T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KUAZİ OPTİĞİN DURGUN OLMAYAN DENKLEMİ İÇİN BAŞLANGIÇ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Zafer DEMİRCİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. Gabil YAGUB

EYLÜL-2013

KARS

Prof. Dr. Gabil YAGUB'un danışmanlığında Zafer DEMİRCİ'nin Yüksek Lisans Tezi olarak hazırladığı "Kuazi Optiğin Durgun Olmayan Denklemi için Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü'' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında oy....bilgi.......... ile kabul edilmiştir.

06/...09/2013

		Adı Soyadı	İmza
Başkan	:	Prof. Dr. Emine MISIRLI	....
Üye	:	Prof. Dr. Gabil YAGUB	....
Üye	:	Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu' nun ....../...../20.... gün ve ....../........................ sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç.Dr.Muzaffer ALKAN

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için I. ve II. çeşit başlangıç sınır değer problemleri ve onların nümerik çözümü ele alınmıştır. İlk önce ele alınan sınır değer problemleri için fark şemaları oluşturulmuş ve bu fark şemalarının kararlılığı için kestirimler elde edilmiştir. Bu kestirimlerden yararlanılarak fark şemasının hatası değerlendirilmiş, sonlu farklar yönteminin yakınsaklığını gösteren kestirimler elde edilmiştir. Ele alınan sınır değer problemlerinin bilgisayar çözümünü yapmak için nümerik çözüm algoritması oluşturulmuştur.

Tez çalışmam sırasında yardım ve desteklerini esirgemeyen, yoğun çalışmalarından bana zaman ayırarak derin bilgilerinden faydalanma fırsatı veren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum değerli bilim adamı Matematik Anabilim Dalı Başkanı Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB hocama en derin saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım esnasında yine katkılarını esirgemeyen Matematik Anabilim Dalı öğretim üyesi Sayın Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY hocama, Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyesi Sayın Prof. Dr. Emine MISIRLI hocama ve ayrıca tezin hazırlanması sürecinde manevi desteğini her zaman hissettiğim eşime ve çocuklarıma teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2013 Zafer DEMİRCİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu tezde Kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ele alındı. Bu çalışmanın 3.1. bölümünde 1. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanarak bu probleme ait bir fark şeması oluşturuldu, Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliği ve Gronwall lemması kullanılarak fark şemasının çözümü için bir kararlılık kestirimi elde edildi ve kararlılık kestirimi kullanılarak fark şemasının hatası için kestirim ispatlandı.

Çalışmanın 3.2. bölümünde ise 2. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanarak bu probleme ait fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edildi ve bu kestirim kullanılarak fark şemasının hatası değerlendirildi. Son olarak 1. ve 2. çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümleri için algoritma verildi.

2013-44 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Kuazi Optik, Sınır Değer Problemi, Sonlu Farklar Yöntemi, Schrödinger Denklemi, Fark Şeması, Kararlılık, Yakınsma, Hata.

ABSTRACT

In this thesis, the initial- boundary value problems are studied for non-statıonary equation of quasi optics. In the 3.1. section, describing first-type initial-boundary value problem a difference scheme belong to this problem is constituted. A stability estimation is obtained for the solution of difference scheme using Cauchy-Bunyakovskii's inequality and Gronwall's lemma. Using the stability estimation an estimation for the error of difference scheme is obtained.

In the 3.2. section, describing the second-type initial-boundary value problem a stability estimation for the solution of difference scheme belong to this problem is obtained. The error of difference scheme using obtained estimation is evaluated. Consequently, an algorithm is given for the numeral solutions of first and second-type initial- boundary value problems.

2013 – 44 Pages

Key Words: Quasi optics, Boundary Value Problem, Finite Difference Method, Schrödinger Equation, Difference Scheme, Stability, Convergence, Error.

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	herhangi
$\overset{0}{\forall}$	hemen hemen her yerde
$l>0$	verilen sayı
$T>0$	verilen sayı
$L>0$	verilen sayı
$a(x),\ v_0(x),\ v_1(x)$	ölçülebilir reel değerli fonksiyon
$x\in[0,l]$	bağımsız değişken
$t\in[0,T]$	bağımsız değişken
$z\in[0,L]$	bağımsız değişken
$[.....]$	kaynak numarası sayfa
$\langle .,. \rangle$	iç çarpım işareti
$\tau>0$	t degiskenine göre adım
$h>0$	x degiskenine göre adım
$\theta>0$	z degiskenine göre adım
$\delta_{\bar{t}}\Phi_{jk}^{p}=\dfrac{\Phi_{jk}^{p}-\Phi_{jk-1}^{p}}{\tau}$	t’ye göre sol fark
$\delta_{\bar{z}}\Phi_{jk}^{p}=\dfrac{\Phi_{jk}^{p}-\Phi_{jk}^{p-1}}{\theta}$	z’ye göre sol fark
$\delta_{\bar{x}}\Phi_{jk}^{p}=\dfrac{\Phi_{jk}^{p}-\Phi_{j-1k}^{p}}{h}$	x’e göre sol fark

$$\delta_x \Phi_{jk}^p = \frac{\Phi_{j+1k}^p - \Phi_{jk}^p}{h}$$ x'e göre sağ fark

$$\delta_{x\bar{x}} \Phi_{jk}^p = \frac{\Phi_{j+1k}^p - 2\Phi_{jk}^p + \Phi_{j-1k}^p}{h^2}$$ x'e göre 2. mertebeden fark

1. GİRİŞ

Kuazi optiğin durgun (stationary) ve durgun olmayan (non-stationary) denklemi için başlangıç sınır değer problemleri lineer olmayan optikte, çağdaş tekniğin ve fiziğin çeşitli alanlarında ortaya çıkar. Bu nedenle kuazi optik denklemi için sınır değer problemlerinin nümerik çözümü gerek pratik açıdan gerekse teorik açıdan büyük önem taşır [12,15].

Kuazi optiğin durgun denklemi için sınır değer problemleri başka bir deyişle durgun olmayan Schrödinger denklemi için sınır değer problemlerinin nümerik çözümü ilk önce [1,7-11,13,14,17-20] çalışmalarında incelenmiştir. Bu çalışmalarda söz konusu problemlere sonlu farklar yöntemi uygulanmış ve sonlu farklar yönteminin yakınsaklığına ait çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ilk önce [6] çalışmasında incelenmiş ve söz konusu problemlerin genelleştirilmiş çözümünün varlığı ve tekliğine ait hükümler ispatlanmıştır. Bu sonuçlar kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümlerinin incelenmesinde önemli rol oynamıştır. Kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin nümerik çözümü ilk kez [2-5] çalışmalarında incelenmiştir. Kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer problemleri ve onların nümerik çözümü çok az incelendiğinden tez konusu günceldir ve konunun incelenmesi gerek teorik gerekse pratik anlamda önem taşımaktadır.

Tezin içeriğinin materyal ve yöntem bölümü iki alt bölümden, yani 3.1, 3.2 bölümlerinden oluşmaktadır. 3.1. bölümünde 1. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanarak bu probleme ait fark şeması oluşturulmuş , fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edilmiş ve bu kestirim kullanılarak fark şemasının hatası için kestirim ispatlanmıştır. Çalışmanın 3.2. bölümünde ise 2. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanarak bu probleme ait fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edilmiş ve bu kestirim kullanılarak fark şemasının hatası değerlendirilmiştir. 3.2. bölümünde son olarak 1. ve 2. çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin bilgisayar çözümünü yapmak için nümerik çözüm algoritması oluşturulmuştur.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerleyen konularda geçen tanımlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1: $L_2(0,\ell)$ Hilbert Uzayı olup elemanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir.

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,\ell)}=\int_0^\ell u(x)\bar{v}(x)dx,$$
$$\|u\|_{L_2(0,\ell)}=\sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,\ell)}}.$$

Tanım 2.2: $L_2(\Omega)$ Hilbert Uzayı olup elemanları Ω bölgesinde ölçülebilir ve mutlak değerinin karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki gibidir:

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)}=\int_\Omega \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt,$$
$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)}=\sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}.$$

Tanım 2.3: $L_\infty(0,\ell)$ Banach uzayı olup, elemanları $(0,\ell)$ aralığında ölçülebilir ve sınırlı fonksiyonlar uzayıdır. Burada norm aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\|u\|_{L_\infty(o,\ell)}=vria\max|u(x)|,\ {\scriptstyle x\in(0,\ell)}=\text{esssup}$$

Tanım 2.4: $W_2^1(0,\ell)$ Sobolev uzayı olup,elemanlarının kendisi ve onların x’e göre birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,\ell)$ yani Lebesgue uzayından olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^1(0,\ell)}=\int_0^\ell\left[u(x)\bar{v}(x)+\frac{du(x)}{dx}\frac{d\bar{v}(x)}{dx}\right]dx,$$
$$\|u\|_{W_2^1(0,\ell)}=\sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^1(0,\ell)}}.$$

burada $\bar{v}(x)$ fonksiyonu $v(x)$'in kompleks eşleniğidir. $\overset{0}{W}{}_2^1(0,\ell)$ uzayı $W_2^1(0,\ell)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları 0 ve ℓ noktalarında 0'a eşit olur.

Tanım 2.5: $W_2^2(0,\ell)$ Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve x'e göre ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri L2(0,ℓ)'den olan fonksiyonlar uzayıdır. Aynı zamanda Hilbert uzayıdır.Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^2(0,\ell)}=\int_0^\ell\left[u(x)\bar{v}(x)+\frac{du(x)}{dx}\frac{d\bar{v}(x)}{dx}+\frac{d^2u(x)}{dx^2}\frac{d^2\bar{v}(x)}{dx^2}\right]dx,$$

$$\|u\|_{W_2^2(0,\ell)}=\sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^2(0,\ell)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^2(0,\ell)$ uzayı $W_2^2(0,\ell)$'in alt uzayı olup elemanlarının kendisi 0 ve ℓ noktalarında 0'a eşit olur.

Tanım 2.6: $W_2^3(0,\ell)$ Hilbert uzayı olup,aynı zamanda Sobolev uzayıdır. Elemanları $(0,\ell)$ aralığında tanımlanan $u=u(x)$ fonksiyonlarıdır ki;

$u,\ \frac{du}{dx},\ \frac{d^2u}{dx^2},\ \frac{d^3u}{dx^3}\in L_2(0,\ell)$'dir. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle u,v\rangle_{W_2^3(0,\ell)}=\int_0^\ell\sum_{j=0}^{3}\frac{d^ju(x)}{dx^j}\frac{d^j\bar{v}(x)}{dx^j}dx,$$

$$\|u\|_{W_2^3(0,\ell)}=\sqrt{\langle u,u\rangle_{W_2^3(0,\ell)}}.$$

Tanım 2.7: $W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayı Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların t'ye göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$ Lebesgue uzayından olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi,v\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}=\int_\Omega\left[\psi(x,t)\bar{v}(x,t)+\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial\bar{v}(x,t)}{\partial t}\right]dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)}=\sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.8: $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı Sobolev uzayı olup, elemanlarının kendisi ve onların x'e göre birinci mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevleri $L_2(\Omega)$'den olan fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzay aynı zamanda Hilbert uzayıdır.Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, v \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\bar{v}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \bar{v}(x,t)}{\partial x} \right] dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{1,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{1,0}(\Omega)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)$ uzayı $W_2^{1,0}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Tanım 2.9: $W_2^{2,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olan Sobolev uzayıdır. Elemanları Ω bölgesinde tanımlanan öyle $\psi(x,t)$ fonksiyonlarıdır ki; $\psi,\ \frac{\partial \psi}{\partial x},\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2},\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \in L_2(\Omega)$ özelliklerini sağlar. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x}\frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \bar{\phi}(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}\frac{\partial \bar{\phi}(x,t)}{\partial t} \right] dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,1}(\Omega)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup, elemanları Ω dikdörtgeninin yan taraflarında sıfıra eşittir.

Tanım 2.10: $W_2^{2,0,0}(\Omega)$ uzayı elemanlarının ve onların x değişkenine göre ikinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$'dan olan fonksiyonların Sobolev uzayı olup aynı zamanda Hilbert uzayıdır.Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \Phi \rangle_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi\Phi + \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial x^2} \right] dxdtdz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{2,0,0}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{2,0,0}(\Omega)}} < +\infty.$$

Tanım 2.11: $W_2^{0,1,1}(\Omega)$ uzayı elemanlarının ve onların t ve z değişkenlerine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$'dan olan fonksiyonların Sobolev uzayı olup Hilbert uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır:

$$\langle \psi, \Phi \rangle_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left[\psi\Phi + \frac{\partial \psi}{\partial t}\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial z} \right] dxdtdz,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}} < +\infty.$$

$$W_2^{2,1,1}(\Omega) = W_2^{2,0,0}(\Omega) \cap W_2^{0,1,1}(\Omega) \text{dır.}$$

$\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayı $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayının alt uzayı olup elemanları $(0,\ell)$ aralığının uçlarında sıfıra dönüşür.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Kuazi Optiğin Durgun Olmayan Denklemi İçin 1.Çeşit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü

Bu bölümde Kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için 1.çeşit başlangıç sınır değer probleminin fark şeması oluşturulacak, fark şeması için kararlılık kestirimi elde edilecek ve fark şemasının hatası için kestirim ispatlanacaktır. Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır.

