2^{k,m} = P_{b-a+2}^{k,m} \quad , \quad P_1^{k,m} = P_{b-a+1}^{k,m}$$

eşitlikler elde edilebilir ki bu eşitliler $\{P^{k,m}\}$ nin periyodik olduğunu gösterir.

$\{P^{k,m}\}$ nin periyodunu gösteren $hP_k(m)$ ye m modülüne göre genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin periyodu denir. Burada $k = 2$ alındığında $hP_2(m)$ notasyonu m modülüne göre Pell dizisinin periyodunu gösterir.

Örneğin;

$$\{P^{3,2}\} = \{1, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, , \dots\}$$

olur ve bu tekrar eder. O halde $hP_3(2) = 7$ yazılabilir (Deveci and Karaduman. Baskıda).

Teorem 2.3.1.2: $u \in \mathbb{N}$ için $hP_2(2^u) = 2^u$ olur (Deveci and Karaduman, Baskıda).

İspat: $\{P_n\}$ Pell dizisinin tanımından $u \in \mathbb{N}$ için $P_{2^u} = 2P_{2^u-1} + P_{2^u-2} = 2^u\lambda$ $(\lambda \in \mathbb{N})$ ve $P_{2^u+1} = 2P_{2^u} + P_{2^u-1} = 2^{u+1}\lambda + 2^u\beta + 1$ $(\beta \in \mathbb{N})$ yazılabilir. $P_{2^u} \equiv 0 \pmod{2^u}$ ve $P_{2^u+1} \equiv 1 \pmod{2^u}$ olduğu için devir 2^u. terim ile tekrar başlar.

Yani $P_{2^u} \equiv P_0 \pmod{2^u}$, $P_{2^u+1} \equiv P_1 \pmod{2^u}, \cdots$ olur. Böylece $hP_2(2^u) = 2^u$ dir.

Teorem 2.3.1.3: $hP_2(m)$ bir çift sayıdır (Deveci and Karaduman, Baskıda).

İspat: $P_\alpha \equiv P_\phi \pmod{m}$ ve $P_{\alpha+1} \equiv P_{\phi+1} \pmod{m}$ olsun. $\{P_n\}$ Pell dizisinin tanımından

i. P_ϕ tek ise bu durumda $P_{\phi+1}$ çifttir.

ii. P_ϕ çift ise bu durumda $P_{\phi+1}$ tektir.

ifadeleri yazılabilir. Bu yüzden $hP_2(m)$ iki ile bölünür.

$\langle R\rangle_{p^\alpha} = \{R^i \ (\mathrm{mod}\, p^\alpha) \mid i \geq 0\}$ devirli bir gurup ve $|\langle R\rangle_{p^\alpha}|$, $\langle R\rangle_{p^\alpha}$ nın mertebesini göstersin. Bu durumda aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.3.1.4: $hP_k(p^\alpha) = |\langle R\rangle_{p^\alpha}|$ (Deveci and Karaduman, Baskıda).

İspat: $|\langle R\rangle_{p^\alpha}|$ nın $hP_k(p^\alpha)$ ile bölünebildiği aşikardır. Bu yüzden sadece $hP_k(p^\alpha)$ nın $|\langle R\rangle_{p^\alpha}|$ ile bölünebildiğini göstermek yeterlidir. $hP_k(p^\alpha) = n$ olsun. $E_{n+1} = R^{n+1} = R.E^n$ eşitliğinden I birim matris olmak üzere, $E_n \equiv I(\mathrm{mod}\, p^\alpha)$ olduğu için $R^{n+1} \equiv R(\mathrm{mod}\, p^\alpha)$ yazılabilir. Buradan n nin $|\langle R\rangle_{p^\alpha}|$ ile bölünebildiğini gösteren $R^n \equiv I(\mathrm{mod}\, p^\alpha)$ eşitliği yazılabilir.

Teorem 2.3.1.5: p_i ler farklı asallar olmak üzere $t \geq 1$ için eğer $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ olursa bu durumda $\mathrm{lcm}[hP_k(p_i^{e_i})]$, $hP_k(p_i^{e_i})$ nin en küçük ortak çarpanı olmak üzere $hP_k(m) = \mathrm{lcm}[hP_k(p_i^{e_i})]$ dir (Deveci and Karaduman, Baskıda).

İspat: $\mathrm{lcm}[hP_k(p_i^{e_i})] = \delta$ olsun. $P_\delta^k \equiv P_0^k \ (\mathrm{mod}\, m), P_{\delta+1}^k \equiv P_1^k \ (\mathrm{mod}\, m), \dots, P_{\delta+k-1}^k \equiv P_{k-1}^k \ (\mathrm{mod}\, m)$ olduğundan $hP_k(m) = \mathrm{Icm}[hP_k(p_i^{e_i})]$ eşitliği elde edilir.

Teorem 2.3.1.6: t **,** $hP_k(p) = hP_k(p^t)$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Bu durumda her $\alpha \geq t$ için $hP_k(p^\alpha) = p^{\alpha-t} hP_k(p)$ olur. Özel olarak eğer $hP_k(p) \neq hP_k(p^2)$ olursa bu durumda her $\alpha > 1$ için $hP_k(p^\alpha) = p^{\alpha-t} hP_k(p)$ dır (Deveci and Karaduman, Baskıda).

İspat: θ pozitif bir tamsayı olsun. $R^{hP_k(p^{\theta+1})} = I(\mathrm{mod}\, p^{\theta+1})$ olduğu için, yani $R^{hP_k(p^{\theta+1})} = I(\mathrm{mod}\, p^{\theta})$ olduğundan $hP_k(p^{\theta+1})$ nin $hP_k(p^{\theta})$ ya bölündüğü açıktır.

Diğer taraftan $R^{hP_k(p^\theta)} = I + (a_{ij}^{(\theta)} p^\theta)$ ifadesi yazılırsa, $hP_k\left(p^{\theta+1}\right)$ in $hP_k\left(p^\theta\right)p$ yi böldüğünü gösteren

$$R^{hP_k(p^\theta)p} = \left(I + \left(a_{ij}^{(\theta)} p^\theta\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(a_{ij}^{(\theta)} p^\theta\right)^i \equiv I(\mathrm{mod}\, p^{\theta+1})$$

eşitliği elde edilir. Böylece $hP_k\left(p^{\theta+1}\right) = hP_k\left(p^\theta\right)$ veya $hP_k\left(p^{\theta+1}\right) = hP_k\left(p^\theta\right)p$ olduğu görülür. Burada son yazılan eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart p ile bölünemeyen bir $a_{ij}^{(\theta)}$ olmasıdır. $hP_k(p^t) \neq hP_k(p^{t+1})$ olduğundan p ile bölünemeyen bir $a_{ij}^{(t+1)}$ vardır. Böylece $hP_k(p^{t+1}) \neq hP_k(p^{t+2})$ yazılabilir ve ispat t üzerinden tümevarımla tamamlanmış olur.

Tahmin 2.3.1.1: Eğer $p \geq k$ olursa bu durumda $hP_k(p)|(p^k - p^\sigma)$ olacak şekilde $0 \leq \sigma \leq k-1$ aralığında bir σ tamsayısı vardır. (Deveci and Karaduman, Baskıda).

Çizelge 2.1 ve Çizelge 2.2 sırasıyla $k = 2$ ve $k = 5$ alındığında tahminin doğruluğunu gösteren bazı asalların listesidir.

2.3.2. m Modülüne Göre k-basamak Genelleştirilmiş Pell Dizileri

Bu bölümde $\alpha \geq 2$ ve $k \geq 2$ için m modülüne göre k-basamak genelleştirilmiş Pell dizileri incelenmiştir.

k-basamak genelleştirilmiş Pell dizisi bir m modülüne göre indirgenerek,

$$\left\{P^{(\alpha),k,m}\right\} = \left\{P_0^{(\alpha),k,m}, P_1^{(\alpha),k,m}, P_2^{(\alpha),k,m}, \ldots, P_n^{(\alpha),k,m}, \ldots,\right\}$$

ile gösterilen ve tekrarlanan bir dizi elde edilebilir. Burada $P_n^{(\alpha),k,m} = P_n^{(\alpha),k}(\mathrm{mod}\, m)$ dır. Ayrıca bu dizi (2.6) teki dizi ile aynı indirgemeli bağıntıya sahiptir (Deveci and Karaduman 2013).

Teorem 2.3.2.1: $\alpha \geq 2$ için $\left\{P^{(\alpha),k,m}\right\}$ periyodiktir bir dizidir.

İspat: $S_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) |\, 0 \leq \mathrm{x_i} \leq m-1\}$ olsun. Bu durumda $|S_k| = m^k$ sonlu olur. Yani herhangi bir $u \geq 0$ için $P_{u+1}^{(\alpha),k,m} = P_{v+1}^{(\alpha),k,m}, \dots, P_{u+k}^{(\alpha),k,m} = P_{v+k}^{(\alpha),k,m}$ olacak şekilde $v \geq u$ mevcuttur. $\left\{P_n^{(\alpha),k}\right\}$ genelleştirilmiş k-basamak Pell dizisininin tanımından

$$\beta_{k-1} P_n^{(\alpha),k} = P_{n+k}^{(\alpha),k} - (\alpha+1) P_{n+k-1}^{(\alpha),k} - \beta_1 P_{n+k-2}^{(\alpha),k} - \dots - \beta_{k-2} P_{n+1}^{(\alpha),k}$$

olduğu görülür. Buradan $\left\{P^{(\alpha),k,m}\right\}$ nin periyodikliğini gerektiren

$$P_u^{(\alpha),k,m} = P_v^{(\alpha),k,m}, P_{u-1}^{(\alpha),k,m} = P_{v-1}^{(\alpha),k,m}, \dots, P_2^{(\alpha),k,m} = P_{v-u+2}^{(\alpha),k,m}, P_1^{(\alpha),k,m} = P_{v-u+1}^{(\alpha),k,m}$$

eşitlikler elde edilir.

$\left\{P^{(\alpha),k,m}\right\}$ nin periyodunu gösteren $hP_k^{(\alpha)}(m)$ ye m modülüne göre k-basamak genelleştirilmiş Pell dizisinin periyodu denir. Burada $k=2$ alındığında $hP_k^{(\alpha)}(m)$ notasyonu m modülüne göre genelleştirilmiş Pell dizisinin periyodunu gösterir. Örneğin;

$$\left\{P^{(2),3,5}\right\} = \{0, 0, 1, 3, 2, 4, 0, 0, 1, \dots\}$$

olur ve bu dizi tekrar eder. O halde $hP_3^{(2)}(5) = 6$ yazılabilir (Deveci and Karaduman 2012).

p_i ler farklı asallar olmak üzere $t \geq 1$ için eğer $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ olursa bu durumda $hP_k^{(\alpha)}(m) = \mathrm{Icm}\left[hP_k^{(\alpha)}(p_i^{e_i})\right]$ yazılabileceği kolay bir şekilde gösterilebilir (Deveci and Karaduman 2013).

$\langle U \rangle_{p^\alpha} = \left\{ U^i \; (\mathrm{mod}\, p^\alpha) \middle| \; i \geq 0 \right\}$ devirli bir gurup olsun ve $\left| \langle U \rangle_{p^\alpha} \right|$ notasyonu $\langle U \rangle_{p^\alpha}$ nın mertebesini göstersin. Burada $p \nmid \beta_{k-1}$ dir. Ayrıca T bir matrisin transpozunu göstermek üzere

$$\left(U^i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T (\mathrm{mod}\, m) = \left[P_{i+k-1}^{(\alpha),k,m}, P_{i+k-2}^{(\alpha),k,m}, \dots, P_i^{(\alpha),k,m} \right]$$

eşitliği yazılabilir böylece $hP_k^{(\alpha)}(m)$ nin

$$\left(U^{h^{(\alpha)}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right)^T (\mathrm{mod}\, m) = [1, 0, \dots, 0]$$

olacak şekilde en küçük $h^{(\alpha)}$ pozitif tam sayısı olduğu açıktır (Deveci and Karaduman 2013).

Teorem 2.3.2.2: $\alpha \geq 2$ olsun. Eğer $p \nmid \beta_{k-1}$ olursa bu durumda $hP_k^{(\alpha)}(p^\alpha) = \left| \langle U \rangle_{p^\alpha} \right|$ olur.

İspat: $\left| \langle U \rangle_{p^\alpha} \right|$ nın $hP_k^{(\alpha)}(p^\alpha)$ ile bölünebildiği aşikardır. O halde $hP_k^{(\alpha)}(p^\alpha)$ nın $\left| \langle U \rangle_{p^\alpha} \right|$ ile bölünebildiğini göstermek ispat için yeterli olacaktır. $hP_k^{(\alpha)}(p^\alpha) = n$ olsun. Bu durumda

$$U^n = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1k} \\ u_{21} & u_{22} & \dots & u_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{k1} & u_{k2} & \dots & u_{kk} \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. U^n matrisinin elemanları $2 \leq i \leq k$ ve $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1} \geq 0$ için

$$u_{11} = P_{n+k-1}^{(\alpha),k}, u_{12} = P_{n+k-2}^{(\alpha),k}, \dots, u_{1k} = P_n^{(\alpha),k}$$

$$u_{ii} = \lambda_1 P_{n+k-2}^{(\alpha),k} + \lambda_2 P_{n+k-3}^{(\alpha),k} + \dots + \lambda_{k-1} P_n^{(\alpha),k} + 1$$

ve $i \neq j$, $1 \leq i \leq k$ ve $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{k-1} \geq 0$ için

$$u_{ij} = \phi_1 P_{n+k-2}^{(\alpha),k} + \phi_2 P_{n+k-3}^{(\alpha),k} + \cdots + \phi_{k-1} P_n^{(\alpha),k}$$

şeklindedir. Böylece $1 \leq i \leq k$ için

$$u_{ii} = 1 \ (\text{mod}\, p^\alpha)$$

ve $i \neq j$ olacak şekilde $1 \leq i\ ,\ j \leq k$ için

$$u_{ij} = 0 \ (\text{mod}\, p^\alpha)$$

olarak elde edilir. Sonuç olarak n nin $\left|\langle U \rangle_{p^\alpha}\right|$ ile bölünebildiğini gösteren $U^n = I \ (\text{mod}\, p^\alpha)$ eşitliğine ulaşılır ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.3.2.3: $\alpha \geq 2$ ve t **,** $hP_k^{(\alpha)}(p) = hP_k^{(\alpha)}(p^t)$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Bu durumda her $\alpha \geq t$ için $hP_k^{(\alpha)}(p^\alpha) = p^{\alpha - t} hP_k^{(\alpha)}(p)$ dır. Özel olarak eğer $hP_k^{(\alpha)}(p) \neq hP_k^{(\alpha)}(p^2)$ olursa her $\alpha > 1$ için $hP_k^{(\alpha)}(p^\alpha) = p^{\alpha - t} hP_k^{(\alpha)}(p)$ eşitliği sağlanır.

İspat: q pozitif bir tamsayı olsun. $U^{hP_k^{(\alpha)}(p^{\theta+1})} = I(\text{mod}\, p^{q+1})$ olduğu için, $U^{hP_k^{(\alpha)}(p^{q+1})} = I(\text{mod}\, p^q)$ dır böylece $hP_k^{(\alpha)}(p^{q+1})$ nın $hP_k^{(\alpha)}(p^q)$ ya bölündüğü açıktır. Diğer taraftan $U^{hP_k^{(\alpha)}(p^q)} = I + (a_{ij}^{(q)} p^q)$ ifadesi yazılırsa, $hP_k^{(\alpha)}(p^{q+1})$ in $hP_k^{(\alpha)}(p^q)p$ yi böldüğünü gösteren

$$U^{hP_k^{(\alpha)}(p^q)p} = \left(I + \left(a_{ij}^{(q)} p^q\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(a_{ij}^{(q)} p^q\right)^i \equiv I(\text{mod}\, p^{q+1})$$

eşitliği elde edilir. Böylece $hP_k^{(\alpha)}(p^{q+1}) = hP_k^{(\alpha)}(p^q)$ veya $hP_k^{(\alpha)}(p^{q+1}) = hP_k^{(\alpha)}(p^q)p$ dir. Burada son yazılan eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart p ile bölünemeyen bir $a_{ij}^{(q)}$ olmasıdır. $hP_k^{(\alpha)}(p^t) \neq hP_k^{(\alpha)}(p^{t+1})$ olduğundan p ile bölünemeyen bir $a_{ij}^{(t+1)}$

vardır. Böylece $hP_k^{(\alpha)}(p^{t+1}) \neq hP_k^{(\alpha)}(p^{t+2})$ olup ispat t üzerinden tümevarımla tamamlanmış olur.

Tahmin 2.3.2.1: $\alpha \geq 2$ olsun. Eğer $p \geq k$ olursa bu durumda $hP_k^{(\alpha)}(p)\Big|(p^{k+1} - p^{\sigma})$ yı olacak şekilde $0 \leq \sigma \leq k$ aralığında bir σ tam sayısı vardır.

Çizelge 2.3 ve Çizelge 2.4 sırasıyla $k = 2$, $\alpha = 5$ ve $k = 5$, $\alpha = 2$ alındığında tahminin doğruluğunu gösteren bazı asalların listesidir.

