T.C
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ÖZEL GRUPLARDA JACOBSTHAL VE JACOBSTHAL – PADOVAN DİZİLERİ

Gencay SAĞLAM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Ömür DEVECİ

TEMMUZ – 2013
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Gencay SAĞLAM'ın Doç. Dr. Ömür DEVECİ'nin danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı ''Bazı Özel Gruplarda Jacobsthal ve Jacıbsthal-Padovan Dizileri'' adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy ...birliği.....ile kabul edilmiştir.

11.../.07./2013

Adı ve Soyadı	İmza
Başkan : Prof. Dr. Gabil YAGUB	
Üye : Doç. Dr. Ömür DEVECİ	
Üye : Yrd. Doç. Dr. Gülcin CENGİZ	

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun .../.../2013 gün ve .../............ sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalıĢma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıĢtır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalıĢmalarımda etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danıĢman hocam Sayın Doç. Dr. Ömür DEVECĠ'ye teĢekkür ve Ģükranlarımı sunarım.

Emekleri ve güvenleriyle beni bugüne getiren, beni yalnız bırakmayan, her zaman arkamda bir dağ olarak bildiğim aileme sonsuz teĢekkür ederim.

Kars-2013 Gencay SAĞLAM

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalıĢmada ‘’Gruplarda Jacobsthal ve Jacobsthal-Padovan dizileri’’ ele alındı. Bu dizilerin gruplardaki uygulamaları üzerinde duruldu.

Bu çalıĢmanın 5.1 ve 5.2 bölümlerinde sırasıyla Jacobsthal ve Jacobsthal-Padovan dizilerinin tanım ve özellikler verildi. Daha sonraki 5.3 bölümünde ise genelleĢtirilmiĢ *k*-basamak Jacobsthal ve genelleĢtirilmiĢ *k*-basamak Jacobsthal-Padovan dizileri ile ilgili tanım ve teoremler verildi.

Son olarak çalıĢmanın 5.4 bölümünde sonlu gruplarda, genelleĢtirilmiĢ *k*-basamak Jacobsthal ve genelleĢtirilmiĢ *k*-basamak Jacobsthal-Padovan dizileri tanıtıldı. Daha sonra bu diziler, Dihedral grubunun $D_{2n} \times {}_{2m}$ direkt çarpım ve $D_{2n} \times_{\varphi} {}_{2m}$ yarı-direkt çarpım ile Quaternion grubunun $Q_{2^n} \times {}_{2m}$ direkt çarpım ve $Q_{2^n} \times_{\varphi} {}_{2m}$ yarı-direkt çarpım gruplarındaki orbitleri ve modüle göre durumları üzerinde duruldu. Daha sonra bu durumlar üzerinde çalıĢılarak elde edilen sonuçlar ispatlarıyla birlikte verildi.

2013, 79 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Jacobsthal Dizisi, Jacobsthal-Padovan Dizisi, Pell Dizisi, Dihedral Grup, Quaternion Grup, Fibonacci Dizisi, *k*-Nacci Dizisi, Direkt Çarpım,Yarı-Direkt Çarpım, Periyod, Matris

ABSTRACT

In this study have been handled ''Jacobsthal and Jacobsthal-Padovan sequences''. The applications of these sequences have been emphasized.

At the 5.1 and 5.2 sections of the study, the definition and features of Jacobsthal and Jacobsthal-Padovan sequences have been given respectively. At the next section 5.3 have been given the definitions and theorems associated with generalized *k*-Jacobsthal and *k*-Jacobsthal-Padovan sequences.

Ultimately, at the 5.4 section of the study, generalized *k*-Jacobsthal and *k*-Jacobsthal-Padovan sequences in finite groups have been introduced. Afterwards, the conditions of these sequences have been emphasized according to the orbits and modules in $D_{2n} \times Z_{2m}$ direct product and $D_{2n} \times_{\varphi} Z_{2m}$ semi-direct product groups of Dihedral group and $Q_{2^n} \times Z_{2m}$ direct product and $Q_{2^n} \times_{\varphi} Z_{2m}$ semi-direct product groups of Quaternion group. Later on, studying on these conditions, the obtained results have been submitted along with their evidences.

2013, 79 Pages

Keywords: Jacobsthal Sequence, Jacobsthal-Padovan Sequence, Pell Sequence, Dihedral Group, Quaternion Group, Fibonacci Sequence, *k*-Nacci Sequence, Direct Product, Semi-Direct Product, Period, Matrix.

SİMGELER DİZİNİ

e	Grubun birim elemanı
	Reel sayılar kümesi
	Tamsayılar kümesi
	Kompleks sayılar kümesi
	Rasyonel sayılar kümesi
	Doğal sayılar kümesi
$f_n{}^k$	$1 \le i < k$ için $f_i^{(k)} = 0$ ve $f_k^{(k)} = 1$ sınır Çartlarıyla tanımlı, $n > k$ için $f_n{}^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}{}^{(k)}$ k –basamak Fibonacci elemanı
$f(k, m)$	$f_n^{(k)}$ 'nin m 'ye göre modülü
$F_k(G; x_0, x_1, \ \ , x_{j-1})$ elde	G grubunda $x_0, x_1, \ \ , x_{j-1}$ baÇlangıç elemanları ile edilmiÇ k-nacci dizisi
G	Grup
$\lvert G \rvert$	Grubun mertebesi
$G =< A >$	A 'dan üretilen grup
G / H	G 'nin H 'a göre bölüm grubu

$G \cong H$	G grubu H grubuna izomorf
$G \leq H$	H , G ’nin alt grubu
$G \quad H$	H , G ’nin normal alt grubu
$\{J_n\}$	Jacobsthal dizisi
$J_A{}^k(G)$	BaĢlangıç elemanları A kümesi olan ve G grubunun elemanlarını oluĢturan k-basamak jacobsthal dizisinin periyodu
$\{J^{k,m}\}$	m modülüne göre k mertebeden Jacobsthal dizisi
$\{J(n)\}$	Jacobsthal-Padovan dizisi
$hJ^{(m)}$	Jacobsthal-Padovan dizisinin periyodu
$\{JP^k(n)\}$	GenelleĢtirilmiĢ k basamak Jacobsthal-Padovan dizisi
$\{JP^{k,m}(n)\}$	m modülüne göre k basamak Jacobsthal-Padovan dizisi
$JP_A{}^k(G)$	BaĢlangıç elemanları A kümesi olan ve G grubunun elemanlarını oluĢturan k-basamak Jacobsthal-Padovan dizisinin periyodu
$Aut(G)$	G grubunun bütün otomorfizmlerinin kümesi

$I(G)$	G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesi
$Ser(A)$	A üzerindeki serbest grup
$Q_k(G; x_0, x_1, \ldots, x_{j-1})$	Grubun Pell dizisi
$\{P^{k,m}\}$	m modülüne göre k mertebeden Pell dizisi
$hP_k(m)$	m modülüne göre k mertebeden Pell dizisinin periyodu
$k(p)$	Standart Fibonacci dizisinin periyodu
$h_k(m)$	$f(k, m)$'nin en küçük periyodu
$P_k(G; x_0, x_1, \ldots, x_{j-1})$	$F_k(G; x_0, x_1, \ldots, x_{j-1})$ k-nacci dizisinin periyodu
(l, m, n)	Polyhedral grup
$\langle l, m, n \rangle$	Binary polyhedral grup
$[G : H]$	G ' de H 'ın indeksi
$PerQ_k(G; x_0, x_1, \ldots, x_{j-1})$	$Q_k(G; x_0, x_1, \ldots, x_{j-1})$ dizisinin periyodu

1. GİRİŞ

Lineer indirgemeli diziler; matematik, fizik ve bilgisayar bilimlerinden güzel sanatlara kadar birçok alandaki modern araÇtırmalarda karÇımıza çıkmaktadır ([37 − 39, 41 − 43]).

Gruplarda lineer indirgemeli diziler ilk olarak Wall ([43]) tarafından çalıÇılmıÇtır. Wall, bu çalıÇmasında devirli gruplarda klasik Fibonacci dizilerini incelemiÇtir. Daha sonra yapılan birçok çalıÇmada, konsept bazı lineer indirgemeli dizilerin grup ailelerinde incelenmesi olarak geniÇletilmiÇtir ([34, 45 − 47]).

Deveci, [10]'daki çalıÇmasında gruplarda Pell-Padovan ve Jacobsthal-Padovan dizilerini incelemiÇ ve 2-gerenli gruplar için Pell-Padovan, Co- Pell-Padovan ve Jacobshal-Padovan orbitlerini tanımlamıÇtır. Aynı çalıÇmada Deveci, Fibonacci gruplarının Pell-Padovan, Co- Pell-Padovan ve Jacobshal-Padovan uzunluklarını elde etmiÇtir.

(Deveci et.al [18])'daki çalıÇmalarında, gruplarda genelleÇtirilmiÇ k-basamak Jacobsthal ve genelleÇtirilmiÇ k-basamak Jacobsthal-Padovan dizilerini incelemiÇler ve k-gerenli gruplar için genelleÇtirilmiÇ k-basamak Jacobsthal ve genelleÇtirilmiÇ k-basamak Jacobsthal-Padovan orbitlerini tanımlamıÇlardır. Aynı çalıÇmada, $D_{2^n} \times {}_{2^m}$ $(n, m \geq 3)$ ve $D_{2^n} \times_{\varphi} {}_{2^m}$ $(n, m \geq 3)$ gruplarındaki genelleÇtirilmiÇ 3-basamak Jacobsthal ve Jacobsthal-Padovan orbitlerinin uzunlukları elde edilmiÇtir.

Deveci ve Sağlam [20]'da, $n, m \geq 3$ için Q_{2^n}, $Q_{2^n} \times {}_{2^m}$ ve $Q_{2^n} \times_{\varphi} {}_{2^m}$ gruplarındaki k-basamak Jacobsthal uzunluklarını elde etmiÇlerdir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Grup Takdimleri

Tanım 2.1.1: Bir $G \neq \emptyset$ kümesinde bir $(a\ ,\ b\ ) \rightarrow ab$ ikili iÇlemi aÇağıdaki kuralları gerçekliyorsa, G ye bir grup denir.

1. $\forall a, b, c \in G$ için $a\ (\ bc\ ) \rightarrow (ab\ )\ c$ (birleÇme özelliği).

2. $\forall a \in G$ için $ae = ea = a$ olacak Çekilde bir $e \in G$ vardır. e elemanına G 'nin birim elemanı denir.

3. $\forall a \in G$ için $aa^{-1} = a^{-1}a = e$ olacak Çekilde bir $a^{-1} \in G$ vardır. $a^{-1} \in G$ elemanına a 'nın inversi (tersi) denir.

Tanım 2.1.2: $(G, *)$ bir grup olmak üzere $\forall a, b \in G$ için

$$a * b = b * a$$

oluyorsa o zaman bu gruba değiÇmeli (komutatif ya da abelyan) grup denir (D. TaÇçı 2010).

Örnek 2.1.1: tamsayılar kümesi , rasyonel sayılar kümesi , reel sayılar kümesi vekompleks sayılar kümesi toplama iÇlemine göre bir değiÇmeli gruptur.

Örnek 2.1.2: $^{*} = -\{0\}$, $^{*} = -\{0\}$, $^{*} = -\{0\}$ olmak üzere bu kümeler çarpma iÇlemine göre birer değiÇmeli gruptur. Burada hemen belirtelim ki, tamsayılar kümesi çarpma iÇlemine göre bir grup olamaz. Çünkü her elemanın tersi yoktur. Sözgelimi ; $2 \in$ için

$$2.\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

olup

$$\left(\frac{1}{2}\right) \notin$$

olduğundan grup tanımındaki ters eleman Çartı sağlanmadığından grup olamaz.

$G_1, G_2, \;\; , G_n$ grupları verilmiĢ olsun. Her $i = 1, 2, \;\; , n$ için i -inci bileĢeni G_i içinde olan sıralı n -lilerin oluĢturduğu kümeyi $G_1 \oplus G_2 \oplus \;\; \oplus G_n$ ile göstereceğiz:

$$G_1 \oplus G_2 \oplus \;\; \oplus G_n = \{g_1, g_2, \;\; , g_n : \mathrm{g_i} \in G_i, 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n}\}.$$

$G_1 \oplus G_2 \oplus \;\; \oplus G_n$ nin iki elemanı $(g_1, g_2, \;\; , g_n)$, $(g_1', g_2', \;\; , g_n')$ için $(g_1, g_2, \;\; , g_n)(g_1', g_2', \;\; , g_n') = (g_1 g_1', g_2 g_2', \;\; , g_n g_n')$ eĢitliği tanımlanırsa, $G_1 \oplus G_2 \oplus \;\; \oplus G_n$ içinde bir ikili iĢlem elde edilir. Burada, $g_i g_i'$ nin G_i nin ikili iĢlemine göre hesaplanacağı açıktır. Bu ikili iĢleme göre $G_1 \oplus G_2 \;\; \oplus \;\; \oplus G_n$ içinde birleĢme özelliğinin geçerli olduğu; eğer her bir $i = 1, 2, \;\; , n$ için G_i nin birim elemanı e_i ise, $(e_1, e_2, \;\; , e_n)$ nin de $G_1 \oplus G_2 \oplus \;\; \oplus G_n$ nin birim elemanı olduğu ve ayrıca, $G_1 \oplus G_2 \oplus \oplus G_n$ nin her elemanının tersinir olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla, bu ikili iĢlemle $G_1 \oplus G_2 \oplus \oplus G_n$ bir gruptur (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Tanım 2.1.3: $G_1 \oplus G_2 \;\; \oplus \;\; \oplus G_n$ ye $G_1, G_2, \;\; , G_n$ gruplarının dıĢ dolaysız çarpımı (veya dıĢ dolaysız toplamı) denir (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Tanım 2.1.4: G bir grup; $H_1, \;\; , H_n$ onun alt grupları olsun. AĢağıdaki üç koĢul sağlanırsa, G grubu $H_1, \;\; , H_n$ alt gruplarının iç dolaysız çarpımıdır denir ve $G = H_1 \times \;\; \times H_n$ yazılır:

1. $G = H_1 \quad H$.
2. Her $i \neq j$, $h_i \notin H_i, h_j \in H_j$ için $h_i h_j = h_j h_i$ dir.
3. Her $i = 1, \;\; , n-1$ için $(H_1 \quad H_i) \cap H_{i+1} = \{e\}$ dir (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Tanım 2.1.5: $(G, *)$ bir grup olsun. Eğer G kümesi sonlu ise o zaman bu gruba sonlu grup denir. Eğer G kümesi sonlu değilse bu durumda $(G, *)$ grubuna, sonsuz grup denir
(D.TaĢçı 2010).

Teorem 2.1.1: $(G, *)$ bir grup olsun. Buna göre

(i) G 'nin birimi tektir.

(ii) G 'nin her elemanının tersi tektir.

(iii) $a \in G$ için $a * a = a$ ise $a = e$ dir.

(iv) G grubunda soldan ve sağdan kısaltma kuralları geçerlidir. Yani $a, b, c \in G$ için

$a * b = a * c$ ise $b = c$ (Soldan kısaltma kuralı)

$b * a = c * a$ ise $b = c$ (Sağdan kısaltma kuralı)

(v) $a, b \in G$ için $a * x = b$ ve $y * a = b$ denklemlerinin G 'deki iĢlemleri tektir.

(vi) $a \in G$ için $\left(a^{-1}\right)^{-1} = a$ 'dır (D.TaĢçı 2010).

Tanım 2.1.6: $(G, *)$ bir grup olmak üzere $a \in G$ elemanının kuvvetleri $n \in Z^{+} \cup \{0\}$ için

$$a^{n} = a * a * \ \ * a \quad (n \text{ tane çarpan})$$
$$a^{0} = e \quad (e, (G, *) \text{ 'nin birim elemanı})$$
$$a^{-n} = \left(a^{-1}\right)^{n}$$

Ģeklinde tanımlanır (D.TaĢçı 2010).

Not 2.1.1: Burada hemen belirtelim ki eğer ikili iĢlem çarpma iĢlemi ise,

$$a^{n} = a.a.a. \ \ .a \quad (n \text{ tane çarpan})$$

toplama iĢlemi ise,

$$na = a + a + a + \ \ + a \quad (n \text{ tane toplam})$$

Ģeklinde tanımlanır.

Teorem 2.1.2: $(G, *)$ bir grup , $a \in G$ ve $m, n \in$ olmak üzere a 'nın kuvvetleri için aĢağıdaki ifadeler geçerlidir (D.TaĢçı 2010) :

(i) $a^{m} * a^{n} = a^{m+n} = a^{n} * a^{m}$

(ii) $\left(a^{m}\right)^{n} = a^{mn} = \left(a^{n}\right)^{m}$

(iii) $a^{-m} = \left(a^{m}\right)^{-1}$

(iv) $e^{m} = e$

Tanım 2.1.7: G bir grup ve $\varnothing \neq H \subseteq G$ bir alt küme olsun. H, G 'de tanımlanan ikili iĢleme göre bir grup ise H 'a, G 'nin bir alt grubu denir ve $H \leq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8: $H = \{e\}$ ve $H = G$ alt kümeleri daima G grubunun alt gruplarıdır. $H = \{e\}$ alt grubuna aĢikar alt grup ve G 'den farklı her H alt grubuna da öz alt grup denir. Eğer H, G 'nin bir öz alt grubu ise $H < G$ olarak gösterilir.

Tanım 2.1.9: G bir grup, S ve T, G 'nin boĢ olmayan alt kümeleri olsun. Bu taktirde

$$ST = \{st \mid s \in S,\ t \in T\}$$

olarak tanımlanır. Özellikle, $T = \{t\}$ için t yazarsak bu taktirde

$$Tt = \{st \mid s \in S\}$$

dir.

Tanım 2.1.10: G bir grup, $H \leq G$ ve $g \in G$ olsun. Bu taktirde,

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}$$

kümesine H 'ın, G de bir sağ-yan sınıfı denir. Benzer Ģekilde bir gH sol-yan sınıfı da tanımlanır. g ye Hg (ve gH)'nin bir temsilcisi denir. H 'ın , G 'deki bütün sağ-yan sınıflarının koleksiyonu G / H ile gösterilir:

$$G / H = \{Hg \mid g \in G\}$$

dir. G de H 'ın bir sağ-yan sınıfı birçok temsilciye sahip olabilir.

Teorem 2.1.3: G bir grup ve $H \leq G$ ve $a, b \in G$ olsun. Buna göre;

(i) $a \in aH$

(ii) $aH = H$ olması için gerek ve yeter Ģart $a \in H$ olmasıdır.

(iii) H 'ın G 'deki sol (sağ) yan sınıfları ya çakıĢıktır ya da ayrıktır. Yani $a, b \in G$ olmak üzere ya

$$aH = bH$$

ya da

$$aH \cap bH = \varnothing$$

dir.

(iv) $aH = bH$ olması için gerek ve yeter Çart $a^{-1}b \in H$ olmasıdır.

(v) $aH = Ha$ olması için gerek ve yeter Çart $H = a^{-1}Ha$ olmasıdır.

(vi) H 'ın G deki sağ yan sınıflarının sayısı ile sol yan sınıflarının sayısı aynıdır.