3.1.1 Başlangıç Sınır Değer Probleminin Formülize Edilmesi ve Fark Şeması

Bu alt bölümde ele alınan kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için 1.çeşit başlangıç sınır değer problemini tanımlayalım.

$\ell > 0, \quad T > 0, \quad L > 0$ verilen sayılar, $0 \le x \le \ell,\ 0 \le t \le T,\ 0 \le z \le L$, $\Omega_{tz} = (0,\ell)\times(0,t)\times(0,z),\ \ \Omega = \Omega_{TL},\ \Omega_L = (0,\ell)\times(0,L),\ \Omega_T = (0,\ell)\times(0,T)$

olsun.

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + ia_0\frac{\partial \psi}{\partial z} - a_1\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a(x)\psi + v_0(x)\psi + iv_1(x)\psi = f(x,t,z), \quad (x,t,z)\in\Omega \qquad (3.1.1.1)$$

denkleminin

$$\psi(x,0,z) = \varphi_0(x,z), \quad (x,z)\in\Omega_L\ , \qquad (3.1.1.2)$$

$$\psi(x,t,0) = \varphi_1(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_T\ , \qquad (3.1.1.3)$$

başlangıç ve

$$\psi(0,t,z) = \psi(\ell,t,z) = 0, \qquad (t,z)\in Q \qquad (3.1.1.4)$$

sınır şartları altında çözümünün bulunması problemini göz önüne alalım. Burada $a_0 > 0,\ a_1 > 0$ verilen sayılar, $a(x),\ v_0(x),\ v_1(x)$ ölçülebilir reel değerli fonksiyonlar olup;

$$0 \le a(x) \le \mu_0 \quad , \forall x \in \overset{0}{(0,\ell)},\ \mu_0 = sabit > 0 \qquad (3.1.1.5)$$

$$\left|v_m(x)\right| \le b_m \ , m=0,1 \ , \ \forall x \in \overset{0}{(0,\ell)} \ , \ b_0, \ b_1 = sabit > 0 \tag{3.1.1.6}$$

şartlarını sağlar. $\varphi_0(x,z), \varphi_1(x,t), f(x,t,z)$ verilen kompleks değerli fonksiyonlar olup;

$$\varphi_0 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L), \quad \varphi_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T) \ , \tag{3.1.1.7}$$

$$f \in W_2^{0,1,1}(\Omega) \tag{3.1.1.8}$$

şartlarını sağlar.

Tanım 3.1.1.1 : (3.1.1.1) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olarak $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan (3.1.1.1) denklemini $\forall \overset{0}{(x,t,z)} \in \Omega$ için (3.1.1.2) , (3.1.1.3) başlangıç değer şartlarını sırası ile $\forall \overset{0}{(x,z)} \in \Omega_L$, $\forall \overset{0}{(x,t)} \in \Omega_T$ için ve (3.1.1.4) sınır değer şartlarını $\forall \overset{0}{(t,z)} \in Q$ için sağlayan $\psi = \psi(x,t,z)$ fonksiyonu anlaşılır.

(3.1.1.1) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer problemi daha önce $[6]$ çalışmasında incelenmiş ve bu çalışmada gösterilmiştir ki (3.1.1.1) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}$ uzayına ait olan Tanım 3.1.1.1 anlamında tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1,1}(\Omega)} \le c_0\left(\|\varphi_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_L)} + \left(\|\varphi_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,1}(\Omega_T)} + \|f\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{0,1,1}(\Omega)}\right)\right). \tag{3.1.1.9}$$

Şimdi (3.1.1.1) – (3.1.1.4) problemine karşılık gelen fark şemasını oluşturmaya çalışalım. Bu amaçla ilk önce $\overline{\Omega} = [0,\ell] \times [0,T] \times [0,L]$ bölgesini ağa dönüştürelim.

Farz edelim ki h ile x değişkenine göre adım, τ ile t değişkenine göre adım, θ ile z değişkenine göre adım gösterilmiş olsun.

Bu taktirde aşağıdaki biçimde noktalardan oluşan ağı oluşturabiliriz:

$$\{(x_j, t_k, z_p)\},\ x_j = jh - \frac{h}{2},\ \ j = \overline{1, M-1},\ \ x_0 = x_1 - \frac{h}{2} = 0,\ x_M = x_{M-1+\frac{h}{2}} = \ell$$

$$t_k = k\tau,\ \ k = \overline{0, N},\ \ z_p = p\theta\ ,\ p = \overline{0, Z}\ ,\ h = \frac{\ell}{M-1}\ \ ,\ \ \tau = \frac{T}{N},\ \theta = \frac{L}{Z}$$

Burada $M > 0$, $N > 0$, $Z > 0$ verilen tamsayılar, $\Phi_{jk}^p = \Phi(x_j, t_k, z_p)$ fonksiyonu, $\{(x_j, t_k, z_p)\}$ ağında tanımlanan ağ fonksiyonu olup

$$\delta_{\bar{t}}\Phi_{jk}^p = \frac{\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk-1}^p}{\tau}\ ,\ \delta_{\bar{z}}\Phi_{jk}^p = \frac{\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk}^{p-1}}{\theta}\ ,$$

$$\delta_{\bar{x}}\Phi_{jk}^p = \frac{\Phi_{jk}^p - \Phi_{j-1k}^p}{h}\ ,\ \delta_{\bar{x}}\Phi_{1k}^p = \frac{2(\Phi_{1k}^p - \Phi_{0k}^p)}{h}\ ,$$

$$\delta_x\Phi_{jk}^p = \frac{\Phi_{j+1k}^p - \Phi_{jk}^p}{h}\ ,\ \delta_x\Phi_{M-1k}^p = \frac{2(\Phi_{Mk}^p - \Phi_{M-1k}^p)}{h}\ ,$$

$$\delta_{x\bar{x}}\Phi_{jk}^p = \frac{\Phi_{j+1k}^p - 2\Phi_{jk}^p + \Phi_{j-1k}^p}{h^2} = \frac{\delta_x\Phi_{jk}^p - \delta_{\bar{x}}\Phi_{jk}^p}{h}\ ,$$

gösterimlerini yapalım.

Bu gösterimleri kullanarak (3.1.1.1) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer problemine karşılık gelen fark şemasını aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$i\delta_{\bar{t}}\Phi_{jk}^p + ia_0\delta_{\bar{z}}\Phi_{jk}^p - a_1\delta_{x\bar{x}}\Phi_{jk}^p + a^j\Phi_{jk}^p + v_{0j}\Phi_{jk}^p + iv_{1j}\Phi_{jk}^p = f_{jk}^p\ , \qquad (3.1.1.10)$$
$$j = \overline{1, M-1},\ \ k = \overline{1, N}\ \ ,\ p = \overline{1, Z}$$

$$\Phi_{j0}^p = \varphi_{0j}^p\ ,\ \ j = \overline{0, M}\ ,\ p = \overline{1, Z} \qquad (3.1.1.11)$$

$$\Phi_{jk}^0 = \varphi_{1j}^k\ ,\ \ j = \overline{0, M}\ ,\ k = \overline{1, N} \qquad (3.1.1.12)$$

$$\Phi_{0k}^p = \Phi_{Mk}^p = 0,\ \ k = \overline{1, N}\ ,\ \ p = \overline{1, Z}. \qquad (3.1.1.13)$$

Burada a^j, v_{0j}, v_{1j}, φ_{0j}^p, φ_{1j}^k, f_{jk}^p fonksiyonları ağ fonksiyonları olup,

$$a^{j}=\frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}a\left(x\right)dx\ ,\ \ j=\overline{1,M-1,}\ ,\tag{3.1.1.14}$$

$$v_{mj}=\frac{1}{h}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}v_{m}(x)dx\ ,\ \ j=\overline{1,M-1}\ ,\ \ m=0,1,\ldots\tag{3.1.1.15}$$

$$\varphi_{0j}^{p}=\frac{1}{h\theta}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\varphi_{0}(x,z)dxdz\ ,\ \ j=\overline{1,M-1}\ ,\ \ p=\overline{1,Z}\ ,\ \varphi_{00}^{p}=\varphi_{0M}^{p}=0\tag{3.1.1.16}$$

$$\varphi_{1j}^{k}=\frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}\varphi_{1}(x,t)dxdt\ ,\ \ j=\overline{1,M-1}\ ,\ \ k=\overline{1,N}\ ,\ \varphi_{10}^{k}=\varphi_{1M}^{k}=0\ ,\tag{3.1.1.17}$$

$$f_{jk}^{\,p}=\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-\frac{h}{2}}^{x_j+\frac{h}{2}}f\left(x,t,z\right)dxdtdz\ ,\ \ j=\overline{1,M-1}\ ,\ \ p=\overline{1,Z}\ ,\ \ k=\overline{1,N}\tag{3.1.1.18}$$

formülleriyle tanımlanırlar.

3.1.2. Fark Şemasının Kararlılık Kestirimi

Bu alt bölümde (3.1.1.10) – (3.1.1.13) fark şemasının çözümü için kestirim elde etmeye çalışacağız ki bu kestirime de kararlılık kestirimi diyeceğiz.

Teorem 3.1.2.1 : $a(x), v_0(x), v_1(x), \varphi_0(x,z), \varphi_1(x,t), f\left(x,t,z\right)$ fonksiyonları (3.1.1.5) – (3.1.1.8) şartını sağlasın. Bu taktirde (3.1.1.10) – (3.1.1.13) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\begin{gathered}\theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}^{p}\right|^{2}+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}^{q}\right|^{2}\leq\\ c_1\left(\theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{0j}^{p}\right|^{2}+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{1j}^{k}\right|^{2}+\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}^{\,p}\right|^{2}\right),\\ \forall m\in\left\{1,2,\cdots,N\right\}\ ,\ \ \forall q\in\left\{1,2,\cdots,Z\right\}.\end{gathered}\tag{3.1.2.1}$$

İspat : (3.1.1.10) – (3.1.1.13) fark şeması $z = z_p$, $t = t_k$ için $\{(x_j, t_k, z_p)\}$ ağında tanımlanan, $\eta_{0k}^p = \eta_{Mk}^p = 0$, $k = \overline{1,N}$, $p = \overline{1,Z}$, şartlarını sağlayan herhangi η_{jk}^p fonksiyonu için aşağıdaki toplam özdeşliğine denktir:

$$\begin{aligned} & h\sum_{j=1}^{M-1}\left(i\delta_{\bar t}\Phi_{jk}^p\bar\eta_{jk}^p + ia_0\delta_{\bar z}\Phi_{jk}^p\bar\eta_{jk}^p\right) + h\sum_{j=1}^{M-1}a_1\delta_{\bar x}\Phi_{jk}^p\delta_{\bar x}\bar\eta_{jk}^p + \\ & + h\sum_{j=1}^{M-1}\left(a^j\Phi_{jk}^p + v_{oj}\Phi_{jk}^p + iv_{1j}\Phi_{jk}^p\right)\bar\eta_{jk}^p = h\sum_{j=1}^{M-1} f_{jk}^p\bar\eta_{jk}^p,\ k = \overline{1,N},\ p = \overline{1,Z}. \end{aligned} \tag{3.1.2.2}$$

Bu özdeşlikte η_{jk}^p fonksiyonunun yerine $\theta\tau\Phi_{jk}^p$ ağ fonksiyonunu alıp elde edilen eşitlikten onun kompleks eşleneğini çıkarırsak sonuçta aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \theta h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\Phi_{jk}^p\right|^2 - \left|\Phi_{jk-1}^p\right|^2 + \left|\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk-1}^p\right|^2\right) + a_0\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\left(\left|\Phi_{jk}^p\right|^2 - \left|\Phi_{jk}^{p-1}\right|^2 + \left|\Phi_{jk}^p - \Phi_{jk}^{p-1}\right|^2\right) \\ & + 2\theta\tau h\sum_{j=1}^{M-1}v_{1j}\left|\Phi_{jk}^p\right|^2 = 2\theta\tau h\sum_{j=1}^{M-1}\mathrm{I}_m\left(f_{jk}^p\bar\Phi_{jk}^p\right),\ k = \overline{1,N},\ p = \overline{1,Z}. \end{aligned}$$

Bu eşitlikleri k üzerinden $k = 1$'den $k = m \le N$ *ve* p üzerinden $p = 1$ *ve* $p = q \le Z$ kadar toplayıp (3.1.1.11) – (3.1.1.12) şartlarını ve $v_{1j} \ge 0,\ j = \overline{1,M-1}$ şartlarını kullanırsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \theta h\sum_{p=1}^{q}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}^p\right| + a_0\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}^q\right|^2 \le \theta h\sum_{p=1}^{q}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{0j}^p\right|^2 + a_0\tau h\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{1j}^q\right|^2 + \\ & + 2\theta\tau h\sum_{p=1}^{q}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}^p\right|\left|\Phi_{jk}^p\right|,\ m = \overline{1,N},\ q = \overline{1,Z}. \end{aligned} \tag{3.1.2.3}$$

Bu eşitsizlikten $q = Z$ için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}^p\right|^2 \le \theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{0j}^p\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{1j}^k\right|^2 + \\ & + 2\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}^p\right|\left|\Phi_{jk}^p\right|,\ m = \overline{1,N}. \end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafında yer alan 3. toplamın m. terimini ayırıp $\varepsilon - Cauchy$ eşitsizliğini uygulayalım. Bu taktirde $\varepsilon = 2\tau$ seçersek aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & \theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}^p\right|^2 \le 2\theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{0j}^p\right|^2 + 2\tau h a_0\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{1j}^k\right|^2 + \\ & + 4\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jm}^p\right|^2 + 4\theta\tau h\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}^p\right|\left|\Phi_{jk}^p\right|,\ \forall m \in \{1, 2, \cdots, N\}. \end{aligned}$$

Bu eşitsizliğin sağ tarafındaki sonuncu toplamda Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliğini uygulayarak Gronwall lemmasını kullanırsak herhangi $m \in \{1, 2, \cdots, N\}$ için

$$\theta h \sum_{p=1}^{Z} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\Phi_{jm}^{p}\right| \le c_2 \left(\theta h \sum_{p=1}^{Z} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\phi_{0j}^{p}\right|^2 + \tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\varphi_{1j}^{k}\right|^2 + \theta \tau h \sum_{p=1}^{Z} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| f_{jk}^{p}\right|^2 + \tau \theta h \sum_{p=1}^{Z} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| f_{jk}^{p}\right|^2 \right). \tag{3.1.2.4}$$

kestirimini elde ederiz.