2.3.3. m Modülüne Göre Jacobsthal-Padovan ve Pell-Padovan Dizileri

Pell-Padovan ve Jacobsthal-Padovan dizileri bir m modülüne göre indirgenerek,

$$\left\{P^{(m)}(n)\right\} = \left\{P^{(m)}(0), P^{(m)}(1), P^{(m)}(2), \dots, P^{(m)}(i), \dots\right\}$$

ve

$$\left\{J^{(m)}(n)\right\} = \left\{J^{(m)}(-1), J^{(m)}(0), J^{(m)}(1), \dots, J^{(m)}(i), \dots\right\}$$

ile gösterilen indirgemeli diziler elde edilebilir. Burada $P^{(m)}(i) = P(i)(\mathrm{mod}\, m)$ ve $J^{(m)}(i) = J(i)(\mathrm{mod}\, m)$ dir. Ayrıca bu diziler sırasıyla (2.7) ve (2.8) deki dizilerle aynı indirgemeli bağıntılara sahiptirler (Deveci, Baskıda).

Teorem 2.3.3.1: ***i.*** $\left\{P^{(m)}(n)\right\}$ basit periyodik bir dizidir. Yani dizi periyodiktir ve başlangıç değerlerine dönerek tekrar eder.

ii. Eğer m tek ise $\left\{J^{(m)}(n)\right\}$ dizisi basit periyodiktir. Eğer m çift ise $\left\{J^{(m)}(n)\right\}$ dizisi periyodiktir (Deveci, Baskıda).

İspat: *i.* Elde edilecek sıralı 3-lü lerin sayısı m^3 olup bu sayı sonlu olduğundan belli bir noktadan sonra dizide herhangi bir sıralı 3-lü tekrar karşımıza çıkacağından dizi peryodiktir. Pell-Padovan dizisinin tanımından $2P(n+1) = P(n+3) - P(n)$ eşitliği yazılabilir. Eğer $P^{(m)}(i+2) = P^{(m)}(j+2)$, $P^{(m)}(i+1) = P^{(m)}(j+1)$ ve $P^{(m)}(i) = P^{(m)}(j)$ olursa bu durumda $\{P^{(m)}(n)\}$ dizisinin basit periyodik olmasını gerektiren $P^{(m)}(i-j+2) = P^{(m)}(2)$, $P^{(m)}(i-j+1) = P^{(m)}(1)$ ve $P^{(m)}(i-j) = P^{(m)}(0)$ eşitlikleri elde edilir.

ii. m nin tek olması durumunun ispatı ***i.***ispatına benzerdir. Eğer m çift ise $J(n)$ için tek olduğundan $n \geq 0$ için $J^{(m)}(i-1) = J^{(m)}(-1) = 0$ olacak şekilde bir i tamsayısı bulunamaz. Bu yüzden $J^{(m)}(n)$ basit periyodik değildir.

$hP^{(m)}$ ve $hJ^{(m)}$ sırasıyla , $\{P^{(m)}(n)\}$ ve $\{J^{(m)}(n)\}$ nin en küçük periyotlarını göstermek üzere aşağıdaki örnekler yazılabilir.

$\{P^{(3)}(n)\} = \{1,1,1,0,0,1,0,2,1,1,1,\ldots\}$ olup tekrar eder ve $hP^{(3)} = 8$ olur.

$\{J^{(4)}(n)\} = \{0,1,1,1,3,3,1,1,3,3,\ldots\}$ olup tekrar eder ve $hJ^{(4)} = 4$ olur (Deveci, Baskıda).

$p \neq 2$ için $\langle E\rangle_{p^\alpha} = \{E^i \pmod{p^\alpha} \mid i \geq 0\}$ ve $\langle G\rangle_{p^\alpha} = \{G^i \pmod{p^\alpha} \mid i \geq 0\}$ devirli bir guruplar olsun ve $|\langle E\rangle_{p^\alpha}|$ ve $|\langle G\rangle_{p^\alpha}|$, sırasıyla $\langle E\rangle_{p^\alpha}$ ve $\langle G\rangle_{p^\alpha}$ nın mertebelerini göstersin. Bu durumda aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.3.3.2: Eğer $p \neq 2$ ise bu durumda $hP^{(p^\alpha)} = |\langle E\rangle_{p^\alpha}|$ ve $hJ^{(p^\alpha)} = |\langle G\rangle_{p^\alpha}|$ olur (Deveci, Baskıda).

İspat: $hJ^{(p^\alpha)} = \left|\langle G\rangle_{p^\alpha}\right|$ durumu göz önüne alınsın. O halde $\left|\langle G\rangle_{p^\alpha}\right|$ nın $hJ^{(p^\alpha)}$ ile bölünebildiği aşikardır. Bu yüzden ispatı tamamlamak için $hJ^{(p^\alpha)}$ nın $\left|\langle G\rangle_{p^\alpha}\right|$ ile bölünebildiğini göstermek yeterlidir. $hJ^{(p^\alpha)} = n$ olsun. Burada

$$G^n = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2z & x+y & y \\ 2y & 2z+y & x+z \end{bmatrix}$$

olduğu görülmektedir. Böylece

$$x + y + z \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p^\alpha)$$
$$x + y + 3z \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p^\alpha)$$
$$x + 3y + 3z \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p^\alpha)$$

eşitlikleri yazılabilir. Son olarak $hJ^{(p^\alpha)}$ nın $\left|\langle G\rangle_{p^\alpha}\right|$ yı bölmesini gerektiren $x \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ p^\alpha)$, $y \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^\alpha)$, $z \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p^\alpha)$ eşitlikleri elde edilir. O halde $hJ^{(p^\alpha)} = \left|\langle G\rangle_{p^\alpha}\right|$ olması durumu ispatlanmış olur. Benzer şekilde $hP^{(p^\alpha)} = \left|\langle E\rangle_{p^\alpha}\right|$ durumuda gösterilebilir.

Teorem 2.3.3.3: ***i.*** $p \neq 2$ ve t , $hP^{(p)} = hP^{(p^t)}$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Bu durumda her $\alpha \geq t$ için $hP^{(p^\alpha)} = p^{\alpha-t}hP^{(p)})$ dır.

ii. $p \neq 2$ ve t , $hJ^{(p)} = hJ^{(p^t)}$ olacak şekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Bu durumda her $\alpha \geq t$ için $hJ^{(p^\alpha)} = p^{\alpha-t}hJ^{(p)}$ dır (Deveci, Baskıda).

İspat: ***i.*** q pozitif bir tamsayı olsun. $E^{hP^{(p^{q+1})}} = I(\mathrm{mod}\ p^{q+1})$ olduğu için, $E^{hP^{(p^{q+1})}} = I(\mathrm{mod}\ p^{q})$ dır yani $hP^{(p^{q+1})}$, $hP^{(p^q)}$ ya bölünür. Diğer taraftan $E^{hP^{(p^q)}} = I + (a_{ij}^{(q)}.p^q)$ ifadesi yazılırsa, $hP^{(p^{q+1})}$ in $hP^{(p^q)}.p$ yi böldüğünü gösteren

$$E^{hP^{(p^q)}p} = \left(I + \left(a_{ij}^{(q)}p^q\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}\left(a_{ij}^{(q)}p^q\right)^i \equiv I(\mathrm{mod}\ p^{q+1})$$

eşitliği elde edilir. Böylece $hP^{(p^{q+1})} = hP^{(p^{q})}$ veya $hP^{(p^{q+1})} = hP^{(p^{q})}p$ olarak elde edilir. Burada son yazılan eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart p ile bölünemeyen bir $a_{ij}^{(q)}$ olmasıdır. $hP^{(p^{t})} \neq hP^{(p^{t+1})}$ olduğundan p ile bölünemeyen bir $a_{ij}^{(t+1)}$ vardır. Böylece $hP^{(p^{t+1})} \neq hP^{(p^{t+2})}$ yazılabilir ve ispat t üzerinden tümevarımla tamamlanmış olur.

ii. $hJ^{(p^{\alpha})} = p^{\alpha-t}hJ^{(p)}$ olması durumunun ispatı ***i.*** in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 2.3.3.1: ***i.*** $n \geq 4$ için $hP^{(2)} = 1, hP^{(4)} = hP^{(8)} = 6$ ve $hP^{(2^{n})} = 2^{n-3}.3$

ii. $n \geq 4$ için $hJ^{(2)} = 1, hJ^{(4)} = hJ^{(8)} = 4$ ve $hJ^{(2^{n})} = 2^{n-1}$ (Deveci, Baskıda).

Teorem 2.3.3.4: p_i ler farklı asallar olmak üzere $t \geq 1$ için eğer $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ olursa bu durumda $hP^{(m)} = \mathrm{lcm}\left[hP^{\left(p_i^{e_i}\right)}\right]$ ve $hJ^{(m)} = \mathrm{lcm}\left[hJ^{\left(p_i^{e_i}\right)}\right]$ dir. Burada $\mathrm{lcm}\left[hJ^{\left(p_i^{e_i}\right)}\right]$, $hP^{(p_1^{e_1})}$, $hP^{(p_2^{e_2})}$,…, $hP^{(p_t^{e_t})}$ lerin en küçük ortak katıdır (Deveci, Baskıda).

İspat: ***i.*** $hJ^{(m)} = \mathrm{Icm}\left[hJ^{\left(p_i^{e_i}\right)}\right]$ durumu göz önüne alınsın. $hJ^{\left(p_i^{e_i}\right)}$ nin $\left\{J^{\left(p_i^{e_i}\right)}(n)\right\}$ dizisinin periyodunun uzunluğu olması, $\left\{J^{\left(p_i^{e_i}\right)}(n)\right\}$ dizisinin $u \in \mathbb{N}$ olmak üzere $u.hJ^{\left(p_i^{e_i}\right)}$ uzunluğundaki bloklardan sonra tekrar etmesini gerektirir ve $hJ^{(m)}$ nin $\left\{J^{(m)}(n)\right\}$ dizisinin periyodunun uzunluğu olması, $\left\{J^{\left(p_i^{e_i}\right)}(n)\right\}$ dizisinin tüm i değerleri için $hJ^{(m)}$ den sonra tekrar etmesini gerektirir. Böylece $hJ^{(m)}$ tüm i değerleri için $u.hJ^{\left(p_i^{e_i}\right)}$ formunda olup bu şekildeki her sayı için $\left\{J^{(m)}(n)\right\}$ nin periyodunu verir. O halde $hJ^{(m)} = \mathrm{Icm}\left[hJ^{\left(p_i^{e_i}\right)}\right]$ olarak elde edilir.

ii. $hP^{(m)} = \text{lcm}\left[hP^{\left(p_i^{e_i}\right)}\right]$ olması durumunun ispatı ***i.*** in ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Tahmin 2.3.3.1: Eğer $p \neq 2$ ise bu durumda $hP^{(p)} \big| (p^2 - p^i)$ olacak şekilde $0 \leq i \leq 1$ aralığında bir i tam sayısı vardır.

Tahmin 2.3.3.2: Eğer $p \neq 2$ ise bu durumda $hJ^{(p)}$ nin $(p^3 - p^i)$ yı bölebileceği şekilde $0 \leq i \leq 2$ aralığında bir i vardır.

Çizelge 2.5 ve Çizelge 2.6 tahminin doğruluğunu gösteren bazı asalların listesidir.

Çizelge 2.1: $p \geq 2$ olacak şekilde p modülüne göre Pell dizisinin periyodu

p	$hP_2(p)$	**Sonuç**
2	2	$hP_2(p)\|p^2 - p$
5	12	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
7	6	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
13	28	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
31	30	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
53	108	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
83	168	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
241	80	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
373	748	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
853	244	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
1303	1032	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
4831	1610	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
9973	19948	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
16703	16702	$hP_2(p)\|p^2 - 1$
57991	92784	$hP_2(p)\|p^2 - 1$

Çizelge 2.2: $p \geq 5$ olacak şekilde p modülüne göre 5. Mertebeden genelleştirilmiş Pell dizisinin periyodu

p	$hP_5(p)$	**Sonuç**
5	124	$hP_5(p) \mid p^5 - p^2$
7	672	$hP_5(p) \mid p^5 - p$
13	3094	$hP_5(p) \mid p^5 - 1$
41	188384	$hP_5(p) \mid p^5 - p$
89	63455221	$hP_5(p) \mid p^5 - 1$
103	51	$hP_5(p) \mid p^5 - p^4$
181	4095	$hP_5(p) \mid p^5 - p^3$
313	48984	$hP_5(p) \mid p^5 - p^3$
503	127263526	$hP_5(p) \mid p^5 - p^2$
653	1818246352280	$hP_5(p) \mid p^5 - p$
1439	2979767518	$hP_5(p) \mid p^5 - p^2$
2411	2906460	$hP_5(p) \mid p^5 - p$
3221	107670753516205	$hP_5(p) \mid p^5 - 1$
4051	16410600	$hP_5(p) \mid p^5 - p^3$
4271	18241440	$hP_5(p) \mid p^5 - p^3$

Çizelge 2.3: $p \geq 2$ olacak şekilde p asal sayısı için $hP_2^{(5)}(p)$ nin uzunluğu

p	$hP_2^{(5)}(p)$	**Sonuç**
2	2	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p^2$
7	16	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p$
11	40	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p$
13	168	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p$
19	18	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p^2$
41	1680	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p$
59	3480	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p$
149	148	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p^2$
251	9000	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p$
503	502	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p^2$
877	256376	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p$
1571	493608	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - 1$
2441	1986160	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - p$
4951	3064050	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - 1$
6173	3086	$hP_2^{(5)}(p)\|p^3 - 1$

Çizelge 2.4: $p \geq 5$ olacak şekilde p asal sayısı için $hP_5^{(2)}(p)$ nin uzunluğu

p	$hP_5^{(2)}(p)$	**Sonuç**
5	24	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - p^2$
7	2736	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - 1$
11	3660	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - p$
13	732	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - 1$
23	139920	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - p^2$
37	7704884	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - p$
67	675062553	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - p$
113	163034592	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - p^4$
151	78502725750	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - p$
181	5929740	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - p^3$
211	9393930	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - 1$
907	822648	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - 1$
1013	1054062324744	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - 1$
1579	6212313856542	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - p^5$
3331	123148433215080	$hP_5^{(2)}(p) \| p^6 - 1$

Çizelge 2.5: $p \geq 5$ olacak şekilde p asal sayısı için $hP^{(p)}$ nin uzunluğu

p	$hP^{(p)}$	**Sonuç**
5	20	$hP^{(p)} \mid p^2 - p$
13	28	$hP^{(p)} \mid p^2 - 1$
73	148	$hP^{(p)} \mid p^2 - 1$
331	110	$hP^{(p)} \mid p^2 - p$
733	1468	$hP^{(p)} \mid p^2 - 1$
911	70	$hP^{(p)} \mid p^2 - p$
2423	4848	$hP^{(p)} \mid p^2 - 1$
4217	8436	$hP^{(p)} \mid p^2 - 1$
5711	5710	$hP^{(p)} \mid p^2 - p$
8783	5856	$hP^{(p)} \mid p^2 - 1$
13457	26916	$hP^{(p)} \mid p^2 - 1$
37591	12530	$hP^{(p)} \mid p^2 - p$
58309	29154	$hP^{(p)} \mid p^2 - p$
71887	143776	$hP^{(p)} \mid p^2 - 1$
96079	32026	$hP^{(p)} \mid p^2 - p$

Çizelge 2.6: $p \geq 3$ olacak şekilde p asal sayısı için $hJ^{(p)}$ nin uzunluğu

p	$hJ^{(p)}$	**Sonuç**
3	26	$hJ^{(p)} \mid p^3 - 1$
13	156	$hJ^{(p)} \mid p^3 - p^2$
71	178955	$hJ^{(p)} \mid p^3 - 1$
233	1581167	$hJ^{(p)} \mid p^3 - 1$
547	163667322	$hJ^{(p)} \mid p^3 - 1$
811	328860	$hJ^{(p)} \mid p^3 - p$
3217	10349088	$hJ^{(p)} \mid p^3 - p$
4111	16900320	$hJ^{(p)} \mid p^3 - p$
6053	6052	$hJ^{(p)} \mid p^3 - p^2$
8011	171371635110	$hJ^{(p)} \mid p^3 - 1$
27253	331828064316	$hJ^{(p)} \mid p^3 - 1$
47837	326911224	$hJ^{(p)} \mid p^3 - p$
70001	171507350105000	$hJ^{(p)} \mid p^3 - 1$
80107	514057148985042	$hJ^{(p)} \mid p^3 - 1$
90001	2700060000	$hJ^{(p)} \mid p^3 - p$

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Sonlu Gruplarda Lineer İndirgemeli Diziler

Sonlu bir gruptaki bir k- nacci dizisi, grubun $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizinin her bir elemanı, verilen $x_1, x_2, x_3, \dots, x_j$ başlangıç elemanları için

$$x_n = \begin{cases} x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}; & j < n \leq k \text{ } için \\ x_{n-k}, x_{n-k+1}, \dots, x_{n-1}; & n > k \text{ } için \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu dizinin $x_1, x_2, x_3, \dots, x_j$ başlangıç elemanlarının grubu germesi gerekir. Böylece bu k- nacci dizisi, grubun yapısını yansıtır. $x_1, x_2, x_3, \dots, x_j$ tarafından gerilen sonlu bir gruptaki bir k-nacci dizisi $F_k(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_j)$ ile gösterilir ve periyodu $P_k(G; x_1, x_2, x_3, \dots, x_j)$ ile ifade edilir (Knox 1992).

Tam sayılardaki bir m modülüne göre 2-basamak Fibonacci dizisi $F_2(\mathbb{Z}_m; 0,1)$ olarak yazılabilir. Grup elemanlarının bir 2-basamak Fibonacci dizisi sonlu bir grubun Fibonacci dizisi olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.1: G sonlu bir grup olsun. Eğer G grubunun her bir elemanı dizide görünecek şekilde G nin elemanlarının bir k-nacci dizisi varsa bu durumda G grubuna k-nacci dizilenebilirdir denir (Knox 1992).