(viii) $aH \leq G$ olması için gerek ve yeter Çart $a \in H$ olmasıdır (D.TaÇçı 2010).

Tanım 2.1.11: G bir grup, $H \leq G$ olsun. H alt grubunun her sol-yan sınıfından (veya sağ-yan sınıfından) bir tek eleman seçilerek, bu elemanlardan teÇkil edilen R kümesine, H alt grubunun G deki sol transversalı (veya sağ transversalı) denir.

Tanım 2.1.12: G bir grup, $H \leq G$ olsun. G 'de H 'ın bütün sağ-yan sınıflarının sayısına G de H 'ın indeksi denir ve $[G : H]$ ile gösterilir. Buna göre, $|R| = [G : H]$ dır.

Teorem 2.1.4: $[G : H] = 2$ ise H normaldir.

Teorem 2.1.5 (Lagrange): Eğer G sonlu bir grup ve $H \leq G$ ise bu taktirde $|H|$,$|G|$'yi böler. Yani ,

$$o(G) / o(H)$$

dır.

İspat: H alt grubunun G 'deki farklı sağ yan sınıfları

$$Ha_1 , Ha_2 , \quad , Ha_s$$

olsun. O taktirde G 'deki her bir a_i elemanı için $1 \leq i \leq s$ olmak üzere

$$aH = Ha_i$$

yazarız. Diğer taraftan Teorem 2.1.3 (i) den $a \in aH$ olduğunu göz önüne alarak G 'nin her bir elemanının Ha_i yan sınıflarından birine ait olduğu görülür. Bu durumda

$$G = Ha_1 \cup Ha_2 \cup \quad \cup Ha_s$$

yazarız. Teorem 2.1.3 (iii)'den bu birleÇimdeki sınıflar ayrık olduğundan

$$o(G)=o(Ha_1)+o(Ha_2)+\cdots+o$$

(Ha_s) yazarız. Diğer taraftan $\forall i\ (1\le i\le s)$ için

$$o(Ha_i)=o(H)$$

olduğundan

$$o(G)=s.o(H)$$

yazarız. Buradan tamsayılarla bölünebilme tanımı göz önüne alınarak

$$o(G)\,/\,o(H)$$

olduğu görülür.

Sonuç 2.1.1: G sonlu bir grup ve H, G 'nin bir alt grubu ise o taktirde H ‘ın G 'deki farklı sağ (sol) yan sınıflarının sayısı yani indeksi ,

$$[G:H]=\frac{o(G)}{o(H)}$$

dir (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

İspat: Bu sonucun ispatı Lagrange Teoremin ispatından kolayca görülür. Çünkü ispattaki s sayısı H ‘ın G 'deki farklı sağ yan sınıflarının sayısı , diğer bir deyimle H ‘ın G 'deki indeksidir. Yani ,

$$s=[G:H]$$

dır. O halde buradan,

$$s=[G:H]=\frac{o(G)}{o(H)}$$

yazarız. Böylece ispat tamamlanmıĢ olur.

Tanım 2.1.13: G bir grup ve $H\le G$ olsun. Eğer her $g\in G$ için $gHg^{-1}=H$ oluyorsa H 'a, G nin bir normal alt grubu denir ve $H \trianglelefteq G$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.14: Eğer G grubu normal alt grup içermiyorsa G 'ye basit grup denir.

Tanım 2.1.15: G bir grup ve $x, y \in G$ olsun.

$$y = g^{-1}xg$$

olacak Çekilde bir $g \in G$ elemanı varsa y , x e eÇleniktir denir. G 'de x e eÇlenik bütün elemanların kümesi x^G ile gösterilir. $x^G = \{g^{-1}xg : g \in G\}$. x^G ye G 'de x 'in eÇlenik sınıfı denir (G. James and M. Liebeck 1993).

Tanım 2.1.16*:* *H, K* $< G$ ve $a \in G$ olsun.

i. $aHa^{-1} = \{aha^{-1} \in G : h \in H\}$ kümesine H alt grubunun a ile eÇleniği denir.

ii. $N_K(H) = \{k \in K : kHk^{-1} = H\}$ kümesine H alt grubunun K içindeki normalleÇtiricisi denir (F. Çallıalp 2001).

Tanım 2.1.17: G bir grup olmak üzere

$$Z = Z(G) = \{a \in G \mid \forall x \in G, ax = xa\}$$

kümesine, G **'**nin merkezi denir. Eğer $Z(G) = e$ ise G grubuna merkezsizdir denir (G. James and M. Liebeck 1993).

Tanım 2.1.18: G bir grup ve $x \in G$ olsun. x 'nın G 'deki merkezliyeni, x ile değiÇmeli olan bütün $g \in G$ lerin kümesidir. x 'nın G 'deki merkezliyeni $C_G(x)$ veya $C(x)$ ile gösterilir.

$$C_G(x) = \{g \in G \mid ag = ga\}$$

dır (G. James and M. Liebeck 1993).

Tanım 2.1.19: N , G 'nin bir normal alt grubu olsun. G/N kümesi üzerinde $(Ng)(Nh) = N(gh)$ ile bir çarpım tanımlansın. Bu takdirde G/N bu çarpıma göre mertebesi $[G : N]$ olan bir gruptur. Bu gruba N ile G 'nin bölüm (faktör) grubu denir.

Tanım 2.1.20: G bir grup ve H , G 'nin bir alt grubu olsun. $H < G$ ve $H < K \leq G$ den $K = G$ elde edilirse H alt grubuna, G 'nin bir maksimal alt grubu denir.

$E = \{e\}$ olmak üzere $E < H$ ve $E \leq K < H$ dan $K = E$ elde edilirse H alt grubuna, minimal alt grup denir.

Tanım 2.1.21: G bir grup ve S' de G ' nin bir alt kümesi olsun. G ' nin S alt kümesini kapsayan en küçük normal alt grubuna S alt kümesinin normal kümesinin normal kapanıĢı denir.

Tanım 2.1.22: $(G,*)$ ve $(H, \ )$ iki grup olmak üzere , eğer $\varphi : G \to H$ dönüĢümü

$\forall x, y \in G$ için $\varphi(x * y) = \varphi(x) \ \varphi(y)$ Ģartını sağlıyorsa , φ ' ye bir grup homomorfizmi ya da kısaca homomorfizm denir (TaĢçı 2007).

Tanım 2.1.23: $\varphi : G \to H$, örten bir grup homomorfizmi ise φ ' ye bir epimorfizm denir (TaĢçı 2007).

Tanım 2.1.24: $\varphi : G \to H$, 1-1 bir grup homomorfizmi ise φ ' ye bir monomorfizm denir (TaĢçı 2007).

Tanım 2.1.25: $\varphi : G \to H$, 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ' ye bir grup izomorfizmi denir ve $G \cong H$ Ģeklinde gösterilir (TaĢçı 2007).

Ġzomorf gruplar arasında bire bir eĢleme olup grup yapıları da bu eĢleme altında bozulmaz.

Tanım 2.1.26: $\varphi : G \to G$ homomorfizmine endomorfizm denir. Eğer φ , 1-1 ve örten bir grup homomorfizmi ise φ ' ye bir grup otomorfizmi denir (TaĢçı 2007).

Tanım 2.1.27: G bir grup ve $a \in G$ olmak üzere $\forall x \in G$ için $\mathrm{I}_a : G \to G$ otomorfizmine G grubunun iç otomorfizmi denir. G grubunun bütün iç otomorfizmlerinin kümesi $\mathrm{I}(G)$, bütün otomorfizmlerinin kümeside $Aut(G)$ ile gösterilir (TaĢçı 2007).

Teorem 2.1.6: G bir grup ve M, G nin bir normal alt grubu olsun. Bu taktirde M, G 'nin bir maksimal alt grubudur ancak ve ancak G/M basittir.

Tanım 2.1.28: A boŞ olmayan bir küme, $\notin A \cup A^{-1}$ olmak üzere terimleri $A \cup A^{-1} \cup \{\ \}$ nin elemanları olan $(x_1, x_2, \ , x_k, \ )$ dizisi verildiğinde, uygun bir $n \geq 1$ için n. terimden sonraki tüm terimler ise, bu diziye A üzerinde bir kelime denir. A üzerinde bir kelime, $x = (x_1, x_2, \ , x_n, \ , \ , \ )$ biçiminde bir dizidir. Özel olarak her terimi olan $1 = (\ , \ , \ )$ dizide bir kelimedir; bu kelime boŞ kelime denir (H. Ġbrahim KarakaŞ 2010).

Tanım 2.1.29: Eğer $x = (x_1, x_2 \ , x_n, \ , \ , \ )$ kelimesi aŞağıdaki koŞulları sağlıyorsa x 'e bir kısaltılmıŞ kelime denir.

i. $1 \leq i \leq n-1$ olan bir i için $x_i = a \in A$ ise $x_{i+1} \neq a^{-1}$ 'dir.ve $x_i = a^{-1} \in A^{-1}$ ise $x_{i+1} \neq a$ dır.

i. $k \in N$ ve $x_k =$ ise, her $i \geq k$ için $x_i =$ dir (H. Ġbrahim KarakaŞ 2010).

Tanım 2.1.30: A üzerindeki bütün kısaltılmıŞ kelimelerin kümesi $Ser(A)$, aŞağıdaki gibi tanımlanmıŞ ikili iŞleme göre bir gruptur. Bu gruba A kümesi üzerindeki serbest grup denir (H. Ġbrahim KarakaŞ 2010).

i. Her $x \in Ser(A)$ için $1.x = x.1 = x$

ii. Her $x, y \in Ser(A)/\{1\}$ için, $x = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \ a_n^{\lambda_n}, y = b_1^{\alpha_1} b_2^{\alpha_2} b_r^{\alpha_r}$ ise xy çarpımını tanımlarken genelliği bozmadan $n \geq r$ kabul edebiliriz. Amacımız x ile y ' yi yan yana yazarak bir kısaltılmıŞ kelime oluŞturmaktır. Burada $a_n^{\lambda_n} = b_1^{-\alpha_1}$ ise x ile y yan yana yazılınca kısaltılmıŞ kelime elde edilmez. Bunun için $0 \leq k \leq r$ olmak üzere her $i = 0, 1, 2, \ , k-1$ için, $a_{n-i}^{\lambda_{n-i}} = b_{i+1}^{-\alpha_{i+1}}$ koŞulunu sağlayan k olsun. Eğer,

$$xy = \begin{cases} a_1^{\lambda_1} \; a_{n-k}^{\lambda_{n-k}} b_{k+1}^{\lambda_{k+1}} \; b_r^{\lambda_r}, & k < r < n, \\ a_1^{\lambda_1} \; a_{n-r}^{\lambda_{n-r}}, & k = r < n, \\ 1, & k = r = n, \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa xy bir kısaltılmıĢ kelime olur ve böylece $Ser(A)$ üzerinde bir ikili iĢlem elde etmiĢ oluruz. Bu ikili iĢleme göre 1'in birim eleman olduğu ve $x = a_1^{\lambda_1} \quad a_n^{\lambda_n}$ in tersinin $x = a_n^{-\lambda_1} \quad a_1^{-\lambda_n}$ olduğu açıktır.

Teorem 2.1.7: BoĢ olmayan her A kümesi için $Ser(A)$ bir gruptur ve A, $Ser(A)$ yı üretir. $Ser(A)$ ya A üzerindeki serbest grup denir (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Teorem 2.1.8: Her grup, bir serbest grubun homomorf görüntüsüdür
(H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

İspat: G herhangi bir grup olsun. G 'nin birim elemanı e ve herhangi bir üreteçler kümesi A olsun. $h : Ser(A) \to G$ fonksiyonu, $h(1) = e$ ve $h\left(a_1^{\lambda_1} \quad a_n^{\lambda_n}\right) = a_1^{\lambda_1} \quad a_n^{\lambda_n}$ ile tanımlansın. Burada, $a_1^{\lambda_1} \, a_n^{\lambda_n}$ ifadesi bir kısaltılmıĢ kelimeyi, sağ taraftaki $a_1^{\lambda_1} \quad a_n^{\lambda_n}$ ise G 'nin bir elemanını göstermektedir. Böylece tanımlanan h , iyi tanımlı örten bir homomorfizmdir.

Teorem 2.1.9: i. G bir grup; $A, B \subseteq G$ olsun. Eğer G grubu hem A hem de B üzerinde serbest ise, $|A| = |B|$ dir. BaĢka bir deyiĢle, bir serbest grubun herhangi iki serbest üreteçler kümesinin kardinalitesi aynıdır. (bu kardinaliteye o grubun rankı denir).

ii. Ġki serbest grubun izomorf olmaları için gerek ve yeter koĢu, o iki grubun ranklarının ayuı olmasıdır.

iii. F bir serbest grup, $\{e\} \neq K \leq F$ ise, K da serbesttir (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Gruplar üzerinde homomorfizmler, üreteçler üzerindeki etkileriyle tamamen belirlenirler. Bu bağlamda, aĢağıdaki basit fakat önemli teoremi veriyoruz.

Teorem 2.1.10: G bir grup, $\{a_i : i \in I\}$ onun bir üreteçler kümesi ve G' de herhangi bir olsun. Eğer her $i \in I$ için G' 'nin , farklı olmaları gerekmeyen , $a_i' \in G'$ elemanları verilmiÇse, G den G' ye , $\sigma(a_i) = a_i'$, $i \in I$, koÇullarını sağlayan en çok bir homomorfizm $\sigma : G \to G'$ vardır. Eğer G grubu, $\{a_i : i \in I\}$ üzerinde serbest grup ise sözü edilen koÇulları sağlayan bir ve yalnız bir homomorfizm vardır (H. Ġbrahim KarakaÇ 2010).

Tanım 2.1.31: A boÇ olmayan bir küme, $B \subseteq Ser(A)$ ve B ' nin $Ser(A)$ içinde ürettiği normal alt grup, N olsun. Bu taktirde $G = Ser(A)/N$ grubuna $a \in A$ üreteçleri ve $(W = e \; W \in B)$ bağıntılarının belirlediği grup denir. $(A \mid B)$ gösterimine, G grubunun bir takdimi denir. $\varnothing \neq A$ ve $B \subseteq Ser(A)$ verildiğinde takdimi $(A \mid B)$ olan bir grubun varlığı açıktır. Eğer $A = \{a_i : i \in I\}$ ve $B = \{b_j : j \in I\}$ ise, $(A \mid B)$ gösterimi yerine

$$(a_i \mid b_j) \text{ veya } (a_i \mid b_j = e)$$

gösterimi de kullanılır. Ġkinci gösterimin çıkıÇ nedeni Çöyle açıklanabilir: A kümesi, $\sigma : Ser(A) \to Ser(A)/N$ doğal homomorfizmi altındaki görüntüsü olan $\sigma(A)$ kümesi ile özdeÇlenmiÇ olsun. Daha kesin bir ifadeyle her $a \in A$ için a ile aN yi özdeÇleyelim. Tabi bu yapılırken A 'nın bazı elemanları aynı eÇ küme ile ve sonuç olarak birbirleri ile özdeÇlenmiÇ olur. Özel olarak, N 'nin ve daha özel olarak, B 'nin her b elemanı için b ile $bN = eN$ yi özdeÇlemek demek, b ile e yi özdeÇlemek demektir. Sonuçta,

$G = Ser(A)/N$ grubu , bazı elemanları özdeÇlenmiÇ olabilen bu A kümesinin ürettiği ve her $b \in B$ için $b = e$ bağıntılarının sağladığı gruptur.

$$b \in B \Rightarrow b = x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \Rightarrow x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} N = N \Rightarrow x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} = e \in G = Ser(A)/N$$

(H. Ġbrahim KarakaÇ 2010).

Tanım 2.1.32: G bir grup ve $\varnothing \neq A \subseteq G$ olsun. G grubunun A 'yı içeren bütün alt gruplarının ailesinin ara kesitini $< A >$ ile gösterelim. Bu takdirde $< A >$, G 'nin bir alt grubudur. Bu alt grup A 'yı içeren en küçük alt gruptur ve A tarafından üretilen alt grup olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.33: X bir küme; $F(X), X$ üzerinde serbest grup ve $R \subseteq F(X)$ olsun. $G = \langle X : R \rangle$ 'a G grubunun serbest veya basit takdimi denir. Burada X kümesine tanımlayıcı gerenler kümesi ve $r \in R$ için $r = e$ olacak Çekildeki denklemlerin kümesine ise tanımlayıcı bağıntılar kümesi denir, r elemanlarına da bağıntılar denir.

Hem X hem de R sonlu kümeler olmak üzere bir G grubu $\langle X : R \rangle$ Çeklinde takdim edilirse bu gruba sonlu takdim edilmiÇ grup denir (H. Ġbrahim KarakaÇ 2010).

Tanım 2.1.34: G bir grup olmak üzere $H = \{a^n : n \in \}$ alt grubuna G 'nin a elemanı tarafından devirli alt grubu denir ve $\langle a \rangle$ ile gösterilir. Yani ,

$$\langle a \rangle = \{a^n : n \in \} = H$$

dır. Buradan hareketle devirli grubu Çu Çekilde de tanımlayabiliriz:

G bir grup olmak üzere G 'de $G = \{a^n : n \in \}$ olacak Çekilde bir a elemanı varsa o zaman G grubuna devirli grup denir. Böyle bir a elemanına G 'nin üreteci denir ve $G = \langle a \rangle$ Çeklinde gösterilir (D.TaÇçı 2010).

Teorem 2.1.11: Her devirli grup değiÇmelidir (D.TaÇçı 2010).

İspat: G , $a \in G$ tarafından üretilen bir devirli grup yani ,

$$G = \langle a \rangle = \{a^n : n \in \}$$

olsun. Buna göre $\forall x, y \in G$ için $xy = yx$ olduğunu gösterirsek o zaman teoremi ispatlamıÇ oluruz. $x \in G$ ise G 'nin tanımından $x = a^k$, $k \in$ olarak alabiliriz. Yine benzer düÇünce ile $y \in G$ ise $y = a^s$, $s \in$ olarak alabiliriz. O halde

$$xy = a^k a^s = a^{k+s} = a^s a^k = yx$$

yazarız. Bu ise G grubunun değiÇmeli olduğunu gösterir.

Teorem 2.1.12: Bir devirli grubun her alt grubu da devirlidir (D.TaÇçı 2010) .

İspat: G , $a \in G$ tarafından üretilen bir devirli grup yani ,

$$G=\langle a\rangle=\{a^n : n\in \}$$

Çeklinde bir devirli grup ve $H\leq G$ olsun. Ġspatımızı iki aÇamada yapalım.

(i) Eğer $H=\{e\}$ ise yani G 'nin birim elemanından oluÇan aÇikar alt grubu ise o taktirde

$$\langle e\rangle=\{e^n : n\in \}=\{e\}=H$$

olduğundan açık olarak H bir devirli gruptur.