Bu kestirimin elde edilmesine denk olarak (3.1.2.3) ‘den aşağıdaki kestirimi elde ederiz

$$\theta h \sum_{p=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\Phi_{jk}^{p}\right|^2 \le c_3 \left(\theta h \sum_{p=1}^{Z} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\varphi_{0j}^{p}\right|^2 + \tau h \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left|\varphi_{1j}^{k}\right|^2 + +\theta \tau h \sum_{p=1}^{Z} \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=1}^{M-1} \left| f_{jk}^{p}\right|^2 \right), \quad \forall q \in \{1, 2, \cdots, Z\}. \tag{3.1.2.5}$$

(3.1.2.4) ve (3.1.2.5) ‘i toplarsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu ispatlamış oluruz.

3.1.3 Fark Şemasının Hatası İçin Kestirim

Bu alt bölümde (3.1.1.10) – (3.1.1.13) fark şemasının hatasını değerlendireceğiz. Bu amaçla aşağıdaki sistemi ele alalım:

$$\begin{gathered} i\delta_{\bar{t}} W_{jk}^{p} + i a_0 \delta_{\bar{z}} W_{jk}^{p} - a_1 \delta_{x\bar{x}} W_{jk}^{p} + a^{j} W_{jk}^{p} + v_{0j} W_{jk}^{p} + i v_1 W_{jk}^{p} = F_{jk}^{p}, \\ j = \overline{1, M-1}, \; k = \overline{1, N}, \; p = \overline{1, Z}. \end{gathered} \tag{3.1.3.1}$$

$$W_{j0}^{p} = 0, \; j = \overline{0, M}, \; p = \overline{1, Z} \tag{3.1.3.2}$$

$$W_{jk}^{0} = 0, \; j = \overline{0, M}, k = \overline{1, N} \tag{3.1.3.3}$$

$$W_{0k}^{p} = W_{Mk}^{p} = 0, \; k = \overline{0, N}, \; p = \overline{1, Z}. \tag{3.1.3.4}$$

Burada F_{jk}^{p} ağ fonksiyonu olup;

$$F_{jk}^{p} = \frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\Bigg(i\frac{\partial\psi}{\partial t} + ia_0\frac{\partial\psi}{\partial z} - a_1\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + a(x)\psi +$$

$$+ v_0(x)\psi + iv_1(x)\psi \Bigg) dxdtdz - i\delta_{\bar{t}}\psi_{jk}^{p} - ia_0\delta_{\bar{z}}\psi_{jk}^{p} + \tag{3.1.3.5}$$

$$+ a_1\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}^{p} - a^j\psi_{jk}^{p} - v_{0j}\psi_{jk}^{p} - iv_{1j}\psi_{jk}^{p} \quad , j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \, p = \overline{1, Z}$$

formülü ile hesaplanır. Görüldüğü üzere W_{jk}^{p} ağ fonksiyonu (3.1.3.1) – (3.1.3.4) probleminin çözümü olup aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$W_{jk}^{p} = \Phi_{jk}^{p} - \psi_{jk}^{p}. \tag{3.1.3.6}$$

Burada Φ_{jk}^{p} ağ fonksiyonu (3.1.1.10) – (3.1.1.13) fark şemasının çözümü, ψ_{jk}^{p} ise (3.1.1.1) – (3.1.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün Steklov anlamında ortalama değeri olup aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$\begin{aligned}
&F_{jk}^{p} = \frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x,t,z) dxdtdz, \; j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \, p = \overline{1, Z}, \\
&\Phi_{j0}^{p} = \varphi_{0j}^{p}, \; j = \overline{0, M}, \; p = \overline{1, Z}, \\
&\Phi_{jk}^{0} = \varphi_{1j}^{k}, \; j = \overline{0, M}, \; k = \overline{1, N}, \\
&\Phi_{0k}^{p} = \Phi_{Mk}^{p} = 0, \; k = \overline{1, N}, \, p = \overline{1, Z}.
\end{aligned} \tag{3.1.3.7}$$

Teorem 3.1.3.1 : Farz edelim ki Teorem 3.1.2.1'in şartları sağlansın. Bu taktirde herhangi $m \in \{1,2,\cdots,N\}$ ve herhangi $q \in \{1,2,\cdots,Z\}$ için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\begin{aligned}
&\theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jm}^{p}\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jk}^{q}\right|^2 \le c_4\beta_{\tau h}^{\theta} \;, \\
&\beta_{\tau h}^{\theta} > 0, \; \beta_{\tau h}^{\theta} \leftarrow 0, \; \theta \to 0, \; \tau \to 0, \; h \to 0.
\end{aligned} \tag{3.1.3.8}$$

İspat : (3.1.2.1) kestiriminin elde edilmesine denk olarak hareket edersek (3.1.3.1) – (3.1.3.4) sisteminin çözümü için aşağıdaki kestirimi elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}
&\theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jm}^{p}\right|^2 + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jk}^{q}\right|^2 \le c_5\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p}\right|^2. \\
&\forall m \in \{1,2,\cdots,N\} \;, \quad \forall q \in \{1,2,\cdots,Z\}.
\end{aligned} \tag{3.1.3.9}$$

Burada $c_5 > 0$ sabiti $\tau, h \ ve \ \theta$'dan bağımsızdır. F_{jk}^{p} fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazalım:

$$F_{jk}^{p} = F_{jk}^{p1} + F_{jk}^{p2} + F_{jk}^{p3} + F_{jk}^{p4} + F_{jk}^{p5} + F_{jk}^{p6} \ , \ j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, Z} \tag{3.1.3.10}$$

Burada F_{jk}^{ps} , $s = \overline{1,6}$ fonksiyonları aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$F_{jk}^{p1} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdtdz - i\delta_{\bar{t}} \psi_{jk}^{p} , \ j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, Z} \ , \tag{3.1.3.11}$$

$$F_{jk}^{p2} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} ia_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} dxdtdz - ia_0 \delta_{\bar{z}} \psi_{jk}^{p} , \ j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, Z} \ , \tag{3.1.3.12}$$

$$F_{jk}^{p3} = -\frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} a_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dxdtdz - a_1 \delta_{x\bar{x}} \psi_{jk}^{p} , \ j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, Z} \ , \tag{3.1.3.13}$$

$$F_{jk}^{p4} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} a(x) \psi dxdtdz - a^{j} \psi_{jk}^{p} , \ j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, Z} \ , \tag{3.1.3.14}$$

$$F_{jk}^{p5} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} v_0(x) \psi dxdtdz - v_{0j} \psi_{jk}^{p} , \ j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, Z} \ , \tag{3.1.3.15}$$

$$F_{jk}^{p6} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} iv_1(x) dxdtdz - iv_{1j} \psi_{jk}^{p} , \ j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, Z} \ . \tag{3.1.3.16}$$

İlk önce F_{jk}^{p1}, $j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, \ p = \overline{1, Z}$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (3.1.3.11) ve (3.1.3.7) formülünü kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p1} = \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdtdz - i\delta_{\bar{t}} \psi_{jk}^{p}$$

$$= \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdtdz - i \frac{\psi_{jk}^{p} - \psi_{jk-1}^{p}}{\tau}$$

$$= \frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} i \frac{\partial \psi}{\partial t} dxdtdz - i \frac{1}{\tau} \left[\frac{1}{\theta\tau h} \int_{z_{p-1}}^{z_p} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \int_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \psi(x,t,z) dxdtdz - \right.$$

$$\left.\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-2}}^{t_{k-1}}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi(x,t,z)dxdtdz\right] = \frac{i}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdtdz -$$

$$\frac{i}{\theta\tau^2 h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t-\tau}^{t}\frac{\partial\psi(x,\varsigma,z)}{\partial\varsigma}d\varsigma = \frac{i}{\theta\tau^2 h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial t}dxdtdz -$$

$$\frac{i}{\theta\tau^2 h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\frac{\partial\psi(x,t+\gamma,z)}{\partial\gamma}d\gamma \tag{3.1.3.17}$$

$$= \frac{i}{\theta\tau^2 h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\int_{-\tau}^{0}\left[\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\gamma,z)}{\partial t}\right]d\gamma\right)dxdtdz$$

$$j=\overline{1,M-1}, k=\overline{2,N}, p=\overline{1,Z}.$$

Burada Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \frac{1}{\theta\tau^2 h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\left|\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\gamma,z)}{\partial t}\right|^2 d\gamma dxdtdz, \tag{3.1.3.18}$$
$$j=\overline{1,M-1}, k=\overline{2,N}, p=\overline{1,Z}.$$

Şimdi F_{j1}^{p1}'i değerlendirelim. Gerçekten $k=1$ için (3.1.3.11) ve (3.1.3.7) formülünü kullanırsak aşağıdaki formülü kolaylıkla elde edebiliriz:

$$F_{j1}^{p1} = \frac{i}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial t}dxdtdz - \frac{i}{\theta\tau^2 h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\psi(x,\gamma,z)}{\partial\gamma}d\gamma dxdtdz$$
$$j=\overline{1,M-1},\ p=\overline{1,Z}.$$

Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|F_{j1}^{p1}\right|^2 \le \frac{4}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2 dxdtdz\ ,\ j=\overline{1,M-1}\ ,\ p=\overline{1,Z} \tag{3.1.3.19}$$

(3.1.3.18) , (3.1.3.19) eşitsizliklerinin elde edilmesine denk olarak (3.1.3.12) , (3.1.3.7) formüllerinin yardımı ile aşağıdaki eşitsizlikleri elde edebiliriz:

$$\left|F_{jk}^{p2}\right|^2 \le \frac{a_0^2}{\theta^2 \tau h} \int\limits_{z_{p-1}}^{z_p} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int\limits_{-\theta}^{0} \left| \frac{\partial \psi(x,t,z)}{\partial z} - \frac{\partial \psi(x,t,\eta + z)}{\partial z} \right|^2 d\eta dx dt dz, \tag{3.1.3.20}$$

$$j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N}, p = \overline{2, Z}$$

$$\left|F_{jk}^{12}\right|^2 \le \frac{4}{\theta \tau h} \int\limits_{z_{p-1}}^{z_p} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \left| \frac{\partial \psi}{\partial z} \right|^2 dx dt dz \ , j = \overline{1, M-1}, k = \overline{1, N} \ . \tag{3.1.3.21}$$

F_{jk}^{p1} ağ fonksiyonu için elde ettiğimiz formüle eşdeğer olan işlemler yaparsak kolaylıkla F_{jk}^{p3}, $j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$ ağ fonksiyonu için aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$F_{jk}^{p3} = \frac{a_1}{\theta \tau h} \int\limits_{z_{p-1}}^{z_p} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} dx dt dz -$$

$$- \frac{a_1}{\theta \tau h^3} \left\{ \int\limits_{z_{p-1}}^{z_p} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int\limits_{x}^{x+h} \int\limits_{\xi - h}^{\xi} \frac{\partial^2 \psi(\beta, t, z)}{\partial \beta^2} d\beta d\xi dx dt dz \right\}.$$

Buradan da kolaylıkla 1. ve 2.terimi birleştirerek aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$F_{jk}^{p3} = \frac{a_1}{\theta \tau h^3} \int\limits_{z_{p-1}}^{z_p} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int\limits_{0}^{h} \int\limits_{-h}^{0} \left(\frac{\partial^2 \psi(x,t,z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x + \xi + \beta, t, z)}{\partial x^2} \right) d\beta d\xi dx dt dz,$$

$$j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}.$$

Burada Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz.