Eğer bir grubun elamanlarının bir dizisi belli bir noktadan sonra sadece sabit bir alt dizinin tekrarı şeklinde ise periyodiktir ve tekrar eden alt dizideki elemanların sayısına dizinin periyodu denir. Örneğin; $a, b, c, d, e, b, c, d, e, b, c, d, e, \dots$ dizisi periyodik olup başlangıç elemanı a ve periyodu 4 tür.

Eğer bir dizideki ilk k eleman tekrar eden bir alt dizi şeklinde ise bu diziye k periyodlu basit periyodik dizi denir. Örneğin; $a, b, c, d, e, f, a, b, c, d, e, f, a, b, c, d, e, f$ ... dizisi periyodu 6 olan basit periyodiktir. k-nacci dizisinin periyodunun bir grup için seçilen sıralı n-li gerene bağlı olduğuna dikkat edilmelidir.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ olmak üzere sonlu üreteçli bir $G = \langle A \rangle$ grubu için

$$x_1 = a_1, \dots, x_{n-1} = a_{n-1}, x_{i+n} = \prod_{j=1}^{n} x_{i+j-1}\,, \quad i \geq 0$$

dizisine, A geren kümesine göre G nin Fibonacci orbiti denir ve $F_A(G)$ ile gösterilir.

Eğer $F_A(G)$ periyodik ise bu durumda dizinin periyot uzunluğuna, A geren kümesine göre G nin Fibonacci uzunluğu denir ve $LEN_A(G)$ ile gösterilir (Campbell and Campbell 2005).

3.1.1. Sonlu Binary Polyhedral Gruplarda k-nacci Dizileri

Bu bölümde ise herhangi $n > 2$ için $\langle 2,2,2 \rangle$, $\langle n, 2,2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2,2, n \rangle$ binary polyhedral gruplardaki k-nacci dizilerinin periyotları araştırılmıştır.

Teorem 3.1.1.1: G_2, $\langle x, y, z \colon x^2 = y^2 = z^2 = xyz \rangle$ gösterimi ile verilen bir grup olsun. bu durumda

$$P_k(G_2; x, y, z) = \begin{cases} 3, & k = 2 \\ 2k + 2, & k \geq 3 \end{cases}$$

ifadesi yazılabilir (Deveci *et. al*. 2011).

İspat: İlk olarak bu grubun iki gerenli durumu ele alınsın. Bu grup iki gerenli durumda $\langle x, y \colon x^2 = y^2 = (xy)^2 \rangle$ şeklinde gösterilir ve burada $|x| = 4$, $|y| = 4$ tür.

Eğer $k = 2$ ise periyodu 3 olan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, xy, yxy = x, xyx = y, xy, \dots$$

Eğer $k = 3$ ise periyodu 8 olan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, xy, (xy)^2 = x^2, x^3, x^2y^{-1} = y, x^3, y^{-1} = ex, e, x, y, \dots$$

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k elemanı aşağıdaki gibidir.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = y^2, x_4 = y^4, \dots, x_{k-1} = y^{2^{k-3}}$$

Burada gerekli indirgemeler yapılırsa $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = y^2, e, \dots, e$$

yazılabilir. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = y^{2^{k-2}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^{k} x_i = x^{-1},$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = x^2y^3 = y,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = xy,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = e$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca

$$x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e,$$

$$x_{k+k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = x,$$

$$x_{k+k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = y,$$

$$x_{k+k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = xy$$

eşitlikleri yazılabilir. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$ elemanları x, y ve xy nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k + 2$ nci elemanla başa döner yani,

$$x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3},\ x_2 = x_{2k+4}, \dots$$

olur. Buradan $P_k(G_2; x, y) = 2k + 2$ yazılabilir.

Şimdi grubun üç gerenli durumu ele alınsın. Burada $|x| = 4\ , |y| = 4\ , |z| = 4$ tür.

Eğer $k = 2$ ise periyodu 3 olan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, z, yz = x, zx = y, xy = z, \dots$$

Eğer $k = 3$ ise periyodu 8 olan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, z, xyz = z^2, yz^3, zyz, z, e, x, y, z, \dots$$

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k elemanı aşağıdaki gibidir.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^2, x_4 = z^4, \dots, x_{k-1} = y^{2^{k-3}}$$

Burada gerekli indirgemeler yapılırsa $4 \leq j \leq k - 1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^2, e, \dots, e$$

yazılabilir. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = z^{2^{k-2}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^{k} x_i = yz^3,$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = zyz,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = yz^3zyzz = e$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca

$$x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = yz^3zyzz = e,$$

$$x_{k+k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = zyz^2 = xyyz^2 = x,$$

$$x_{k+k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = zx = y,$$

$$x_{k+k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = xy = z$$

eşitlikleri yazılabilir. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$ elemanları x, y ve z nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ nci elemanla başa döner yani,

$$x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3},\ x_2 = x_{2k+4}, \dots$$

olur. Buradan $P_k(G_2; x, y, z) = 2k + 2$ yazılabilir.

Teorem 3.1.1.2: $n > 2$ olmak üzere G_n, $\langle x, y, z: x^n = y^2 = z^2 = xyz \rangle$ gösterimi ile verilen bir grup olsun. Bu durumda her $k \geq 2$ pozitif tamsayısı için bu gruptaki k-nacci dizisinin periyodu $2k + 2$ dir (Deveci *et. al.* 2011).

İspat: İlk olarak bu grubun iki gerenli durumu ele alınsın.. Bu grup iki gerenli durumda $\langle x, y: x^n = y^2 = (xy)^2 \rangle$ şeklinde gösterilir ve burada $|y| = 4$ tür.

Eğer $k = 2$ ise periyodu 6 olan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, xy, yxy, x^2y^3, y^2xy^3 = xy, x, y, \ldots$$

Eğer $k = 3$ ise periyodu 8 olan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, xy, y^2, y^3xy = x^{-1}, y^2x^2, y, xy, e, x, y, \ldots$$

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k elemanı aşağıdaki gibidir.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = y^2, \ldots, x_{k-1} = y^{2^{k-3}}$$

Burada gerekli indirgemeler yapılırsa $4 \leq j \leq k - 1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = y^2, e, \ldots, e$$

yazılabilir. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = y^{2^{k-2}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^{k} x_i = x^{-1},$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = x^2y^3,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = xy,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = e$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca

$$x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = e,$$
$$x_{k+k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = x,$$
$$x_{k+k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = y,$$
$$x_{k+k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = xy$$

eşitlikleri yazılabilir. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$ elemanları x, y ve xy nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ nci elemanla başa döner yani,

$$x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3},\ x_2 = x_{2k+4}, \ldots$$

olur. Buradan $P_k(G_2; x, y) = 2k + 2$ yazılabilir.

Şimdi grubun üç gerenli durumu ele alınsın. Burada $|x| = 2n$, $|y| = 4$, $|z| = 4$ tür.

Eğer $k = 2$ ise periyodu 6 olan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, z, yz, zyz, z, x, y, \ldots$$

Eğer $k = 3$ ise periyodu 8 olan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, z, xyz = z^2, yz^3, zyz, z, e, x, y, z, \ldots$$

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k elemanı aşağıdaki gibidir.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^2, x_4 = z^4, \dots, x_{k-1} = y^{2^{k-3}}$$

Burada gerekli indirgemeler yapılırsa $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = y^2, e, \dots, e$$

yazılabilir. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = z^{2^{k-2}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^{k} x_i = yz^3,$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = zyz,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = yz^3zyzz = e$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca

$$x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = yz^3zyzz = e,$$

$$x_{k+k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = zyz^2 = xyyz^2 = x,$$

$$x_{k+k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = zx = y,$$

$$x_{k+k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = xy = z$$

eşitlikleri yazılabilir. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$ elemanları x, y ve z nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k+2$ nci elemanla başa döner yani,

$$x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3},\ x_2 = x_{2k+4}, \dots$$

olur. Buradan $P_k(G_2; x, y, z) = 2k + 2$ yazılabilir.

Teorem 3.1.1.3: $n > 2$ olmak üzere G_n, $\langle x, y, z : x^2 = y^n = z^2 = xyz \rangle$ gösterimi ile verilen bir grup olsun. Bu durumda her $k \geq 2$ pozitif tamsayısı için bu gruptaki k-nacci dizisinin periyodu $2k + 2$ dir (Deveci *et. al.* 2011).

İspat: Grubun üç gerenli durumu ele alınsın. Burada $|x| = 2n$, $|y| = 4$, $|z| = 4$ tür.

Eğer $k = 2$ ise periyodu 6 olan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, z, yz, zyz, z, x, y, z, \dots$$

Eğer $k = 3$ ise periyodu 8 olan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, z, xyz = z^2, yz^3, zyz, z, e, x, y, z, \dots$$

Eğer $k \geq 4$ ise dizinin ilk k elemanı aşağıdaki gibidir.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^2, x_4 = z^4, \dots, x_{k-1} = y^{2^{k-3}}$$

Burada gerekli indirgemeler yapılırsa $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = y^2, e, \dots, e$$

yazılabilir. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = z^{2^{k-2}} = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^{k} x_i = yz^3,$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = zyz,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = z,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = yz^3zyzz = e$$

olur. Burada $4 \leq j \leq k$ için $x_{k+j} = e$ olup ayrıca

$$x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = yz^3zyzz = e,$$

$$x_{k+k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = zyz^2 = xyyz^2 = x,$$

$$x_{k+k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = zx = y,$$

$$x_{k+k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = xy = z$$

eşitlikleri yazılabilir. $x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4}$ elemanları x, y ve z nin değerlerine bağlı çıktığı için dizi $2k + 2$ nci elemanla başa döner yani,

$$x_0 = x_{2k+2}, x_1 = x_{2k+3},\ x_2 = x_{2k+4}, \dots$$

olur. Buradan $P_k(G_2; x, y, z) = 2k + 2$ yazılabilir.

Teorem 3.1.1.4: $n > 2$ olmak üzere G_n, $\langle x, y, z: x^2 = y^2 = z^n = xyz\rangle$ gösterimi ile verilen bir grup olsun. Bu durumda

i. $P_2(G_n; z, x, y) = 6$

ii. $P_{3,4}(G_n; x, y, z) = \begin{cases} n(k+1) & n \text{ çift ise} \\ 2n(k+1) & n \text{ tek ise} \end{cases}$

iii. Eğer $k \geq 5$ ise bu durumda,

1. Eğer n nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise periyod aşağıdaki gibidir.

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} n(k+1) & n \text{ çift ise} \\ 2n(k+1) & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

2. Eğer α, n nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

a) Eğer $j \in \mathbb{N}$ için $\alpha.3^j \notin [3, k-2]$ ise periyod aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} \alpha(n(k+1)) & n \text{ çift ise} \\ \alpha(2n(k+1)) & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

b) Eğer β, $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in \mathbb{N}$ için $\beta = \alpha.3^j$ ise periyod aşağıdaki gibidir;

$$P_k(G_n; x, y, z) = \begin{cases} \beta(n(k+1)) & n \text{ çift ise} \\ \beta(2n(k+1)) & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olur (Deveci *et. al.* 2011).

İspat: İlk olarak $|x| = 4$, $|y| = 4$, $|z| = 2n$ şeklinde olup,

i. Eğer $k = 2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_0 = z, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = xy, x_4 = yxy, x_5 = y, x_6 = z, x_7 = x, x_8 = y$$

Böylece bu dizinin periyodu $P_2(G_n; z, x, y) = 6$ olur.

ii. Eğer $k = 3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir.

$x,$

$y,$

$z,$

$\underline{xyz} = z^n,$

$yz\underline{z^n} = z^n yz,$

$z\underline{z^n z^n}yz = z^{2n}z\underline{yz} = z^{2n}zx,$

$\underline{z^n z^n}yz\underline{z^{2n}}zx = z^{4n}\underline{yz}zx = z^{4n}xzx,$

$z^n yz\underline{z^{2n}}zx\underline{z^{4n}}xzx = z^{7n}\underline{yz}z\underline{xx}zx = z^{8n}xz^2x,$

$z^{2n}zxz^{4n}xzxz^{8n}xz^2x = z^{14n}z\underline{x^2}z\underline{x^2}z^2x = z^{16n}z^4x,$

$\underline{z^{4n}}xzx\underline{z^{8n}}xz^2x\underline{z^{16n}}z^4x = z^{28n}xz\underline{x^2}z^2xz^4x = z^{29n}x\underline{z^3xz^4}x = z^{29n}x^2zx = z^{30n}zx,$

$$
\begin{aligned}
\underline{z^{8n}}xz^2xz\underline{z^{16n}}z^4x\underline{z^{30n}}zx &= z^{54n}x\underline{z^2xz^4}xzx = x^{54n}\underline{x^2}z^2xzx = z^{55n}\underline{z^2x}zx \\
&= z^{55n}z\underline{x^2} = z^{56n}z,
\end{aligned}
$$

$\underline{z^{16n}}z^4x\underline{z^{30n}}zx\underline{z^{56n}}z = z^{102n}\underline{z^4xz}xz = z^{102n}z^3\underline{x^2}z = z^{103n}z^4,$

$\underline{z^{30n}}zx\underline{z^{56n}}z\underline{z^{103n}}z^4 = z^{189n}\underline{zxz^5} = z^{189n}xz^4, \ldots$

Şimdi yukarıdaki 3-nacci dizisinin belli bir kesiti $\ldots, z^\alpha x, zx, z, \ldots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir.

$z^a x,$

$zx,$

$z,$

$\underline{z^a xz}xz = z^{a-1}\underline{x^2}z = z^n z^a,$

$zxz\underline{z^n}z^a = z^n\underline{zxz^{a+1}} = z^n xz^a,$

$z\underline{z^n}z^a\underline{z^n}xz^a = \underline{z^{a+1}xz^a} = zx,$

$z^n z^a\underline{z^n}xz^a zx = \underline{z^a zz^{a+1}x} = xzx,$

$z^n xz^a z\underline{xx}zx = xz^{a+2}x,$

$zxxz\underline{xx}z^{a+2}x = z^{a+4}x,$

$zxxz\underline{xx}z^{a+2}x = z^{a+4}x,$

$xz\underline{xx}z^{a+2}xz^{a+4}x = z^n x\underline{z^{a+3}xz^{a+4}x} = \underline{z^n xx}zx = zx,$

$x\underline{z^{a+2}xz^{a+4}}xzx = \underline{x^2z^2xz}x = z^n z\underline{x^2} = z, \ldots$

Buradan 3-nacci dizisinin her sekiz terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğunu görülür. Böylece 3-nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$\begin{aligned}
&x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z, \ldots, \\
&x_9 = z^4x, x_{10} = \underline{zx} = y, x_{11}z, \ldots, \\
&x_{17} = z^8x, x_{18} = \underline{zx} = y, x_{19} = z, \ldots, \\
&x_{8i+1} = z^{4i}x, x_{8i+2} = \underline{zx} = y, x_{8i+3} = z, \ldots.
\end{aligned}$$

Burada $v \in \mathbb{N}$ için $4i = 2nv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer n çift ise bu durumda $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $8i = 4n$ ve $P_3(G_n; x, y, z) = n(k+1) = 4n$ yazılabilir.

Eğer n tek ise bu durumda $n = i$ olur. Böylece $8i = 8n$ ve $P_3(G_n; x, y, z) = 2n(k+1) = 8n$ yazılabilir.

Eğer $k = 4$ ise aşağıdaki dizi elde edilir.

$x,$

$y,$

$z,$

$\underline{xyz} = z^n,$

$\underline{xyzxyz} = z^{2n},$

$yz\underline{z^n z^{2n}} = \underline{y}zz^{3n} = z^{3n}x,$

$z\underline{z^n z^{2n} z^{3n}}x = z^{6n}zx,$

$\underline{z^n z^{2n} z^{3n}}x\underline{z^{6n}}zx = z^{12n}xzx,$

$\underline{z^{2n}z^{3n}}x\underline{z^{6n}}zx\underline{z^{12n}}xzx = z^{23n}\underline{xxxzzx} = z^{24n}xz^2x,$

$\underline{z^{3n}}x\underline{z^{6n}}zx\underline{z^{12n}}xzx\underline{z^{24n}}xz^2x = z^{45n}x\underline{zxxzxxz^2}x = z^{47n}xz^4x,$

$\underline{z^{6n}}zx\underline{z^{12n}}xzx\underline{z^{24n}}xz^2x\underline{z^{47n}}xz^4x = z^{89n}\underline{zxxzxxz^2xxz^4}x = z^{92n}z^8x,$

$\underline{z^{12n}xzxz^{24n}xz^2xz^{47n}xz^4xz^{92n}z^8}x = z^{178n}zx,$

$\underline{z^{24n}xz^2xz^{47n}xz^4xz^{92n}z^8xz^{192n}zx} = z^{344n}z,$

$\underline{z^{47n}xz^4xz^{92n}z^8xz^{192n}zxz^{372n}z} = z^{663n}z^4,$

$\underline{z^{92n}z^8xz^{192n}zxz^{372n}zz^{715n}z^4} = z^{1278n}z^{12},$

$\underline{z^{192n}zxz^{372n}zz^{715n}z^4z^{1374n}z^{12}} = z^{2463n}xz^{16}, \ldots$

Şimdi yukarıdaki 4-nacci dizisinin belli bir kesiti $\ldots, z^{\alpha}x, zx, z, \ldots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir.