(ii) $H\neq\{e\}$ olduğunu varsayalım Bu durumda $n\in {}^{+}$ olmak üzere bir $a^n\in H$ vardır. Diğer taraftan m 'nin $a^m\in H$ olacak Çekilde en küçük pozitif kuvvetli tamsayı olduğunu farz edelim. Buna göre iddia ediyoruz ki,

$$H=\langle a^m\rangle$$

dir. Bunu iki kümenin eÇitliği tanımına göre iki yönlü kapsama Çeklinde gösterirsek o zaman istenilen gösterilmiÇ olur.

$$\langle a^m\rangle=\left\{\left(a^m\right)^q : q\in \right\}$$

Çeklinde a^m 'nin kuvvetlerinden oluÇan bir küme olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan $a^m\in H$ ve $H\leq G$ olduğundan kapalılıktan a^m 'nin bütün kuvvetleri aynı zamanda H 'da olacağından buradan

$$\langle a^m\rangle\subseteq H$$

sonucunu elde ederiz. ġimdi de $a^n\in H$ alıp $a^n\in\langle a^m\rangle$ olduğunu göstermeliyiz. Bölme Algoritmasından

$$n=mq+r\ ,0\leq r<m$$

olacak Çekilde bir tek q , r tamsayı çifti vardır. Buradan hareketle

$$a^n=a^{mq+r}=a^{mq}.a^r=\left(a^m\right)^q.a^r$$

olup buradan a^r 'yi çekersek

$$a^r=\left(a^m\right)^{-q}.a^n$$

buluruz. Halbuki

$$a^n\in H\,,\,a^m\in H \text{ ve } H\leq G$$

olduğundan dolayısı ile her Çeyden önce bir grup olduğundan

$$\left(a^{m}\right)^{-q} \in H$$

dir. Böylece

$$\left(a^{m}\right)^{-q} \in H \text{ ve } a^{n} \in H$$

olduğundan kapalılıktan

$$\left(a^{m}\right)^{-q} a^{n} \in H$$

yazarız. Buradan $a^{r} \in H$ sonucunu elde ederiz. Halbuki $0 \leq r < m$ olduğundan $a^{r} \in H$ olması a^{m} 'nin H 'daki en küçük pozitif kuvvetli eleman olması ile çeliĢir. O halde bu $r = 0$ olması durumunda mümkündür. Böylece $n = mq$ ve

$$a^{n} = a^{mq} = \left(a^{m}\right)^{q} \in \langle a^{m} \rangle$$

olur. Bu da

$$H \subseteq \langle a^{m} \rangle$$

olmasını gerektirir. Böylece istenilen görülür ve teorem ispatlanmıĢ olur.

Teorem 2.1.13: G bir grup , $a \in G$ ve a 'nın mertebesi n yani $o(a) = n$ olsun. Buna göre;

(i) Eğer a 'nın mertebesi sonsuz ise o taktirde a 'nın bütün farklı kuvvetleri grubun farklı elemanlarıdır.

(ii) Eğer a 'nın mertebesi sonlu ise yani $a^{n} = e$ Ģartını sağlayan en küçük pozitif tamsayı n ise o taktirde a 'nın ürettiği devirli grubun yani $\langle a \rangle$ 'nın mertebesi de n dir. Diğer bir deyimle

$$\langle a \rangle = \{e, a, a^{2}, \ldots, a^{n-1}\}$$

dir.

(iii) a 'nın mertebesi sonlu ve n olmak üzere $a^{k} = a^{l}$ olması için gerek ve yeter Ģart $k \equiv l \pmod{n}$ olmasıdır.

(iv) $o(a) = n$ sonlu olmak üzere $a^{k} = e$ olması için gerek ve yeter Ģart n / k olmasıdır (D.TaĢçı 2010).

Sonuç 2.1.2: $G = \langle a \rangle$ sonlu bir devir grubu ve $o(G) = k < \infty$ olsun. $H \neq \{e\}$ ve $a^n \in H$ olacak Çekildeki $n > 0$ pozitif tamsayılarının en küçüğü m olmak üzere $H = \langle a^m \rangle$ olduğunu kabul edelim. O halde,

$$m / k \text{ ve } o(H) = \frac{k}{m}$$

dir (D.TaÇçı 2010).

İspat: Bölme Algoritmasından

$$k = mq + r, 0 \leq r < m$$

yazabiliriz. Bu durumda

$$e = a^k = a^{mq+r} = (a^m)^q . a^r$$

olup buradan a^r 'yi çekersek,

$$a^r = a^{-mq} \in H$$

buluruz. O halde m 'nin tanımından $0 \leq r < m$ olması $a^r \in H$ olması ile çeliÇki teÇkil eder. Bu ise $r = 0$ olmasını dolayısı ile $k = mq$ olmasını gerektirir. Buradan

$$m / k$$

yazarız. Diğer yandan

$$(a^m)^q = e$$

Çartını sağlayan en küçük pozitif tamsayı q olur. Gerçekten bir an için $p < q$ olacak Çekilde bir p tamsayısının olduğunu kabul edersek o taktirde

$$(a^m)^q = e \text{ ve } mp < k$$

olur. Fakat $o(G) = k$ olduğundan bu mümkün değildir. $(a^m)^q = e$ den $o(a^m) = q$ olduğundan a^m tarafından üretilen $H = \langle a^m \rangle$ alt grubunun mertebesi de q olur. Böylece

$$o(H) = o(\langle a^m \rangle) = q = \frac{k}{m}$$

bulunur.

Uyarı 2.1.1: $G = \langle a \rangle$ sonsuz mertebeli bir devir grubu ise o taktirde a^m 'nin bütün kuvvetleri farklı olacağından $H = \langle a^m \rangle$ devir grubu da sonsuz olur (D.TaĢçı 2010).

Uyarı 2.1.2: Bu teoreme göre G 'nin herhangi a elemanının mertebesi a tarafından üretilen $\langle a \rangle$ devirli grubun mertebesi olarak tanımlanabilir (D.TaĢçı 2010).

Teorem 2.1.14: $G = \langle a \rangle$ ve $o(G) = n$ olan bir devirli grup olsun. O taktirde G 'nin a^k tarafından üretilmesi için yani $G = \langle a^k \rangle$ olması için gerek ve yeter Ģart k ile n 'nin aralarında relatif asal olmasıdır yani $(k, n) = 1$ olmasıdır (D.TaĢçı 2010).

İspat $\Rightarrow$: Olmayana ergi yöntemi ile ispatımızı yapalım. Bir an için $(k, n) = d > 1$ olduğunu varsayalım. O zaman buradan $d \,/\, k$ ve $d \,/\, n$ ya da sırası ile $k = dt$ ve $n = dr$ yazarız. Bu durumda

$$\left(a^k\right)^r = \left(a^{dt}\right)^r = \left(a^{dr}\right)^t = \left(a^n\right)^t = e$$

öyleki

$$o\left(a^k\right) \leq r < n$$

dir. Bu ise a^k 'nın G 'nin bir üreteci olmadığını gösterir. Çünkü

$$G = \langle a^k \rangle$$

olsaydı o zaman $G = \langle a \rangle$ olduğundan $o(a) = n$ dolayısı ile $o\left(a^k\right) = n$ olmalıydı. Bu bir çeliĢkidir. Dolayısı ile eğer $G = \langle a^k \rangle$ ise o zaman $(k, n) = 1$ olmalıdır.

$\Leftarrow$: $(k, n) = 1$ olsun. Buna göre $G = \langle a^k \rangle$ olduğunu göstermeliyiz.

$$G \subseteq \langle a^k \rangle$$

olduğu açıktır. Çünkü $a^k \in G$ ve G bir grup olduğundan kapalılıktan dolayı a^k 'nın kuvvetleri G 'ye aittir. ġimdi ters kapsamayı gösterelim.

$$(k, n) = 1 \Rightarrow ku + nv = 1$$

olacak Ģekilde u , v tamsayıları vardır. O halde

$$a = a^{ku+nv} = a^{ku} a^{nv}$$

yazarız. Diğer taraftan $G = \langle a^k \rangle$ ve $o\,(\,G\,) = n$ olduğundan $o\,(\,a\,) = n$ ’dir. Böylece

$$a^{nv} = \left(a^{n}\right)^{v} = e^{v} = e$$

olup buradan $a = a^{ku}$ eÇitliğini elde ederiz. Buna göre $a^{m} \in G$ ise o taktirde

$$a^{m} = \left(a^{ku}\right)^{m} = \left(a^{k}\right)^{um} \in \langle a^{k} \rangle$$

yazarız. Bu da

$$G \subseteq \langle a^{k} \rangle$$

olmasını gerektirir. Böylece $G = \langle a^{k} \rangle$ eÇitliğini elde ederiz. Böylece teorem ispatlanır.

Sonuç 2.1.3: Bir k tamsayısının $(\ _n , +)$ grubunun bir üreteci olması için gerek ve yeter Çart $(k , n) = 1$ olmasıdır (D.TaÇçı 2010).

İspat: Yukarıdaki teoremden $G = \ _n$ ve $a = 1$ alalım. Burada hemen ilgi çekelim ki yukarıdaki teoremde G çarpmaya göre bir grup idi. Fakat $_n$, + iÇlemine göre bir grup olduğu için a^{k} yerine ka almalıyız. Buna göre $_n = \langle 1 \rangle$ olduğunu biliyoruz. Yukarıdaki teoreme göre

$$_n = \langle ka \rangle = \langle k1 \rangle = \langle k \rangle \Leftrightarrow (k , n) = 1$$

olmasıdır Çeklinde yorumlayabiliriz.

Tanım 2.1.35: G bir grup olmak üzere $H = \{ a^{n} : n \in \ \}$ alt grubuna G ’nin a elemanı tarafından devirli alt grubu denir ve $\langle a \rangle$ ile gösterilir. Yani ,

$$\langle a \rangle = \{ a^{n} : n \in \ \} = H$$

dır. Buradan hareketle devirli grubu Çu Çekilde de tanımlayabiliriz:

G bir grup olmak üzere G ’de $G = \{ a^{n} : n \in \ \}$ olacak Çekilde bir a elemanı varsa o zaman G grubuna devirli grup denir. Böyle bir a elemanına G ’nin üreteci denir ve $G = \langle a \rangle$ Çeklinde gösterilir (D.TaÇçı 2010).

Örnek 2.1.3: ${}_2 \oplus {}_3 = \{(0,0), (0,1), (0,2), (1,0), (1,1), (1,2)\}$. Bu mertebesi 6 olan bir abelyan grubudur. Bu grup içinde $(1,1)$ in ürettiği devirli alt grup,

$$\langle (1,1) \rangle = \{(0,0), (1,1), (0,2), (1,0), (0,1), (1,2)\}$$

${}_2 \oplus {}_3$ ün tamamıdır. O halde, ${}_2 \oplus {}_3$ bir devirli gruptur ve ${}_6$ ya izomorftur.

Örnek 2.1.4: ${}_2 \oplus {}_2 = \{(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)\}$. Bu mertebesi 4 olan bir gruptur. Bu grubun birim elemanı $(0, 0)$ dıĢında her elemanının mertebesi 2 dir.

Teorem 2.1.15 (Temel Teorem): Her sonlu Abel grubu, her birinin mertebesi bir asal sayının kuvveti olan sonlu sayıda devirli alt grubunun iç dolaysız çarpımıdır. Ayrıca, bu dolaysız çarpımdaki devirli gruplar, sıralanıĢları dıĢında ve izomorfizm farkıyla tek türlü belirlidir (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Lemma 2.1.1: G bir Abel grubu, $|G| = mn$, obeb $(\mathrm{mn}) = 1$ olsun ve $H = \{x \in G : x^m = e\}$, $K = \{y \in G : y^n = e\}$ tanımlayalım. Bu taktirde, $G = H \times K$ dır (H. Gbrahim KarakaĢ 2010).

Lemma 2.1.2: G bir sonlu Abel grubu, p bir asal sayı ve $p \mid |G|$ ise, G 'nin mertebesi p olan bir elemanı vardır (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Sonuç 2.1.4: G bir sonlu Abel grubu, p bir asal sayı olsun. Eğer G 'nin her elemanının mertebesi p nin bir kuvveti ise, G 'nin mertebesi de p nin bir kuvvetidir (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Lemma 2.1.3: p bir asal sayı, n bir pozitif tamsayı ve G , mertebesi p^n olan bir Abel grubu olsun. Eğer G içinde mertebesi en büyük olan elemanlardan biri a ise, öyle bir $K \leq G$ vardır ki $G = \langle a \rangle \times K$ dır (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Lemma 2.1.4: G , mertebesi bir asal sayının kuvveti olan bir sonlu Abel grubu ise, G , sonlu sayıda devirli alt grubunun iç dolaysız çarpımıdır (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Lemma 2.1.5: p bir asal sayı, n bir pozitif tamsayı ve G , mertebesi p^n olan bir Abel grubu olsun. $H_1, \ , H_r$; $K_1, \ , K_s$, G nin devirli alt grupları ve $|H_1| \geq |H_2| \geq \ \geq |H_r| \geq p$; $|K_1| \geq |K_2| \geq \ \geq |K_s| \geq p$ olmak üzere $G = H_1 \times \ \times H_r$, $G = K_1 \times \ \times K_s$ ise, $r = s$ dir ve her $i = 1, \ , r$ için $|K_i| = |H_i|$ dir (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Sonuç 2.1.5: G , sonlu bir Abel grubu, $m \mid |G|$ ise, G 'nin en az bir alt grubunun mertebesi m dir (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Teorem 2.1.16 (Temel Teorem'in İkinci İfadesi): Eğer G , sonlu bir Abel grubu ise öyle tek türlü belirli $m_1, \ , m_r$ tamsayıları bulunabilir ki $j = 2, \ , r$ için $m_j \mid m_{j-1}$ ve

$$G \cong {}_{m_1} \oplus {}_{m_2} \oplus \ \oplus {}_{m_r} \qquad (1)$$

dir (H. Ġbrahim KarakaĢ 2010).

Örnek 2.1.5: $G = {}_{2^2} \oplus {}_2 \oplus {}_3 \oplus {}_5 \oplus {}_5 \oplus {}_5$ grubunun (1) deki biçimde yazılıĢı Ģöyle elde edilir: Gösterimler yukarıdaki gibi olmak üzere $p_1 = 5$, $p_2 = 3$, $p_3 = 2$ alınırsa $t_{11} = 1$, $t_{12} = 1$, $t_{13} = 1$; $t_{21} = 1$, $t_{22} = 0$, $t_{23} = 0$; $t_{31} = 2$, $t_{32} = 1$, $t_{33} = 0$ ve

$$m_1 = 5.3.2^2 = 60 \ , m_2 = 5.2 = 10, \ m_3 = 5$$

elde edilir. Böylece,

$$G \cong {}_{60} \oplus {}_{10} \oplus {}_5$$

olduğu görülür.

Tanım 2.1.36: G bir grup olsun. $a, b \in G$ elemanları ile oluĢturulan $a^{-1}b^{-1}ab$ elemanına , a ile b ' nin komütatörü denir ve $[a , b]$ ile gösterilir.

$G' = \langle [a, b] : a, b \in G \rangle \le G$ alt grubuna G 'nin komütatör alt grubu denir. Ayrıca $G' \trianglelefteq G$ dir.

Bir G grubu için $G' = G$ oluyorsa G 'ye mükemmel (perfect) grup denir. Her basit grubun mükemmel olacağı açıktır. $G' \neq G$ ise G 'ye mükemmel olmayan (non-perfect) grup denir.

Lemma 2.1.6: Eğer G ve H sırası ile $\langle X : R \rangle$ ve $\langle Y : S \rangle$ Çeklinde takdim edilmiÇ gruplar ise; $[X, Y]$, $\{x^{-1} y^{-1} xy : x \in X, y \in Y\}$ Çeklinde komutatörlerin kümesi olmak üzere bu grupların $G \times H$ direkt çarpımı, $\langle X, Y : R, S, [X, Y] \rangle$ Çeklinde takdim edilir (Johnson 1997) ve (Sims 1994).

Tanım 2.1.37: K , G' nin alt grubu olsun (normal alt grup olması gerekmez). Eğer $K \cap Q = 1$ ve $KQ = G$ olacak Çekilde bir $Q \le G$ alt grubu varsa, Q 'ya, G 'de , K 'nın bir komplementidir denir (D.S. Dummit and R.M. Foote 2004).

Tanım 2.1.38: K , bir grup ve $K \trianglelefteq G$ olsun. Eğer K , bir Q komplementine sahip ise bu taktirde G 'ye Q ile K ' nın yarı direkt çarpımı (Semi-Direct product) denir ve $G = K \rtimes Q$ ile gösterilir. Eğer $G = K \rtimes Q$ ise bu taktirde her $x \in Q$ için $\varphi_x : K \to K$, $\varphi_x(K) = xkx^{-1}$ ile tanımlanan dönüÇüm K 'nın bir otomorfisidir. Üstelik $\varphi : Q \to AutK$, $\varphi(x) = \varphi_x$ ile tanımlanan bir grup homomorfisidir. Böylece Q ile K 'nın yarı direkt çarpımını oluÇturmak için Q ' dan $AutK$ ' ya bir homomorfiye gerek vardır (D.S. Dummit and R.M. Foote 2004).

Teorem 2.1.17: A ve B gruplar olsun. $\varphi : B \to AutA$, $\varphi(b) = \varphi_b$ bir grup homomorfisi olsun. Bu taktirde $A \times B$ kartezyen çarpımı , $(a, b)(a', b') = (a\varphi_b(a'), bb')$ iÇlemine göre bir gruptur
(D.S. Dummit and R.M. Foote 2004).

Tanım 2.1.39: X bir küme , $F(X)$, X üzerinde serbest grup, $R \subseteq F(X)$ ve $\overline{R}$, $F(X)$ deki R kümesinin normal kapanıĢı olsun. Yani, $\langle g^{-1}rg : g \in F(X), r \in R \rangle$ kümesi ile $F(X)$ 'in alt grubu verilmiĢ olsun. Bu durumda eğer $G \cong F(X)/\overline{R}$ ise G grubu $\langle X : R \rangle$ Ģeklindeki takdim ile tanımlanmıĢtır denilir (Campbell 2003).

Önerme 2.1.1: Aynı grubun iki takdimi verilmiĢ olsun. Tietze dönüĢümlerinin sonlu bir dizisi kullanılarak verilen bir takdimden diğer takdim elde edilebilir (Johnson 1997).

Sonuç 2.1.6: Eğer G sonlu üretilmiĢ bir grup değil ise grup sonlu takdim edilemez. Bu duruma örnek olarak rasyonel sayıların normal toplama iĢlemine göre bir grup olan Q rasyonel sayılar kümesi verilebilir. Fakat bazı gruplar vardır ki sonlu gerilmiĢtir ama sonlu takdim edilemezler. Bu sonuç aĢağıdaki iki teoremden elde edilir (Campbell 2003).

Teorem 2.1.18: 2^{N_0} tane nonizomorfik 2-gerenli grup vardır (Robinson 1982).

Teorem 2.1.19: Sayılabilir çoklukta nonizomorfik sonlu takdim edilmiĢ grup vardır (Campbell 2003).

Lemma 2.1.7 (Von Dyck's Lemma): $R \subseteq S \subseteq F(X)$ olmak üzere, $G = \langle X / R \rangle$ ve $H = \langle X / S \rangle$ ise, her $x \in X$ elemanını sabitleyen ve $Ker\varnothing = \overline{S / R}$ olacak Ģekilde bir $\varnothing : G \to H$ epimorfizmi vardır. Tersine, $G = \langle X / R \rangle$ ninher bölüm grubu, $R \subseteq S$ olmak üzere $\langle X / S \rangle$ Ģeklinde bir takdime sahiptir (Johnson 1997).