$$\left|F_{jk}^{p3}\right|^2 \le \frac{a_1^2}{\theta \tau h^3} \int\limits_{z_{p-1}}^{z_p} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \int\limits_{x_j - h/2}^{x_j + h/2} \int\limits_{0}^{h} \int\limits_{-h}^{0} \left| \frac{\partial^2 \psi(x,t,z)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi(x + \xi + \beta, t, z)}{\partial x^2} \right| d\beta d\xi dx dt dz \tag{3.1.3.22}$$

$$j = \overline{2, M-2}, k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}.$$

Şimdi F_{1k}^{p3}, $k = \overline{1, N}, p = \overline{1, Z}$ ağ fonksiyonunda (3.1.3.13) formülünü kullanarak $j = 1$ olduğunda aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{1k}^{p3}=\frac{a_1}{\theta\tau h}\int\limits_{z_{p-1}}^{z_p}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdtdz-\frac{a_1}{\theta\tau h^3}\left\{\int\limits_{z_{p-1}}^{z_p}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\int\limits_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\psi(x,t,z)dx-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\psi(x,t,z)dx-2\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\psi(x,t,z)dx+2\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\psi\left(x_1-h/2,t,z\right)dx\right)dtdz\right\}$$

$$=\frac{a_1}{\theta\tau h^3}\int\limits_{z_{p-1}}^{z_p}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int\limits_{x}^{x+h}\int\limits_{\xi}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi(\beta,t,z)}{\partial\beta^2}d\beta d\xi dxdtdz-$$

$$-\frac{2a_1}{\theta\tau h^3}\int\limits_{z_{p-1}}^{z_p}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int\limits_{x_1-h/2}^{x}\int\limits_{x_1-h/2}^{\xi}\frac{\partial^2\psi(\beta,t,z)}{\partial\beta^2}d\beta d\xi dxdtdz.$$

Buradan da Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{1k}^{p3}\right|^2\le\frac{16a_1^2}{\theta\tau h}\int\limits_{z_{p-1}}^{z_p}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2dxdtdz,\ k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}. \qquad (3.1.3.23)$$

Bu eşitsizliğin elde edilmesine eşdeğer olarak (3.1.3.13) ‘ü kullanarak F_{M-1k}^{p3}, $k=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,Z}$ ağ fonksiyonu için aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$\left|F_{M-1k}^{p3}\right|\le\frac{16a_1^2}{\theta\tau h}\int\limits_{z_{p-1}}^{z_p}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_{M-1}-h/2}^{x_{M-1}+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2dxdtdz,\ k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}. \qquad (3.1.3.24)$$

Şimdi F_{jk}^{p4}, $j=\overline{1,M-1}$, $k=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,Z}$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (3.1.3.14) formülünü kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p4}=\frac{1}{\theta\tau h}\int\limits_{z_{p-1}}^{z_p}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}a(x)\left(\psi(x,t,z)-\psi_{jk}^p\right)dxdtdz+$$

$$+\frac{1}{\theta\tau h}\int\limits_{z_{p-1}}^{z_p}\int\limits_{t_{k-1}}^{t_k}\int\limits_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(a(x)-a^j\right)\psi_{jk}^p dxdtdz,$$

$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}.$$

(3.1.3.14) formülüne göre bu eşitliğin sağ tarafındaki 2.terim sıfıra eşit oluyor. Bu nedenle aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p4} = \frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)\left(\psi-\psi_{jk}^{p}\right)dxdtdz\ ,$$
$$j=\overline{1,M-1}\ ,\ k=\overline{1,N}\ ,\ p=\overline{1,Z}. \qquad (3.1.3.25)$$

Şimdi $\psi-\psi_{jk}^{p}$ farkına bakalım. (3.1.3.7) formülünden yararlanarak kolaylıkla aşağıdaki eşitliği yazabiliriz.

$$\psi(x,t,z)-\psi_{jk}^{p} = -\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\psi(x,t,z)-\psi(\xi,\gamma,\eta)\right)d\xi d\gamma d\eta$$
$$= \frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\int_{\xi}^{x}\frac{\partial\psi(\beta,t,z)}{\partial\beta}+\int_{\gamma}^{t}\frac{\partial\psi(\xi,\gamma,z)}{\partial\alpha}d\alpha+\right. \qquad (3.1.3.26)$$
$$\left.+\int_{\eta}^{z}\frac{\partial\psi(\xi,\gamma,x)}{\partial x}dx\right)d\xi d\gamma d\eta\ .$$

Buradan da Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliğinin yardımı ile aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|\psi(x,t,z)-\psi_{jk}^{p}\right| \le -\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{\theta\tau}}\left(\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\beta,t,z)}{\partial\beta}\right|^2 d\xi d\gamma d\eta\right)^{1/2}+$$
$$+\frac{\sqrt{\tau}}{\sqrt{\theta h}}\left(\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\alpha,z)}{\partial\alpha}\right|^2 d\alpha d\xi d\eta\right)^{1/2}+ \qquad (3.1.3.27)$$
$$+\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\tau h}}\left(\int_{t_{t-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\gamma,\chi)}{\partial\chi}\right|^2 d\chi d\xi d\gamma\right)^{1/2}.$$

(3.1.1.5) şartını kullanarak (3.1.3.25) ‘den aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$F_{jk}^{p4} \le \frac{\mu_0}{\sqrt{\theta\tau h}}\left(\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\psi-\psi_{jk}^{p}\right|^2 dxdtdz\right)^{1/2},\ j=\overline{1,M-1},\ \ k=\overline{1,N},\ \ p=\overline{1,Z}\ .$$

Bu eşitsizlikten (3.1.3.27)'yi dikkate alarak aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^{p4}\right|^2 \le \frac{3\mu_0^2 h}{\theta\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\beta,t,z)}{\partial\beta}\right|^2 d\beta dtdz +$$

$$+\frac{3\mu_0^2\tau}{\theta h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\alpha,z)}{\partial\alpha}\right|^2 d\alpha d\xi dz + \qquad (3.1.3.28)$$

$$+\frac{3\mu_0^2\theta}{h\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\gamma,\chi)}{\partial\chi}\right|^2 d\chi d\xi d\gamma,$$

$$j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}.$$

F_{jk}^{p5} , $j=\overline{1,M-1}$, $k=\overline{1,N}$, $p=\overline{1,Z}$ ağ fonksiyonu için olan (3.1.3.15) formülünü ve (3.1.1.15) formülünü kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{jk}^{p5} = \frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(x)\left(\psi-\psi_{jk}^p\right)dxdtdz.$$

Buradan $v_0(x)$ fonksiyonu için olan şartı kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|F_{jk}^{p5}\right| \le \frac{b_0}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\psi-\psi_{jk}^p\right|dxdtdz,\ j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}.$$

Buradan (3.1.3.27) eşitsizliğini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|F_{jk}^{p5}\right|^2 \le \frac{3b_0^2 h}{\theta\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\beta,t,z)}{\partial\beta}\right|^2 d\beta dtdz +$$

$$+\frac{3b_0^2\tau}{\theta h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\alpha,z)}{\partial\alpha}\right|^2 d\xi d\alpha dz + \qquad (3.1.3.29)$$

$$+\frac{3b_0^2\theta}{h\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\gamma,\chi)}{\partial\chi}\right|^2 d\xi d\gamma d\chi,$$

$$j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}.$$

Bu eşitsizliğin elde edilmesine eşdeğer olarak (3.1.3.16) ve (3.1.1.15) formüllerini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|F_{jk}^{p6}\right|^2 \le \frac{3b_1^2 h}{\theta\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\beta,t,z)}{\partial\beta}\right|^2 d\beta dtdz +$$

$$+\frac{3b_1^2\tau}{\theta h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\alpha,z)}{\partial\alpha}\right|^2 d\xi d\alpha dz + \tag{3.1.3.30}$$

$$+\frac{3b_1^2\theta}{h\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\gamma,\chi)}{\partial\chi}\right|^2 d\xi d\gamma d\chi,$$

$$j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}.$$

Fubini teoremini kullanarak (3.1.3.18)'den aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz.

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p}\right|^2 \le \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\gamma,z)}{\partial t}\right|^2 dxdtdz\right)d\gamma. \tag{3.1.3.31}$$

Herhangi $\varepsilon>0$ alalım. $L_2(\Omega)$'den olan fonksiyonların orta kuadratik sürekliliğini dikkate alarak,

$$\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\gamma,z)}{\partial t}\right|^2 dxdtdz<\varepsilon,\ |\gamma|\le\tau<\delta$$

olacak biçimde $\delta>0$ sayısı bulunur. Bu nedenle $|\gamma|\le\tau<\delta$ şartını sağlayan τ'lar için (3.1.3.31) 'den yararlanarak,

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=2}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \omega_\tau^0 \tag{3.1.3.32}$$

bağıntısını elde ederiz. Burada $\omega_\tau^0>0$ *ve* $\tau\to 0$ için $\omega_\tau^0\to 0$ dır. (3.1.3.19) 'dan aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le 4\int_0^\tau\left\|\frac{\partial\psi(\cdot,\gamma,\cdot)}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega_L)}^2 d\gamma. \tag{3.1.3.33}$$

Burada integralin mutlak sürekliliğini kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı kolaylıkla yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \tilde{\omega}_\tau^0. \tag{3.1.3.34}$$

Burada $\tilde{\omega}_\tau^0>0$ *ve* $\tau\to 0$ için $\tilde{\omega}_\tau^0\to 0$ dır.

(3.1.3.32) ve (3.1.3.34)'ü toplarsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \omega_\tau^1. \tag{3.1.3.35}$$

Burada $\omega_\tau^1 = \omega_\tau^0 + \tilde{\omega}_\tau^0$ dır. (3.1.3.35) eşitsizliğinin elde edilmesine denk olarak (3.1.3.20) ve (3.1.3.21) eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p2}\right|^2 \le \omega_\theta^2. \tag{3.1.3.36}$$

Burada $\omega_\theta^2 > 0$ *ve* $\theta \to 0$ için $\omega_\theta^2 \to 0$ dır. (3.1.3.22) eşitsizliğini kullanarak Fubini teoreminin yardımı ile (3.1.3.32)'de olduğu gibi bir sonraki eşitsizliği elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p3}\right|^2 \le \tilde{\omega}_h^3. \tag{3.1.3.37}$$

Burada $\tilde{\omega}_h^3 > 0$ *ve* $h \to 0$ için $\tilde{\omega}_h^3 \to 0$ dır. (3.1.3.23) – (3.1.3.24) eşitliklerinden yararlanarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\left|F_{1k}^{p3}\right|^2 \le 9a_1^2\int_0^h\left\|\frac{\partial^2\psi(x,\cdot,\cdot)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(Q)}^2 dx. \tag{3.1.3.38}$$

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\left|F_{M-1k}^{p3}\right|^2 \le 9a_1^2\int_{\ell-h}^{\ell}\left\|\frac{\partial^2\psi(x,\cdot,\cdot)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(Q)}^2 dx. \tag{3.1.3.39}$$

Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplayarak ve bu eşitsizliklerde yer alan integrallerin mutlak sürekliliğini kullanarak aşağıdaki bağıntının geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\left|F_{1k}^{p3}\right|^2 + \theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\left|F_{M-1k}^{p3}\right|^2 \le \tilde{\omega}_h^4. \tag{3.1.3.40}$$

Burada $\tilde{\omega}_h^4 > 0$ *ve* $h \to 0$ için $\tilde{\omega}_h^4 \to 0$ dır. Bu taktirde bu eşitsizlikten ve (3.1.3.37) 'den yararlanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p3}\right|^2 \le \omega_h^3. \tag{3.1.3.41}$$

Burada $\omega_h^3 = \widetilde{\omega}_h^3 + \widetilde{\omega}_h^4$ dır. (3.1.3.28) eşitsizliğini kullanarak bir sonraki eşitsizliği yazabiliriz,

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p4}\right|^2 \le 3\mu_0^2\left(h^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\tau^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\theta^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|_{L_2(\Omega)}^2\right).$$

Buradan da (3.1.1.9) kestiriminden yararlanarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p4}\right|^2 \le c_6\left(h^2+\tau^2+\theta^2\right), \qquad (3.1.3.42)$$

(3.1.3.29) eşitsizliğinden kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p5}\right|^2 \le 3b_0^2\left(h^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\tau^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\theta^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|_{L_2(\Omega)}^2\right).$$

Bu eşitsizlikten (3.1.1.9) kestirimini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p5}\right|^2 \le c_7\left(h^2+\tau^2+\theta^2\right). \qquad (3.1.3.43)$$

Bu kestirimin elde edilmesine eşdeğer olarak (3.1.3.30)'dan aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p6}\right|^2 \le c_8\left(h^2+\tau^2+\theta^2\right). \qquad (3.1.3.44)$$

Böylece (3.1.3.35), (3.1.3.36), (3.1.3.41), (3.1.3.42), (3.1.3.43) ve (3.1.3.44) kestirimlerini kullanarak aşağıdaki kestirimi yazabiliriz.