$z^a x,$

$zx = y,$

$z,$

$z^n z^b$,

$\underline{z^a xzxzz^n z^b} = \underline{z^a x^2 z^n z^b} = \underline{z^a z^{2n} z^b} = z^{a+b}$

$\underline{zxzz^n z^b z^{a+b}} = x\underline{z^n z^{b+a+b}} = z^n xz^{2b+a}$,

$\underline{zz^n z^b z^{a+b} z^n} x\underline{z^{2b+a}} = z^{2n} zx = zx = y$,

$\underline{z^n z^b z^{a+b} z^n} x\underline{z^{2b+a}} zx = z^{2n} xzx = xzx$,

$\underline{z^{a+b} z^n} x\underline{z^{2b+a} zxxz} x = z^{2n} xz^{b+2} x = xz^{b+2} x$,

$\underline{z^n} x\underline{z^{2b+a} zxxzxxz^{b+2}} x = z^n xz^{3b+a+4} x$,

$\underline{zxxzxxz^{b+2} xz^n xz^{3b+a+4} xz^{4b+a+8} x} = \underline{z^n xzz^{4b+a+7} xz^{4b+a+8} x} = z^{2n} zx = zx = y$,

$$xz^{b+2} xz^n xz^{3b+a+4} xz^{4b+a+8} xzx = xz^{4b+a+6} xz^{4b+a+8} xzx = x^2 z^2 xzx = z^n zx^2$$
$$= z^{2n} z = z, \ldots.$$

Buradan 4-nacci dizisinin her on terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğunu görülür. Böylece 3-nacci dizisi aşağıdaki gibi ifade edebilir:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^n \ldots,$$
$$x_{10} = z^8 x, x_{11} = \underline{zx} = y, x_{12} z, x_{13} = z^n z^4 \ldots,$$
$$x_{20} = z^{32} x, x_{21} = \underline{zx} = y, x_{22} = z, x_{23} = z^n z^8 \ldots,$$
$$x_{10i} = z^{8i^2} x, x_{10i+1} = \underline{zx} = y, x_{10i+2} = z, x_{10i+3} = z^n z^{4i} \ldots.$$

Burada $v_1, v_2 \in \mathbb{N}$ için $4i = 2nv_2$ ve $8i^2 = 2nv_1$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer n çift ise bu durumda $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $10i = 5n$ ve $P_4(G_n; x, y, z) = n(k+1) = 5n$ yazılabilir.

Eğer n tek ise bu durumda $n = i$ olur. Böylece $10i = 10n$ ve $P_4(G_n; x, y, z) = 2n(k+1) = 10n$ yazılabilir.

iii. Eğer $k \geq 5$ ise dizinin ilk $k+1$ elemanı aşağıdaki gibidir;

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^n, x_4 = z^{2n}, \dots, x_k = z^{2^{k-3}n}$$

Burada gerekli indirgemeler yapılırsa $4 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^n, x_4 = e, \dots, e$$

yazılabilir. Şimdi yukarıdaki k-nacci dizisinin belli bir kesiti $\dots, z^\alpha x, zx, z, \dots$ formunda yazılırsa aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x_{2k+2} = \prod_{i=k+2}^{2k+1} x_i = z^a x,$$

$$x_{2k+2+1} = \prod_{i=k+3}^{2k+2} x_i = zx,$$

$$x_{2k+2+2} = \prod_{i=k+4}^{2k+3} x_i = z,$$

$$x_{2k+2+3} = \prod_{i=k+5}^{2k+4} x_i = z^n z^b,$$

$$x_{2k+2+4} = \prod_{i=k+6}^{2k+5} x_i = z^c,$$

$$x_{2k+2+5} = \prod_{i=k+7}^{2k+6} x_i = z^{u_1},$$

$$\vdots$$

$$x_{2k+2+k} = \prod_{i=2k+2}^{3k+1} x_i = z^{u_{k-4}},$$

$$\vdots$$

Buradan k-nacci dizisinin her $(2k+2)$ terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğunu görülür. O halde k-nacci dizisi aşağıdaki gibi olur;

$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^n, x_4 = e, \dots, x_k = x^{2^{k-3}n} = e, \dots,$

$x_{i(2k+2)} = z^a\, x,$

$x_{i(2k+2)+1} = zx,$

$x_{i(2k+2)+2} = z,$

$x_{i(2k+2)+3} = z^n z^{4i},$

$x_{i(2k+2)+4} = z^{8i^2+4i},$

$x_{i(2k+2)+5} = z^{u_1}, \dots, x_{i(2k+2)+k} = z^{u_{k-4}}, \dots.$

Burada $v \in \mathbb{N}$ için $4i = 2nv$ ve $8i^2 + 4i = 2nv$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

1. Eğer n nin çarpanlarından tek olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise iki durum söz konusudur:

a) Eğer n çift ve $2n|a$, $2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ olursa bu durumda $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $i(2k+2) = n(k+1)$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = n(k+1)$ yazılabilir.

b) Eğer n tek ve $2n|a$, $2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ olursa bu durumda $i = n$ olur. Böylece $i(2k+2) = 2n(k+1)$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = 2n(k+1)$ yazılabilir.

2. Eğer α, n nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

a) Eğer $j \in \mathbb{N}$ için $\alpha 3^j \notin [3, k-2]$ ise iki durum söz konusudur;

Durum 1. Eğer n çift ve $2n|a$, $2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ olursa bu durumda $i = \alpha \frac{n}{2}$ olur. Böylece $i(2k+2) = \alpha(n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = \alpha(n(k+1))$ yazılabilir.

Durum 2. Eğer n tek ve $2n|a$, $2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ olursa bu durumda $i = \alpha n$ olur. Böylece $i(2k+2) = \alpha(2n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = \alpha(2n(k+1))$ yazılabilir.

b) Eğer β, $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in \mathbb{N}$ için $\beta = \alpha 3^j$ ise iki durum söz konusudur;

Durum 1. Eğer n çift ve $2n|a$, $2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ olursa bu durumda $i = \beta \frac{n}{2}$ olur. Böylece $i(2k+2) = \beta(n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = \beta(n(k+1))$ yazılabilir.

Durum 2. Eğer n tek ve $2n|a$, $2n|u_1, \dots, 2n|u_{k-4}$ olursa bu durumda $i = \beta n$ olur. Böylece $i(2k+2) = \beta(2n(k+1))$ olduğu için $P_k(G_n; x, y, z) = \beta(2n(k+1))$ yazılabilir.

Her hangi $\boldsymbol{n > 2}$ için $\langle \mathbf{2}, \mathbf{2}, \boldsymbol{n} \rangle \cong \langle \mathbf{2}, \boldsymbol{n}, \mathbf{2} \rangle \cong \langle \boldsymbol{n}, \mathbf{2}, \mathbf{2} \rangle$ olduğundan ve Tietze dönüşümleri kullanılarak bu gruplar için aynı gösterimler elde edilebilir. Ayrıca iki gerenli durumda $\langle \mathbf{2}, \boldsymbol{n}, \mathbf{2} \rangle$ ve $\langle \mathbf{2}, \mathbf{2}, \boldsymbol{n} \rangle$ grupları için $\boldsymbol{P_k(G_n; x, y) = 2k + 2}$ gösterimi elde edilebilir (38).

3.2. Sonlu Gruplarda Genelleştirilmiş k-Mertebeden Pell Dizileri

Bu bölümde sonlu gruplarda genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizileri incelenmiş olup D_n dihedral bir gruptaki genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizilerinin periyotları elde edilmiştir.

Tanım 3.2.1: Sonlu bir gruptaki k. mertebeden genelleştirilmiş Pell dizisi, grubun $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ elemanlarının bir dizisidir. Burada dizinin her bir elemanı, verilen $x_0, \dots, x_{j-1}$ başlangıç elemanları ile

$$x_n = \begin{cases} x_0, x_1 \dots (x_{n-1})^2; & j < n \leq k \text{ } için \\ x_{n-k}, x_{n-k+1} \dots (x_{n-1})^2; & n > k \text{ } için \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca bu dizinin $x_0, \dots, x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının grubu germesi gerekir. Böylece genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi, grubun yapısını yansıtır. $x_0, \dots, x_{j-1}$ tarafından gerilen sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi $Q_k(G; x_0, \dots, x_{j-1})$ ile gösterilir.

Tamsayılarda bir m modülüne göre klasik Pell dizisi $Q_2(\mathbb{Z}_m; 0,1)$ olarak yazılabilir. Grup elemanlarının genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizisi sonlu bir grubun Pell dizisi olarak adlandırılır (Deveci and Karaduman, Baskıda).

Teorem 3.2.1: Sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi periyodiktir (Deveci and Karaduman, Baskıda).

İspat: G sonlu bir grup olsun ve $|G|$, G grubunun mertebesini göstersin. G grubunun $|G|^k$ tane farklı sıralı k-lısı olduğundan bu sıralı k-lılardan en az bir tanesinin grubun genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinde iki defa görüleceği açıktır. sıralı k-lılar tekrar ettiğinden dolayı genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi periyodiktir denir.

$Q_k(G; x_0, \ldots, x_{j-1})$ dizisinin periyodu $PerQ_k(G; x_0, \ldots, x_{j-1})$ ile gösterilsin. Tanımdan sonlu bir gruptaki genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin periyodunun seçilen üreteç kümesine ve $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}$ başlangıç elemanlarının sıralamasına bağlı olarak değişeceği açıktır. Ayrıca $hP_k(m)$ nin C_m devirli grubunun genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin periyodu olduğu aşikardır (Deveci and Karaduman, Baskıda).

Tanım 3.2.2: G sonlu bir grup olsun. Eğer G grubunun her bir elemanı dizide görünecek şekilde G nin elemanlarının bir genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisi varsa bu durumda G grubuna genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizilenebilirdir denir (Deveci and Karaduman, Baskıda).

Genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizilenebilir grupların direkt çarpımları genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizilenebilir olamayabilir. Örneğin; e birim olmak üzere $\langle x, y \mid x^2 = y^2 = e, xy = yx \rangle$ şeklinde verilen D_2 grubu ele alınsın. D_2 grubunun $\langle x \rangle$ ve $\langle y \rangle$ gruplarının direkt çarpımı olduğu açıktır. D_2 grubunun Pell dizileri

$$Q_2(D_2; x, y) = x, y, x, y, \ldots,$$

$$Q_2(D_2; y, x) = y, x, y, x, \ldots,$$

şeklinde olacaktır. Burada xy elemanı iki dizide de olmadığı için D_2 grubu genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizilenebilir değildir. Ancak $\langle x \rangle$ grubu

$$Q_2(\langle x \rangle; e, x) = e, x, e, x, \ldots,$$

şeklindeki Pell dizisine sahiptir ve genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizilenebilirdir. Benzer şekilde $\langle y \rangle$ grubu

$$Q_2(\langle y \rangle; e, y) = e, y, e, y, \ldots,$$

şeklindeki Pell dizisine sahiptir ve genelleştirilmiş 2-mertebeden Pell dizilenebilirdir (Deveci and Karaduman, Baskıda).

Sonuç 3.2.2: D_2 grubunun genelleştirilmiş k-mertebeden Pell dizisinin periyodu $hP_k(2)$ dir (Deveci and Karaduman, Baskıda).

Teorem 3.2.2: $n > 2$ için $D_n = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^n = e \rangle$ olsun bu durmda,

i. $k = 2{,}4$ için $PerQ_k(D_n; x, y) = hP_k(2)$ dir.

ii. $PerQ_3(D_n; x, y) = \begin{cases} \frac{n}{2}(hP_3(2)) & n \equiv 0 \text{ (mod 4)} \\ n(hP_3(2)) & n \equiv 2 \text{ (mod 4)} \\ 2n(hP_3(2)) & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

iii. $k \geq 5$ olsun. Bu durumda

1. Eğer n nin çarpanlarından tek olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise bu durumda

$$PerQ_k(D_n; x, y) = \begin{cases} \frac{n}{2}(hP_k(2)) & n \equiv 0 \text{ (mod 4)} \\ n(hP_k(2)) & n \equiv 2 \text{ (mod 4)} \\ 2n(hP_k(2)) & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olur.

2. Eğer η, n nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

a) Eğer $j \in \mathbb{N}$ için $\eta 3^i \notin [3, k-2]$ ise bu durumda

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\begin{cases}\eta\dfrac{n}{2}(hP_k(2)) & n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ \eta n(hP_k(2)) & n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ \eta 2n(hP_k(2)) & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olur.

b) Eğer μ, $[3,k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j\in\mathbb{N}$ için $\mu=\eta 3^i$ ise bu durumda

$$PerQ_k(D_n;x,y)=\begin{cases}\mu\dfrac{n}{2}(hP_k(2)) & n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ \mu n(hP_k(2)) & n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)\\ \mu 2n(hP_k(2)) & \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

olur (Deveci and Karaduman, Baskıda).

İspat: ***i.*** Eğer $k=2$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x,y,x,y,\ldots.$$

Böylece bu dizinin periyodu $hP_2(2)=2$ olur. Eğer $k=4$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x,y,x,xy,y,e,e,x,y,xy,\ldots.$$

ve periyodu $hP_4(2)=7$ dir.

ii. $hP_3(2)=7$ olup eğer $k=3$ ise aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_0=x,x_1=y,x_2=x,\ldots,$$
$$x_{14}=(xy)^8x,x_{15}=(xy)^7x,x_{16}=(xy)^4x,\ldots,$$
$$x_{28}=(xy)^{16}x,x_{29}=(xy)^{15}x,x_{30}=(xy)^8x,\ldots,$$
$$x_{2i\cdot 7}=(xy)^{8i}x,x_{2i\cdot 7+1}=(xy)^{8i-1}x,x_{2i\cdot 7+2}=(xy)^{4i}x,\ldots.$$

Burada $v \in \mathbb{N}$ için $4i = n \cdot v$ olacak şekilde bir i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer $n \equiv 0$ (mod 4) ise bu durumda $i = \frac{n}{4}$ olur. Böylece

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2 \cdot \frac{n}{4} \cdot 7 = \frac{n}{2} \cdot 7 = \frac{n}{2}\big(hP_3(2)\big)$$

yazılabilir.

Eğer $n \equiv 2$ (mod 4) ise bu durumda $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2 \cdot \frac{n}{4} \cdot 7 = n \cdot 7 = n\big(hP_3(2)\big)$$

yazılabilir.

Eğer $n \equiv 1$ (mod 4) ya da $n \equiv 3$ (mod 4) ise bu durumda $i = n$ olur. Böylece

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2 \cdot n \cdot 7 = 2n\big(hP_3(2)\big)$$

yazılabilir.

Eğer $k \geq 5$ ise $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k-3} \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki dizi elde edilir,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x, x_3 = xy, x_4 = y, x_5 = x, \dots,$$
$$x_{2i \cdot hP_k(2)-k+2} = (yx)^{4i}, x_{2i \cdot hP_k(2)-k+3} = (yx)^{\varepsilon_1 4i}, x_{2i \cdot hP_k(2)-k+4} = (yx)^{\varepsilon_2 4i}, \dots,$$
$$x_{2i \cdot hP_k(2)-1} = (yx)^{\varepsilon_{k-3} 4i}, x_{2i \cdot hP_k(2)} = (xy)^{\tau} x, x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = (xy)^{\tau-1} x, \dots,$$

Burada $\omega \in \mathbb{N}$ için $4i = n \cdot \omega$ olacak şekilde bir i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

1. Eğer n nin çarpanlarından tek olanların hiçbiri $[3, k-2]$ aralığında değil ise üç durum söz konusudur:

a) $n \equiv 0 \pmod 4$ ve $n|\tau$ ise bu durumda $1 \leq l \leq k-2$ için $x_{2i \cdot hP_k(2)-l} = e$, $i = \frac{n}{4}$ için $x_{2i \cdot hP_k(2)} = x$ ve $x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$ olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\frac{n}{4}hP_k(2) = \frac{n}{2}hP_k(2)$$

yazılabilir.

b) $n \equiv 2 \pmod 4$ ve $n|\tau$ ise bu durumda $1 \leq l \leq k-2$ için $x_{2i \cdot hP_k(2)-l} = e$, $i = \frac{n}{2}$ için $x_{2i \cdot hP_k(2)} = x$ ve $x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$ olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\frac{n}{2}hP_k(2) = nhP_k(2)$$

yazılabilir.

c) $n \equiv 1 \pmod 4$ ya da $n \equiv 3 \pmod 4$ ve $n|\tau$ ise bu durumda $1 \leq l \leq k-2$ için $x_{2i \cdot hP_k(2)-l} = e$, $i = n$ için $x_{2i \cdot hP_k(2)} = x$ ve $x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$ olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2nhP_k(2)$$

yazılabilir.

2. Eğer η, n nin $[3, k-2]$ aralığındaki çarpanlarından olan en büyük olanı ise aşağıdaki iki durum söz konusudur:

a) Eğer $j \in \mathbb{N}$ için $\eta 3^i \notin [3, k-2]$ ise üç durum söz konusudur;

Durum 1. $n \equiv 0 \pmod 4$ ve $n|\tau$ ise bu durumda $1 \leq l \leq k-2$ için $x_{2i \cdot hP_k(2)-l} = e$, $i = \eta\frac{n}{4}$ için $x_{2i \cdot hP_k(2)} = x$ ve $x_{2i \cdot hP_k(2)+1} = y$ olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\eta\frac{n}{4}hP_k(2) = \eta\frac{n}{2}hP_k(2)$$

yazılabilir.