Tanım 2.1.40: G , $p = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n : r_1, r_2, \ldots, r_m \rangle$ takdimiile tanımlanmıĢ bir grup olsun. p 'nin bağıntı matrisi $m \times n$ tipinde bir matris olup bu matrisin herhangi b_{ij} elemanı r_i bağıntısındaki x_j gerenlerinin üstlerinin toplamıdır.

Örneğin, G grubu, $p = \langle x, y, z : x^3 = y^3, zxz^{-1} = y, (zx)^3 = e, (zy)^2 = e \rangle$ Çeklinde takdim edilsin. p bağıntı matrisi,

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Çeklinde ifade edilir (Campbell 2003).

Tanım 2.1.41: C_q devirli grubu bir tek $x^q = e$ bağıntısıyla tanımlanır ki bu bağıntı her elemanı kendisinin tersine götüren bir dıÇ otomorfizm olarak kabul edilebilir. Bu dıÇ otomorfizme göre C_q ' ya dönüÇen ve $r_1^2 = e$ olan yeni bir r_1 elemanı ekleyerek, x , r_1 elemanları tarafından gerilen ve

$$\langle x, r_1 : x^q = r_1^2 = (xr_1)^2 = e \rangle$$

Çeklinde takdim edilen $2q$ mertebeden bir grup elde edilebilir, bu gruba dihedral grup denir ve D_q ile gösterilir. Eğer

$r_2 = r_1 x$ denilirse bu grup

$$\langle r_1, r_2 : r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^q = e \rangle$$

Çeklinde takdim edilebilir. Bu takdime göre, $q = 2m$ ise bu gruba çift dihedral grup denir ve D_{2m} ile gösterilir. D_{2m} çift dihedral grup, $z = (r_1 r_2)^m$ ile gerilmiÇ mertebesi 2 olan bir merkeze sahiptir. Eğer m çift ise r_1 ve $r = r_2 z$ elemanları $r_1^2 = r^2 = (r_1 r)^m = e$ bağıntılarını sağlar, bu bağıntılar yardımıyla r_1 ve r elemanları tarafından gerilen ve

$$\langle r_1, r : r_1^2 = r^2 = (r_1 r)^m = e \rangle$$

Çeklinde takdim edilen D_m dihedral grubu elde edilebilir. Bu grup için $D_{2m} \cong C_2 \times D_m$ dir. Eğer $m = 1$ ise r_1 ve r_2 elemanları ile gerilmiÇ mertebesi 4 olan ve

$$\langle r_1, r_2 : r_1^2 = r_2^2 = (r_1 r_2)^2 = e \rangle$$

Çeklinde takdim edilen D_2 four-grubu elde edilebilir. Bu grup için $D_2 \cong C_2 \times D_1 \cong C_2 \times C_2$ dir. Burada $r_0 = r_1 r_2$ denilirse r_1, r_2 ve $r_0 = r_1 r_2$ Çeklinde üç eleman tarafından oluÇturulan $r_0^2 = r_1^2 = r_2^2 = r_0 r_1 r_2 = e$ bağıntıları elde edilebilir. Bu Çekildeki bağıntılar yardımıyla, D_2 grubu üç gereni devirli olarak birbirine taÇıyan 3. mertebeden bir dıÇ otomorfizm ortaya koyar ve

$$\left\langle r_0, r_1, r_2 : r_0^2 = r_1^2 = r_2^2 = r_0 r_1 r_2 = e \right\rangle$$

Çeklinde takdim edilebilir. Bu manada $s^3 = e, s^{-i} r_0 s^i = r_i$ $(i = 1, 2)$ bağıntılarını sağlayacak Çekilde yeni bir s elemanı eklendiğinde, s ve r_0 gerenlerine bağlı olarak,

$$\left\langle s, r_0 : s^3 = r_0^2 = (s r_0)^3 = e \right\rangle$$

Çeklinde takdim edilen ve mertebesi 12 olan bir grup elde edilebilir. Burada $r_0 = (12)(34)$ ve $s = (123)$ olup r_0 ve s permütasyonları 12. mertebeden A_4 alterne grubunu gerdiğinden ve $s^3 = r_0^2 = (s r_0)^3 = e$ bağıntılarını sağladıklarından bu grubun A_4 alterne grubu olduğu anlaÇılır. Yukarıdaki bilgilerden D_2 four-grubu A_4 alterne grubun normal alt grubudur. Burada $u = s^{-1} r_0$ olmak üzere A_4 alterne grubu s ve u gerenleriyle,

$$\left\langle s, u : s^3 = u^3 = (su)^2 = e \right\rangle$$

Çeklinde takdim edilebilir. Bu bağıntılar yardımıyla A_4 üzerinde s ve u gerenlerini birbirine eÇleyen periodu 2 olan bir dıÇ otomorfizm tanımlanabilir. $t^2 = e, tst = u$ bağıntılarını sağlayacak Çekilde yeni bir t elemanı ilave edildiğinde, $s^3 = u^3 = (su)^2 = e$ ve $t^2 = e, tst = u$ bağıntıları ile tanımlanmıÇ, s ve t gerenlerine bağlı olarak,

$$\left\langle s, t : s^3 = t^2 = (st)^4 = e \right\rangle$$

Çeklinde takdim edilen ve mertebesi 24 olan bir grup elde edilebilir. Burada $s = (234)$ ve $t = (12)$ permütasyonları 24. mertebeden S_4 grubunu gerdiğinden ve $s^3 = t^2 = (st)^4 = e$ bağıntılarını sağladıklarından bu grubun S_4 olduğu anlaÇılır. Böylece $l = s^{-1} t$ denirse s ve l gerenlerine göre S_4 grubu,

$$\langle s, l : s^3 = l^4 = (sl)^2 = e \rangle$$

Çeklinde de takdim edilebilir (Coxeter and Moser 1972).

$G_1 = \langle A : R_1 \rangle$ ve $G_2 = \langle B : R_2 \rangle$ iki grup, $[A, B] = \{ [a, b] : a \in A, b \in B \}$ ise, G_1 ve G_2 gruplarının direkt çarpımı;

$$G_1 \times G_2 = \langle A, B : R_1, R_2, [A, B] \rangle$$

Çeklinde tanımlanır (Johnson 1997).

$$D_{2n} = \langle x, y : x^2 = y^n = (xy)^2 = e \rangle$$

dihedral grup ile $2m$ mertebeli ${}_{2m}$ devirli grubun $D_{2n} \times {}_{2m}$ $(n, m \geq 3)$ direkt çarpımı,

$$D_{2n} \times {}_{2m} = \langle x, y, z : x^2 = y^n = (xy)^2 = z^{2m} = [x, z] = [y, z] = e \rangle$$

Çeklinde ifade edilir.

G_1 ve G_2 grupları için $\varphi : G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$ homomorfim, $b\varphi = \varphi_b$ ve $\varphi_b : G_1 \to G_1$ $\mathrm{Aut}(G_1)$'nin elemanları olmak üzere G_1 ve G_2 grupların yarı direkt çarpımı (semi-direct product) $G_1 \times_\varphi G_2$ Çeklinde gösterilir.

D_{2n} dihedral grup ile ${}_{2m}$ devirli grubun $D_{2n} \times_\varphi {}_{2m}$ $(n, m \geq 3)$ yarı direkt çarpımı,

$$D_{2n} \times_\varphi {}_{2m} = \langle x, y, z : x^2 = y^n = (xy)^2 = z^{2m} = e, z^{-1}xzx = e, z^{-1}yzy = e \rangle$$

Çeklinde ifade edilir.

${}_{2m} = \langle z \rangle$ ise, $\varphi : {}_{2m} \to \mathrm{Aut}(D_{2n})$ dönüÇümü homomorfizmdir. ġöyleki;

$z\varphi = \varphi_z$; $\varphi_z : D_{2n} \to D_{2n}$ ve $x\varphi_z = x$, $y\varphi_z = y^{-1}$ dir (Doostie and Campbell 2006).

Tanım 2.1.42: $Q_{2n} = \langle a, b \mid a^{2n} = b^4 = e, b^2 = a^n, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$ Çeklinde taktim edilen yapıya $4n$ mertebeli quaternion grup denir.

$(n \geq 3)$ olmak üzere,

$$Q_{2^n} = \langle x, y : x^{2^{n-1}} = e, y^2 = x^{2^{n-2}}, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

quaternion grup ile ${}_{2m}$ devirli grubun $Q_{2^n} \times {}_{2m}$ $(n, m \geq 3)$ direkt çarpımı,

$$Q_{2^n} \times {}_{2m} = \langle x, y, z : x^{2^{n-1}} = e, y^2 = x^{2^{n-2}}, y^{-1}xyx = z^{2m} = [x, z] = [y, z] = e \rangle$$

Çeklinde ifade edilir.

Q_{2^n} quaternion grup ile $_{2m}$ devirli grubun $Q_{2^n} \times\varphi$ $_{2m}$ yarı-direkt çarpımı (semi-direkt product),

$$Q_{2^n} \times_{\varphi} {}_{2m} = \left\langle x, y, z : x^{2^{n-1}} = e, y^2 = x^{2^{n-2}}, y^{-1}xyx = z^{2m} = e, z^{-1}xzx = e, z^{-1}yzy = e \right\rangle$$

Çeklinde ifade edilir

$_{2m} = \langle z \rangle$ ise, $\varphi :$ $_{2m} \rightarrow \mathrm{Aut}\left(Q_{2^n}\right)$ bir homomorfizmdir ve $z\varphi = \varphi_z$; $\varphi_z : Q_{2^n} \rightarrow Q_{2^n}$ olup, $x\varphi_z = x$, $y\varphi_z = y^{-1}$ dir (Doostie and Campbell 2006).

Tanım 2.1.43: (l, m, n) ve $l, m, n > 1$ için,

$$\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = xyz = 1 \rangle$$

veya

$$\langle x, y : x^l = y^m = (xy)^n = e \rangle$$

Çeklinde takdim edilen gruba polyhedral grup denir.

Tietze dönüÇümlerinin sonlu bir dizisi kullanılarak $(l, m, n) \cong (m, n, l) \cong (n, l, m)$ olduğu görülebilir.

Eğer $t = lmn\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) = mn + lm - lmn$ pozitif ise (l, m, n) polyhedral grubu sonludur. Eğer $1 < l \leq m \leq n$ ise yalnızca aÇağıdaki durumlarda t sayısı pozitif olup (l, m, n) polyhedral grubunun sonlu olduğu durumlar elde edilir;

(i) $l = m = 2$ ve n, $n \geq 2$ olacak Çekilde bir tamsayı ise,

(ii) $l = 2$, $m = 3$ ve n,$3 \leq n \leq 5$ olacak Çekilde bir tamsayı ise.

(l, m, n) polyhedral grubu sonlu ise bu grubun mertebesi $2\left(\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} - 1\right)^{-1} = \frac{2lmn}{t}$ dır (Coxeter and Moser 1972).

(i) durumundaki grupların yapısı aÇağıdaki teoremle belirlenir.

Teorem 2.1.20: D , mertebeleri 2 olan iki eleman tarafından üretilmiĢ bir grup olsun. Bu durumda D grubu aĢağıdaki takdime sahiptir, $D = \langle x, y : x^2 = y^2 = (xy)^n = e \rangle$, burada n ya bir doğal sayıdır ya da $n = \infty$ dur. Eğer $n = \infty$ ise $(xy)^n = e$ bağıntısı ihmal edilecektir. n 'nin sonlu olduğu durumda ise D grubu mertebesi $2n$ olan dihedral gruba izomorf olur. $z = xy$ ve $D_0 = \langle z \rangle$ olsun. Bu durumda,

$$x^{-1} zx = y^{-1} zy = z^{-1}$$

elde edilir ve D_0 indeksi 2 olan bir normal alt grup olur. Buna ek olarak eğer n bir tek tamsayı ise x ve y elemanları D grubunda birbirinin eĢleniğidir (conjugedirler) (Suzuki 1982).

$(2, 2, n)$ polyhedral grubunda $t = 4$ olup bu grubun mertebesi $2n$ dir. Bu grup dihedral grup diye adlandırılır.

(ii) durumundaki grupların yapısı aĢağıdaki durumlar söz konusudur,

$(2,3,5)$ polyhedral grubu basit bir grup olup bu grupta $t = 1$ dir. Bu grubun mertebesi 60 olup A_5 alterne grupdur, A_5 alterne grup düzgün icosahedronun döngülerinin grubuna izomorftur. Aynı zamanda icosahedral grup diye adlandırılır.

$(2,3,4)$ polyhedral grubu indeksi 2 olan bir alt gruba sahip olup bu grupta $t = 2$ dir. Bu grubun mertebesi 24 olup S_4 simetrik grupdur, S_4 simetrik grup düzgün octahedronun döngülerinin grubuna izomorftur. Aynı zamanda octahedral grup diye adlandırılır.

$(2,3,3)$ polyhedral grubu indeksi 3 olan bir alt gruba sahip olup bu grupta $t = 3$ dir. Bu grubun mertebesi 12 olup A_4 alterne grupdur. A_4 alterne grup düzgün tetrahedronun döngülerinin grubuna izomorftur. Aynı zamanda tetrahedral grup diye adlandırılır (Coxeter and Moser 1972).

(Daha fazla bilgi için [19] 'e bakınız).

Tanım 2.1.44: (l, m, n) ve $l, m, n > 1$ için,

$$\langle x, y, z \mid x^l = y^m = z^n = xyz \rangle$$

Ģeklinde takdim edilen gruba binary polyhedral grup denir.

Eğer $l = 2$ ise $\langle 2, m, n\rangle$ binary polyhedral grubu

$$\langle y, z \mid y^m = z^n = (yz)^2 \rangle$$

Çeklinde taktim edilir.

$\langle l, m, n\rangle$ polyhedral grubu binary polyhedral grubu için bir bölüm grubu olarak meydana geldiğinden $t \leq 0$ olduğu zaman bu grup sonsuzdur. Bu gruptaki bağıntılar; $x^l = y^m = z^n = xyz = f$ Çeklindedir. $t > 0$ olduğu zaman $f^2 = 1$ olur. Bu grupta x, y, z 'nin mertebeleri (l, m, n) polyhedral grubundakinin iki katıdır. Aynı zamanda bu grubun mertebesi de (l, m, n) nin mertebesinin iki katı olup $\frac{4lmn}{t}$ dır.

$(2, m, n)$ polyhedral grubu sonlu olduğu zaman, $\langle 2, m, n \rangle$ binary polyhedral grubu, C_2 devirli grubun $(2, m, n)$ polyhedral grubu ile bir geniÇlemesidir.

$\langle 2,3,5\rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 120 olup binary icosahedral grup diye adlandırılır.

$\langle 2,3,4\rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 48 olup binary octahedral grup diye adlandırılır.

$\langle 2,3,3\rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi 24 olup binary tetrahedral grup diye adlandırılr.

$\langle 2, 2, n\rangle$ binary polyhedral grubunun mertebesi $4n$ olup dicyclic grup diye adlandırılır (Coxeter and Moser 1972).

Burada özellikle ifade etmek gerekir ki;

$$Q_{2n} \cong \langle n, 2, 2\rangle \quad \text{dir.}$$

(Daha fazla bilgi için $[19]$'e bakınız).

3. LİNEER İNDİRGEMELİ DİZİLER

Tanım 3.1: R değiÇmeli ve birimli bir halka olmak üzere , R' nin elemanlarının $a_1, a_2, \ \ , a_k$
baÇlangıç elemanlarıyla n≥1 için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n \quad (1)$$

Çeklindeki homojen lineer indirgemeli bağıntıyı sağlayan dizisine bir homojen lineer indirgemeli dizi denir. Burada $c_1, c_2, \dots, c_k \in$ R olacak Çekilde sabit katsayılar olup c_k, R halkasının sıfır böleni olamaz (Everest et.al 2003).

Tanım 3.2: $f(x) = x^k + c_1 x^{k-1} + \dots + c_{k-1} + \dots + c_k$ Çeklindeki n. dereceden polinoma, (1) dizisinde ifade edilen lineer indirgemeli bağıntı için karakteristik polinom denir.

Sırayla 2 ve 3 mertebeli liner indirgemeli diziler binary ve ternary lineer indirgemeli diziler diye adlandırılır. Ayrıca , , ,üzerinde tanımlanan lineer indirgemeli diziler sırayla, tamsayı, rasyonel, cebirsel, reel ve kompleks lineer indirgemeli diziler olarak adlandırılır.

Eğer c_k 'nin terslenebilir bir elemanı ise (1)' de tanımlanan dizi $a_0, a_{-1}, a_{-2}, \dots,$ Çeklinde devam eder (Everest et.al 2003).

Tanım 3.3: değiÇmeli ve birimli bir halka olmak üzere , ' nin elemanlarının $a_1, a_2, \dots, a_k$ baÇlangıç elemanlarıyla n≥1 için,

$$a_{n+k} = c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \dots + c_k a_n + c_{k+1}$$

Çeklindeki bağıntı yardımıyla tanımlanan diziye homojen olmayan lineer indirgemeli dizi denir.

Bu bağıntı kullanılarak

$$a_{n+k+1} = (c_1 + 1) a_{n+k} + \sum_{i=1}^{k-1} (c_{i+1} - c_i) a_{n+k-i} - c_k a_n$$

ġeklindeki $n+1$ mertebeli homojen olmayan indirgemeli bağıntı elde edilebilir. Aynı Çekilde bu bağıntı kullanılarak

$$F(x) = x^k - c_1 x^{k-1} \dots c_{k-1} x - c_k)(x-1)$$

Çeklinde karakteristik polinom elde edilir (Everest et.al 2003).

Kalman $[28]$' de $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ baÇlangıç değerleri ve $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}$ ‘ler sabitler olmak üzere , $a_{n+k} = c_0 a_n + c_1 a_{n+1} + \dots + c_{k-1} a_{n+k-1}$ Çeklindeki $k-$ basamak linner indirgemeli bağıntısıyla tanımlanan dizi için,dizinin elemanlarını;

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \cdots & c_{k-2} & c_{k-1} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$A^n.\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix}$$

Çeklindeki denklem yardımıyla elde etmiÇtir.

4. GRUPLARDA LİNEER İNDİRGEMELİ DİZİLER

4.1. Gruplarda Fibonacci Dizileri

Tanım 4.1.1: $f_0=0, f_1=1$ baÇlangıç değerleri olmak üzere Fibonacci dizisi,

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Çeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1.2: $a, b\in R$ olmak üzere 2-basamak genel Fibonacci dizisi,

$$f_{n+2}=af_{n+1}+bf_n$$

Çeklinde tanımlanır.

Lucas (1878) çalıÇmasında,

$$f_{k+n}=f_n\,(\mathrm{mod}\,m) \quad n=0,1,2,\ldots$$

olacak Çekilde k tamsayısının olduğu yani her m tamsayısının Fibonacci dizisinin bazı elemanlarını böldüğünü ve Fibonacci dizisinin $(\bmod\ m)$ ye göre periyodik olduğunu göstermiĢtir.