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jm}^{p}\right|^2+\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jk}^{q}\right|^2 \le c_9\left(\omega_\tau^1+\omega_\theta^2+\omega_h^3+h^2+\tau^2+\theta^2\right), \qquad (3.1.3.45)$$

eğer burada;

$$\beta_{\tau h}^{\theta}=\omega_\tau^1+\omega_\theta^2+\omega_h^3+h^2+\tau^2+\theta^2, \qquad (3.1.3.46)$$

formülünü kullanırsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde edebiliriz. Böylece Teorem 3.1.3.1 ispatlandı.

3.2 Kuazi Optiğin Durgun Olmayan Denklemi İçin 2.Çeşit Başlangıç Sınır Değer Probleminin Nümerik Çözümü

Bu bölümde Kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için 2.çeşit başlangıç sınır değer probleminin fark şeması oluşturulacak, fark şeması için kararlılık kestirimi elde edilecek ve fark şemasının hatası için kestirim ispatlanacaktır. Bu bölüm üç ana bölümden oluşmaktadır.

3.2.1 Başlangıç Sınır Değer Probleminin Formülize Edilmesi ve Fark Şeması

Bu alt bölümde ele alınan Kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için 2.çeşit başlangıç sınır değer problemini tanımlayalım.

$\ell > 0, \quad T > 0, \quad L > 0$ verilen sayılar, $0 \le x \le \ell, \qquad 0 \le t \le T, \quad 0 \le z \le L,$
$\Omega_L = (0,\ell)\times(0,L),\ \Omega_T = (0,\ell)\times(0,T),\ \Omega = (0,\ell)\times(0,T)\times(0,L)$
olsun.

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + ia_0\frac{\partial \psi}{\partial z} - a_1\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + a(x)\psi + v_0(x)\psi + iv_1(x)\psi = f(x,t,z), \quad (x,t,z)\in\Omega \tag{3.2.1.1}$$

denkleminin

$$\psi(x,0,z) = \varphi_0(x,z), \quad (x,z)\in\Omega_L, \tag{3.2.1.2}$$

$$\psi(x,t,0) = \varphi_1(x,t), \quad (x,t)\in\Omega_T \tag{3.2.1.3}$$

başlangıç değer ve

$$\frac{\psi(0,t,z)}{\partial x} = \frac{\psi(\ell,t,z)}{\partial x} = 0, \qquad (t,z)\in Q \tag{3.2.1.4}$$

sınır değer şartları altında çözümünün bulunması problemini göz önüne alalım.Burada $a_0 > 0,\ a_1 > 0$ verilen sayılar, $a(x),\ v_0(x),\ v_1(x)$ ölçülebilen reel değerli fonksiyonlar olup;

$$\mu_0 \le a(x) \le \mu_1 \quad , \ \mu_0, \mu_1 = sabit > 0 \tag{3.2.1.5}$$

$$|v_m(x)| \le b_m \ , m = 0,1\ , \ \overset{0}{\forall x} \in (0,\ell)\ , \ b_0, b_1 = sabit > 0 \tag{3.2.1.6}$$

şartlarını sağlar. $\varphi_0(x,z), \varphi_1(x,t),\ f(x,t,z)$ verilen kompleks değerli fonksiyonlar olup;

$$\varphi_0 \in \overset{2,1}{W_2}(\Omega_L),\ \frac{\partial\varphi_0(0,z)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_0(\ell,z)}{\partial x}=0,\ z\in(0,L), \tag{3.2.1.7}$$

$$\varphi_1 \in \overset{2,1}{W_2}(\Omega_T),\ \frac{\partial\varphi_1(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_1(\ell,t)}{\partial x}=0,\ t\in(0,T), \tag{3.2.1.8}$$

$$f \in \overset{0,1,1}{W_2}(\Omega) \tag{3.2.1.9}$$

şartlarını sağlar.

Tanım 3.2.1.1 : (3.2.1.1) – (3.2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümü olarak $W_2^{2,1,1}(\Omega)$ uzayına ait olan (3.2.1.1) denklemini $\overset{0}{\forall}(x,t,z)\in\Omega$ için (3.2.1.2) , (3.2.1.3) başlangıç değer şartlarını sırası ile $\overset{0}{\forall}(x,z)\in\Omega_L$, $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega_T$ için ve (3.2.1.4) sınır değer şartlarını $\overset{0}{\forall}(t,z)\in Q$ için sağlayan $\psi=\psi(x,t,z)$ fonksiyonu anlaşılır.

(3.2.1.1) – (3.2.1.4) başlangıç sınır değer problemi daha önce $[6]$ çalışmasında incelenmiş ve bu çalışmada gösterilmiştir ki (3.2.1.1) – (3.2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin $W_2^{2,1,1}$ uzayına ait olan Tanım 3.2.1.1 anlamında tek çözümü vardır ve bu çözüm için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\|\psi\|_{W_2^{2,1,1}(\Omega)} \le \tilde{c}_0\left(\|\varphi_0\|_{W_2^{2,1}(\Omega_L)}+\|\varphi_1\|_{W_2^{2,1}(\Omega_T)}+\|f\|_{W_2^{0,1,1}(\Omega)}\right). \tag{3.2.1.10}$$

3.1.1 alt bölümünde olduğu gibi (3.2.1.1) – (3.2.1.4) problemine karşılık gelen fark şemasını uygun işaretlemeleri kullanarak aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}&i\delta_{\bar t}\Phi_{jk}^p + ia_0\delta_{\bar z}\Phi_{jk}^p - a_1\delta_{x\bar x}\Phi_{jk}^p + a^j\Phi_{jk}^p + v_{0j}\Phi_{jk}^p + iv_{1j}\Phi_{jk}^p = f_{jk}^p,\\ &j=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{1,N}\ ,\ p=\overline{1,Z}\end{aligned} \tag{3.2.1.11}$$

$$\Phi_{j0}^p=\varphi_{0j}^p\ ,\ j=\overline{0,M}\ ,\ p=\overline{1,Z} \tag{3.2.1.12}$$

$$\Phi_{jk}^0=\varphi_{1j}^k\ ,\quad j=\overline{0,M}\ ,\ k=\overline{1,N} \tag{3.2.1.13}$$

$$\delta_{\bar{x}}\Phi_{1k}^{p} = \delta_{\bar{x}}\Phi_{Mk}^{p} = 0, \quad k = \overline{1, N}\ , \quad p = \overline{1, Z}. \tag{3.2.1.14}$$

Burada $a^{j}, v_{0j}, v_{1j}, \varphi_{0j}^{p},\ \varphi_{1j}^{k},\ f_{jk}^{p}$ fonksiyonları ağ fonksiyonları olup,

$$a^{j} = \frac{1}{h}\int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} a(x)dx\ ,\ \ j = \overline{1, M-1}, \tag{3.2.1.15}$$

$$V_{mj} = \frac{1}{h}\int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} v_m(x)dx\ ,\ \ j = \overline{1, M-1}\ ,\ \ m = 0,1,\dots \tag{3.2.1.16}$$

$$\varphi_{0j}^{p} = \frac{1}{\theta h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \varphi_0(x,z)dxdz,\ j = \overline{1, M-1}\ , \varphi_{00}^{p} = \varphi_{01}^{p}, \varphi_{0M}^{p} = \varphi_{0M-1}^{p}, \ p = \overline{1, Z}, \tag{3.2.1.17}$$

$$\varphi_{1j}^{k} = \frac{1}{\tau h}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} \varphi_1(x,t)dxdt\ ,\ j = \overline{1, M-1}\ \ , \varphi_{10}^{k} = \varphi_{11}^{k}, \varphi_{1M}^{k} = \varphi_{1M-1}^{k}, k = \overline{1, N}\ , \tag{3.2.1.18}$$

$$f_{jk}^{p} = \frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j - \frac{h}{2}}^{x_j + \frac{h}{2}} f\left(x,t,z\right)dxdtdz,\ \ j = \overline{1, M-1}\ ,\ \ p = \overline{1, Z}, k = \overline{1, N} \tag{3.2.1.19}$$

formülleriyle tanımlanırlar.

3.2.2. Fark Şemasının Kararlılık ve Hata Kestirimleri

Bu alt bölümde (3.2.1.11) – (3.2.1.14) fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edeceğiz ve bu kestirimi kullanarak fark şemasının hatasını değerlendireceğiz. Bu amaçla ilk önce fark şemasının kararlılık kestirimini gösteren hükmü verelim.

Teorem 3.2.2.1 : $a(x), v_0(x), v_1(x), \varphi_0(x,z), \varphi_1(x,t), f(x,t,z)$ fonksiyonları (3.2.1.5) – (3.2.1.9) şartlarını sağlasın. Bu taktirde (3.2.1.11) – (3.2.1.14) fark şemasının çözümü için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jm}^{p}\right|^{2}+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\Phi_{jk}^{q}\right|^{2}\leq$$
$$\leq c_{2}\left(\theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{0j}^{p}\right|^{2}+\tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|\varphi_{1j}^{k}\right|^{2}+\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|f_{jk}^{p}\right|^{2}\right), \tag{3.2.2.1}$$
$$\forall m\in\{1,2,\cdots,N\}\ ,\ \forall q\in\{1,2,\cdots,Z\}.$$

İspat : 3.2.2.1 teoreminin ispatı 3.1.2.1 teoreminin ispatı ile aynıdır.

Şimdi bu teoremin hükmünü kullanarak fark şemasının hatasını değerlendirmeye çalışalım. Bu amaçla aşağıdaki sistemi göz önüne alalım:

$$i\delta_{\bar{t}}W_{jk}^{p}+ia_{0}\delta_{\bar{z}}W_{jk}^{p}-a_{1}\delta_{x\bar{x}}W_{jk}^{p}+a^{j}W_{jk}^{p}+v_{0j}W_{jk}^{p}+iv_{1j}W_{jk}^{p}=F_{jk}^{p},$$
$$j=\overline{1,M-1},\quad k=\overline{1,N}\ ,\ p=\overline{1,Z}, \tag{3.2.2.2}$$

$$W_{j0}^{p}=0\ ,\ j=\overline{0,M}\ ,\ p=\overline{1,Z}, \tag{3.2.2.3}$$

$$W_{jk}^{0}=0\ ,\ j=\overline{0,M}\ ,\ k=\overline{1,N}, \tag{3.2.2.4}$$

$$\delta_{\bar{x}}W_{1k}^{p}=\delta_{\bar{x}}W_{Mk}^{p}=0\ ,\ k=\overline{1,N}\ ,\ p=\overline{1,Z}. \tag{3.2.2.5}$$

Burada F_{jk}^{p} ağ fonksiyonu olup;

$$F_{jk}^{p}=\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(i\frac{\partial\psi}{\partial t}+ia_{0}\frac{\partial\psi}{\partial z}-a_{1}\frac{\partial^{2}\psi}{\partial x^{2}}+a(x)\psi+\right.$$
$$\left.+v_{0}(x)\psi+iv_{1}(x)\psi\right)dxdtdz-i\delta_{\bar{t}}\psi_{jk}^{p}-ia_{0}\delta_{\bar{z}}\psi_{jk}^{p}+ \tag{3.2.2.6}$$
$$+a_{1}\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}^{p}-a^{j}\psi_{jk}^{p}-v_{0j}\psi_{jk}^{p}-iv_{1j}\psi_{jk}^{p}\quad ,j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N},p=\overline{1,Z}$$

formülü ile hesaplanır. Görüldüğü üzere W_{jk}^{p} ağ fonksiyonu (3.2.2.2) – (3.2.2.5) probleminin çözümü olup aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$W_{jk}^{p}=\Phi_{jk}^{p}-\psi_{jk}^{p}. \tag{3.2.2.7}$$

Burada Φ_{jk}^{p} ağ fonksiyonu (3.2.1.11) – (3.2.1.14) fark şemasının çözümü, ψ_{jk}^{p} ise (3.2.1.1) – (3.2.1.4) başlangıç sınır değer probleminin çözümünün Steklov anlamında ortalama değeri olup aşağıdaki formülle tanımlanır:

$$\psi_{jk}^{p} = \frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} \psi(x,t,z)\,dxdtdz,\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z},$$

$$\psi_{j0}^{p} = \varphi_{0j}^{p}\ ,\ j=\overline{0,M}\ ,\ p=\overline{1,Z}\ ,\ \psi_{jk}^{0} = \varphi_{1j}^{k}\ ,\ j=\overline{0,M}\ , k=\overline{1,N}, \tag{3.2.2.8}$$

$$\psi_{0k}^{p} = \psi_{1k}^{p}\ ,\ \psi_{Mk}^{p} = \psi_{M-1k}^{p},\ k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}.$$

Teorem 3.2.2.2 : Farz edelim ki Teorem 3.2.2.1 'in şartları sağlansın. Bu taktirde herhangi $m\in\{1,2,\cdots,N\}$ ve herhangi $q\in\{1,2,\cdots,Z\}$ için aşağıdaki kestirim geçerlidir:

$$\begin{gathered}\theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jM}^{p}\right|^{2} + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jk}^{q}\right|^{2} \le c_3\beta_{\tau h}^{\theta} \\ \beta_{\tau h}^{\theta} > 0,\ \beta_{\tau h}^{\theta} \leftarrow 0\ ,\ \theta\to 0\ ,\ \tau\to 0\ ,\ h\to 0\end{gathered} \tag{3.2.2.9}$$