Durum 2. $n \equiv 2 \pmod 4$ ve $n|\tau$ ise bu durumda $1 \leq l \leq k-2$ için $x_{2i\cdot hP_k(2)-l} = e$, $i = \eta\frac{n}{2}$ için $x_{2i\cdot hP_k(2)} = x$ ve $x_{2i\cdot hP_k(2)+1} = y$ olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\eta\frac{n}{2}hP_k(2) = \eta nhP_k(2)$$

yazılabilir.

Durum 3. $n \equiv 1 \pmod 4$ ya da $n \equiv 3 \pmod 4$ ve $n|\tau$ ise bu durumda $1 \leq l \leq k-2$ için $x_{2i\cdot hP_k(2)-l} = e$, $i = \eta n$ için $x_{2i\cdot hP_k(2)} = x$ ve $x_{2i\cdot hP_k(2)+1} = y$ olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = \eta 2nhP_k(2)$$

yazılabilir.

b) Eğer μ, $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in \mathbb{N}$ için $\beta = \mu 3^j$ ise üç durum söz konusudur;

Durum 1. $n \equiv 0 \pmod 4$ ve $n|\tau$ ise bu durumda $1 \leq l \leq k-2$ için $x_{2i\cdot hP_k(2)-l} = e$, $i = \mu\frac{n}{4}$ için $x_{2i\cdot hP_k(2)} = x$ ve $x_{2i\cdot hP_k(2)+1} = y$ olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\mu\frac{n}{4}hP_k(2) = \mu\frac{n}{2}hP_k(2)$$

yazılabilir.

Durum 2. $n \equiv 2 \pmod 4$ ve $n|\tau$ ise bu durumda $1 \leq l \leq k-2$ için $x_{2i\cdot hP_k(2)-l} = e$, $i = \mu\frac{n}{2}$ için $x_{2i\cdot hP_k(2)} = x$ ve $x_{2i\cdot hP_k(2)+1} = y$ olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\mu\frac{n}{2}hP_k(2) = \mu nhP_k(2)$$

yazılabilir.

Durum 3. $n \equiv 1 \pmod 4$ ya da $n \equiv 3 \pmod 4$ ve $n|\tau$ ise bu durumda $1 \leq l \leq k-2$ için $x_{2i\cdot hP_k(2)-l} = e$, $i = \mu n$ için $x_{2i\cdot hP_k(2)} = x$ ve $x_{2i\cdot hP_k(2)+1} = y$ olur. Buradan

$$PerQ_k(D_n; x, y) = \mu 2nhP_k(2)$$

yazılabilir. Böylelikle ispat tamamlanmış olur.

3.3. Sonlu Grupların Genelleştirilmiş Pell Orbitleri

Bu bölümde $G = \langle A \rangle$ sonlu grubu için bir A geren kümesine göre $P_A^{(\alpha)}(G)$ ile gösterilen genelleştirilmiş Pell orbitinin tanımı yapılmıştır. Daha sonra $\alpha = 2$ ve $n \geq 3$ için Q_{2^n} quaternion gruplarının genelleştirilmiş Pell orbitlerinin uzunlukları elde edilmiştir.

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ olmak üzere $G = \langle A \rangle$ sonlu grubu için bir A geren kümesine göre $P_A^{(\alpha)}(G)$ ile gösterilen genelleştirilmiş Pell orbiti, $\beta_j = \binom{\alpha + j}{j+1}$ ve $i \leq j \leq n-1$ için

$$0 \leq i \leq n-1 \text{ için } x_i = a_{i+1}$$

başlangıç elemenları ile

$$i \geq 0 \text{ için } x_{i+n} = (x_i)^{\beta_{n-1}}(x_{i+1})^{\beta_{n-2}} \dots (x_{i+n-2})^{\beta_1}(x_{i+n-1})^{\alpha+1} \qquad (2.9)$$

şeklinde tanımlanan G nin elemanının bir $\{x_j\}$ dizisidir. Örneğin; $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ olmak üzere $P_A^{(\alpha)}(G)$, $i \geq 0$ için

$$x_0 = a_1, x_1 = a_2, = x_2 = a_3, x_{i+3} = (x_i)^{\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{6}}(x_{i+1})^{\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}}(x_{i+2})^{(\alpha+1)}$$

yazılabilir.

Teorem 3.3.1: Sonlu bir grubun genelleştirilmiş Pell orbiti periyodiktir.

İspat: Teoremin ispatı [25] deki çalışmadaki Theorem 1. in ispatı ile benzerdir.

$P_A^{(\alpha)}(G)$ dizisinin periyodunun uzunluğu $LEN_A P^{(\alpha)}(G)$ ile gösterilir ve buna bir A geren kümesine göre G nin genelleştirlmiş Pell uzunluğu denir.

(2.9) da $\alpha = 1$ alındığında $P_A(G)$ ye bir A geren kümesine göre G nin Pell orbiti denir ve bu $P_A(G)$ dizisinin periyot uzunluğu $LEN_A P(G)$ ile gösterilir.

Tanımdan bir grubun genelleştirilmiş Pell uzunluğunun seçilen geren kümesine ve $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ elemanlarının sıralamasına bağlı olarak değişeceği açıktır.

$n \geq 3$ için

$$Q_{2^n} = \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = e, y^2 = x^{2^{n-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

şeklinde taktim edilen Q_{2^n} grubuna 2^n mertebeli quaternion grup denir. Burada x ve y nin mertebelerinin sırasıyla 2^{n-1} ve 4 olduğuna dikkat edilmelidir.

Teorem 3.3.2: $n \geq 3$ için

$$LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}(Q_{2^n}) = LEN_{\{y,x\}} P^{(2)}(Q_{2^n}) = 2^{n-3}.3$$

olur.

İspat: İlk olarak $\{x, y\}$ geren çifti ve $\alpha = 2$ için genelleştirilmiş Pell orbiti ele alınsın. Bu durumda genelleştirilmiş Pell orbiti $i \geq 0$ için

$$x_0 = x, x_1 = y, x_{i+2} = (x_i)^3 (x_{i+1})^3$$

olacaktır. Buradan τ_1 ve τ_2 tek sayılar olmak üzere genelleştirilmiş Pell orbiti aşağıdaki formda elde edilir:

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x^3 y^3, x_3 = x^{-3}, x_4 = y x^{-12}, x_5 = x^3 y^3,$$

$$x_6 = x^9, x_7 = yx^{24}, \dots,$$
$$x_{12} = x^{81}, x_{13} = yx^{240}, \dots,$$
$$x_{2^{n-3}.3} = x^{\tau_1.2^{n-1}+1}, x_{2^{n-3}.3+1} = yx^{\tau_2.2^{n-1}}, \dots$$

Eğer $n = 3$ olursa dizi aşağıdaki gibi olur,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x^3y^3, x_3 = x = x_0, x_4 = y = x_1, \dots.$$

Böylece $LEN_{\{x.y\}}P^{(2)}(Q_{2^3}) = 3$ elde edilir.

Eğer $n \geq 4$ ise dizi aşağıdaki gibi olur,

$$x_0 = x, x_1 = y, \dots, x_{2^{n-3}.3} = x = x_0, x_{2^{n-3}.3+1} = y = x_1, \dots.$$

Böylece $LEN_{\{x.y\}}P^{(2)}(Q_{2^n}) = 2^{n-3}.3$ elde edilir.

Şimdi $\{y, x\}$ geren çifti ve $\alpha = 2$ için genelleştirilmiş Pell orbiti ele alınsın. Bu durumda genelleştirilmiş Pell orbiti $i \geq 0$ için

$$x_0 = y, x_1 = x, x_{i+2} = (x_i)^3(x_{i+1})^3$$

olacaktır. Buradan ω tek sayı olmak üzere genelleştirilmiş Pell orbiti aşağıdaki formda elde edilir:

$$x_0 = y, x_1 = x, x_2 = y^3x^3, x_3 = y, x_4 = x^{-3}, x_5 = y^3x^{-9},$$
$$x_6 = y, x_7 = x^9, \dots,$$
$$x_{12} = 9, x_{13} = x^{81}, \dots,$$
$$x_{2^{n-3}.3} = y, x_{2^{n-3}.3+1} = x^{\omega.2^{n-1}+1}, \dots$$

Eğer $n = 3$ olursa dizi aşağıdaki gibi olur,

$$x_0 = y, x_1 = x, x_2 = y^3x^3, x_3 = y = x_0, x_4 = x = x_1, \dots.$$

Böylece $LEN_{\{y.x\}}P^{(2)}(Q_{2^3}) = 3$ elde edilir.

Eğer $n \geq 4$ ise dizi aşağıdaki gibi olur,

$$x_0 = y, x_1 = x, \dots, x_{2^{n-3}.3} = y = x_0, x_{2^{n-3}.3+1} = x = x_1, \dots.$$

Böylece $LEN_{\{y.x\}}P^{(2)}(Q_{2^n}) = 2^{n-3}.3$ elde edilir

3.4. Binary Polyhedral Grupların Pell Uzunlukları

Bu bölümde her hangi bir $n > 2$ için $\langle 2,2,2 \rangle$, $\langle n,2,2 \rangle$, $\langle 2,n,2 \rangle$ ve $\langle 2,2,n \rangle$ binary polyhedral grupların Pell orbitleri incelenmiştir.

İlk olarak $\{x,y\}$ geren ikilisi ve $\{x,y,z\}$ geren üçlüsü için bu grupların Pell orbitlerinin sırasıyla aşağıdaki gibi olduğuna dikkat edilmelidir.

$$i \geq 0 \text{ için } x_0 = x\,, x_1 = y, x_{i+2} = (x_i)(x_{i+1})^2$$

ve

$$i \geq 0 \text{ için } x_0 = x\,, x_1 = y,\ x_2 = z, x_{i+3} = (x_i)(x_{i+1})(x_{i+2})^2.$$

Teorem 3.4.1: $\langle 2,2,2 \rangle$ binary polyhedral grubun Pell uzunlukları;

i. $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,2,2 \rangle) = 4$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,2 \rangle) = 14$

şeklindedir (Deveci and Karaduman 2011).

İspat: ***i.*** $\langle 2,2,2 \rangle$ binary polyhedral grubu iki gerenli durumda $\langle x,y : x^2 = y^2 = (xy)^2 \rangle$ şeklinde gösterilir. Burada $|x| = 4$, $|y| = 4$, $xy = y^3x$ ve $yx = x^3y$ dir. O halde $P_{\{x,y\}}(\langle 2,2,2 \rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x\,, x_1 = y, x_2 = x^3, x_3 = y^3, x_4 = x = x_0, x_5 = y = x_1, \dots,$$

Böylece $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,2,2 \rangle) = 4$ yazılabilir.

ii. $\langle 2,2,2\rangle$ binary polyhedral grubu üç gerenli durumda $\langle x, y, z : x^2 = y^2 = z^2 = xyz\rangle$ şeklinde gösterilir. Burada $|x| = 4$, $|y| = 4$, $|z| = 4$ $x = yz$, $y = x^3z$ ve $z = xy$ dir. O halde $P_{\{x,y,z\}}(\langle 2,2,2\rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x\,, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^3, x_4 = yz^3, x_5 = z^2, x_6 = zx, x_7 = yz^3, x_8 = zx,$$
$$x_9 = z^3, x_{10} = z, x_{11} = x, x_{12} = z^2, x_{13} = y, x_{14} = x = x_0, x_{15} = y = x_1, x_{16} = z = x_2, \ldots$$

Böylece $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,2\rangle) = 14$ yazılabilir.

Teorem 3.4.2: $\langle n, 2,2\rangle$ binary polyhedral grubun Pell uzunlukları;

i. $LEN_{\{x,y\}}P(\langle n, 2,2\rangle) = \begin{cases} 2n & n \text{ çiftt ise} \\ 4n & n \text{ tek ise} \end{cases}$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle n, 2,2\rangle) = \begin{cases} 7n & n \text{ çiftt ise} \\ 14n & n \text{ tek ise} \end{cases}$

şeklindedir (Deveci and Karaduman 2011).

İspat: *i.* $\langle n, 2,2\rangle$ binary polyhedral grubu iki gerenli durumda $\langle x, y : x^n = y^2 = (xy)^2\rangle$ şeklinde gösterilir. Burada $|x| = 4$, $|y| = 4$, $xy = yx^{-1}$ ve $yx = x^{-1}y$ dir. Buradan aşağıdaki dizi elde edilir:

$$x, y, xy^2, yx^2, x, yx^4, xy^2, yx^6, x, yx^8, \ldots,$$

O halde $P_{\{x,y\}}(\langle n, 2,2\rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x, x_1 = y, \ldots,$$
$$x_4 = x, x_5 = yx^4, \ldots,$$
$$x_8 = x, x_9 = yx^8, \ldots,$$
$$x_{4i} = x, x_{4i+1} = yx^{4i}, \ldots.$$

Burada $k \in \mathbb{N}$ için $4i = 2kn$ olacak şekilde bir i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer n çift ise bu durumda $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $4i = 2n$ ve $LEN_{\{x,y\}}P(\langle n, 2,2\rangle) = 2n$ yazılabilir.

Eğer n tek ise bu durumda $i = n$ olur. Böylece $4i = 4n$ ve $LEN_{\{x,y\}}P(\langle n, 2,2\rangle) = 4n$ yazılabilir.

ii. $\langle n, 2,2\rangle$ binary polyhedral grubu üç gerenli durumda $\langle x, y, z: x^n = y^2 = z^2 = xyz\rangle$ şeklinde gösterilir. Burada $|x| = 4$, $|y| = 4$, $|z| = 4$, $x = zy^3$, $y = x^{-1}z$ ve $z = xy$ dir. Buradan aşağıdaki dizi elde edilir:

$x, y, z, z^3, x^{-1}, x^{-2}, zx^{n-5}, x^{n-3}, zx^{n-9}, zx^{n-8}, zx^{n-6}, x, zx^{-4}z, x^{n-3}z, x^5, zx^9, x^{-3}zx^5,$

$z^3x^4, x^{-1}, x^{-6}, zx^{n-9}, x^{n-7}, zx^{n-17}, zx^{n-16}, zx^{n-10}, x, zx^{-8}z, x^{n-7}z, x^9, zx^{17}, x^{-7}zx^9, \ldots.$

O halde $P_{\{x,y,z\}}(\langle n, 2,2\rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
&x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z \ldots,\\
&x_{14} = x^5, x_{15} = zx^9, x_{16} = x^{-3}zx^5, \ldots,\\
&x_{28} = x^9, x_{29} = zx^{17}, x_{30} = x^{-7}zx^9 \ldots,\\
&x_{14i} = x^{4i+1}, x_{14i+1} = zx^{8i+1}, x_{14i+2} = x^{-4i+1}zx^{4i+1}, \ldots.
\end{aligned}$$

Burada $k \in \mathbb{N}$ için $4i = 2kn$ olacak şekilde bir i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer n çift ise bu durumda $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $14i = 7n$ ve $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle n, 2,2\rangle) = 7n$ yazılabilir.

Eğer n tek ise bu durumda $i = n$ olur. Böylece $14i = 14n$ ve $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle n, 2,2\rangle) = 14n$ yazılabilir.

Teorem 3.4.3: $\langle 2, n, 2\rangle$ binary polyhedral grubun Pell uzunlukları;

i. $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,n,2\rangle) = \begin{cases} 2n & n \text{ çiftt ise} \\ 4n & n \text{ tek ise} \end{cases}$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle n,2,2\rangle) = 14$

şeklindedir (Deveci and Karaduman 2011).

İspat: ***i.*** Bu kısmın ispatı Teorem 3.3.2 ile benzerdir.

ii. $\langle 2,n,2\rangle$ binary polyhedral grubu üç gerenli durumda $\langle x,y,z: x^2 = y^n = z^2 = xyz\rangle$ şeklinde gösterilir. Burada $|x| = 4$, $|y| = 2n$, $|z| = 4$ $x = yz$, $y = xz^3$ ve $z = y^{-1}x$ dir. O halde $P_{\{x,y,z\}}(\langle 2,n,2\rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x\,, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = z^3, x_4 = yz^3, x_5 = z^2, x_6 = zx, x_7 = y^2x,$$
$$x_8 = zx, x_9 = y^{n+3}x, x_{10} = y^3x, x_{11} = y^{n+2}x, x_{12} = z^2,$$
$$x_{13} = y, x_{14} = x = x_0, x_{15} = y = x_1, x_{16} = z = x_2, \ldots$$

Böylece $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,n,2\rangle) = 14$ yazılabilir.

Teorem 3.4.4: $\langle 2,2,n\rangle$ binary polyhedral grubun Pell uzunlukları;

i. $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = 4$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = \begin{cases} 7n & n \text{ çiftt ise} \\ 14n & n \text{ tek ise} \end{cases}$

şeklindedir (Deveci and Karaduman 2011).