Tanım 4.1.3: $f_{k+n} = f_n \pmod m \quad n = 0, 1, 2, \ldots$, denkliğini sağlayan en küçük k tamsayısına $(\bmod\ m)$ ye göre periyod denir ve $S(m)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.4: $f_k \equiv 0 \pmod m$ denkliğini sağlayan en küçük pozitif k tamsayısına m ye göre rank denir ve $f(m)$ ile gösterilir.

Ģimdi Fibonacci dizisinin terimlerinin bilinen bazı özelliklerini verelim.

i. $f_{n-1}^2 = f_n f_{n-2} + (-1)^n$.

Bu eĢitliğin doğruluğu Fibonacci dizisinin tanımında verilen bağıntılar yardımıyla tümevarım metodu kullanılarak gösterilebilir.

ii. $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ $\beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ olmak üzere $f_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ eĢitliğine ''Binet formülü'' denir.Bu formül n ' nin negatif değerleri için Fibonacci dizisinin doğal geniĢlemesini verir. $\alpha^n \beta^n = (-1)^n$ bağıntısı kullanılarak,

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n$$

olduğu gösterilebilir.

G sonlu bir grup olsun G' nin Fibonacci döngüsü aĢağıdaki gibi tanımlanır. $g_1, g_2 \in G$ olmak üzere $i \geq 2$ için $g_i = g_{i-2} g_{i-1}$ ve $i \leq 0$ için $g_i = g_{i+2} g_{i+2}^{-1}$ olarak tanımlanır. Bu taktirde yukarıdaki eĢitlikleri sağlayan her i tamsayısı için $g = (g_i)_{i \in Z}$ sonlu döngüsü elde edilir.

G sonlu için bu döngü periyodiktir. Bir g döngüsünün minimum periyodunu göstermek için uzunluk terimi kullanılır ve bu uzunluk $l(g)$ ile gösterilir. Eğer g döngüsünün periyodu t ise $l(g) | t$ dir. Böyle döngülerin sayısı $|G|^2$ dir. Her i tamsayısı için $g_{i+s} = h_i$ olacak Çekilde bir s tamsayısı varsa (g_i) ve (h_i) döngüleri arasında $(g_i)\ (h_i)$ Çeklinde bir denklik bağıntısı tanımlanır. Döngülerin denklik sınıflarını tanımlamak için e -döngü terimi kullanılır. G'nin döngülerinin kümesi $L(G)$ ile gösterilir. G'nin elemanlarının bütün sonlu periyodik dizileri bileşke işlemi altında bir grup oluşturur. G abelyan ise, $L(G)$, $G \times G$ ye izomorf sonlu bir alt grup olur.

G'nin $GF(p)$ cisminde p elemanlı toplamsal bir grup olduğunu kabul edelim ve $k(p^n)$, p^n. mertebeden devirli grubun standart döngüsünün uzunluğunu göstersin.

Lemma 4.1.1: H, sonlu $GF(p^t)$ cisminin toplamsal bir grubu olsun. Eğer $f \in L(H)$ ise $l(f) | k(p)$ dir. $l(h) < k(p)$ olmak üzere, aşikar olmayan h döngüsünün bütün elemanları sıfırdan farklı olmalı ve bu döngü geometrik bir dizi olmalıdır (Yani $h_i^{-1} h_{i+1}$, i den bağımsız olmalıdır).

İspat: $s = (0,1,1,2,\ ,)$ uzunluğu $k(p)$ olan standart bir döngü olsun. Bu durumda s, $GF(p^t)$'nin bir alt cismi olan $GF(p)$ de bir döngü olur. Aynı şekilde sınıfında uzunluğu $k(p)$ olan başka bir döngü elde etmek için bu döngü döndürülebilir. Aynı zamanda başka bir döngü elde etmek için döngünün her elemanı $GF(p^t)$'nin bir elemanı ile çarpılabilir. $f \in L(H)$ keyfi bir döngü olsun. Bu takdirde,

$$f = (f_0, f_1,\ ,) = f_0(1,0,\ ,) + f_1(0,1,\ ,)$$

yazılır. Burada dikkat edilirse $(1,0,\ ,)$ standart döngüsünün dönmesidir. Böylece f döngüsünün periyodu $k(p)$ olup $l(f) | k(p)$ olmalıdır.

f'nin bir sıfıra sahip olduğu fakat aşikar olmadığı kabul edilsin. $x \neq 0$ olmak üzere döndürme yardımı ile $f = (0, x,\ ,)$ olduğu kabul edilebilir. Buradan $f = xs$ (ve $s = x^{-1}.f$) yazılır. O halde $l(f) = k(p)$ olur.

Şimdi f'nin yalnız sıfır olmayan elemanlara sahip olduğu ve $l(f) < k(p)$ olduğu kabul edilsin. $f = (w, wx,\ )$ olmak üzere g, f'nin herhangi bir dönmesi olsun. Böylece $g = (y, yxz,\ )$ ve $f - wy^{-1}.g = (0, w(x-z)\ )$,döngüsü sıfırı ihtiva eden ve uzunluğu $k(p)$ den küçük olan aşikar döngü olur. Buradan $x = z$ yazılır. Böylece verilen herhangi bir döngüde ardıÇık elemanların bir dönmesi olarak en fazla bir $\beta \in GF\left(p^t\right)$ vardır. O halde aÇikar olmayan bir döngünün elemanları sıfır olmalıdır. Bu da lemmanın ispatını tamamlar.

Tanım 4.1.5: G toplamsal bir abelyan grup ve $g \in L(G)$ olmak üzere $g_i = 0$ olsun. $m, n \in Z$ için $g_m = g_n = 0$ olacak Çekilde $r = m - n$ Çeklindeki en küçük r tamsayısına Fibonacci dizisinin rankı denir.

Lemma 4.1.2: x 'in standart $s \in L(C_P)$ döngüsünde ikinci sıfırdan önce görüldüğü ve $o(x) = t$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde $k(p) = rt$ dir. Burada r dizinin rankıdır.

İspat: $f = (0,1, ,0, x)$ olarak yazılır. Böylece f'nin x ile çarpımı f'nin r dönmesi olur. Böylece $x^t=1$ ve t den küçük pozitif u tamsayıları için $x^u \neq 1$ olup $rt = k(p)$ bulunur.

Lemma 4.1.3 (Vinson): $p \neq 2,5$ olsun. Bu takdirde $s \in L(C_P)$'nin rankı $\gamma = \beta_1 \mid \beta_2$ 'nin çarpımsal katıdır. Eğer r tek ise $k(p) = 4r$ dir. r çift ise $l = r$ ya da $l = 2r$ dir (Aydın 1991).

Sonuç 4.1.1: p tek asal sayı ise k çifttir.

Lemma 4.1.4: G sonlu bir grup ve $f \in L(G)$ olsun. $h \in L(Z(G))$ olduğu takdirde $f.h$ çarpımı, G'nin bir döngüsüdür.

İspat: Her i tamsayısı için

$$f_i h_i = f_{i-2} f_{i-1} h_{i-2} h_{i-1} = f_{i-2} h_{i-2} f_{i-1} h_{i-1}$$

olarak yazılır.

Bu yazılımda $f.h$ çarpımının G'de bir döngü olduğunu gösterir.

Tanım 4.1.6: Lucas sayıları, $L_1 = 1$ ve $L_2 = 3$ olmak üzere

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2}$$

Çeklindeki lineer indirgeme denklemi ile tanımlanan $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ tamsayılar dizisidir. n 'inci Lucas sayısı, $L[n]$ ile gösterilir.

$n = 1, 2, \ldots$, için L_n 'nin değerleri 1,3, 4,7,11,18, 29, 47,76,123, ..., Çeklindedir.

$f_0 = 0$ ve $f_1 = 1$ baÇlangıç değeri olmak üzere $f_n = f_{n-2} + f_{n-1}$, $n \geq 2$ Çeklinde tanımlanan Fibonacci dizinin $(\text{mod } m)$ 'ye göre en küçük periyodunun uzunluğu da $k(m)$ ile gösterilsin.

Teorem 4.1.1: $f_n \ (\text{mod } m)$ basit periyodik bir dizidir (Wall 1960).

İspat: Bu dizideki mümkün olan m^2 tane ikili olduğundan tekrar eder. Fibonacci dizisinin tanımından $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$ olarak yazabiliriz. Buradan $f_{t+1} = f_{s+1}$ ve $f_t \equiv f_s \ (\text{mod } m)$ olarak alınırsa, $f_{t-1} \equiv f_{s-1}$,, $f_{t-s+1} \equiv f_1$ ve $f_{t-s} \equiv f_0$ olur ki dizi basit periyodiktir.

Teorem 4.1.2: i. p bir asal sayı olmak üzere, eğer $m = \prod p_i^{e_i}$ olacak Çekilde asal çarpanlarına ayrılabiliyorsa $t_i = k\left(p_i^{e_i}\right)$ olmak üzere $k(m)$, t_i ' lerin en küçük ortak katıdır.

ii. p bir asal sayı olmak üzere, $k\left(p^2\right) \neq k(p)$ ise $k\left(p^e\right) = p^{e-1} k(p)$ 'dir. Ayrıca , $k\left(p\right) = k(p)$ olacak Çekilde en büyük tamsayı olmak üzere; $e > l$ için,

$$k\left(p^e\right) = p^{e-l} k(p)$$

dır (Wall 1960).

Teorem 4.1.3: f_n , n. Fibonacci ve g_n , n. Lucas sayıları olmak üzere

$t = mim(\{n : n$ –çift sayı ve $m / f_n\}\ \{n : n -$ tek sayı ve $m / g_n\})$ olacak Çekilde $m > 2$ için $k(m) = 2t$ ' dir (Wilcox 1986) .

Lemma 4.1.5: $a, b, c, x, y \in, z$, için $Zn > 0$ olmak üzere a, b, c ve x, z, y tamsayılarının hepsi birden n modülüne göre sıfıra denk değilse, $k_{(a,b,c)}(n) = k_{(x,y,z)}(n)$ olur (Campell 2009).

Sonuç 4.1.2: $a, b, c, x, y, z, m, n \in Z$ için $m, n > 0$ olmak üzere , a, b, c ve x, z, y tamsayılarının hepsi birden n modülüne göre sıfıra denk değilse,

$k_{(a,b,c)}(n) / k_{(x,y,z)}(mn)$ olur (Campell 2009).

Tanım 4.1.7: $f_i^{(k)} = 0, 1 \le i < k$ ve $f_k^{(k)} = 1$ olmak üzere $n > k$ için,

$$f_n^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}^{(k)} \tag{5.1}$$

dizisine k-basamak Fibonacci dizisi denir ve $f_n^{(k)}$ Çeklinde gösterilir. Bu diziyi m modülüne indirgersek,

$$f_i(k, m) = f_i^{(k)} \pmod m$$

dir (Kebo Lü and Jun Wang 2007).

Teorem 4.1.4: $f(k, m)$ periyodik bir dizidir (Kebo Lü and Jun Wang 2007).

İspat: $S_k = \{(a_1, a_2, \ldots, a_k) \mid 0 \le a_i \le m-1\}$ olsun. $|S_k| = m^k$ sonlu olmakta, böylece $u \ge 0$ ve $v \ge u$ için, $f_{u+1}^{(k,m)} = f_{v+1}^{(k,m)}, \ldots, f_{u+k}^{(k,m)} = f_{v+k}^{(k,m)}$ elde edilmektedir.

Ayrıca tanımdan $f_n^{(k)} = f_{n+k}^{(k)} - \sum_{j=0}^{k-1} f_{n+j}^{(k)}$ olup buradan kolaylıkla,

$f_u^{(k,m)} = f_v^{(k,m)}, f_{u-1}^{(k,m)} = f_{v-1}^{(k,m)}, f_{u-2}^{(k,m)} = f_{v-2}^{(k,m)}, \ldots, f_2^{(k,m)} = f_{v-u+2}^{(k,m)}$ ve $f_1^{(k,m)} = f_{v-u+1}^{(k,m)}$ olduğu görülürki, bu da $f(k, m)$'nin periyodik bir dizi olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

$f(k, m)$'nin en küçük periyodu $h_k(m)$ Çeklinde gösterilir.

Örnek 4.1.1: $s(4,3) = \{0,0,0,1,1,2,2,0,2,2,0,1,2,2,2,1,1,0,1,0,2,0,0,2,1,0,0,0,1 \ldots,\}$ Çeklinde tekrar eder. Böylece, $h_4(3) = 26$ dır.

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Çeklinde ifade edilen $k \times k$ tipli karesel bir matris olsun.

a_{ij} 'ler tamsayılar olmak üzere verilen bir $A = \left[a_{ij}\right]$ matrisi için, A matrisinin her elemanının $\bmod m$ ye göre indirgenmesi $A \bmod (m)$ Çeklinde ifade edilir. Yani, $A \bmod (m) = a_{ij} (\bmod m)$ 'dir. $\langle G \rangle_m = \{ G^i (\bmod m) \mid i \geq 0 \}$ olsun. T, matrisin transpozu olmak üzere,

$$G^i (0,0,\ldots,1)^T (\bmod m) = \left(f_{i+1}^{(k,m)}, f_{i+2}^{(k,m)}, \ldots, f_{i+k}^{(k,m)} \right)$$

dir. Bu durumda $h_k(m)$, aÇağıdaki eÇitliği sağlayan en büyük h pozitif tamsayısı olarak elde edilir;

$$G^h (0,0,\ldots,1)^T (\bmod m) = (0,0,\ldots,1).$$

ġimdi, $a_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1k}) = (0,1,0,\ldots,0)$ Çeklinde k boyutlu bir vektör olsun. Burada, $a_n = (a_{n1}, a_{n2}, \ldots, a_{nk})$ $(n > 0)$ Çeklinde tanımlanıp,

$$a_{n1} = a_{(n-1)k} \text{ ve } a_{ni} = a_{(n-1)k} + a_{(n-1)(i-1)} \quad (i > 1)$$

dir.

$$G'_n = \begin{bmatrix} a_n \\ a_{n+1} \\ \vdots \\ a_{n+k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \\ a_{(n+1)1} & a_{(n+1)2} & \cdots & a_{(n+1)k} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{(n+k-1)1} & a_{(n+k-1)2} & \cdots & a_{(n+k-1)k} \end{bmatrix}$$

olsun.

Buradan aÇağıdaki lemmayı verebiliriz.

Lemma 4.1.6: $G^{n} = G_{n}^{'}$ dir (Kebo Lü and Jun Wang 2007).

$gk(p^{\alpha}), \langle G \rangle_{p^{\alpha}}$ grubunun mertebesi olsun. AĢağıdaki teorem $h_k(p^{\alpha})$ ve $gk(p^{\alpha})$ arasındaki iliĢkiyi verir.

Teorem 4.1.5: $h_k(p^{\alpha}) = gk(p^{\alpha})$ dir (Kebo Lü and Jun Wang 2007).

ġimdi $gk(p)$ ve $gk(p^{\alpha})$ arasındaki iliĢkiyi verelim.

Teorem 4.1.6: t en büyük pozitif tamsayı olmak üzere, $gk(p) = gk(p^{t})$ dir. Her $\alpha > t$ için, $gk(p^{\alpha}) = p^{\alpha - t} gk(p)$olup $gk(p) \neq gk(p^{2})$ ise,her$\alpha > 1$ için $gk(p^{\alpha}) = p^{\alpha - 1} gk(p)$ dir (Kebo Lü and Jun Wang 2007).

Tanım 4.1.8: A ’dan üretilen sonlu bir $G = \langle A \rangle$ grubu, $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ olmak üzere $x_i = a_{i+1}$ $(0 \leq i \leq n-1)$ dizisi için, $x_{i+n} = \prod_{j=1}^{n} x_{i+j-1}$ $(i \geq 0)$ ifadesine; A ’dan üretilen G ’nin Fibonacci periyodu denir ve $F_A(G)$ gösterilir (Campbell and Campbell 2005).

Tanım 4.1.9: Eğer $F_A(G)$ dizisi periyodik ise bu dizinin periyoduna A geren kümesine göre G grubunun Fibonacci uzunluğu denir ve $LEN_A(G)$ ile gösterilir. Eğer $F_A(G)$ dizisi periyodik değil ise G grubunun A geren kümesine göre Fibonacci uzunluğu sonsuzdur denir ve $LEN_A(G) = \infty$ ile gösterilir (Campbell and Campbell 2005).

Tanım 4.1.10: $F(r, n)$ Fibonacci grubu, $r > 0$, $n > 0$ ve bütün alt indisler n modülüne göre indirgenmiĢ olmak üzere,

$$\langle a_1, a_2, \ldots a_n : a_1 a_2 a_3 \ldots a_r = a_{r+1}, a_2 a_3 a_4 \ldots a_{r+1} = a_{r+2}, \ldots a_{n-1} a_n a_1 \ldots a_{r-2} = a_{r-1}, a_n a_1 a_2 \ldots a_{r-1} = a_r \rangle$$

Ģeklindeki takdim ile tanımlanır.

Teorem 4.1.7: G, $A = \{a_1 , a_2 , a_n \}$ tarafından gerilmiĢ bir grup ve sonlu bir m sayısı için $LEN_A(G) = m$ olsun. Bu takdirde G , $F(n, m)$ Fibonacci grubunun epimorfik bir görüntüsüdür (Campbell 2003).

İspat: Bu teorem von Dyck's Lemma'sı ve Johnson et al. (1974)' nın direkt bir sonucudur.

H ve G grupları için , $H \leq G$ veya H G ise aĢağıdaki durumların herhangi biri söz konusudur ;

$$LEN(H) \geq LEN(G),$$
$$LEN(H) \leq LEN(G),$$
$$LEN(H) \mid LEN(G),$$
$$LEN(H) \, \chi LEN(G).$$

Bu durum için örnek olarak,

n tek olduğunda,

$$S_n = \langle (1, 2, \quad , n), (1, 2) \rangle \text{ ve } A_n = \langle (1, 2, \quad , n), (n-2, n-1, n) \rangle$$

Ģeklinde ve n çift olduğunda,

$$S_n = \langle (1, 2, \quad , n), (1, 2) \rangle \text{ ve } A_n = \langle (1, 2, \quad , n), (n-2, n-1, n) \rangle$$

Ģeklinde takdim edilen S_n ve A_n verilebilir (Campbell 2003).

Fibonacci uzunluğunun bazı özellikleri aĢağıdaki gibidir:

i. Bir grubun Fibonacci uzunluğu seçilen geren kümesine ve geren elemanların sıralamasına bağlıdır (Campbell and Campbell 2005).

ii. Eğer G grubu bir Fibonacci grubunun epimorfik bir görüntüsü ise $F_A(G)$ dizisi periyodiktir (Thomas 1991).

Sonuç 4.1.2: G grubu, $\langle X : R \rangle$ Ģeklinde takdim edilmiĢ olsun. $LEN_x(G) = n$ ve H , G grubun aynı geren kümesi üzerinde bir bölüm grubu ise $LEN_x(H) \mid LEN_x(G)$ olur (Campbell and Campbell 2009).