İspat : (3.2.2.1) kestirimine denk olarak (3.2.2.2) – (3.2.2.5) sisteminin çözümü için aşağıdaki kestirimi elde edebiliriz:

$$\begin{gathered}\theta h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jM}^{p}\right|^{2} + \tau h\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jk}^{q}\right|^{2} \le c_4\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\ \sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p}\right|^{2} \\ \forall m\in\{1,2,\cdots,N\},\ \forall q\in\{1,2,\cdots,Z\}.\end{gathered} \tag{3.2.2.10}$$

Burada $c_4 > 0$ sayısı τ, h ve θ'dan bağımsızdır. F_{jk}^{p} fonksiyonunu aşağıdaki gibi yazalım:

$$F_{jk}^{p} = F_{jk}^{\ p1} + F_{jk}^{\ p2} + F_{jk}^{\ p3} + F_{jk}^{\ p4} + F_{jk}^{\ p5} + F_{jk}^{\ p6}\ , j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N}\ , p=\overline{1,Z}. \tag{3.2.2.11}$$

Burada F_{jk}^{ps} , $s=\overline{1,6}$ fonksiyonları aşağıdaki formüllerle tanımlanır:

$$F_{jk}^{p1}=\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\,\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dxdtdz - i\delta_{\bar{t}}\psi_{jk}^{p},\ j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}\ , \quad (3.2.2.12)$$

$$F_{jk}^{p2}=\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\,a_0\,\frac{\partial\psi}{\partial z}\,dxdtdz - ia_0\delta_{\bar{z}}\psi_{jk}^{p},\ j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}\ , \quad (3.2.2.13)$$

$$F_{jk}^{p3}=-\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a_1\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,dxdtdz + a_1\delta_{x\bar{x}}\psi_{jk}^{p},\ j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}\ , \quad (3.2.2.14)$$

$$F_{jk}^{p4}=\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} a(x)\psi\,dxdtdz - a^{j}\psi_{jk}^{p},\ j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}\ , \quad (3.2.2.15)$$

$$F_{jk}^{p5}=\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} v_0(x)\psi\,dxdtdz - v_{0j}\psi_{jk}^{p},\ j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}\ , \quad (3.2.2.16)$$

$$F_{jk}^{p6}=\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} iv_1(x)\,dxdtdz - iv_{1j}\psi_{jk}^{p},\ j=\overline{1,M-1}, k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}\ . \quad (3.2.2.17)$$

İlk önce $F_{jk}^{p1},\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}$ ağ fonksiyonunu değerlendirelim. (3.2.2.12) ve (3.2.2.8) formülünü kullanarak aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{jk}{}^{p1}=\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\,\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdtdz - i\delta_{\bar{t}}\psi_{jk}^{p}$$

$$=\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\,\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdtdz - i\,\frac{\psi_{jk}^{p}-\psi_{jk-1}^{p}}{\tau}$$

$$=\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2} i\,\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdtdz - \frac{i}{\tau}\left[\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi\left(x,t,z\right)dxdtdz -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\psi\left(x,t,z\right)dxdtdz\right]=\frac{i}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdtdz-$$

$$-\frac{i}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t-\tau}^{t}\frac{\partial\psi\left(x,\varsigma,z\right)}{\partial\varsigma}d\varsigma=\frac{i}{\theta\tau^2 h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\frac{\partial\psi\left(x,t,z\right)}{\partial t}dxdtdz-$$

$$-\frac{i}{\theta\tau^2 h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\frac{\partial\psi(x,t+\gamma,z)}{\partial\gamma}d\gamma=$$

$$=\frac{i}{\theta\tau^2 h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left(\int_{-\tau}^{0}\left(\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\gamma,z)}{\partial t}\right)d\gamma\right)dxdtdz, \tag{3.2.2.18}$$

$$j=\overline{1,M-1},k=\overline{2,N},\,p=\overline{1,Z}.$$

Burada Cauchy – Bunyakovskii eşitliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{jk}^{p1}\right|^2\le\frac{1}{\theta\tau^2 h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\tau}^{0}\left|\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\gamma,z)}{\partial t}\right|^2 d\gamma dxdtdz, \tag{3.2.2.19}$$

$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{2,N},\ p=\overline{1,Z}.$$

Şimdi F_{j1}^{p1} 'i değerlendirelim. Gerçekten $k=1$ için (3.2.2.12)'yi ve (3.2.2.8) formülünü kullanırsak aşağıdaki formülü kolaylıkla elde edebiliriz:

$$F_{j1}^{p1}=\frac{i}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial t}dxdtdz-\frac{i}{\theta\tau^2 h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial\psi(x,\gamma,z)}{\partial\gamma}d\gamma dxdtdz,$$

$$j=\overline{1,M-1}\quad,\quad p=\overline{1,Z}.$$

Cauchy – Bunyakovskii eşitliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|F_{j1}^{p1}\right|^2\le\frac{4}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|^2 dxdtdz\ ,\ j=\overline{1,M-1},\,p=\overline{1,Z}, \tag{3.2.2.20}$$

(3.2.2.19) , (3.2.2.20) eşitsizliklerinin elde edilmesine denk olarak (3.2.2.13) , (3.2.2.8) formüllerinin yardımı ile aşağıdaki eşitsizlikleri elde edebiliriz:

$$\left|F_{jk}^{p2}\right|^2\le\frac{a_0^2}{\theta^2\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{-\theta}^{0}\left|\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial z}-\frac{\partial\psi(x,t,\eta+z)}{\partial z}\right|^2 d\eta dxdtdz, \tag{3.2.2.21}$$

$$j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N},\,p=\overline{2,Z},$$

$$\left|F_{jk}^{12}\right|^2\le\frac{4}{\theta\tau h}\int_{z_0}^{z_1}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|^2 dxdtdz\ ,\ j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N} \tag{3.2.2.22}$$

F_{jk}^{p1} ağ fonksiyonu için elde ettiğimiz formüle eşdeğer olan işlemler yaparsak kolaylıkla F_{jk}^{p3} $j=\overline{2,M-2}, k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}$ ağ fonksiyonu için aşağıdaki elde ederiz:

$$F_{jk}^{p3}=\frac{a_1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}dxdtdz-\frac{a_1}{\theta\tau h^3}\left\{\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{x}^{x+h}\int_{\xi-h}^{\xi}\frac{\partial^2\psi(\beta,t,z)}{\partial\beta^2}d\beta d\xi dxdtdz\right\}.$$

Buradan da kolaylıkla 1.ve 2.terimi birleştirerek aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$F_{jk}^{p3}=\frac{a_1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left(\frac{\partial^2\psi(x,t,z)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\xi+\beta,t,z)}{\partial x^2}\right)d\beta d\xi dxdtdz,$$
$$j=\overline{2,M-2}, k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}.$$

Burada Cauchy – Bunyakovskii eşitliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|F_{jk}^{p3}\right|^2\le\frac{a_1^2}{\theta\tau h^3}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\int_{0}^{h}\int_{-h}^{0}\left|\frac{\partial^2\psi(x,t,z)}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi(x+\xi+\beta,t,z)}{\partial x^2}\right|^2 d\beta d\xi dxdtdz, \quad (3.2.2.23)$$
$$j=\overline{2,M-2}, k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}.$$

Şimdi F_{1k}^{p3} $,k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}$ ağ fonksiyonunda (3.2.2.14) formülünü kullanarak $j=1$ olduğunda aşağıdaki eşitliği yazabiliriz:

$$F_{1k}^{p3}=\frac{a_1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdtdz-\frac{a_1}{\theta\tau h^3}\left\{\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int_{x_2-h/2}^{x_2+h/2}\psi(x,t,z)dx-\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\psi(x,t,z)dx\right]dtdz\right\}$$
$$=\frac{a_1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdtdz-\frac{a_1}{\theta\tau h^3}\left\{\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x}^{x+h}\frac{\partial\psi(\xi,t,z)}{\partial\xi}d\xi dx\right]dtdz\right\}.$$

Burada,

$$\frac{\partial\psi(0,t,z)}{\partial x}=\frac{\partial\psi\left(x_1-h/2,t,z\right)}{\partial x}=0$$

olduğunu dikkate alırsak F_{1k}^{p3} 'ü aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$F_{1k}^{p3}=\frac{a_1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdtdz-$$

$$-\frac{a_1}{\theta\tau h^3}\left\{\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x}^{x+h}\left(\frac{\partial\psi(\xi,t,z)}{\partial\xi}-\frac{\partial\psi\left(x_1-h/2\,,t,z\right)}{\partial\xi}\right)d\xi dx\right]dtdz\right\}$$

$$=\frac{a_1}{\theta\tau h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}dxdtdz-\frac{a_1}{\theta\tau h^3}\left\{\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\int_{x}^{x+h}\int_{x_1-h/2}^{\xi}\frac{\partial^2\psi(\varsigma,t,z)}{\partial\varsigma^2}d\varsigma d\xi dxdtdz\right\}.$$

Burada Cauchy – Bunyakovskii eşitsizliğini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği elde edebiliriz.

$$\left|F_{1k}^{p3}\right|\le\frac{a_1}{\sqrt{\theta\tau h}}\left(\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_1+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2dxdtdz\right)^{1/2}+\frac{2\sqrt{2}a_1}{\sqrt{\theta\tau h}}\left(\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_1-h/2}^{x_2+h/2}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2dxdtdz\right)^{1/2}$$

$$=\frac{a_1}{\sqrt{\theta\tau h}}\left(\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{0}^{h}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2dxdtdz\right)^{1/2}+\frac{2\sqrt{2}a_1}{\sqrt{\theta\tau h}}\left(\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{0}^{2h}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2dxdtdz\right)^{1/2}$$

$$\le\frac{\left(1+2\sqrt{2}\right)a_1}{\sqrt{\theta\tau h}}\left(\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{0}^{2h}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|^2dxdtdz\right)^{1/2},\quad k=\overline{1,N}\ ,\ p=\overline{1,Z}.$$

Buradan da aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\left|F_{1k}^{p3}\right|^2\le\frac{16a_1^{\,2}}{\theta\tau h}\left(\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{0}^{2h}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|dxdtdz\right),k=\overline{1,N}\ ,\ p=\overline{1,Z}. \qquad (3.2.2.24)$$

Bu eşitsizliğin elde edilmesine eşdeğer olarak (3.2.2.14)'ü kullanarak $F_{M-1k}^{p3},\ k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}$ ağ fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\left|F_{M-1k}^{p3}\right|^2\le\frac{16a_1^{\,2}}{\theta\tau h}\left(\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{\ell-2h}^{\ell}\left|\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right|dxdtdz\right), \qquad (3.2.2.25)$$

F_{jk}^{p4} , F_{jk}^{p5} , F_{jk}^{p6} , $j=\overline{1,M-1},k=\overline{1,N},p=\overline{1,Z}$ ağ fonksiyonlarının 3.1.1 bölümünde olduğu gibi aşağıdaki şekilde değerlendirebiliriz:

$$\left|F_{jk}^{p4}\right|^2 \le \frac{3\eta_0^2 h}{\theta\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\beta,t,z)}{\partial\beta}\right|^2 d\beta dt dz +$$

$$+\ \frac{3\eta_0^2\tau}{\theta h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\alpha,z)}{\partial\alpha}\right|^2 d\alpha d\xi dz + \qquad (3.2.2.26)$$

$$+\ \frac{3\eta_0^2\theta}{h\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\gamma,\chi)}{\partial\chi}\right|^2 d\chi d\xi d\gamma,$$

$$j=\overline{1,M-1}\,,k=\overline{1,N}\,,p=\overline{1,Z}$$

$$\left|F_{jk}^{p5}\right|^2 \le \frac{3b_0^2 h}{\theta\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\beta,t,z)}{\partial\beta}\right|^2 d\beta dt dz +$$

$$+\ \frac{3b_0^2\tau}{\theta h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\alpha,z)}{\partial\alpha}\right|^2 d\alpha d\xi dz + \qquad (3.2.2.27)$$

$$+\ \frac{3b_0^2\theta}{h\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\gamma,\chi)}{\partial\chi}\right|^2 d\chi d\xi d\gamma,$$

$$j=\overline{1,M-1}\,,k=\overline{1,N}\,,p=\overline{1,Z}$$

$$\left|F_{jk}^{p6}\right|^2 \le \frac{3b_1^2 h}{\theta\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\beta,t,z)}{\partial\beta}\right|^2 d\beta dt dz +$$

$$+\ \frac{3b_1^2\tau}{\theta h}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\alpha,z)}{\partial\alpha}\right|^2 d\alpha d\xi dz + \qquad (3.2.2.28)$$

$$+\ \frac{3b_1^2\theta}{h\tau}\int_{z_{p-1}}^{z_p}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{x_j-h/2}^{x_j+h/2}\left|\frac{\partial\psi(\xi,\gamma,\chi)}{\partial\chi}\right|^2 d\chi d\xi d\gamma,$$

$$j=\overline{1,M-1}\,,k=\overline{1,N}\,,p=\overline{1,Z}.$$

Fubini teoremini kullanarak (3.2.2.19) ‘dan aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p}\right|^2 \le \frac{1}{\tau}\int_{-\tau}^{0}\left(\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\gamma,z)}{\partial t}\right|^2 dx dt dz\right)d\gamma. \qquad (3.2.2.29)$$