İspat: ***i.*** $\langle 2,2,n\rangle$ binary polyhedral grubu iki gerenli durumda $\langle x,y: x^2 = y^2 = (xy)^n\rangle$ şeklinde gösterilir. Burada $|x| = 4$, $|y| = 4$, $|xy| = 2n$ dir. O halde $P_{\{x,y\}}(\langle 2,2,n\rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x\,, x_1 = y, x_2 = x^3, x_3 = y^3, x_4 = x = x_0, x_5 = y = x_1, \ldots,$$

Böylece $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = 4$ yazılabilir.

ii. $\langle 2,2,n\rangle$ binary polyhedral grubu üç gerenli durumda $\langle x,y,z : x^2 = y^2 = z^n = xyz\rangle$ şeklinde gösterilir. Burada $|x| = 4$, $|y| = 4$, $|z| = 2n$, $x = yz$, $y = xz^{-1}$ ve $z = y^3x$ dir. Buradan aşağıdaki dizi elde edilir:

$$x, y, z, z^{n+1}, xz^2, z^2, z^{n-5}x, z^{n-4}x, z^{-3}x, z^{-1}, z^{-3}, xz^{-4}, z^{n-4}, xz^{-9}, xz^{-8}, xz^{-5}z,$$
$$z^{n+1}, xz^{-2}, z^2, xz^{n+1}, z^n x, zx, z^{-1}, z^{-3}, xz^{-8}, z^{n-4}, xz^{-13}, xz^{-12}, xz^{-9}, z, \ldots.$$

O halde $P_{\{x,y,z\}}(\langle 2,2,n\rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z \ldots,$$
$$x_{14} = xz^{-8}, x_{15} = xz^{-5}, x_{16} = z, \ldots,$$
$$x_{28} = xz^{-12}, x_{29} = xz^{-9}, x_{30} = z \ldots,$$
$$x_{14i} = xz^{-4i-4}, x_{14i+1} = xz^{-4i-1}, x_{14i+2} = z, \ldots.$$

Burada $k \in \mathbb{N}$ için $4i = 2kn$ olacak şekilde bir i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer n çift ise bu durumda

$$x_{\left(i+\frac{n}{2}\right)14} = xz^{-4\left(i+\frac{n}{2}\right)-4} = xz^{-4i-4-2n} = xz^{-4i-4} = x_{14i},$$
$$x_{\left(i+\frac{n}{2}\right)14+1} = xz^{-4\left(i+\frac{n}{2}\right)-1} = xz^{-4i-1-2n} = xz^{-4i-1} = x_{14i+1},$$
$$x_{\left(i+\frac{n}{2}\right)14+2} = z = x_{14i+2}, \ldots.$$

Böylece $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = 14i + 7n - 14i = 7n$ yazılabilir.

Eğer n tek ise bu durumda

$$x_{(i+n)14} = xz^{-4(i+n)-4} = xz^{-4i-4-4n} = xz^{-4i-4} = x_{14i},$$
$$x_{(i+n)14+1} = xz^{-4(i+n)-1} = xz^{-4i-1-4n} = xz^{-4i-1} = x_{14i+1},$$
$$x_{(i+n)14+2} = z = x_{14i+2}, \ldots.$$

Böylece $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = 14i + 14n - 14i = 14n$ yazılabilir.

3.5. $n > 2$ için $\langle 2,2,2\rangle$, $\langle n,2,2\rangle$, $\langle 2,n,2\rangle$ ve $\langle 2,2,n\rangle$ Polyhedral Grupların Pell Uzunlukları

Bu bölümde her hangi bir $n > 2$ için $\langle 2,2,2\rangle$, $\langle n,2,2\rangle$, $\langle 2,n,2\rangle$ ve $\langle 2,2,n\rangle$ polyhedral grupların Pell uzunluklarının davranışı araştırılmıştır. Burada polyhedral gruplar hem iki gerenli hemde üç gerenli olarak ele alınmıştır.

İlk olarak $\{x,y\}$ geren ikilisi ve $\{x,y,z\}$ geren üçlüsü için bu grupların Pell orbitlerinin sırasıyla aşağıdaki gibi olduğuna dikkat edilmelidir.

$$i \geq 0 \text{ için } x_0 = x\,, x_1 = y, x_{i+2} = (x_i)(x_{i+1})^2$$

ve

$$i \geq 0 \text{ için } x_0 = x\,, x_1 = y,\ x_2 = z, x_{i+3} = (x_i)(x_{i+1})(x_{i+2})^2.$$

Teorem 3.5.1: $\langle 2,2,2\rangle$ polyhedral grubun Pell uzunlukları;

i. $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,2,2\rangle) = 2$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,2\rangle) = 7$

şeklindedir (Deveci and Karaduman 2011).

İspat: ***i.*** Bu kısmın ispatı [10] daki ispat ile benzerdir.

ii. $\langle 2,2,2\rangle$ polyhedral grubu üç gerenli durumda $\langle x,y,z{:}\, x^2 = y^2 = z^2 = xyz = e\rangle$ şeklinde gösterilir. Burada $|x| = 2,\ |y| = 2,\ |z| = 2\ x = yz,\ y = xz$ ve $z = xy$ dir. Buradan aşağıdaki dizi elde edilir.

$$x, y, z, z, x, e, y, x, y, z, \ldots.$$

Böylece $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,2\rangle) = 7$ yazılabilir.

Teorem 3.5.2: $\langle n,2,2\rangle$ polyhedral grubun Pell uzunlukları;

i. $LEN_{\{x,y\}}P(\langle n,2,2\rangle) = \begin{cases} n & n \text{ çiftt ise} \\ 2n & n \text{ tek ise} \end{cases}$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle n,2,2\rangle) = \begin{cases} \frac{7}{2}n & n \equiv 0 \text{ (mod 4)} \\ 7n & n \equiv 2 \text{ (mod 4)} \\ 14n & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

şeklindedir (Deveci and Karaduman 2011).

İspat: ***i.*** $\langle n,2,2\rangle$ polyhedral grubu iki gerenli durumda $\langle x,y : x^n = y^2 = (xy)^2 = e\rangle$ şeklinde gösterilir. Burada $|x| = n$, $|y| = 2$, $xy = yx^{-1}$ ve $yx = x^{-1}y$ dir. Buradan aşağıdaki dizi elde edilir:

$$x, y, xy^2, yx^2, x, yx^4, \ldots,$$

O halde $P_{\{x,y\}}(\langle n,2,2\rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x, x_1 = y, \ldots,$$
$$x_4 = x, x_5 = yx^2, \ldots,$$
$$x_8 = x, x_9 = yx^4, \ldots,$$
$$x_{2i} = x, x_{2i+1} = yx^{2i}, \ldots.$$

Burada $k \in \mathbb{N}$ için $2i = kn$ olacak şekilde bir i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer n çift ise bu durumda $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $2i = n$ ve $LEN_{\{x,y\}}P(\langle n,2,2\rangle) = n$ yazılabilir.

Eğer n tek ise bu durumda $i = n$ olur. Böylece $2i = 2n$ ve $LEN_{\{x,y\}}P(\langle n,2,2\rangle) = 2n$ yazılabilir.

ii. $\langle n,2,2\rangle$ polyhedral grubu üç gerenli durumda $\langle x,y,z: x^n = y^2 = z^2 = xyz = e\rangle$ şeklinde gösterilir. Burada $|x| = n$, $|y| = 2$, $|z| = 2$, $x = zy$, $y = x^{-1}z$ ve $z = xy$ dir. Buradan aşağıdaki dizi elde edilir:

$x, y, z, z, x^{-1}, x^{-2}, zx^{-5}, x^{-3}, zx^{-9}, zx^{-8}, zx^{-6}, x, x^4, zx^3, x^5, zx^9, zx^8,$

$zx^4, x^{-1}, x^{-6}, zx^{-9}, x^{-7}, zx^{-17}, zx^{-16}, zx^{-10}, x, x^8 z, zx^7, x^9, zx^{17}, zx^{16}, \ldots.$

O halde $P_{\{x,y,z\}}(\langle n,2,2\rangle)$ Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
&x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z \ldots, \\
&x_{14} = x^5, x_{15} = zx^9, x_{16} = zx^8, \ldots, \\
&x_{28} = x^9, x_{29} = zx^{17}, x_{30} = zx^{16} \ldots, \\
&x_{14i} = x^{4i+1}, x_{14i+1} = zx^{8i+1}, x_{14i+2} = zx^{8i}, \ldots.
\end{aligned}$$

Burada $k \in \mathbb{N}$ için $4i = kn$ olacak şekilde bir i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer $n \equiv 0 \pmod 4$ ise bu durumda $i = \frac{n}{4}$ olur. Böylece $14i = \frac{7}{2}n$ ve $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle n,2,2\rangle) = \frac{7}{2}n$ yazılabilir.

Eğer $n \equiv 2 \pmod 4$ ise bu durumda $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $14i = 7n$ ve $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle n,2,2\rangle) = 7n$ yazılabilir.

Eğer $n \equiv 1 \pmod 4$ yada $n \equiv 3 \pmod 4$ ise bu durumda $i = n$ olur. Böylece $14i = 14n$ ve $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle n,2,2\rangle) = 14n$ yazılabilir.

Teorem 3.5.3: $\langle 2,n,2\rangle$ polyhedral grubun Pell uzunlukları;

i. $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,n,2\rangle) = \begin{cases} n & n \text{ çiftt ise} \\ 2n & n \text{ tek ise} \end{cases}$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle n,2,2\rangle) = 14$

şeklindedir (Deveci and Karaduman 2011).

İspat: ***i.*** Bu kısmın ispatı Teorem 3.4.2 ile benzerdir.

ii. Bu kısmın ispatı Teorem 3.4.1.*ii* ile benzerdir.

Teorem 3.5.4: $\langle 2,2,n\rangle$ polyhedral grubun Pell uzunlukları;

i. $LEN_{\{x,y\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = 2$

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P(\langle 2,2,n\rangle) = \begin{cases} \frac{7}{2}n & n \equiv 0 \text{ (mod 4)} \\ 7n & n \equiv 2 \text{ (mod 4)} \\ 14n & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$

şeklindedir (Deveci and Karaduman 2011).

İspat: ***i.*** Bu kısmın ispatı [10] daki ispat ile benzerdir.

ii. Bu kısmın ispatı Teorem 3.4.2.*ii* ile benzerdir.

3.6. $n > 2$ ve $\alpha = 2$ için $\langle 2,2,2\rangle$, $\langle n,2,2\rangle$, $\langle 2,n,2\rangle$ ve $\langle 2,2,n\rangle$ Polyhedral Grupların Genelleştirilmiş Pell Uzunlukları

Bu bölümde her hangi bir $n > 2$ ve $\alpha = 2$ için $\langle 2,2,2\rangle$, $\langle n,2,2\rangle$, $\langle 2,n,2\rangle$ ve $\langle 2,2,n\rangle$ polyhedral grupların genelleştirilmiş Pell uzunlukları araştırılmıştır. Burada polyhedral gruplar hem iki gerenli hemde üç gerenli olarak ele alınmıştır.

İlk olarak $\{x,y\}$ geren ikilisi ve $\{x,y,z\}$ geren üçlüsünün $\alpha = 2$ için genelleştirilmiş Pell orbitlerinin sırasıyla aşağıdaki gibi olduğuna dikkat edilmelidir.

$$i \geq 0 \text{ için } x_0 = x\,, x_1 = y, x_{i+2} = (x_i)^3(x_{i+1})^3$$

ve

$$i \geq 0 \text{ için } x_0 = x\,, x_1 = y,\ x_2 = z, x_{i+3} = (x_i)^4 (x_{i+1})^3 (x_{i+2})^3.$$

Teorem 3.6.1: $\alpha = 2$ için $\langle 2,2,2 \rangle$ polyhedral grubun genelleştirilmiş Pell uzunluğu 3 tür (Deveci and Karaduman 2011).

İspat: İki gerenli ve üç gerenli olan genelleştirilmiş Pell orbitleri aşağıdaki gibidir:
$P^{(2)}_{\{x,y\}}\big((2,2,2)\big)$ için

$$x_0 = x\,, x_1 = y, x_2 = xy, x_3 = x, x_4 = y, \ldots,$$

ve $P^{(2)}_{\{x,y,z\}}\big((2,2,2)\big)$ için

$$x_0 = x\,, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = x, x_4 = y, x_5 = z, \ldots,$$

şeklinde olup periyotları 3 tür.

Teorem 3.6.2: G_n, her hangi bir $n > 2$ için $\langle n, 2,2 \rangle$, $\langle 2, n, 2 \rangle$ ve $\langle 2,2, n \rangle$ polyhedral gruplardan herhangi birisi olsun (Deveci and Karaduman 2011). Bu durumda,

i. İki gerenli durumda $\alpha = 2$ için genelleştirilmiş Pell uzunluğu aşağıdaki gibidir;

a) Eğer $u \in \mathbb{N}$ için $n = 3^u$ ise bu durumda $LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}(G_n) = 3$

b) **1.** $LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}(G_4) = 3$

2. $\beta \geq 2$ için $LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\big(G_{2^\beta}\big) = 2^{\beta-2}.3$

c) Eğer $n > 3$ olacak şekilde bir n asal sayısı varsa bu durumda i, $n|3^i + 1$ olacak şekilde en küçük tek doğal sayı ya da $n|3^i - 1$ olacak şekilde en küçük çift doğal sayı olmak üzere $LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}(G_n) = 3i$ olur.

d) p, $p > 3$ olacak şekilde bir asal sayı ve t, $LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\big(G_p\big) = LEN_{\{x,y\}} P^{(2)}\big(G_{p^t}\big)$ olacak şekilde en büyük doğal sayı olsun. Bu durumda her $a \geq t$ için

$$LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left(G_{p^a}\right) = p^{a-t}LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left(G_p\right)$$

yazılır.

e) p_j ler ayrık asallar olmak üzere $a \geq 1$ için eğer $n = \prod_{j=1}^{a} p_j^{e_j}$ oluyorsa bu durumda

$$LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}(G_n) = \text{lcm}\left[LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left(G_{p_j^{e_j}}\right)\right]$$

olur.

ii. $LEN_{\{x,y,z\}}P^{(2)}(G_n) = 3$

İspat: Grup $(2, n, 2)$ gösterimi ile verilsin. Bu durumda $P_{\{x,y\}}^{(2)}\left((2, n, 2)\right)$ genelleştirilmiş Pell orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy^3, x_3 = x, x_4 = y^{-3}, x_5 = xy^{-9}, x_6 = x, x_7 = y^9,$$
$$x_8 = xy^{27}, x_9 = x, x_{10} = y^{-27}, x_{11} = xy^{-81}, x_{12} = x, x_{13} = y^{81}, \ldots.$$

Böylece i pozitif tek tamsayısı için $x_{3i} = x, x_{3i+1} = y^{-3^i}$ ve i pozitif çift tamsayısı için $x_{3i} = x, x_{3i+1} = y^{3^i}$ ifadeleri yazılabilir. Buradan,

i. a) $\varepsilon, i \in \mathbb{N}$ için eğer $3^\varepsilon | 3^i$ oluyorsa bu durumda $3^\varepsilon | 3^{i+1}$ yazılabilir. Böylece $LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}((2, n, 2)) = 3$ eşitliği dizinin genel formundan kolayca elde edilebilir.

b) **1.** $P_{\{x,y\}}^{(2)}\left((2,4,2)\right)$ ifadesi $x_0 = x, x_1 = y, x_2 = xy^3, x_3 = x, x_4 = y, \ldots$ şeklinde olup periyodu 3 tür.

2. $P_{\{x,y\}}^{(2)}\left((2, n, 2)\right)$ genelleştirilmiş Pell orbitinin genel formu, ω tek doğal sayı olmak üzere

$$x_6 = x, x_7 = y^9 = y^{2^3+1}, \ldots,$$
$$x_{12} = x, x_{13} = y^{81} = y^{2^4.5+1}, \ldots,$$
$$x_{6.2^\lambda} = x, x_{6.2^\lambda+1} = y^{2^{\lambda+3}.\omega+1}, \ldots,$$

şeklindedir. Böylece $k \in \mathbb{N}$ için $2^{\lambda+3} = k2^{\beta}$ olmak üzere en küçük λ doğal sayısı $\beta - 3$ e eşit olduğundan $\beta \geq 2$ için $LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\big((2, 2^{\beta}, 2)\big) = 2^{\beta-2}.3$ yazılabilir.

c) i pozitif tek tamsayısı için $x_{3i} = x, x_{3i+1} = y^{-3^i}$ ve i pozitif çift tamsayısı için $x_{3i} = x, x_{3i+1} = y^{3^i}$ olduğundan $-3^i \equiv 1 \pmod{n}$ ya da $3^i \equiv 1 \pmod{n}$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer $p, p > 3$ olacak şekilde bir asal sayı ise ve $i,\ n|3^i + 1$ olacak şekilde en küçük tek doğal sayı ise bu durumda $-3^i \equiv 1 \pmod{n}$ olur ve $x_{3i} = x, x_{3i+1} = y^{-3^i}$ yazılabilir. Yani $LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}(G_n) = 3i$ olur.

Eğer $p,\ p > 3$ olacak şekilde bir asal sayı ise ve $i,\ n|3^i - 1$ olacak şekilde en küçük çift doğal sayı ise bu durumda $3^i \equiv 1 \pmod{n}$ olur ve $x_{3i} = x, x_{3i+1} = y^{3^i}$ yazılabilir. Yani $LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}(G_n) = 3i$ olur.

d) $p,\ p > 3$ olacak şekilde bir asal sayı ve $t,\ u \in \mathbb{N}$ olmak üzere $LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\big(G_p\big) = LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\big(G_{p^t}\big)$ olacak şekilde en büyük doğal sayı olsun. Bu durumda $u,\ p^t|3^u + 1$ olacak şekilde en küçük tek doğal sayı ya da $p^t|3^u - 1$ olacak şekilde en küçük çift doğal sayıdır.

Eğer $p^t|3^u + 1$ ise bu durumda her $a \geq t$ için $p^a|p^{a-t}(3^u + 1)$ olur. Burada $p^{a-t}(3^u + 1)|3^m + 1$ olacak şekilde en küçük m doğal sayısına ihtiyaç vardır. Bu en küçük m doğal sayısının, $p^{a-t}(3^u + 1)|3^m + 1$ olmak üzere $p^{a-t}.u$ ya eşit olduğu matematiksel tümevarımla gösterilebilir.