Sonuç 4.1.3: $(|G_n|)$ sınırsız ve monoton artan bir dizi olmak üzere, $G_n = \langle X \rangle$ grupların bir ailesi ve $n \geq k$ için $LEN_X(G_n) = LEN_X(G_{n+1}) = m$ olsun. Bu durumda $F(|X|, m)$ Fibonacci grubun mertebesi sonsuzdur (Campbell and Campbell 2009).

Tanım 4.1.11: Fibonacci kelimelerinin dizisi,

$$(\{x, y\}, \{x \rightarrow y, y \rightarrow xy\}, \{x\})$$

sistemi ile gerilmiĢ sonsuz bir dizidir. Yani dizi, $(x, y, xy, yxy, xy^{2}xy, \ldots)$ Ģeklindedir.

Tribonacci kelimelerinin dizisi,

$$(\{x, y, z\}, \{x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow xyz\}, \{x\})$$

sistemi ile gerilmiĢ sonsuz bir dizidir (Campbell and Campbell 2009).

Tanım 4.1.12: Sonlu bir gruptaki bir *k*-nacci (*k*-basamak Fibonacci) dizisi, grubun $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ elemanlarının dizisidir. Burada dizinin her bir elemanı, verile $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}$, baĢlangıç elemanları için,

$$x_n = \begin{cases} x_0 x_1 \cdots x_{n-1}, & j \leq n < k, \\ x_{n-k} x_{n-k+1} \cdots x_{n-1}, & n \geq k, \end{cases}$$

Ģeklinde tanımlanır. Ayrıca bu dizinin Bir $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}$ baĢlangıç elemanlarının grubu germesi gerekir. Böylece, bu *k*-nacci dizisi grubun yapısını yansıtır. $x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}$ tarafından gerilen sonlu bir gruptaki bir *k*-nacci dizisi $F_k(G; x_0, \ldots, x_{j-1})$ Ģeklinde gösterilir. Buna göre tamsayılardaki mod *m* ye göre klasik Fibonacci dizisi $F_2(Z_m; 0, 1)$ olarak yazılabilir. Grup elemanlarının bir 2-nacci dizisi sonlu bir grubun Fibonacci dizisi olarak adlandırılır. Bir $F_k(G; x_0, \ldots, x_{j-1})$ *k*-nacci dizisinin periyodu $P_k(G; x_0, \ldots, x_{j-1})$ Ģeklinde gösterilir

(Knox 1992).

k-gerenli bir grubun orbiti bu gruptaki *k*-nacci dizisidir (Deveci 2010).

Tanım 4.1.13: *G* bir grup olsun. *G* nin her elemanının içinde bulunduğu bir *k*-nacci dizisi mevcut ise *G* ye *k*-nacci dizilenebilirdir denir (Knox 1992).

Tanım 4.1.14: Grubun elemanlarının bir dizisi belli bir noktadan sonra bir alt dizinin tekrarını ihtiva ediyorsa bu diziye periyodiktir denir. Tekrar eden alt dizideki eleman sayısına dizinin periyodu denir.

a, *b*, *c*, *d*,*b*, *c*, *d*,*b*, *c*, *d*, dizisi *a* baĢlangıç elemanından sonra periyodiktir ve periyodu 3 tür. Bir $F_k\left(G; x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}\right)$ *k*-nacci dizisinin periyodu $P_k\left(G; x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}\right)$ ile gösterilir.

Tanım 4.1.15: Bir dizideki ilk *k* eleman tekrar eden bir alt dizi oluĢturursa bu diziye periyodu *k* olan basit periyodik dizi denir. Örneğin; *a*, *b*, *c*, *d* , *e*, *a*, *b*, *c*, *d* , *e*, dizisi basit periyodik olup periyodu 5 olan basit periyodik bir dizidir.

Teorem 4.1.8: Sonlu bir grupta bir *k*-nacci dizisi basit periyodiktir (Knox 1992).

İspat: *G* mertebesi *n* olan bir grup olsun. *G* 'nin elemanlarının n^k tane farklı *k*-sıralısı olduğundan bu *k*-sıralılardan en az biri *G* 'nin bir *k*-nacci dizisinde iki kez görünür. Bu yüzden bu *k*- sıralıyı takip eden alt dizi tekrarlanır. O halde bu $k-nacci$ dizisi periyodik olur.

Bu dizi periyodik olduğundan $i > j$ olmak üzere,

$$x_{i+1} = x_{j+1}, x_{i+2} = x_{j+2}, x_{i+3} = x_{j+3}, \ldots, x_{i+k} = x_{j+k}$$

olacak Ģekilde *i* ve *j* doğal sayıları vardır. Bir $k-nacci$ dizisinin tanımlayıcı bağıntısından,

$$x_i = x_{i+k}\left(x_{i+(k-1)}\right)^{-1}\left(x_{i+(k-2)}\right)^{-1} \ldots \left(x_{i+1}\right)^{-1}$$

ve

$$x_j = x_{j+k}\left(x_{j+(k-1)}\right)^{-1}\left(x_{j+(k-2)}\right)^{-1} \ldots \left(x_{j+1}\right)^{-1}$$

yazılabilir. O halde $x_i = x_j$ olduğundan,

$$x_{i-1} = x_{j-1},\ x_{i-2} = x_{j-2},\ \ldots,\ x_{i-j} = x_{j-j} = x_0$$

olur. Böylece bu dizi basit periyodik olur.

Bu teorem Wall'ın (1960) daki teoremin genellemesidir. Wall burada tamsayıların $F_2\left({}_m ;0,1\right)$ dizisinin mod m ye göre basit periyodik olduğunu göstermiÇtir. Yukarıdaki teoremden sonlu bir G grubundaki bir $k-nacci$ dizisinin periyodu için $|G|_k$ nın bir üst sınır olduğu söylenebilir.

Teorem 4.1.9: $n \geq 3$ olmak üzere a , b gerenli D_n dihedral grubunu göz önüne alalım. Bu taktirde, $F_k(D_n ; a, b) = F_k(D_n ; b, a) = 2k+2$ dir (Knox 1992).

İspat: a ve b elemanlarının mertebeleri sırası ile n ve 2 olsun. $k=2$ ise oluÇturulabilecek mümkün diziler,

$$a, b, ab, a^{-1}, a^2b, a, b, \ldots,$$

ve

$$b, a, a^{-1}b, b, a^{-1}, ab, b, a, \ldots,$$

Çeklinde olup her ikisinde de periyod 6 dır. $k \geq 3$ ise $F_k(D_n ; a , b)$ nin ilk k elemanı,

$$x_0 = a, x_1 = b, x_2 = ab, x_3 = (ab)^2, \ldots, x_{k-1} = (ab)^{2^{k-3}}$$

olur. Bu dizi,

$$a, b, ab, e, e, \ldots, e, e,$$

dizisine indirgenir. Burada, $3 \leq j \leq k-1$ için $x_j = e$ dir. Böylece,

$$x_k = \prod_{i=0}^{k-1} x_i = abab = e,$$

$$x_{k+1} = \prod_{i=1}^{k} x_i = bab = a^{-1},$$

$$x_{k+2} = \prod_{i=2}^{k+1} x_i = aba^{-1} = a^2 b,$$

$$x_{k+3} = \prod_{i=3}^{k+2} x_i = a^{-1}a^2 b = ab,$$

$$x_{k+4} = \prod_{i=4}^{k+3} x_i = a^{-1}a^2\,bab = e,$$

biçiminde olur. Bu da $4 \le j \le k$ için, $x_{k+j} = e$ olduğunu gösterir. Ayrıca,

$$x_{k+k+1} = \prod_{i=k+1}^{k+k} x_i = a^{-1}a^2\,bab = e,$$

$$x_{k+k+2} = \prod_{i=k+2}^{k+k+1} x_i = a^2\,bab = a,$$

$$x_{k+k+3} = \prod_{i=k+3}^{k+k+2} x_i = bab = b,$$

$$x_{k+k+4} = \prod_{i=k+4}^{k+k+3} x_i = ab,$$

olarak yazılabilir. ArdıÇık x_{2k+2}, x_{2k+3}, x_{2k+4} elemanları a, b ve ab ye bağlı olduğundan, devir tekrarı $(2k+2)$. elemandan baÇlar. Yani, $x_0 = x_{2k+2}$ olur. Böylece $F_k(D_n; a, b)$ nin periyodu $2k+2$ olur. Eğer diğer sıradaki gerenlerle üretilmiÇ diziyi seçersek, bu dizi $b, a, ba, (ba)^2, (ba)^4, (ba)^8, \ldots, (ba)^{2^{k-3}}$ Çeklinde olup $b, a, ba, e, e, \ldots, e, e$ dizisine indirgenir ve ispat benzer Çekilde yapılır.

Teorem 4.1.10: G, 2-gerenli bir grup ve G' nin birim elemanı $F_2(G; x, y)$ veya $F_2(G; y, x)$ Fibonacci dizisinde görülüyorsa G abelyendir (Knox 1992).

İspat: Genelliği bozmadan G 'nin $F_2(G; x, y)$ Fibonacci dizisi düÇünelim ve n doğal sayısı için G 'nin birim elemanın bu dizinin $(n+1)$. elemanı olduğunu kabul edelim. Bu dizinin n . elemanı grubun herhangi bir elemanı olabilir. Böylece,

$$x, y, \ldots, s, e$$

Çeklinde bir dizi elde edilir. Yalnız s^{-1}, $(n-1)$. pozisyon için tanımlayıcı bağıntıyı sağlar. Benzer Çekilde s^2 dizinin, $(n-2)$. pozisyonunda, s^{-3} dizinin $(n-3)$. pozisyonunda olur. Bu Çekilde devam ederek,

$$x, y, \ldots, s^{-8}, s^5, s^{-3}, s^2, s^{-1}, s^1, e$$

Çeklinde bir dizi elde edilir. Bu elemanlar üslere sahip olduğundan $u_{i-2} = -u_{i-1} + u_i$ bağıntısı kullanılarak s nin üslerinde ortaya çıkan ardıÇık pozitif ve negatif iÇaretli tamsayılardan bir Fibonacci dizisi oluŞturulur.Böylece, grubun bir Fibonacci dizisi aŞağıdaki iki forma sahip olur:

(i). n tek ise, dizi,

$$s^{u_n}, s^{-u_{n-1}}, s^{u_{n-2}}, \ldots s^{5}, s^{-3}, s^{2}, s^{-1}, s^{1}, e$$

Şeklinde olur. Bu durumda,

$$s^{u_{n-1}} s^{u_{n-2}} = s^{u_{n-1}+u_{n-2}} = s^{u_n}$$

(bu da $s^{u_{n-1}} = y^{-1}$ olmasını gerektirir.) ve $s^{u_{n-2}} = xy$ dir.

$$s^{u_{n-1}} s^{u_{n-2}} = s^{u_{n-1}+u_{n-2}} = s^{u_n}$$

olduğundan $y^{-1}xy = x$ veya $xy = yx$ olur. O halde bu grup abelyendir.

(ii). n çift ise, dizi,

$$s^{-u_n}, s^{u_{n-1}}, s^{-u_{n-2}}, \ldots s^{5}, s^{-3}, s^{2}, s^{-1}, s^{1}, e$$

Şeklinde olur.

Bu durumda,

$$s^{-u_n} = x, s^{u_{n-1}} = y$$

(bu da $s^{-u_{n-1}} = y^{-1}$ olmasını gerektirir.) $s^{-u_{n-2}} = xy$ dir.

$$s^{-u_{n-1}} s^{-u_{n-2}} = s^{-(u_{n-1}+u_{n-2})} = s^{-u_n}$$

olduğu için $y^{-1}xy = x$ veya $xy = yx$ olur. O halde grup abelyendir.

Bu teoremin tersi doğru değildir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım,

$$A = \langle x, y : x^9 = y^2 = e, xy = yx \rangle$$

abelyen grubunu göz önüne alalım. Bu grubun Fibonacci dizileri,

$$x, y, xy, x, x^2y, x^3y, x^5, x^8y, x^4y, x^3, x^7y, xy, x^8, y,$$

$$x^8y, x^8, x^7y, x^6y, x^4, xy, x^5y, x^6, x^2y, x^8y, x, y, xy$$

ve

$$y, x, xy, x^2y, x^3, x^5y, x^8y, x^4, x^3y, x^7y, x, x^8y, y, x^8,$$

$$x^8 y, x^7 y, x^6, x^4 y, xy, x^5, x^6 y, x^2 y, x^8, xy, y, x, xy$$

Çeklinde olur. Dikkat edilirse bu grubun e, x^2 ve x^7 elemanları bu dizilerde yer almamaktadır.

Sonuç 4.1.4: 2-nacci dizilenebilir bir grup devirlidir (Knox 1992).

İspat: G, 2-nacci dizilenebilir bir grup olsun. Bu takdirde, G grubu ya 1-gerenli ya da 2-gerenlidir. G, 2-gerenli bir grup ise e, G nin 2-nacci dizisinde bulunacağından yukarıdaki teoremin ispatında olduğu gibi, G 'nin bir s elemanının terimlerinden bir dizi oluÇturulabilir. G 'nin her elemanı kendisinin 2-nacci dizisinde bulunur ve bu yüzden G 'nin bütün elemanları, sadece bir s elemanının terimleri ile takdim edilir (s nin üsleri ile). O halde, G grubu 1-gerenlidir ya da devirlidir.

Genel olarak $k \geq 3$ için k -nacci dizilenebilir gruplar abelyen değildir. D_3 dihedral grubu 6 elemanlı k -nacci dizilenebilir bir gruptur.

Teorem 4.1.11: 2-gerenli bir grubun , bir Fibonacci dizisinde görüntüsü var ise; dizinin elemanlarının simgelerinin toplamı x_i olmak üzere, $x_i = e$ için bir dizi aritmetik Çekilde devam eder (Knox 1992).

İspat: Yukarıdaki Teorem (5.1.10)'den $G = \langle x, y \rangle$ abelyendir. Bu yüzden, dizinin n. terimi $x^{u_{n-1}} y^{n_n}$ Çeklindedir. Wall' ın (1960) daki çalıÇmasında, $u_n \equiv 0 \pmod m$ olan terimlerin basit aritmetik diziliÇte olan indislere sahip oldukları bilinmektedir. Böylece , $x, x, x^2, \ , x^{u_n}$ veya $y, y, y^2, y^3, \ , y^{u_n}$ elemanlarının dizilerinin her ikisi de indisleri aritmetik diziliÇte olan pozisyonda olan e 'yi ihtiva eder. e nin ortaya çıkıÇının periodu x ve y nin mertebelerine bağlıdır. $x, y, xy, xy^2, x^2 y^3,$ de e nin ortaya çıkıÇının bu periodu e 'nin $x, x, x^2, \ , x^{u_n}$ ve $y, y, y^2, y^3, \ , y^{u_n}$ deki periodlarının en küçük ortak katı olur. Böylece, e nin $x, y, xy, xy^2, x^2 y^3,$ deki pozisyonları, bir aritmetik diziliÇ ihtiva eden alt indisler olacaktır.

k-nacci dizilenebilir bir grubun bir homomorfik görüntüsü de k-nacci dizilenebilirdir. k-nacci dizilenebilir bir grubun, bir k-nacci dizilenebilir bir grup tarafından geniŞlemesinin *k*-nacci dizilenebilir olması gerekmez. *k*-nacci dizilenebilir grupların direkt çarpımlarının *k*-nacci dizilenebilir olması gerekmez bu durumu bir örnekle gösterelim.

$$A = \langle x, y : x^9 = y^2 = e, yx = xy \rangle$$

abelyen grubunu ele alalım,bu grup $\langle x \rangle$ ve $\langle y \rangle$ devirli grupların direkt çarpımıdır.

$\langle x \rangle$ grubu için Fibonacci dizisi,

$$F_2(\langle x \rangle; e, x) = e, x, x, x^2, x^3, x^5, x^8, x^4, x^3, x^7, x, x^8, e, x^8, x^8, x^7, x^6, x^2, x^8, x, e, x, x,$$

ve $\langle y \rangle$ grubu için Fibonacci dizisi,

$$F_2(\langle y \rangle; e, y) = e, y, y, e$$

Şeklinde olup bu iki grup da 2-nacci dizilenebilir olmasına rağmen bu grupların direkt çarpımı 2-nacci dizilenebilir değildir (Knox 1992).

4.2. $Q_{2^n} \times \varphi_{2m}$ Grubundaki *k*-Nacci Dizileri

$4 \leq i \leq k$ için, $f_1'^{(k)} = 0$, $f_2'^{(k)} = 0$, $f_3'^{(k)} = 1$ ve $f_i'^{(k)} = 2^{i-4}$ baŞlangıç değerleri ile $k \geq 4$ olmak üzere $n > k$ için,

$$f_n'^{(k)} = \sum_{j=1}^{k} f_{n-j}'^{(k)} \qquad n > k,$$

Şeklinde tanımlanan *k*-basamak fibonacci dizisinin *n*. terimi $f_n'^{(k)}$ ile gösterilsin. Bu dizi *m* modülüne göre indirgenerek

$$f'(k, m) = \left(f_1'^{(k,m)}, f_2'^{(k,m)}, \ , f_n'^{(k,m)}\right)$$

Şeklinde dizi elde edilir. Burada,

$$f_i'^{(k,m)} = f_i'^{(k)}$$

dir. Bu durumda $4 \leq i \leq k$ için,

$$\left(f_1'^{(k,m)}, f_2'^{(k,m)}, \ , f_k'^{(k,m)}\right) = \left(0,0,1, 2^{i-4} (\text{mod } m)\right)$$

olup bu dizi, (5.1) dizisi ile aynı indirgemeli bağıntıya sahiptir (Wall 1960). $h_k'(m)$, $f'(k, m)$ 'nin en küçük periyodu olsun

Lemma 4.2.1: $\mathrm{h_k}(m) = \mathrm{h_k}'(m)$ dir (Deveci ve Karaduman, 2012).

Teorem 4.2.1: BaĢlangıç elemanları y, x, z olmak üzere $(n, m \geq 3)$ için, $Q_{2^n} \times \varphi_{2m}$ yarı-direkt çarpımındaki *k*-basamak fibonacci dizilerinin periyodları aĢağıdaki gibidir:

i. $P_2\left(Q_{2^n} \times \varphi_{2m}; y, x, z\right) = h_2(2m)$ dir.

ii. Eğer $k = 3$ ise, iki durum ortaya çıkar:

1. $h_3(2m)$,8'e bölünür ise; $P_3\left(Q_{2^n} \times \varphi_{2m}; y, x, z\right) = h_3(2m)$ dir.

2. $h_3(2m)$,8'e bölünmez ise; $P_3\left(Q_{2^n} \times \varphi_{2m}; y, x, z\right) = 2h_3(2m)$ dir.

iii. Eğer $k \geq 4$ ise, iki durum ortaya çıkar:

(1'). $h_k(2m)$, $2k+2$ 'ye bölünür ise, iki alt durum oluĢur:

(i'). $i = h_k(m)/2k+2$ olacak Ģekilde $4i$, 2^{n-1} 'e bölünür ise; $i = h_k(m)/2k+2$ olmak üzere, $P_k\left(Q_{2^n} \times \varphi_{2m}; y, x, z\right) = h_k(2m)$

dir.