Herhangi $\varepsilon > 0$ alalım. $L_2(\Omega)$'dan olan fonksiyonların orta kuadratik sürekliliğini dikkate olarak,

$$\int_{\Omega}\left|\frac{\partial\psi(x,t,z)}{\partial t}-\frac{\partial\psi(x,t+\gamma,z)}{\partial t}\right|^2 dxdtdz < \varepsilon \quad , \ |\gamma| \le \tau < \delta$$

olacak biçimde $\delta > 0$ sayısı bulunur. Bu nedenle $|\gamma| \le \tau < \delta$ şartını sağlayan τ 'lar için (3.2.2.29)'dan yararlanarak,

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \omega_\tau^0 \qquad (3.2.2.30)$$

bağıntısını elde ederiz. Burada $\omega_\tau^0 > 0$ *ve* $\tau \to 0$ için $\omega_\tau^0 \to 0$ dır. (3.2.2.20)'den aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le 4\int_0^\tau\left\|\frac{\partial\psi(\cdot,\gamma,\cdot)}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega_L)}^2 d\gamma. \qquad (3.2.2.31)$$

Burada integralin mutlak sürekliliğini kullanırsak aşağıdaki bağıntıyı kolaylıkla yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \tilde{\omega}_\tau^0. \qquad (3.2.2.32)$$

Burada $\tilde{\omega}_\tau^0 > 0$ *ve* $\tau \to 0$ için $\tilde{\omega}_\tau^0 \to 0$ dır. (3.2.2.30) ve (3.2.2.32)'yi toplarsak aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p1}\right|^2 \le \omega_\tau^1. \qquad (3.2.2.33)$$

Burada $\omega_\tau^1 = \omega_\tau^0 + \tilde{\omega}_\tau^0$ dır. (3.2.2.33) eşitsizliğinin elde edilmesine denk olarak (3.2.2.21), (3.2.2.22) eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizliğin geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p2}\right|^2 \le \omega_\theta^2. \qquad (3.2.2.34)$$

Burada $\omega_\theta^2 > 0$ *ve* $\theta \to 0$ için $\omega_\theta^2 \to 0$ dır. (3.2.2.23) eşitsizliğini kullanarak Fubini teoreminin yardımıyla (3.2.2.30)'da olduğu gibi bir sonraki eşitsizliği elde ederiz.

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-2}\left|F_{jk}^{p3}\right|^2 \le \tilde{\omega}_h^3. \tag{3.2.2.35}$$

Burada $\tilde{\omega}_h^3 > 0$ ve $h \to 0$ için $\tilde{\omega}_h^3 \to 0$ dır.(3.2.2.24), (3.2.2.25) eşitsizliklerinden yararlanarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\left|F_{1k}^{p3}\right|^2 \le 16a_1^2\int_0^{2h}\left\|\frac{\partial^2\psi(x,\cdot,\cdot)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 dx, \tag{3.2.2.36}$$

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\left|F_{M-1k}^{p3}\right|^2 \le 16a_1^2\int_{2h}^{\ell}\left\|\frac{\partial^2\psi(x,\cdot,\cdot)}{\partial x^2}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 dx. \tag{3.2.2.37}$$

Bu eşitsizlikleri taraf tarafa toplayarak ve bu eşitsizliklerde yer alan integrallerin mutlak sürekliliğini kullanarak aşağıdaki bağıntının geçerli olduğunu elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\left|F_{1k}^{p3}\right|^2 + \theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\left|F_{M-1k}^{p3}\right|^2 \le \tilde{\omega}_h^4. \tag{3.2.2.38}$$

Burada $\tilde{\omega}_h^4 > 0$ ve $h \to 0$ için $\tilde{\omega}_h^4 \to 0$ dır. Bu taktirde bu eşitsizlikten ve (3.2.2.35)'den yararlanarak aşağıdaki eşitsizlikleri yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p3}\right|^2 \le \omega_h^3. \tag{3.2.2.39}$$

Burada $\omega_h^3 = \tilde{\omega}_h^3 + \tilde{\omega}_h^4$ dir. (3.2.2.26) eşitsizliğini kullanarak bir sonraki eşitsizliği yazabiliriz,

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p4}\right|^2 \le 3\eta_0^2\left(h^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \tau^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \theta^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|_{L_2(\Omega)}^2\right).$$

Buradan da (3.2.1.10) kestiriminden yararlanarak aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p4}\right|^2 \le c_5\left(h^2 + \tau^2 + \theta^2\right), \tag{3.2.2.40}$$

(3.2.2.27) eşitsizliğinden kolaylıkla aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p5}\right|^2 \le 3b_0^2\left(h^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial x}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \tau^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 + \theta^2\left\|\frac{\partial\psi}{\partial z}\right\|_{L_2(\Omega)}^2 \right).$$

Bu eşitsizlikten (3.2.1.10) kestirimini kullanarak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p5}\right|^2 \le c_6\left(h^2+\tau^2+\theta^2\right). \qquad (3.2.2.41)$$

Bu kestirimin elde edilmesine eşdeğer olarak (3.2.2.28)'den aşağıdaki kestirimi elde ederiz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{k=1}^{N}\sum_{j=1}^{M-1}\left|F_{jk}^{p6}\right|^2 \le c_7\left(h^2+\tau^2+\theta^2\right). \qquad (3.2.2.42)$$

Böylece (3.2.2.33) , (3.2.2.34) , (3.2.2.39) , (3.2.2.40) , (3.2.2.41) ve (3.2.2.42) kestirimlerini kullanarak aşağıdaki kestirimi yazabiliriz:

$$\theta\tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jm}^{p}\right|^2 + \tau h\sum_{p=1}^{Z}\sum_{j=1}^{M-1}\left|W_{jk}^{q}\right|^2 \le c_8\left(\omega_\tau^1+\omega_\theta^2+\omega_h^3+h^2+\tau^2+\theta^2\right), \qquad (3.2.2.43)$$

eğer burada;

$$\beta_{\tau h}^{\theta} = \omega_\tau^1+\omega_\theta^2+\omega_h^3+h^2+\tau^2+\theta^2 \qquad (3.2.2.44)$$

formülünü kullanırsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde edebiliriz.

Böylece teorem 3.2.2.2 ispatlandı.

3.2.3 Nümerik Hesaplamalar

Bir önceki alt bölümlerde incelediğimiz 1. ve 2. çeşit sınır değer problemlerinin nümerik çözüm algoritmasını elde etmek için incelediğimiz her iki problemi de içeren aşağıdaki problemi göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t}+ia_0\frac{\partial\psi}{\partial t}-a_1\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+a(x)\psi+v_0(x)\psi+iv_1(x)\psi=f(x,t,z),\ (x,t,z)\in\Omega \qquad (3.2.3.1)$$

$$\psi(x,0,z)=\varphi_0(x,z),\ (x,z)\in\Omega_L \qquad (3.2.3.2)$$

$$\psi(x,t,0)=\varphi_1(x,t),\ (x,t)\in\Omega_T \qquad (3.2.3.3)$$

$$\alpha_0\frac{\partial\psi(0,t,z)}{\partial x}+\beta_0\psi(0,t,z)=y_0(t,z),\ (t,z)\in Q \qquad (3.2.3.4)$$

$$\alpha_1\frac{\partial\psi(\ell,t,z)}{\partial x}+\beta_1\psi(\ell,t,z)=y_1(t,z),\ (t,z)\in Q. \qquad (3.2.3.5)$$

Burada $\ell>0$, $T>0$, $L>0$, $a_0>0$, $a_1>0$, $\alpha_0,\alpha_1\geq 0$, $\beta_0,\beta_1\geq 0$ verilen sayılar, $a(x)$, $v_0(x)$, $v_1(x)$, $\varphi_0(x,z)$, $\varphi_1(x,t)$, $f(x,t,z)$, $y_0(t,z)$, $y_1(t,z)$ verilen fonksiyonlardır.

Şimdi bu problemin bilgisayarda nümerik çözümünü yapmak için çözüm algoritması oluşturmamız gerekir. Bu amaçla aşağıdaki gibi fark şeması oluşturalım.

Fark şeması için $\overline{\Omega}=(0,\ell)\times(0,T)\times(0,L)$ bölgelerini aşağıdaki gibi ağa dönüştürelim: $\{(x_j,t_k,z_p)\}$:

$$x_j=jh,\ j=\overline{0,M},\ t_k=k\tau,\ k=\overline{0,N},\ z_p=p\theta,\ p=\overline{0,Z}\ .$$

Burada $M>0$, $N>0$, $Z>0$ verilen tamsayılardır, h adımı x'e, τ adımı t'ye, θ adımı z'ye göre seçilen adımlardır. $\psi(x_j,t_k,z_p)$ değerlerine karşılık gelen ağ fonksiyonunu Φ_{jk}^p ile gösterelim.

$$i\delta_{\bar{t}}\Phi_{jk}^{p}+ia_0\delta_{\bar{z}}\Phi_{jk}^{p}-a_1\delta_{x\bar{x}}\Phi_{jk}^{p}+a^{j}\Phi_{jk}^{p}+v_{0j}\Phi_{jk}^{p}+iv_{1j}\Phi_{jk}^{p}=f_{jk}^{p},\quad j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}, \tag{3.2.3.6}$$

$$\Phi_{j0}^{p}=\varphi_{0j}^{p},\ \ j=\overline{0,M},\ p=\overline{1,Z}, \tag{3.2.3.7}$$

$$\Phi_{jk}^{0}=\varphi_{1j}^{k},\ \ j=\overline{0,M},\ k=\overline{1,N}, \tag{3.2.3.8}$$

$$\alpha_0\delta_{\bar{x}}\Phi_{1k}^{p}+\beta_0\Phi_{1k}^{p}=Y_{1k}^{p},\ k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}, \tag{3.2.3.9}$$

$$\alpha_1\delta_{\bar{x}}\Phi_{Mk}^{p}+\beta_1\Phi_{Mk}^{p}=Y_{1k}^{p},\ k=\overline{1,N}, p=\overline{1,Z}. \tag{3.2.3.10}$$

Bu cebirsel denklemler sisteminin çözümünü bulmak için kovma yöntemini uygulayacağız. Bu amaçla (3.2.3.6) - (3.2.3.10) şartlarını açık biçimde yazıp sistemi üç köşegenli sisteme dönüştürmeye çalışalım.

$$i\frac{\Phi_{jk}^{p}-\Phi_{jk-1}^{p}}{\tau}+ia_0\frac{\Phi_{jk}^{p}-\Phi_{jk}^{p-1}}{\theta}+a_1\frac{\Phi_{j+1k}^{p}-2\Phi_{jk}^{p}+\Phi_{j-1k}^{p}}{h^2}+$$
$$+a^{j}\Phi_{jk}^{p}+v_{0j}\Phi_{jk}^{p}+iv_{1j}\Phi_{jk}^{p}=f_{jk}^{p},\qquad j=\overline{1,M-1}.$$

Burada her tarafı τ ile çarparsak,

$$i\Phi_{jk}^{p}-i\Phi_{jk-1}^{p}+ia_0\frac{\tau}{\theta}\Phi_{jk}^{p}-ia_0\frac{\tau}{\theta}\Phi_{jk}^{p-1}+$$
$$+a_1\frac{\tau}{h^2}\Phi_{j+1k}^{p}-2a_1\frac{\tau}{h^2}\Phi_{jk}^{p}+a_1\frac{\tau}{h^2}\Phi_{j-1k}^{p}+$$
$$+\tau a^{j}\Phi_{jk}^{p}+\tau v_{0j}\Phi_{jk}^{p}+i\tau v_{1j}\Phi_{jk}^{p}=\tau f_{jk}^{p}$$

olup,

$$a_1\frac{\tau}{h^2}\Phi_{j+1k}^{p}+\left[i+ia_0-ia_0\frac{\tau}{\theta}-2a_1\frac{\tau}{h^2}+\tau a^{j}+\tau v_{0j}+i\tau v_{1j}\right]\Phi_{jk}^{p}+$$
$$+a_1\frac{\tau}{h^2}\Phi_{j-1k}^{p}=\tau f_{jk}^{p}+i\Phi_{jk-1}^{p}+ia_0\frac{\tau}{\theta}\Phi_{jk}^{p-1},$$
$$j=\overline{1,M-1},\ k=\overline{1,N},\ p=\overline{1,Z}$$

elde edilir.