Eğer $p^t|3^u - 1$ ise bu durumda her $a \geq t$ için $p^a|p^{a-t}(3^u - 1)$ olur. Burada $p^{a-t}(3^u - 1)|3^m - 1$ olacak şekilde en küçük m doğal sayısına ihtiyaç vardır. Bu en küçük m doğal sayısının, $p^{a-t}(3^u - 1)|3^m - 1$ olmak üzere $p^{a-t}.u$ ya eşit olduğu matematiksel tümevarımla gösterilebilir.

e) p_j ler ayrık asallar olmak üzere $a \geq 1$ için $n = \prod_{j=1}^{a} p_j^{e_j}$ ve $\tau_j \in \mathbb{N}$ olmak üzere $LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left((2, p_j^{e_j}, 2)\right) = 3\tau_j$ olsun. Bu durumda $\tau_j,\ p_j^{e_j}\Big|3^{\tau_j} + 1$ olacak şekilde en küçük tek doğal sayı ya da $p_j^{e_j}\Big|\, 3^{\tau_j}-1$ olacak şekilde en küçük çift doğal sayıdır. Böylece $n|3^\eta+1$ ya da $n|3^\eta-1$ olacak şekilde en küçük η doğal sayısına ihtiyaç vardır. . Bu en küçük η doğal sayısının, $n|3^\eta+1$ ya da $n|3^\eta-1$ olmak üzere Icm$[3^{\tau_j}]$ ya eşit gösterilebilir. Böylece

$$LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}((2,n,2)) = \text{Icm}\left[LEN_{\{x,y\}}P^{(2)}\left((2,p_j^{e_j},2)\right)\right]$$

yazılır.

ii. $P^{(2)}_{\{x,y\}}\big((2,n,2)\big)$ ifadesi

$$x_0 = x\,, x_1 = y, x_2 = z, x_3 = y^3 z, x_4 = y, x_5 = z, x_6 = y^3 z\,...,$$

şeklindedir ve periyodu 3 tür.

$(n,2,2)$ ve $(2,2,n)$ grupları için ispat yukarıdaki ispatla benzerdir.

3.7. Grupların Pell-Padovan ve Co-Pell-Padovan Orbiti

Bu bölümde $(x,y)\in G$ geren çifti için iki gerenli bir G grubunun Pell-Padovan orbiti ve co-Pell-Padovan orbiti araştırılmış ve daha sonra bu orbitlerin periyot uzunlukları incelenmiştir. Ayrıca $(x,y)\in G$ geren çifti için $F(r,2)$ Fibonacci gruplarının Pell-Padovan uzunlukları ve Co-Pell-Padovan uzunlukları araştırılmıştır.

G bir grup ve $x,y\in G$ olsun. Eğer G nin her elemanı $u_i\in\mathbb{Z}, 1\leq i\leq m$ olmak üzere

$$x^{u_1}y^{u_2}x^{u_3}y^{u_4}\,...\,x^{u_{m-1}}y^{u_m}$$

şeklinde bir kelime olarak yazılırsa bu durumda x ve y nin G yi gerdiği ve G nin iki gerenli bir grup olduğu söylenebilir. G iki gerenli bir grup olmak üzere, $(x,y)\in X$ olacak şekilde X in $G\times G$ nin bir alt kümesi olması için gerek ve yeter şart G nin x ve y tarafından gerilmesidir.

Tanım 3.7.1: $(x, y) \in G$ geren çifti için $P_{x,y,y}(G) = \{x_i\}$ Pell-Padovan orbiti ve $c - P_{x,y,y}(G) = \{x_i\}$ co-Pell-Padovan orbiti $i \geq 1$ için sırasıyla aşağıdaki gibidir (Deveci, Baskıda).

$$x_0 = xy, x_1 = y, x_2 = y, x_{i+2} = (x_{i-1}) \cdot (x_i)^2$$

ve

$$x_0 = yx, x_1 = y, x_2 = y, x_{i+2} = (x_{i-1}) \cdot (x_i)^2$$

Teorem 3.7.1: Sonlu bir gruptaki bir Pell-Padovan orbiti ve co-Pell-Padovan orbiti basit periyodiktir (Deveci, Baskıda).

İspat: G sonlu bir grup olsun ve n, G grubunun mertebesini göstersin. G grubunun n^3 şeklinde ayrık bir üçlüsü var olduğundan bu üçlülerin en az bir tanesinin grubun Pell-Padovan orbitinde benzeri görülür. Böylece bu üçlü tekrar eder ve tekrar ettiğinden dolayı Pell-Padovan orbiti periyodiktir denir.

Pell-Padovan orbiti periyodik olduğundan

$$x_{u+1} = x_{v+1}, x_{u+2} = x_{v+2}, x_{u+3} = x_{v+3}$$

olacak şekilde u ve v doğal sayıları vardır. Burada $u > v$ dir. Burada Pell-Padovan orbitinin tanımındaki bağıntıdan

$$x_{u+3} = (x_u) \cdot (x_{u+1})^2 \text{ ve } x_{v+3} = (x_v) \cdot (x_{v+1})^2$$

eşitlikler yazılabilir. Böylece $x_u = x_v$ ve buradan

$$x_{u-v} = x_{v-v} = x_0, x_{u-v+1} = x_{v-v+1} = x_1, x_{u-v+2} = x_{v-v+2} = x_2$$

yazılır. O halde Pell-Padovan orbiti basit periyodiktir.

Sonlu bir gruptaki bir co-Pell-Padovan orbitinin basit periyodikliğinin ispatı Pell-Padovan orbitinin basit periyodikliği ile benzerdir.

$LP_{x,y,y}(G)$, $P_{x,y,y}(G)$ Pell-Padovan orbitinin periyot uzunluğunu ve $Lc - P_{x,y,y}(G)$ de $c - P_{x,y,y}(G)$ co-Pell-Padovan orbitinin periyot uzunluğunu göstersin. Bu durumda $LP_{x,y,y}(G)$ ve $Lc - P_{x,y,y}(G)$ ye (x, y) geren çiftlerine göre sırasıyla Pell-Padovan uzunluğu ve co-Pell-Padovan uzunluğu denir (Deveci, Baskıda).

Tanımdan bir grupun Pell-Padovan uzunluğunun ve co-Pell-Padovan uzunluğunun seçilen üreteç kümesine ve üreteç elemanlarının sıralamasına bağlı olduğu açıktır.

Tanım 3.7.2: G sonlu bir grup olsun. Eğer G grubunun her bir elemanının dizide görünecek şekilde bir co-Pell-Padovan orbiti varsa bu durumda G grubuna co-Pell-Padovan dizilenebilirdir denir (Deveci and Karaduman, Baskıda).

Pell-Padovan dizilenebilir grupların direkt çarpımının ve co-Pell-Padovan dizilenebilir grupların direkt çarpımının sırasıyla Pell-Padovan dizilenebilirlik ve co-Pell-Padovan dizilenebilirlik için gerekli olmadığına dikkat edilmelidir. Örneğin; e birim olmak üzere $G = \langle x, y \mid x^3 = y^3 = e, xy = yx \rangle$ şeklinde verilen değişmeli grubu ele alınsın. Bu grubunun Pell-Padovan orbiti

$$P_{x,y,y}(G) = xy, y, y, x, e, x^2y, x, xy^2, xy, y, y, \ldots,$$

$$P_{y,x,x}(G) = yx, x, x, y, e, yx^2, y, yx^2, yx, x, x, \ldots,$$

şeklinde olacaktır. Burada x^2 elemanı iki dizide de olmadığı için G grubu Pell-Padovan dizilenebilir değildir. Ancak $P_{e,x,x}(\langle x \rangle)$ orbiti

$$x, x, x, e, e, x, e, x^2, x, x, x, \ldots,$$

şeklindedir Pell-Padovan dizilenebilirdir. Benzer şekilde $P_{e,y,y}(\langle y \rangle)$ orbiti

$$y, y, y, e, e, y, e, y^2, y, y, y, \ldots,$$

şeklindedir ve Pell-Padovan dizilenebilirdir. O halde G grubunun $\langle x\rangle$ ve $\langle y\rangle$ nin direkt çarpımı olmadığı açıktır (Deveci, Baskıda).Co-Pell-Padovan orbiti için de benzer bir örnek verilebilir.

r tek olmak üzere r^2-1 mertebeye sahip $F(r,2)$ Fibonacci grubunun her bir geren elemanı $2(r-1)$ mertebeden olup, bu grup sonlu metacyclic bir gruptur. Fibonacci grupları

$$\langle a, b : (ab)^{(r-1)/2} = ba^{-1}, (ba)^{(r-1)/2} = ab^{-1}\rangle$$

şeklinde taktim edilir. Burada $F(r,2)$ deki bağıntılar $a^2 = (ab)^{(r+1)/2} = b^2$ ve $a^{2(r-1)} = b^{2(r-1)} = e$ eşitliklerini gerektirir.

Teorem 3.7.2: ***i.*** $LP_{a,b,b}\big(F(3,2)\big) = Lc - LP_{a,b,b}\big(F(3,2)\big) = 6$

ii. $r \geq 5$ olsun. Bu durumda $\alpha \geq 0$ için

$$LP_{a,b,b}\big(F(r,2)\big) = Lc - LP_{a,b,b}\big(F(r,2)\big) = \begin{cases} (3+4\alpha)\cdot hP^{(4(r-1))} & r = 5+8\alpha \text{ ise} \\ hP^{(4(r-1))} & r = 7+8\alpha \text{ ise} \\ (5+4\alpha)\cdot hP^{(4(r-1))} & r = 9+8\alpha \text{ ise} \\ (6+4\alpha)\cdot hP^{(4(r-1))} & r = 11+8\alpha \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

İspat: ***i.*** $F(3,2) \cong Q_8$ in 8 mertebeli kuaternion grup olduğu açıktır. Buradan $P_{a,b,b}(F(3,2))$ ve $c - P_{a,b,b}(F(3,2))$ orbitleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$ab, b, b, ab^3, b^3, b^3, ab, b, b, \ldots,$$

$$ba, b, b, b^3a, b^3, b^3, ba, a, a, \ldots,$$

Böylece $LP_{a,b,b}\big(F(3,2)\big) = Lc - LP_{a,b,b}\big(F(3,2)\big) = 6$ yazılır.

ii. $P_{a,b,b}(F(r,2))$ Pell-Padovan orbiti ele alınsın. O halde bu orbit aşağıdaki gibi olacaktır.

$$ab, b, b, ab^3, b^3, b^5, (ab)^2, ab^9, b^{21}, b^{21}(ab)^4,$$
$$ab^{51}, b^{79}, b^{121}(ab)^6, ab^{209}, b^{345}, b^{537}(ab)^8, \ldots.$$

$\alpha \geq 0$ için $r = 5 + 8\alpha$ olsun. Buradan $P_{a,b,b}(F(r,2))$ orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = ab, x_1 = b, x_2 = b, \ldots, x_{hP^{(4(r-1))}-2} = b^7, x_{hP^{(4(r-1))}-1} = b^r(ab)^{(r-1/2)-2},$$
$$x_{hP^{(4(r-1))}} = ab, x_{hP^{(4(r-1))}+1} = b, x_{hP^{(4(r-1))}+2} = b^{2(r-1)-3}(ab)^2, \ldots,$$
$$x_{2\cdot hP^{(4(r-1))}} = ab, x_{2\cdot hP^{(4(r-1))}+1} = b, x_{2\cdot hP^{(4(r-1))}+2} = b^{2(r-1)-7}(ab)^4, \ldots,$$
$$x_{i\cdot hP^{(4(r-1))}} = ab, x_{i\cdot hP^{(4(r-1))}+1} = b, x_{i\cdot hP^{(4(r-1))}+2} = b^{2(r-1)-3-4(i-1)}(ab)^{2i}, \ldots.$$

Böylece $2i = r + 1$ ve $2(r-1) - 3 - 4(i-1) = -3$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır. Buradan

$$i = (3 + 4\alpha) \text{ ve } LP_{a,b,b}(F(r,2)) = (3 + 4\alpha) \cdot hP^{(4(r-1))}$$

yazılır.

$\alpha \geq 0$ için $r = 9 + 8\alpha$ olsun. Buradan $P_{a,b,b}(F(r,2))$ orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = ab, x_1 = b, x_2 = b, \ldots, x_{hP^{(4(r-1))}-2} = b^7, x_{hP^{(4(r-1))}-1} = a^{r+1}(ba)^{(r-1/2)-3},$$
$$x_{hP^{(4(r-1))}} = ab, x_{hP^{(4(r-1))}+1} = b, x_{hP^{(4(r-1))}+2} = b^{r-2}(ab), \ldots,$$

Böylece $1 + 2(i-1) = r$ ve $r - 2i = -1$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır. Buradan

$$i = (5 + 4\alpha) \text{ ve } LP_{a,b,b}(F(r,2)) = (5 + 4\alpha) \cdot hP^{(4(r-1))}$$

yazılır.

$\alpha \geq 0$ için $r = 11 + 8\alpha$ olsun. Buradan $P_{a,b,b}(F(r,2))$ orbiti aşağıdaki gibi olur.

$$x_0 = ab, x_1 = b, x_2 = b, \ldots, x_{hP^{(4(r-1))}-2} = b^7, x_{hP^{(4(r-1))}-1} = b^{r+1}(ab)^{(r-1/2)-3},$$

$$x_{hP^{(4(r-1))}} = ab, x_{hP^{(4(r-1))}+1} = b, x_{hP^{(4(r-1))}+2} = a^{r-2}(ba), \dots,$$
$$x_{2\cdot hP^{(4(r-1))}} = ab, x_{2\cdot hP^{(4(r-1))}+1} = b, x_{2\cdot hP^{(4(r-1))}+2} = a^{r-4}(ba)^3, \dots,$$
$$x_{i\cdot hP^{(4(r-1))}} = ab, x_{i\cdot hP^{(4(r-1))}+1} = b, x_{i\cdot hP^{(4(r-1))}+2} = a^{r-2i}(ba)^{1+2(i-1)}, \dots.$$

Böylece $1 + 2(i-1) = r$ ve $r - 2i = -1$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır. Buradan

$$i = (6 + 4\alpha) \text{ ve } LP_{a,b,b}\big(F(r,2)\big) = (6 + 4\alpha) \cdot hP^{(4(r-1))}$$

yazılır. Co-Pell-Padovan orbiti için de benzer ispat yapılabilir.

3.8. Grupların Jacobsthal-Padovan Orbiti

Tanım 3.8.1: $(x,y) \in G$ geren çifti için $J_{x,y,y}(G) = \{x_i\}$ Jacobsthal-Padovan orbiti $i \geq 1$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = y, x_{i+2} = (x_{i-1})^2 \cdot (x_i)$$

şeklinde ifade edilir (Deveci, Baskıda).

Teorem 3.8.1: Sonlu bir gruptaki Jacobsthal-Padovan orbiti periyodiktir (Deveci(25)).

İspat: Jacobsthal-Padovan orbitinin periyodikliğinin ispatı Teorem 3.6.1 teoremin ispatı ile benzerdir.

$LJ_{x,y,y}(G)$, $J_{x,y,y}(G)$ Jacobsthal-Padovan orbitinin periyot uzunluğunu göstersin. Bu durumda $LJ_{x,y,y}(G)$ ye (x,y) geren çiftlerine göre Jacobsthal-Padovan uzunluğu denir.

Tanımdan bir grupun Jacobsthal-Padovan uzunluğunun ve seçilen üreteç kümesine bağlı olduğu ve mertebesinin x_0, x_1, x_2 nin düzenlemesi ile oluştuğu açıktır.

Tanım 3.8.2: G sonlu bir grup olsun. Eğer G grubunun her bir elemanının dizide görünecek şekilde bir Jacobsthal-Padovan orbiti varsa bu durumda G grubuna Jacobsthal-Padovan dizilenebilirdir denir (Deveci, Baskıda).

Jacobsthal-Padovan dizilenebilir grupların direkt çarpımının Jacobsthal-Padovan dizilenebilirlik için gerekli olmadığına dikkat edilmelidir. Bunun için Pell-Padovan dizilenebilirlikteki benzer örnek verilebilir.

Teorem 3.8.2: $F(r,2)$ Jacobsthal-Padovan uzunluğu $hJ^{(2(r-1))}$ dir (Deveci, Baskıda).

İapat: $J_{a,b,b}(F(r,2))$ orbiti

$$a, b, b, b^3, b^3, b^5, \ldots.$$

şeklindedir. Buaradan $J_{a,b,b}(F(r,2))$ orbiti aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$x_0 = a, x_1 = b^{J(0)}, x_2 = b^{J(1)}, x_3 = b^{J(2)}, x_4 = b^{J(3)}, x_5 = b^{J(4)}, \ldots,$$

Böylece periyot $hJ^{(2(r-1))}$ olur.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Deveci [7] de Pell-Padovan dizisi ve Jacobsthal-Padovan dizisi teorilerini genişletmiştir. Bu bölümde iki gerenli polyhedral gruplar ve binary polyhedral gruplar incelenmiş ve (x,y) geren çifti için $(n,2,2)$, $(2,n,2)$, $(2,2,n)$ polyhedral grupların ve $\langle n,2,2\rangle$, $\langle 2,n,2\rangle$, $\langle 2,2,n\rangle$ binary polyhedral grupların Pell-Padovan uzunlukları, co- Pell-Padovan uzunlukları ve Jacobsthal-Padovan uzunlukları araştırılmıştır.