(ii'). $i = h_k(m)/2k+2$ olacak Ģekilde $4i$, 2^{n-1} 'e bölünmez ise; $i = h_k(m)/2k+2$ olmak

üzere, $P_k\left(Q_{2^n} \times \varphi_{2m}; y, x, z\right) = 2^{n-\omega-1}.h_k(2m)$ dir. (Burada ω, $4i = 2^{\omega}.\delta$, $(\delta \in$ $)$ olacak Ģekilde en büyük pozitif tamsayıdır).

(2'). $h_k(2m)$, $2k+2$ 'ye bölünmez ise, iki durum ortaya çıkar:

(i''). $2^{n-1} \mid 4i$ ise; $i = 2.h_k(m)/2k+2$ olmak üzere, $P_k\left(Q_{2^n} \times \varphi_{2m}; y, x, z\right) = 2.h_k(2m)$

dir.

(ii''). $4i$, 2^{n-1} 'e bölünmez ise; $i = 2.h_k(m)/2k+2$ olmak üzere,

$P_k\left(Q_{2^n} \times \varphi_{2m}; y, x, z\right) = 2^{n-\omega}.h_k(2m)$dir. (Burada ω, en büyük tamsayı olup $4i = 2^{\omega}.\delta$, $(\delta \in$ $)$ dir.) (Deveci ve Karaduman, 2012).

4.3. Sonlu Gruplarda *k*-Mertebeden Pell Sayılarının *k*-Dizileri

Tanım 4.3.1: $P_0 = 0$, $P_1 = 1$ baĢlangıç değerleri olmak üzere $\{P_n\}$ Pell dizisi,

$$P_{n+1} = 2P_n + P_{n-1} \qquad n \geq 1,$$

Çeklinde tanımlanır. Pell sayılarının bazı özellikleri Horadam tarafından [25]'de elde edilmiÇtir. Bicknell ise, [2]'de Pell sayılarının aÇağıdaki matris tarafından üretildiğini göstermiÇtir;

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n \in$ için,

$$M^n = \begin{bmatrix} P_{n+1} & P_n \\ P_n & P_{n-1} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Kılıç ve TaÇçı [31] de genelleÇtirilmiÇ *k*-mertebeden Pell sayılarının *k* dizilerini,

$$P_n^i = \begin{cases} 1 & n = 1 - i, \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \qquad 1 - k \leq n \leq 0$$

baÇlangıç değerleriyle, $n > 0$ ve $1 \leq i \leq k$ için;

$$P_n^i = 2P_{n-1}^i + P_{n-2}^i + \cdots + P_{n-k}^i$$

Çeklinde tanımlamıÇlardır. Burada P_n^i, i. dizinin n. terimidir. $k = 2$ için $\{P_n^k\}$ dizisi, $\{P_n\}$'e indirgenir ve $i = k$ için P_n^k'ya genelleÇtirilmiÇ *k*- Pell sayıları denir. Ayrıca [28]'de,

$$R = \left[r_{ij} \right]_{kxk} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$E_n = \left[e_{ij} \right]_{kxk} = \begin{bmatrix} P_n^1 & P_n^2 & \cdots & P_n^k \\ P_{n-1}^1 & P_{n-1}^2 & \cdots & P_{n-1}^k \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{n-k+1}^1 & P_{n-1+k}^2 & \cdots & P_{n-1+k}^k \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$E_{n+1} = R.E_n$$

Ģeklinde eĢitlik elde edilmiĢtir. Burada R , $k \times k$ tipli matrisi, genelleĢtirilmiĢ *k*-mertebeden

Pell matrisi olarak adlandırılmıĢtır (Kılıç ve TaĢçı 2006).

Lemma 4.3.1: E_n ve R matrisleri için $n \geq 0$ olmak üzere

$$E_{n+1} = R^{n+1}$$

dir (Kılıç ve TaĢçı 2006).

4.4. *m* Modülüne Göre Genelleştirilmiş *k*-Mertebeden Pell Dizileri

GenelleĢtirilmiĢ *k*- Pell dizisini *m* modülüne indirgersek

$$\{P^{k,m}\} = \{P^{k,m}_{1-k}, P^{k,m}_{2-k}, \ldots, P^{k,m}_{0}, P^{k,m}_{1}, P^{k,m}_{2}, \ldots, P^{k,m}_{n}, \ldots\}$$

Ģeklinde bir dizi elde ederiz. Burada

$$P^{k,m}_{n} = P^{k}_{n} \pmod{m}$$

dir (Deveci ve Karaduman, Baskıda).

Teorem 4.4.1: $\{P^{k,m}\}$ periyodik bir dizidir (Deveci ve Karaduman, 2012).

İspat: $U_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid 0 \leq x_i \leq m-1\}$ olsun. $|U_k| = m^k$ sonlu olup herhangi $a \geq 0$ için

$$P^{k}_{n} = P^{k}_{n+k} - 2P^{k}_{n+k-1} - P^{k}_{n+k-2} - \cdots - P^{k}_{n+1}$$

olacak Ģekilde $b \geq a$ tamsayısı vardır. $\{P_n^{k}\}$ genelleĢtirilmiĢ *k*-mertebeden Pell dizisinin tanımından

$$P^{k,m}_{a} = P^{k,m}_{b}, P^{k,m}_{a-1} = P^{k,m}_{b-1}, \ldots, P^{k,m}_{2} = P^{k,m}_{b-a+2}, P^{k,m}_{1} = P^{k,m}_{b-a+1}$$

elde edilir ve bu da $\{P^{k,m}\}$ nin periyodik olduğunu gösterir.

$hP_k(m)$, $\{P^{k,m}\}$'nin en küçük periyodu olsun. Bu periyoda genelleĢtirilmiĢ *k*-mertebeden Pell dizisinin *m* modülüne göre periyodu denir.

Teorem 4.4.2: $hP_2(2^u) = 2^u$ dir (Deveci ve Karaduman, 2012).

İspat: $\{P_n\}$ Pell dizisinin tanımından $u \in N$ için

$P_{2^u} = 2P_{2^u-1} + P_{2^u-2} = 2^u \lambda \qquad (\lambda \in N)$ ve
$P_{2^u+1} = 2P_{2^u} + P_{2^u-1} = 2^{u+1}\lambda + 2^u \beta + 1 (\mathrm{mod}\ m) \quad (\beta \in \quad)$ elde edilir.
$P_{2^u} \equiv 0 \left(\mathrm{mod}\ 2^u\right)$ ve $P_{2^u+1} \equiv 1\left(\mathrm{mod}\ 2^u\right)$ olduğundan devir $\left(2^u\right)$ elemanla

baĞlar. Yani

$$P_{2^u} \equiv P_0 (\mathrm{mod}\ 2^u),\ P_{2^u+1} \equiv P_1 (\mathrm{mod}\ 2^u),\ ,$$

olup,

$$hP_2(2^u) = 2^u$$

olur.

Teorem 4.4.3: $hP_2(m)$ bir çift sayıdır (Deveci ve Karaduman, 2012).

İspat: $P_\alpha \equiv P_\varphi (\mathrm{mod}\ m)$ ve $P_{\alpha+1} \equiv P_{\varphi+1} (\mathrm{mod}\ m)$ olsun. Pell dizisinin tanımından aĞağıdaki durumlar elde edilir.
i. Eğer P_φ tek ise $P_{\varphi+1}$ çifttir.
ii. Eğer P_φ çift ise $P_{\varphi+1}$ tektir. Yani 2, $hP_2(m)$ yi bölmelidir.

Böylece $hP_2(m)$ 'nin 2 tarafından bölünmesi gerektiği görülür ki, bu da bize $hP_2(m)$ 'nin çift olduğunu gösterir.
$<R>_{P^\alpha} = \{R^i (\mathrm{mod}\, p^\alpha) | i \geq 0\}$ devirli bir grup olsun. $<R>_{P^\alpha}$ devirli grubunun mertebesi de $\left|<R>_{P^\alpha}\right|$ ile gösterilsin.

Teorem 4.4.4: $hP_k(p^\alpha) = \left|<R>_{P^\alpha}\right|$ dir (Deveci ve Karaduman, 2012).

İspat: $\left|<R>_{P^\alpha}\right|$'nın $hP_k(p^\alpha)$ tarafından bölündüğü açıktır. O halde $hP_k(p^\alpha)$ 'nın da $\left|<R>_{P^\alpha}\right|$ tarafından bölündüğünü gösterirsek ispatı tamamlarız. $hP_k(p^\alpha) = n$ olsun. $E_{n+1} = R^{n+1} = R.E_n$ olduğunu biliyoruz. $E_n \equiv I (\mathrm{mod}\, p^\alpha)$ (birim matris olsun) olduğu için $R^{n+1} \equiv R \pmod{p^{\alpha}}$ elde edilir. Böylece $R^{n} = I \pmod{p^{\alpha}}$ olduğu görülür ki, bu da $\left|\langle R \rangle_{p^{\alpha}}\right|$'nın n' yi böldüğünü gösterir. Böylece $hP_k(p^{\alpha}) = \left|\langle R \rangle_{p^{\alpha}}\right|$ olduğunu elde ederiz.

Teorem 4.4.5: P_i' ler farklı asal sayılar olmak üzere eğer $m = \prod_{i=1}^{t} P_i^{e_i}$ $(t \geq 1)$ ise,

$$hP_k(m) = okek\left[hP_k\left(P_i^{e_i}\right) \right]$$

dir (Deveci ve Karaduman2012).

İspat: $okek\left[hP_k\left(P_i^{e_i}\right) \right] = \delta$ olsun. $P_{\delta}^{\kappa} \equiv P_0^{\kappa} \pmod m$, $P_{\delta+1}^{\kappa} \equiv P_1^{\kappa} \pmod m$, …, $P_{\delta+k-1}^{\kappa} \equiv P_{k-1}^{\kappa} \pmod m$ olduğundan,

$$hP_k(m) = okek\left[hP_k\left(P_i^{e_i}\right) \right]$$

dir.

Teorem 4.4.6: t, $hP_k(p) = hP_k(p^t)$ olacak Çekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Bu durumda her $\alpha \geq t$ için,

$$hP_k\left(p^{\alpha}\right) = P^{\alpha - t}\, hP_k(p)$$

dir. Buradan $hP_k(p) \neq hP_k(p^2)$ ise her $\alpha > 1$ için $hP_k\left(p^{\alpha}\right) = P^{\alpha-1} hP_k(p)$ olur

(Deveci ve Karaduman2012).

İspat: θ, bir pozitif tamsayı olsun. $R^{hP_k\left(p_{\theta+1}\right)} \equiv I \left(\mathrm{mod}\, p^{\theta+1}\right)$ yani $R^{hP_k\left(p_{\theta+1}\right)} \equiv I \left(\mathrm{mod}\, p^{\theta}\right)$ olduğu için $hP_k\left(p^{\theta}\right)$'nin $hP_k\left(p^{\theta+1}\right)$ yi böldüğü görülmektedir. $R^{hP_k\left(p_{\theta}\right)} = I + \left(a_{ij}^{(\theta)} p^{\theta}\right)$ yazılarak,

$$R^{hP_k\left(p^{\theta}\right)p} = \left(I + \left(a_{ij}^{(\theta)} p^{\theta}\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(a_{ij}^{(\theta)} p^{\theta}\right)^i \equiv I \left(\mathrm{mod}\, p^{\theta+1}\right)$$

elde ederiz ki, bu da $hP_k\left(p^{\theta+1}\right)$'nin $hP_k\left(p^{\theta}\right)p$ yi böldüğünü gösterir. Böylece ya $hP_k\left(p^{\theta+1}\right)=hP_k\left(p^{\theta}\right)$ ya da $hP_k\left(p^{\theta+1}\right)=hP_k\left(p^{\theta}\right)p$ olduğunu gösterirki, buradaki ikinci durum ancak ve ancak $a_{ij}^{(\theta)}$'nın p tarafından bölünmemesi halinde sağlanır.

Bir $a_{ij}^{(t+1)}$, p tarafından bölünmemek koĢuluyla,

$$hP_k\left(p^{t}\right)\neq hP_k\left(p^{t+1}\right)$$

elde edilir. Böylece $hP_k\left(p^{t+1}\right)\neq hP_k\left(p^{t+2}\right)$ sonucuna ulaĢılır. t üzerinden tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanır.

4.5. Sonlu Gruplarda Genelleştirilmiş *k*-Mertebeden Pell Dizileri

Tanım 4.5.1: Sonlu gruplarda genelleĢtirilmiĢ k mertebeden Pell dizileri

$$x_n=\begin{cases} x_0x_1\cdots(x_{n-1})^2, & j\leq n<k,\\ x_{n-k}x_{n-k+1}\cdots(x_{n-1})^2, & n\geq k,\end{cases}$$

Ģekildedir (Deveci ve Karaduman, 2012).

Teorem 4.5.1: Sonlu gruplarda genelleĢtirilmiĢ k- mertebeden Pell dizileri periyodiktir (Deveci ve Karaduman, 2012).

İspat: G, sonlu bir grup olsun. $|G|$ ile G'nin mertebesi olmak üzere $|G|^k$ dizi bu grupta bir k çokluğuna götürecektir ve sonunda (grup sonlu olduğundan) bu k çokluğuna götüren baĢka bir eleman bulunacağından genelleĢtirilmiĢ k-mertebeden Pell dizileri periyodiktir. $Q_k(G;x_0,x_1,\ldots,x_{j-1})$ dizisinin periyodunu $PerQ_k(G;x_0,x_1,\ldots,x_{j-1})$ ile göstereceğiz. GenelleĢtirilmiĢ k -mertebeden Pell dizisinin periyodu, tanımdan da anlaĢılacağı gibi geren kümesine bağlıdır (baĢlangıç elemanlarının sıralanıĢına). C_m, m-mertebeden devirli grup olmak üzere bu grubun genelleĢtirilmiĢ k-mertebeden Pell dizisinin periyodunun $hP_k(m)$ olduğu açıktır.

Tanım 4.5.2: G, sonlu bir grup olsun. Eğer G' nin her elemanı, G'nin elemanlarından meydana gelen bir genelleŞtirilmiŞ k -mertebeden Pell dizisinde ortaya çıkıyorsa G'ye, genelleŞtirilmiŞ k- mertebeden Pell dizilendirilebilirdir denir.

GenelleŞtirilmiŞ k -mertebeden Pell dizilendirilebilir grupların direk çarpımlarının da genelleŞtirilmiŞ k- mertebeden Pell dizilendirilebilir olması gerekmez. Örneğin; D_2 four

$$\langle x, y : x^2 = y^2 = e, xy = yx \rangle$$

grubunu düŞünürsek bu grubun Pell dizileri;

$$Q_2(D_2; x, y) = x, y, x, y, \ ,$$

$$Q_2(D_2; y, x) = y, x, y, x, \ ,$$

olup xy elemanı yukarıdaki dizilerin hiçbirinde ortaya çıkmadığından D_2 four grubu genelleŞtirilmiŞ 2-merteben dizilendirilebilir olmadığı görülür. Fakat,

$$Q_2(C_2; e, x) = e, x, e, x, \ ,$$

$$Q_2(C_2; e, y) = e, y, e, y,$$

olduğundan $D_2 = C_2 \times C_2$ olup, C_2 'nin genelleŞtirilmiŞ 2-mertebeden dizilendirilebilir olduğu açıktır (Deveci ve Karaduman 2012).

4.6. Dihedral Grupta Genelleştirilmiş *k*-Mertebeden Pell Dizileri

Teorem 4.6.1: $D_n = < x, y \mid x^2 = y^2 = (xy)^2 = e >, (n \geq 2)$ olsun.

i. k=2,4 olsun. $PerQ_k(D_n; x, y) = hP_k$

(2) dir.

$$\textbf{ii. } PerQ_3(D_n; x, y) = \begin{cases} \frac{n}{2}(hP_3(2)) & n \equiv 0 (\text{mod } 4), \\ n(hP_3(2)) & n \equiv 2 (\text{mod } 4), \\ 2n(hP_3(2)) & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

dir.

iii. ≥ 5 olsun.

(1). Eğer $'$nin çarpanlarından tek tamsayı olanların hiçbiri $[3, k-2]$aralığında değil ise periyod aĢağıdaki gibidir;

$$PerQ_k(D_n; x, y) = \begin{cases} \frac{n}{2}(hP_k(2)) & n \equiv 0(\text{mod } 4), \\ n(hP_k(2)) & n \equiv 2(\text{mod } 4), \\ 2n(hP_k(2)) & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

dir.

(2). Eğer η, $[3, k-2]$aralığında n 'nin çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aĢağıdaki

iki durum söz konusudur:

(2.1). Eğer $j \in N$ için, $\eta 3^i \notin [3, k-2]$ ise periyod aĢağıdaki gibidir;

$$PerQ_k(D_n; x, y) = \begin{cases} \eta\frac{n}{2}(hP_k(2)) & n \equiv 0(\text{mod } 4), \\ \eta n(hP_k(2)) & n \equiv 2(\text{mod } 4), \\ \eta 2n(hP_k(2)) & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

dir.

(2.2). Eğer μ, $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek sayı ve $j \in N$ için $\mu = \eta 3^i$ ise periyod aĢağıdaki gibidir;

$$PerQ_k(D_n; x, y) = \begin{cases} \mu\frac{n}{2}(hP_k(2)) & n \equiv 0(\text{mod } 4), \\ \mu n(hP_k(2)) & n \equiv 2(\text{mod } 4), \\ \mu 2n(hP_k(2)) & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

(Deveci ve Karaduman, 2012).

İspat: **i.** $k = 2$ için elde edilen dizi,

$$x, y, x, y,$$

Çeklindedir ve bu dizinin periyodu $hP_2(2) = 2$ dir. $k = 4$ için ise, periyodu $hP_4(2) = 7$ olan

$$x, y, x, xy, y, e, e, x, y, xy,$$

diziyi elde ederiz.

ii. $hP_3(2) = 7$ dir. Eğer $= 3$ olursa dizi,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x,$$

$$x_{14} = (xy)^8 x,\ x_{15} = (xy)^7 x, x_{16} = (xy)^4 x,$$

$$x_{28} = (xy)^{16} x,\ x_{29} = (xy)^{15} x, x_{30} = (xy)^8 x,$$

Çeklindedir. Burada dizinin periyodunu belirlemek için, $v \in N$ olmak üzere $4i = nv$ olacak Çekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekir.

Eğer, $n \equiv 0 \pmod 4$ ise $i = \frac{n}{2}$ olup,

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2.\frac{n}{4}.7 = \frac{n}{2}.7 = \frac{n}{2}(hP_3(2))$$

elde edilir.

Eğer, $n \equiv 2 \pmod 4$ ise $i = \frac{n}{2}$ olup,

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2.\frac{n}{2}.7 = n.7 = n(hP_3(2))$$

elde edilir.