Burada aşağıdaki gibi gösterimleri yaparsak,

$$A_{jk}^p = a_1 \frac{\tau}{h^2}, \quad B_{jk}^p = a_1 \frac{\tau}{h^2}, \quad C_{jk}^p = i + ia_0 - ia_0 \frac{\tau}{\theta} - 2a_1 \frac{\tau}{h^2} + \tau a^j + \tau v_{0j} + i\tau v_{1j}$$

$$F_{jk}^p = -\tau f_{jk}^p - i\Phi_{jk-1}^p - ia_0 \frac{\tau}{\theta} \Phi_{jk}^{p-1}.$$

Bu taktirde sonuncu eşitlikten aşağıdaki üç köşegenli cebirsel denklemler sistemini elde ederiz:

$$\begin{gathered} A_{jk}^p \Phi_{j-1k}^p - C_{jk}^p \Phi_{jk}^p + B_{jk}^p \Phi_{j+1k}^p = -F_{jk}^p, \\ j = \overline{1, M-1}, \; k = \overline{1, N}, \; p = \overline{1, Z}. \end{gathered} \tag{3.2.3.11}$$

Bu sistemin çözümü için kovma algoritmasını uygulayalım. Bu amaçla ilk önce bu sistem için sınır değer şartlarını belirleyelim (3.2.3.4) ve (3.2.3.5) sınır değer şartlarına karşılık gelen sınır değer şartını elde etmek için aşağıdaki işlemleri yapalım:

$$\alpha_0 \frac{\Phi_{1k}^p - \Phi_{0k}^p}{h} + \beta_0 \Phi_{1k}^p = y_{0k}^p,$$

$$\alpha_0 \Phi_{1k}^p - \alpha_0 \Phi_{0k}^p + \beta_0 h \Phi_{1k}^p = h y_{0k}^p$$

$$\alpha_0 \Phi_{0k}^p = \alpha_0 \Phi_{1k}^p + \beta_0 h \Phi_{1k}^p - h y_{0k}^p$$

$$\Phi_{0k}^p = \left(\frac{\alpha_0 - \beta_0 h}{\alpha_0} \right) \Phi_{1k}^p - \frac{h y_{0k}^p}{\alpha_0}$$

$$\chi_{1k}^p = \frac{\alpha_0 - \beta_0 h}{\alpha_0}, \quad \mu_{1k}^p = -\frac{h y_{0k}^p}{\alpha_0}$$

$$\alpha_1 \frac{\Phi_{Mk}^p - \Phi_{M-1k}^p}{h} + \beta_1 \Phi_{Mk}^p = y_{1k}^p,$$

$$\Phi_{Mk}^p \left(\alpha_1 + \beta_1 h \right) = \alpha_1 \Phi_{M-1k}^p + h y_{1k}^p$$

$$\Phi_{Mk}^p = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \beta_1 h} \Phi_{M-1k}^p + \frac{h y_{1k}^p}{\alpha_1 + \beta_1 h}$$

$$\chi_{2k}^p = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \beta_1 h}, \quad \mu_{2k}^p = \frac{h y_{1k}^p}{\alpha_1 + \beta_1 h}$$

Böylece (3.2.3.11) için aşağıdaki sınır değer şartlarını elde ederiz:

$$\Phi_{0k}^p = \chi_{1k}^p \Phi_{1k}^p + \mu_{1k}^p \tag{3.2.3.12}$$

$$\Phi_{Mk}^p = \chi_{2k}^p \Phi_{M-1k}^p + \mu_{2k}^p. \tag{3.2.3.13}$$

(3.2.3.12)- (3.2.3.13) sistemi için kovma yöntemini uygularsak aşağıdaki eşitsizliği yazabiliriz:

$$\Phi_{jk}^{p} = \alpha_{j+1k}^{p}\Phi_{j+1k}^{p} + \beta_{j+1k}^{p}, \quad j = \overline{M-1,0}, k = \overline{1,N}\ , \quad p = \overline{1,Z}. \tag{3.2.3.14}$$

Burada α_{j+1k}^{p} ve β_{j+1k}^{p} kovma katsayıları olup aşağıdaki cauchy probleminin çözümüdür.

$$\alpha_{j+1k}^{p} = \frac{B_{jk}^{p}}{C_{jk}^{p} - \alpha_{jk}^{p} A_{jk}^{p}}, \quad j = \overline{1, M-1},\ k = \overline{1,N},\ p = \overline{1,Z}. \tag{3.2.3.15}$$

$$\beta_{j+1k}^{p} = \frac{\alpha_{jk}^{p} B_{jk}^{p} + F_{jk}^{p}}{C_{jk}^{p} - \alpha_{jk}^{p} A_{jk}^{p}}, \quad j = \overline{1, M-1},\ k = \overline{1,N},\ p = \overline{1,Z}. \tag{3.2.3.16}$$

$$\alpha_{1k}^{p} = \chi_{1k}^{p}, \quad \beta_{jk}^{p} = \mu_{1k}^{p}, \tag{3.2.3.17}$$

(3.2.3.14) formülü ile sistemin çözümünü bulmak için ,

$$\Phi_{Mk}^{p} = \frac{\chi_{2k}^{p}\beta_{Mk}^{p} + \mu_{2k}^{p}}{1 - \chi_{2k}^{p}\alpha_{Mk}^{p}}, \tag{3.2.3.18}$$

şartını kullanarak sağdan sola doğru tüm Φ_{jk}^{p} 'leri bulabiliriz. Böylece (3.2.3.1)-(3.2.3.5) probleminin nümerik çözümünü bulmak için kovma yönteminin algoritmasını açıkladık.

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

Tezin 3.1. bölümünde 1. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanıp bu probleme ait fark şeması oluşturulmuş, fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edilmiş ve kararlılık kestirimi kullanılarak fark şemasının hatası için kestirim ispatlanmıştır.

Tezin 3.2. bölümünde ise 2. çeşit başlangıç sınır değer problemi tanımlanıp bu probleme ait fark şemasının çözümü için kararlılık kestirimi elde edilmiş ve bu kestirim kullanılarak fark şemasının hatası değerlendirilmiştir. 3.2. bölümünde son olarak 1. ve 2. çeşit başlangıç sınır değer problemlerinin bilgisayar çözümünü yapmak için nümerik çözüm algoritması oluşturulmuştur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Tezde ele alınan başlangıç sınır değer problemleri formülize edilme açısından önceki çalışmalardaki problemlerden önemli biçimde farklılaşmaktadır. Tezde incelenen problemler çok az incelendiğinden tez çalışması gerek teorik, gerekse pratik açıdan önem taşır.

Bu tezde ilk kez kuazi optiğin durgun olmayan denklemi için başlangıç sınır değer problemlerinin çözüm algoritması inşa edilmiş ve bu amaçla kovma yöntemi uygulanmıştır. Bu tezde elde edilen araştırma bulguları diye adlandırdığımız sonuçlar, önceki çalışmalardaki sonuçlardan farklıdır ve onlarla örtüşmez.

6. KAYNAKLAR

[1] Yıldırım Aksoy, N., “Lineer Olmayan Schrödinger Denkleminin Sınırsız Katsayısıyla Optimal Kontrol Problemleri ve Onların Sonlu Fark Yaklaşımı”, Doktora Tezi, Erzurum, 150 s, 2009.

[2] Ibrahimov N.S., “The convergence of the difference method for solving the problem of identification of non-stationary equation of quasi optics”, Scientific Proceedings of the Azerbaijan SSR. tehn. Univ. Ser. Basic Sciences, № 4, p.54-60. 2010, (Rusça).

[3] Ibrahimov N.S., “A numerical method for solving the problem of identification of linear time-dependent equation of quasi optics”, Journal of Computational and Applied Mathematics, Kiev. Zap them. Shevchenko, № 2 (101), p. 44-59. 2010, (Rusça).

[4] Ibrahimov N.S., “On the order of accuracy of the difference method for solving initial value problems for the non-stationary equation of quasi optics”, Journal of Qafqaz University Mathematics and Computer Science, Vol 1, № 31, p. 55-68. 2011, (Rusça).

[5] Ibrahimov N.S., “On the rate of convergence of the difference method for solving the problem of identification of non-stationary equation of quasi optics”, Journal of Computational and Applied Mathematics, Kiev. Zap them. Shevchenko, № 3, p. 43-58. 2011, (Rusça).

[6] Iskenderov A.D., Ibrahimov N.S., “The initial-boundary value problems for the non stationary equation of quasi optics”, Bulletin of the Lankaran State. Univ. Ser. Science, Lankaran, p. 47-66. 2009, (Rusça).

[7] Iskenderov A.D., Yagubov G.Y., Ibrahimov N.S., “About an estimate of convergence of difference approximations by the functional in the identification problem for the non stationary equation of quasi optics”, Abstracts of the XIX International Conference Problems of Decision Making under Uncertainties (PDMU-2012), pp.118-120. Mukachevo, Ukraine, April 23-27 2012.

[8] İskenderov A.D.,Yagubov G.Y**.,** Musayeva M.A**.,** **“** Kuantum potansiyellerinin İdentifikasyonu”, Çaşıoğlu Yayınevi, 552 s. Bakü, 2012, (Rusça).

[9] Mahmudov, N.M., “Lions Fonksiyonelli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal Kontrol Probleminin Farklar Metoduyla Çözümü”, Azerbaycan Bilimler Akademisi Matematik Mekanik Enstitüsü Eserleri, 7, 79-82. 1997, (Rusça).

[10] Potapov M.M., Razgulin A.V., Şameeva T.Y., " Schrödinger Tipli Optimal Kontrol Probleminin Yaklaşımı ve Regülarizasyonu", Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri "Nümerik Analiz ve Sibernetik", 15(1), 8-13. 1987, (Rusça).

[11] Razgulin A.V., "Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Kontrol Problemlerinin Yaklaşımları", Moskova Devlet Üniversitesi Haberleri "Nümerik Analiz ve Sibernetik" , 15(2), 28-33. 1998, (Rusça).

[12] Samarskiy, A.A., Lazarov, R.D., Makarov, V.L., "Genellesmiş Çözümlü Diferansiyel Denklemler için Fark Şemaları", s.296, Moskova, Vıssaya Skola, 1987,(Rusça).

[13] Senger, O., "Lineer Schrödinger Denklemi için Sınır Değer Probleminin Çözümüne ait Yüksek Mertebeden Kestirimler ve Onların Uygulamaları", Yüksek Lisans Tezi, 53 s. Kars, 2006.

[14] Silla, N., " Schrödinger Tipli Kuantum Mekanik Sistemler için Optimal Kontrol Problemlerinin Nümerik Çözümü", Doktora Tezi, Bakü Devlet Üniversitesi, s. 165, Bakü, 1991, (Rusça).

[15] Vorontsov M.A., Şmalqauzen V.I. "Adaptiv Optiğin Prensipleri", Moskova, Nauka, 1985, (Rusça).

[16] Yagub G., Ibrahimov N.S., Yildirim Aksoy, N., Deveci O., "The solution with difference method of on optimal control problem for nonstationary quasi-optics equation", Abstracts of the XXI International Conference Problems of Decision Making under, Uncertainties (PDMU-2013), Skhidnytsia, Ukraine, pp.68-71. May 13-17 , 2013.

[17] Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., " Finite-Difference method solution of variation formulation of an Inverse problem for nonlinear Schrodinger equation" Izv. AN Azerb.-Ser.Physic.tech.matem.nauk, vol.16, No 1-2, pp. 46-51, 1995, (Rusça).

[18] Yagubov, G.Ya., "Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayısıyla Bölgenin sınırı üzerinden integralle verilen Kritere sahip Optimal Kontrol Probleminin Çözümü için Fark Yöntemi",Matematik Modellemenin Temelleri ve Optimal Kontrol Dergisi, 37-48, Bakü, 2001, (Rusça).

[19] Yetiskin, H., "Kompleks Potansiyelli Schrödinger Denklemi için Optimal Kontrol Problemi ve Onun Sonlu Farklar Yaklaşımı", Doktora Tezi, ‚Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 92 s. 2005.

[20] Yıldız, B., Yagubov, G.Ya., ”On an optimal control problem”, Journal of Computational and Applied Mathematics, vol 88, pp. 275–287. 1997.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Zafer DEMİRCİ

Dogum Yeri :IĞDIR

Dogum Tarihi :30/08/1977

Medeni Hali :Evli

Yabancı Dili :İngilizce

Egitim Durumu (Kurum ve Yıl)

Lise :Şehit Nuri Pamir Lisesi Niğde (1991-1994)

Lisans :İnönü Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Elektrik Elektronik Mühendisliği (1996-2001)

Yüksek Lisans:Kafkas Üniversitesi FenBilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı (2011-2013)

Çalıstıgı Kurum/Kurumlar ve Yıl

2.Ana Jet Üs Uçs.Eğt.Mrk. İstihkam Tabur K.lığı (2001-2002)

Bilgitek Mühendislik Ltd. Şti.(2002 – 2004)

Ufuklift Asansör Mak. Elek. Elekt. Ltd. Şti. (2005)

Kars Köy Hizm. (Kontrol Müh.) (2006-2007)

Kars San. ve Tic. İl Müd.Organize San. Bölg. (Kontrol Müh.) (2007-2008)

Kars Organize Sanayi Bölge Müdür V. (2008)

Kafkas Üniversitesi Kars Meslek Yüksekokulu (2009-……)