4.1. Polyhedral ve Binary Polyhedral Grupların Pell-Padovan ve co-Pell-Padovan Uzunlıkları

Teorem 4.1.1: $LP_{x,y,y}((n,2,2)) = Lc - P_{x,y,y}((n,2,2)) = 3$ olur.

İapat: Direkt hesaplama ile ispat yapılabilir. Burada

$$\langle x,y\colon x^n = y^2 = (xy)^2 = e\rangle \text{ ve } xy = yx^{-1}$$

olup $P_{x,y,y}((n,2,2))$ ve $c - P_{x,y,y}((n,2,2))$ orbitleri sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$xy, y, y, \underline{xyy^2} = xy, \underline{y(xy)^2} = y, \underline{yy^2} = y, \ldots,$$

$$yx, y, y, \underline{yxy^2} = yx, \underline{y(yx)^2} = y, \underline{yy^2} = y, \ldots,$$

Burada periyot 3 tür. Yani $LP_{x,y,y}((n,2,2)) = Lc - P_{x,y,y}((n,2,2)) = 3$ olur.

Teorem 4.1.2: $LP_{x,y,y}((2,n,2)) = Lc - P_{x,y,y}((2,n,2)) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & n \text{ çift ise} \\ 3n & n \text{ tek ise} \end{cases}$

İspat: $c - P_{x,y,y}((2,n,2))$ co-Pell-Padovan orbiti ele alınsın. Burada $\langle x,y: x^2 = y^n = (xy)^2 = e\rangle$ ve $xy = yx^{-1}$ olup $c - P_{x,y,y}((2,n,2))$ orbiti

$yx,$

$y,$

$y,$

$\underline{yxy^2} = y^{-1}x,$

$\underline{yy^2} = y^3,$

$\underline{y(y^{-1}x)^2} = y,$

$\underline{(y^{-1}x)y^6} = y^{-7}x,$

$\underline{y^3y^2} = y^5,$

$\underline{y(y^{-7}x)^2} = y,$

$\underline{(y^{-7}x)y^{10}} = y^{-17}x,$

$\underline{y^5y^2} = y^7,$

$\underline{y(y^{-17}x)^2 = y}, \ldots,$

şeklinde olur. Buradan dizinin her üç terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğunu görülür. Böylece aşağıdaki dizi elde edebilir:

$$x_0 = yx, x_1 = y, x_2 = y,$$
$$x_3 = y^{-1}x, x_4 = y^3, x_5 = y,$$
$$x_6 = y^{-7}x, x_7 = y^5, x_8 = y, \ldots,$$
$$x_{3\cdot i} = y^{-2\cdot i^2+1}x, x_{3\cdot i+1} = y^{2i+1}, x_{3\cdot i+2} = y, \ldots$$

Burada $u \in \mathbb{Z}$ için $2 \cdot i = n \cdot u$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer n çift ise bu durumda $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $3 \cdot i = \frac{3n}{2}$ ve $Lc - P_{x,y,y}\big((2,n,2)\big) = \frac{3n}{2}$ olur.

Eğer n tek ise bu durumda $n = i$ olur. Böylece $3 \cdot i = 3n$ ve $Lc - P_{x,y,y}\big((2, n, 2)\big) = 3n$ olur.

$P_{x,y,y}\big((2, n, 2)\big)$ orbiti için ispat $c - P_{x,y,y}\big((2, n, 2)\big)$ orbitinin ispatına benzer olarak yapılabilir.

Teorem 4.1.3: $LP_{x,y,y}(\langle 2,2,n \rangle) = Lc - P_{x,y,y}(\langle 2, n, 2 \rangle) = \begin{cases} 3n & n \text{ çift ise} \\ 6n & n \text{ tek ise} \end{cases}$

ispat: $P_{x,y,y}(\langle 2,2,n \rangle)$ Pell-Padovan orbiti ele alınsın. Burada $\langle x, y \colon x^2 = y^n = (xy)^2 \rangle$, $|x| = 4$, $|y| = 2n$ ve $xy = yx^{-1}$ olup $P_{x,y,y}(\langle 2,2,n \rangle)$ orbiti

$xy, y, y, \underline{xyy^2} = xy^3,$

$\underline{yy^2} = y^3,$

$\underline{y(xy^3)^2} = y^{n+1},$

$(xy^3)\underline{y^6} = xy^9,$

$\underline{y^3(y^{n+1})^2} = y^5,$

$\underline{y^{n+1}(xy^9)^2} = y,$

$\underline{(xy^9)y^{10}} = (xy^{19}),$

$\underline{y^5y^2} = y^7,$

$\underline{y(xy^{19})^2} = y^{n+1},$

$\underline{(xy^{19})y^{14}} = xy^{33}$

$\underline{y^7(y^{n+1})^2} = y^9,$

$\underline{y^{n+1}(xy^{33})^2} = y,$

$\underline{(xy^{33})y^{18}} = xy^{51},$

$\underline{y^9y^2} = y^{11}$,

$\underline{y(xy^{51})^2} = y^{n+1}$

$\underline{(xy^{51})y^{22}} = xy^{73}$,

$\underline{y^{11}(y^{n+1})^2} = y^{13}$,

$\underline{y^{n+1}(xy^{73})^2} = y, \ldots.$

şeklinde olur. Buradan dizinin her altı terimde bir aynı formda terimlerin tekrarından ibaret olduğunu görülür. Böylece aşağıdaki dizi elde edebilir:

$$\begin{aligned}
&x_0 = xy, x_1 = y, x_2 = y,\\
&x_3 = xy^9, x_4 = y^5, x_5 = y,\\
&x_6 = xy^{33}, x_7 = y^9, x_8 = y, \ldots,\\
&x_{3\cdot i} = xy^{8\cdot i^2+1}x, x_{3\cdot i+1} = y^{4i+1}, x_{3\cdot i+2} = y, \ldots
\end{aligned}$$

Burada $u \in \mathbb{Z}$ için $4 \cdot i = 2n \cdot u$ olacak şekilde en küçük i doğal sayısına ihtiyaç vardır ve aşağıdaki durumlar söz konusudur;

Eğer n çift ise bu durumda $i = \frac{n}{2}$ olur. Böylece $6 \cdot i = 3n$ ve $LP_{x,y,y}(\langle 2,2,n\rangle) = 3n$ olur.

Eğer n tek ise bu durumda $n = i$ olur. Böylece $6 \cdot i = 6n$ ve $LP_{x,y,y}(\langle 2,2,n\rangle) = 3n$ olur.

$P_{x,y,y}(\langle 2,2,n\rangle) = 3n$ orbitinin ispatı $c - P_{x,y,y}(\langle 2,2,n\rangle)$ orbitinin ispatına benzer olarak yapılabilir.

Teorem 4.1.4: $LP_{x,y,y}((2,2,n)) = Lc - P_{x,y,y}((2,2,n)) = \begin{cases} \frac{3n}{2} & n \text{ çift ise} \\ 3n & n \text{ tek ise} \end{cases}$

İspat: Bu kısmın ispatı Teorem 4.1.2 nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.1.5: $LP_{x,y,y}((2,n,2)) = Lc - P_{x,y,y}((2,n,2)) = 6$

İspat: Bu kısmın ispatı Teorem 4.1.2 nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

4.2. Polyhedral ve Binary Polyhedral Grupların Jacobsthal-Padovan Uzunlıkları

Tanım 4.2.1: $hJ_{(a_1,a_2,a_2)}^{(m)}$, $u_{n+3} = u_{n+1} + 2u_n$ tamsayı değerli rekürans bağıntısının en küçük periyodunu göstersin. Bu durumda her bir girdi m modülüne göre indirgendiğinde $u_1 = a_1, u_2 = a_2$ ve $u_3 = a_2$ olur.

Teorem 4.2.1: $a_1, a_2, x_1, x_2, m \in \mathbb{Z}\cdot$ için $m \neq 2, \gcd(a_1, a_2, m) = 1$ ve $\gcd(x_1, x_2, m)$ olmak üzere

$$hJ_{(a_1,a_2,a_2)}^{(m)} = hJ_{(x_1,x_2,x_2)}^{(m)}$$

olur.

İspat: [10] da G Jacobsthal-Padovan matrisini

$$G = \left[g_{ij}\right]_{3\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlamış ve

$$\begin{bmatrix} J(n) \\ J(n+1) \\ J(n+2) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} J(n-1) \\ J(n) \\ J(n+1) \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterilmiştir.

$U_n = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ olsun. Bu durumda $U_{n+1} = G^n \cdot U_1$ yazılabilir. m modülüne göre bu tam sayılar sonlu bir denklik sınıfı kümesi formunda olduğu için G^{n+t} in m modülüne göre G^t e denk olduğunu gösteren n ve r tam sayıları mevcuttur. Yani G^{n+t} nin her bir elemanı G^t nin her bir elemanına m modülüne göre denktir. Böylece $U_{n+1} \equiv U_1 \bmod m$ yazılabilir.

Teorem 4.2.2: $LJ_{x,y,y}\big((n,2,2)\big) = 2$ dir.

İspat: $J_{x,y,y}\big((n,2,2)\big)$ orbiti

$$x, y, y, \underline{x^2}\underline{y} = x^2y, \underline{y^2y} = y, \underline{y^2x^2y} = x^2y, \underline{(x^2y)^2}\underline{y} = y, \ldots,$$

şeklindedir. Böylece periyot 2 olur.

Teorem 4.2.3:

i. $LJ_{x,y,y}\big((2,n,2)\big) = hJ^{(n)}$

ii. $LJ_{x,y,y}(\langle 2,2,n\rangle) = hJ^{(2n)}$

İspat: ***i.*** $J_{x,y,y}\big((2,n,2)\big)$ orbiti

$$x, y = y^{J(0)}, y = y^{J(1)}, \underline{x^2}\underline{y} = y^{J(2)}, \underline{y^2y} = y^3 = y^{J(3)}, \underline{y^2y} = y^3 = y^{J(4)}, \ldots,$$

şeklindedir. Böylece bu dizinin periyodu $hJ^{(n)}$ olur.

ii. $J_{x,y,y}\big((2,2,n)\big)$ orbiti

$$x, y, y, \underline{x^2}\underline{y} = y^{n+1}, \underline{y^2y} = y^3, \underline{y^2y^{n+1}} = y^{n+3}, \ldots,$$

şeklindedir. Böylece bu dizinin periyodunun $hJ^{(2n)}$ olduğu Teorem 4.2.1 den görülebilir.

Teorem 4.2.3:

i. $LJ_{x,y,y}\big((2,2,n)\big) = 2$

ii. $LJ_{x,y,y}(\langle 2,n,2\rangle) = 4$

İspat: Teoremin ispatı Teorem 4.2.2 nin ispatı ile benzerdir.

5. TARTIŞMA ve SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında; lineer indirgemeli dizilerden Pell-Padovan ve Jocabsthal-Padovan dizilerinin, modern cebirde en çok kullanılan cebirsel yapılardan gruplardaki uygulamaları üzerinde duruldu.

$n \geq 3$ için $(n, 2,2)$, $(2, n, 2)$, $(2,2, n)$ polyhedral ve $\langle n, 2,2\rangle$, $\langle 2, n, 2\rangle$, $\langle 2,2, n\rangle$ binary polyhedral gruplarının Pell-Padovan, co-Pell-Padovan ve Jacobsthal-Padovan orbitleri incelendi ve bu orbitlerin periyotları, Pell-Padovan ve Jacobsthal-Padovan dizilerinin m-modülüne göre indirgenmeleri sonucu elde edilen $hP^{(m)}$ ve $hJ^{(m)}$ periyot uzunlukları yardımıyla belirlendi.

KAYNAKLAR

[1] Bicknell, M., A primer on the Pell sequences and related sequences, *Fibonacci Quart.*, **13(4)** (1975), 345-350

[2] Borevich A. I. and Shafarevich I. R., Number theory, *Academic Press*, New York, 1996

[3] Bosma W. and Kraaikamp C., Mertical theory for optimal continued fractions, *J. Number Theory*, **34(3)** (1990), 251-270

[4] Box G. E. P. and Jenkins G. M., times series analysis. Forecasting and control, Holden Day, San Francisco, Calif., 1970

[5] Campbell C. M. and Campbell P. P., The Fibonacci length of certain centro-polyhedral groups, *J. Appl. Math. Comput.*, **19** (2005), 231-240.

[6] Campbell P. P., 2003. Fibonacci Length and Efficiency in Group Presentations. Ph. Thesis, University of St Andrews.

[7] Deveci Ö., The Pell-Padovan sequences and the Jacobsthal-Padovan sequences in finite groups, *Util. Math.*, to appear.

[8] Deveci Ö. and Karaduman E., The Pell lengths and the generalized Pell lengths of polyhedral groups, *International Conference Applied Analysis and Algebra*,İstanbul, Turkey, 2011.

[9] Deveci Ö. and Karaduman E., The Pell lengths of binary polyhedral groups, *The* 24^{th} *International Conference of Jangjeon mathematical Society*, Konya, Turkey, 2011.

[10] Deveci Ö. and Karaduman E., The Pell sequences in finite groups, *Util, Math.*, to appear.

[11] Deveci Ö., Karaduman E. and Campbell C. M., On The k-nacci sequences in finite binary polyhedral groups. *Algebra Colloq.*, **18 (Spec 1)** (2011), 945-954.

[12] Deveci Ö. and Karaduman E., Recurrence Sequences in Groups, *Lap Lambert Academic Publishing*, 2013, Germany.

[13] Deveci Ö., Vargün Y. S. and Karaduman E., The Pell-Padovan Lengths and the Jacobsthal-Padovan Lengths of the Polyhedral and Binary Polyhedral Groups, *Advances in Theorical and Applied Mathematics*, ISSN 0973-4554, **8(2)** (2013), 93-101.

[14] Dummit, D.S. and Foote, R.M., 2004. Abstract Algebra. 3nd edition (John Wiley & Sons, Inc.).

[15] El Naschie M. S., Stability analysis of two-slit experiment, *Chaos, Solitions & Fractals*, **24** (2005), 941-946.

[16] Fraenkel A. S. and Klein S. T., Robutst universal complete codes for transmission and compression, *Discrete Appl. Math*., **64** (1996), 31-55.

[17] Gandhi B. K. and Reddy M. J., Triangular numbers in the generalized associated Pell sequence, *Indian J. Pure Appl. Math*., **34(8)** (2003), 1237-1248.

[18]Horadam A. F., Pell Identities, *Fibonacci Quart*., **9(3)** (1971), 245-252.

[19] Hosenberg R., The matrix *Q*, *Mathematical Gems* III. Washington, DC: Math. Assoc. Amer. 106-107 (1985)

[20] Johnson, D.L., 1997. Presentation of Groups. 2nd edition (London Math. Soc. Student Texts 15, Cambridge University Press, Cambridge).

[21] Kalman D., Generalized Fibonacci numbers by matrix methods, *Fibonacci Quart*., **20(1)** (1982), 73-76.

[22] Kılıç E. and Taşçı D., The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order-k Pell numbers, *Taiwanese J. Math*., **10(6)** (2006), 1661-1670.

[23] Kirchoof B. K. and Rutishauser R., the phyllotavy of costus (costaceae), *Bot Gazette*, **151(1)** (1990), 88-105

[24] Koken F. and Bozkurt D., On the Jacobsthal numbers by matrix methods, *Int. J. Contemp. Math. Sciences.* **3(13)** (2008), 605-614.

[25] Knox S. W., Fibonacci sequences in finite groups, *Fibonacci Quart*., **30** (1992), 116-120.

[26] Lien J., Pers. Comm., Mar. 11, 2005.

[27] Lipshitz L. and van der Poorten A. J., Rational functions, diagonals, automata and arithmetic, Number Theory (Banff, AB, 1988), de Grutyer, Berlin, 1990, 339-358.

[28] Robinson, D.J.S., 1982. A Course in The Theory Groups (Springer-Verlag, New York).

[29] Shannon A. G., Anderson P. G. and Horaham A. F., Properties of cordonnieri Perrin and Van der Lann numbers, *International Journal of Mathematical Education in Science & Tecnology*, **37(7)** (2006), 825-831.

[30] Shannon A. G., Horaham A. F. and Anderson P. G., The auxiliary equation associated with plastic number, *Notes on number Theory and Discrete Mathematics*, **12(1)** (2006), 1-12.

[31] Silvester J. R., Fibonacci proporties by matrix methods, *Mathematical Gazette*, **63** (1979), 188-191.

[32] Sims, C.C., 1994. Computation With Finitely Presented Groups. (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 48, Cambridge University Press, Cambridge).

[33] Spinadel V. W., The family of metallic means, *Vis Math.*, **1(3)** (1999).

[34] Spinadel V. W., The mettalic means family and forbidden symmetries, *Int. J.*, **2(3)** (2002), 279-288.

[35] Syein W., Modelling the evolution of Stelar archictecture in Vascular plants, *Int. J. Plant Sci*., **154(2)** (1993), 229-263.

[36] Taşcı, D., 2007. Soyut Cebir. (Alp Yayınevi, Ankara).

[37] Wall D. D., Fibonacci series module m , *Amer Math. Monthly*, **67** (1969), 525-532.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Yunus Serhat VARGÜN

Doğum Yeri: KARS

Doğum Tarihi: 1977

Medeni Hali: Bekar

Yabancı Dili: İngilizce

Eğitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise: Kars Alparslan Lisesi (1992-1995)

Lisans: Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (1998-2003)

Yüksek Lisans: Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü (2011-2013)