Eğer, $n \equiv 1 \pmod 4$ veya $n = 3 \pmod 4$ ise $i = n$ olup,

$$PerQ_3(D_n; x, y) = 2.n.7 = 2n(hP_3(2))$$

elde edilir.

iii. $k \geq 5$ için ε_1 , $,\varepsilon_{k-3} \in$ olmak üzere

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = x, x_3 = xy, x_4 = y, x_5 = x,$$

$$x_{2i.hP_k(2)-k+2} = (yx)^{4i}, x_{2i.hP_k(2)-k+3} = (yx)^{\varepsilon_1 4i}, x_{2i.hP_k(2)-k+4} = (yx)^{\varepsilon_2 4i}$$

$$, x_{2i.hP_k(2)-1} = (yx)^{\varepsilon_{k-3} 4i}, x_{2i.hP_k(2)} = (yx)^{\tau} x, x_{2i.hP_k(2)+1} = (yx)^{\tau-1} x,$$

dir. Burada dizinin periyodunu belirlemek için, $w \in$ olmak üzere $4i = n.w$ olacak Çekilde en küçük i doğal sayısının belirlenmesi gerekir.

(1). Eğer t , $[3, k-2]$ aralığında n 'nin çarpanlarından olan tek tamsayı değil ise aŞağıdaki üç durum söz konusudur:

(1.1). $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$ ve $n \nmid \tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \frac{n}{4}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2.\frac{n}{4} hP_k(2) = \frac{n}{2} hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(1.2). $n \equiv 2 (\text{mod } 4)$ ve $n \nmid \tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \frac{n}{2}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2.\frac{n}{2} hP_k(2) = nhP_k(2)$$

olduğu görülür.

(1.3). $n \equiv 1 (\text{mod } 4)$, $n | \tau$ ve $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = n$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2.nhP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2). η, $[3, k-2]$ aralığında n 'nin çarpanlarından olan en büyük tek tamsayı ise aŞağıdaki iki durum söz konusudur:

(2.1). Eğer, $\eta^{3_i} \notin [3, k-2]$ ise $j \in N$ için üç durum ortaya çıkar;

(2.1.1) $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$ ve $n | \tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \eta \frac{n}{4}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\eta\frac{n}{4}hP_k(2) = \eta\frac{n}{2}hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.1.2). $n \equiv 2 (\text{mod } 4)$ ve $n \nmid$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i\,.\,hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \eta\frac{n}{2}$ için,

$$x_{2i\,.\,hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i\,.\,hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2.\eta\frac{n}{2}hP_k(2) = \eta n hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.1.3). $n \equiv 1 (\text{mod } 4)$ ve $n | \tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i\,.\,hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \eta n$ için,

$$x_{2i\,.\,hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i\,.\,hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = \eta 2n hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.2). Eğer μ, $[3, k-2]$ aralığındaki en büyük tek tamsayı ve $j \in$ için $\mu = \eta^{3_i}$ ise aĢağıdaki üç durum söz konusudur:

(2.2.1). $n \equiv 0 (\text{mod } 4)$ ve $n | \tau$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i\,.\,hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \mu\frac{n}{4}$ için,

$$x_{2i\,.\,hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i\,.\,hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\mu\frac{n}{4}hP_k(2) = \mu\frac{n}{2}hP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.2.2). $n \equiv 2 (\text{mod } 4)$ ve $n \nmid$ ise $1 \le l \le k-2$ için,

$$x_{2i\,.\,hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \mu \frac{n}{2}$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = 2\mu\frac{n}{2} hP_k(2) = \mu nhP_k(2)$$

olduğu görülür.

(2.2.3). $n \equiv 1 (\text{mod } 4)$ ve $n | \tau$ ise $1 \leq l \leq k-2$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)-1} = e$$

ve $i = \mu n$ için,

$$x_{2i.hP_k(2)} = x \text{ ve } x_{2i.hP_k(2)+1} = y$$

elde edilir. Buradan,

$$PerQ_k(D_n; x, y) = \mu 2nhP_k(2)$$

olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanır.

5. MATERYAL VE YÖNTEM

5.1. Jacobsthal Dizisi

Tanım 5.1.1: $J_0 = 0$ and $J_1 = 1$ olmak üzere $\{J_n\}$ Jacobsthal dizisi $n \geq 2$ için,

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2}$$

Ģeklinde tanımlanır.

Köken ve Bozkurt [33]'da Jacobsthal sayılarının aĢağıdaki matris tarafından üretildiğini göstermiĢtir;

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n \in Z^+$ için,

$$F^n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix} \text{dir.}$$

Yılmaz ve Bozkurt $[45]$' da genelleÇtirilmiÇ k-mertebeden Jacobsthal sayılarının k dizilerini,

$$J_n^i = \begin{cases} 1 & i+n=1 \quad \text{ise,} \\ 0 & \text{diğer durumlarda,} \end{cases} \qquad 1-k \le n \le 0$$

baÇlangıç koÇullarıyla $n > 0$ ve $1 \le i \le k$ için;

$$J_n^i = J_{n-1}^i + 2J_{n-2}^i + \cdots + J_{n-k}^i$$

Çeklinde tanımlamıÇlardır. Burada J_n^i, dizinin n. terimidir. $k = 2$ ve $i = 1$ için genelleÇtirilmiÇ k-mertebeden Jacobsthal dizisi, Jacobsthal dizisine indirgenir. Ayrıca $[45]$' de

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} J_{n+1}^i \\ J_n^i \\ J_{n-1}^i \\ \vdots \\ J_{n-k+2}^i \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} J_n^i \\ J_{n-1}^i \\ J_{n-2}^i \\ \vdots \\ J_{n-k+1}^i \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

Çeklinde eÇitlik elde edilmiÇtir. Burada C, $k \times k$ tipli karesel matrisi, genelleÇtirilmiÇ k-mertebeden Jacobsthal matrisi olarak adlandırılmıÇtır.

Ayrıca , $[45]$' da genelleÇtirilmiÇ k-mertebeden Jacobsthal sayılarının k dizileri için,

$$B_n = \begin{bmatrix} J_n^1 & J_n^2 & \cdots & J_n^k \\ J_{n-1}^1 & J_{n-1}^2 & \cdots & J_{n-1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J_{n-k+1}^1 & J_{n-k+1}^2 & \cdots & J_{n-k+1}^k \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$B_n = C^n$$

Çeklinde denklem elde edilmiÇtir.

5.2. Jacobsthal-Padovan Dizisi

Tanım 5.2.1: $n \geq 0$ için $J(-1) = 0$ ve $J(0) = J(1) = 1$ olmak üzere , $\{J(n)\}$ Jacobsthal-Padovan dizisi,

$$J(n+2) = J(n) + 2J(n-1)$$

Çeklinde tanımlanır (Deveci,baskıda).

$[10]$' de Jacobsthal-Padovan dizisi için;

$$\begin{bmatrix} J(n) \\ J(n+1) \\ J(n+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J(n-1) \\ J(n) \\ J(n+1) \end{bmatrix}$$

Çeklinde bir eÇitlik elde edilmiÇtir. Burada,

$$G = \left[g_{ij}\right]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Çeklinde ifade edilen G matrisi Jacobsthal-Padovan matrisi olarak adlandırılmıÇ olup, $n \geq 0$ için ,

$$G^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(n-1) \\ J(n) \\ J(n+1) \end{bmatrix}$$

denklemi elde edilmiÇtir. Jacobsthal-Padovan dizisi m modülüne göre indirgenerek,

$$\left\{J^{(m)}(n)\right\} = \left\{J^{(m)}(0), J^{(m)}(1), \ldots, J^{(m)}(i), \ldots\right\}$$

Çeklindeki dizi elde edilmiÇtir. Burada, $J^{(m)}(i) \equiv J(i)(\mathrm{mod}\, m)$' dir (Deveci, Baskıda)

Teorem 5.2.1: $\{J^{(m)}(n)\}$ dizisi, m tek ise basit periyodik, m çift ise periyodik bir dizidir (Deveci, baskıda).

$\{J^{m}(n)\}$ dizisinin en küçük periyodu $hJ^{(m)}$ ile gösterilsin.

.

Örnek 5.2.1: $\{J^{(16)}(n)\} = \{0,1,1,3,3,5,9,11,3,13,9,3,3,5,\ \}$ Çeklinde olup bu dizi her sekiz terimde bir tekrar eder. Böylece $hJ^{(16)} = 8$ dir.

[9]' de $p \neq 2$ için $\langle G \rangle_{p^a} = \{G^i(\mathrm{mod}\, p^a) \mid i \geq 0\}$ Çeklinde takdim edilen $\langle G \rangle_{p^a}$ devirli grubun mertebesi $\left|\langle G \rangle_{p^a}\right|$ Çeklinde gösterilmiÇtir.

Teorem 5.2.2: $p \neq 2$ ise $hJ^{(p^a)} = \left|\langle G \rangle_{p^a}\right|$'dir (Deveci, baskıda).

İspat: $hJ^{(p^a)}$'nın $\left|\langle G \rangle_{p^a}\right|$'yı böldüğü açıktır. Ġspatı tamamlayabilmek için $\left|\langle G \rangle_{p^a}\right|$'nın $hJ^{(p^a)}$'yı böldüğünü göstermeliyiz. Ġlk olarak elementer sayılar teorisinden,

$$G^n = \begin{bmatrix} x & y & z \\ 2z & x+z & y \\ 2y & 2z+y & x+z \end{bmatrix}$$

olduğu görülmektedir.

Bu durumda,

$$G^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J(n-1) \\ J(n) \\ J(n+1) \end{bmatrix}\text{' den}$$

$$x + y + z \equiv 1(\mathrm{mod}\, p^a)\ x$$

$$+ y + 3z \equiv 1(\mathrm{mod}\, p^a)$$

$$x+3y+3z \equiv 1 \pmod{p^a}$$

elde edilir. Böylece, $x \equiv 0 \pmod{p^a}$, $y \equiv 0 \pmod{p^a}$ ve $z \equiv 0 \pmod{p^a}$ olduğunu elde ederiz ki bu da bize $\left|\langle G \rangle_{p^a}\right|$'nın $hJ^{(p^a)}$'yı böldüğünü gösterir Böylece, $hJ^{(p^a)} = \left|\langle G \rangle_{p^a}\right|$ olduğu ispatlanmıĢ olur.

Teorem 5.2.3: $p \neq 2$ olsun. t, $hJ^{(p)} = hJ^{(p^t)}$ olacak Ģekilde en büyük pozitif tamsayı olmak üzere $\alpha \geq t$ için,

$$hJ^{(p^\alpha)} = p^{\alpha - t}.hJ^{(p)}$$

dir (Deveci, baskıda).

Tanım 5.2.2: Bir $(x, y) \in G$ geren çifti için Jacobshal-Padovan orbiti, $J_{x,y,y}(G) = \{x_i\}$ Ģeklinde bir dizidir. Burada $i \geq 1$ için,

$$x_0 = x, x_1 = y, x_2 = y, x_{i+2} = (x_{i-1})^2 (x_i)$$

dir (Deveci,baskıda).

$J_{x,y,y}(G)$ Jacobsthal-Padovan orbitinin periyodunun uzunluğu $LJ_{x,y,y}(G)$ ile gösterilsin.

Teorem 5.2.4: Sonlu bir grubun Jacobsthal-Padovan orbiti periyodiktir (Deveci, baskıda).

Tanım 5.2.3: G sonlu bir grup olsun.Eğer G' nin her elemanı dizide ortaya çıkacak Ģekilde G'nin bir Jacobsthal-Padovan orbiti varsa, G grubuna Jacobsthal-Padovan dizilendirilebilir denir (Deveci, baskıda).

5.3. Genelleştirilmiş *k*-Basamak Jacobsthal ve Jacobsthal-Padovan Dizileri

Tanım 5.3.1: $J(i)=0,\ -1\le i\le k-3$ için ve $J(k-2)=J(k-1)=1$ olmak üzere $n\ge 0$ için, $\{JP^k(n)\}$ genelleÇtirilmiÇ *k*-basamak $(k\ge 3)$ Jaccobsthal-Padovan dizisi,

$$JP^k(n+k)=JP^k(n+k-2)+2JP^k(n+k-3)+\cdots+JP^k(n-1)$$

Çeklinde tanımlanır (Deveci, baskıda).

$[10]$' da genelleÇtirilmiÇ *k*-basamak Jacobthal-Padovan dizisi için,

$$\begin{bmatrix} JP^k(n) \\ JP^k(n+1) \\ JP^k(n+2) \\ \vdots \\ JP^k(n+k-1) \\ JP^k(n+k) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} JP^k(n-1) \\ JP^k(n) \\ JP^k(n+1) \\ \vdots \\ JP^k(n+k-2) \\ JP^k(n+k-1) \end{bmatrix}$$

Çeklinde bir eÇitlik elde edilmiÇtir. Burada,

$$G=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Çeklinde ifade edilen G matrisi, genelleÇtirilmiÇ $k-basamak$ Jacobtha-Padovan matrisi olarak adlandırılır.

GenelleÇtirilmiÇ *k*-basamak Jacobthal dizisi, $k\ge 2$ için mod m 'ye indirgenirse;

$$\{J_n^{k,m}\}=\{J_{1-k}^{k,m}, J_{2-k}^{k,m},\dots,J_0^{k,m},J_1^{k,m},\dots,J_i^{k,m},\dots\}$$

Çekinde olup, burada $J_i^{k,m}=J_i^k(\text{mod } m)$ dir.

Aynı Çekilde genelleÇtirilmiÇ *k*-basamak Jacobthal-Padovan dizisi, $k\ge 3$ için mod m ' göre

$$\{JP^{k,m}(n)\}=\{JP^{k,m}(-1),JP^{k,m}(0),\dots,JP^{k,m}(k-2),JP^{k,m}(k-1),\dots,JP^{k,m}(i),\dots\}$$

Çeklinde olup, burada $JP^{k,m}(i)=JP^k(i)(\text{mod } m)$dir.

Teorem 5.3.1: $\{J_n^{k,m}\}$ $(k \geq 2)$ ve $\{JP^{k,m}(n)\}$ $(k \geq 3)$ dizileri periyodiktir (Deveci, Baskıda).

İspat: $\{J_n^{k,m}\}$ $(k \geq 2)$, dizisini ele alalım ve $U_k = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid 0 \leq x_i \leq m-1\}$ olsun. $|U_k| = m^k$ olduğundan $a \geq 0$ için,

$$J_{a+1}^{k,m} = J_{b+1}^{k,m}, \ldots, J_{a+k}^{k,m} = J_{b+k}^{k,m}$$

olacak Çekilde $b \geq a$ tamsayısı vardır. Aynı Çekilde $\{JP^{k,m}(n)\}$ $(k \geq 3)$ dizisi için ispat benzerdir. $\{J_n^{k,m}\}$, $(k \geq 2)$ ve $\{JP^{k,m}(n)\}$, $(k \geq 3)$ dizilerin en küçük periyotları sırasıyla $hJ^{k,m}$ ve $hJP^{k,m}$ ile gösterilsin.

Örnek 5.3.1: $\{J_n^{3,3}\} = \{1,0,0,1,1,0,0,1,\ldots\}$ Çeklinde olup dizi her dört terimde bir tekrar eder. Böylece, $hJ^{3,3} = 4$ 'dir.

Örnek 5.3.2: $\{JP^{3,2}(n)\} = \{0,0,1,1,1,1,0,0,1,1,\ldots\}$ Çeklinde olup dizi her altı terimde bir tekrar eder. Böylece, $hJP^{3,2} = 6$ olur.

$p \neq 2$ için, $\langle C \rangle_{p^a} = \{C^i \pmod{p^a} \mid i \geq 0\}$ ve $\langle E \rangle_{p^a} = \{E^i \pmod{p^a} \mid i \geq 0\}$ devirli gruplar olup bu grupların mertebeleri $|\langle C \rangle_{p^a}|$ ve $|\langle E \rangle_{p^a}|$ Çeklinde ifade edilir.

Teorem 5.3.2: $p \neq 2$ ise, $hJ^{k,p^a} = |\langle C \rangle_{p^a}|$ ve $hJP^{k,p^a} = |\langle E \rangle_{p^a}|$ 'dir (Deveci, Baskıda).

İspat: Öncelikle, $hJ^{k,p^a} = |\langle C \rangle_{p^a}|$ durumunu ele alalım. $|\langle C \rangle_{p^a}|$'nin hJ^{k,p^a} tarafından bölünebilir olduğu açıktır. Ġspatı tamamlamak için hJ^{k,p^a}'nın $|\langle C \rangle_{p^a}|$ tarafından bölünebilir olması gerektiğini göstermemiz yeterli olacaktır. $hJ^{k,p^a} = n$ olsun. [9]'de $B_n = C \cdot B_{n-1}$ ve $B_n = C^n$ olduğu gösterilmiĢtir. $B_n \equiv I \pmod{p^\alpha}$ (I birim matristir) olduğundan $C^{n+1} \equiv C \left(\bmod p^{\alpha}\right)$ sonucuna varılır. Böylece , $C^{n} \equiv I \left(\bmod p^{\alpha}\right)$ olup n 'nin $\left|\langle C \rangle_{p^{\alpha}}\right|$ tarafından bölünebilir olduğu görülür.

Ġkinci olarak, $hJP^{k,p_a} = \left|\langle E \rangle_{p^a}\right|$ durumunu ele alalım. $\left|\langle E \rangle_{p^{\alpha}}\right|$, hJP^{k,p^a} tarafından bölünebilir olduğu açıktır. Ġspatı tamamlamak için hJP^{k,p_a} 'nın $\left|\langle E \rangle_{p^{\alpha}}\right|$ tarafından bölünebilir olması gerektiğini gösterelim. $hJP^{k,p_a} = n$ olarak alırsak,

$$E^n = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & & m_{1k+1} \\ m_{21} & m_{22} & & m_{2k+1} \\ & & & \\ m_{k+11} & m_{k+12} & & m_{k+1k+1} \end{bmatrix}$$

olduğunu görürüz. E^n matrisinin elemanları aĢağıdaki formdadır: $1 \leq i \leq k+1$ ve $\beta_1, \beta_2, , \beta_k \geq 0$ için,

$m_{12} = JP^k(n-k+1)$, $m_{22} = JP^k(n-k+2)$, , $m_{k2} = JP^k(n)$, $m_{k+12} = JP^k(n+1)$, $m_{11} + m_{21} = JP^k(n-k+2)$, $m_{21} + m_{31} = JP^k(n-k+3)$, , $m_{k1} + m_{k+11} = JP^k(n+1)$, $m_{ii} = \beta_1 JP^k(n-1) + \beta_2 JP^k(n) + + \beta_k JP^k(n+k-2) + 1$ dir.

ve

$i \neq j$, $1 \leq i, j \leq k+1$ ve $\eta_1, \eta_2, , \eta_k \geq 0$ için,

$m_{ij} = \eta_1 JP^k(n-1) + \eta_2 JP^k(n) + + \eta_k JP^k(n+k-2)$ olur.

Böylece,$1 \leq i, j \leq k+1$ için, $m_{ii} \equiv 1 \left(\bmod p^{a}\right)$ ve $i \neq j$ olacak Ģekilde $1 \leq i, j \leq k+1$ için, $m_{ij} \equiv 0 \left(\bmod p^{a}\right)$ elde edilir.

Sonuç olarak , $E^n \equiv I \left(\bmod p^{a}\right)$ olduğu görülerek n 'nin $\left|\langle E \rangle_{p^a}\right|$ tarafından bölünebilir olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 5.3.3: i. t, $hJ_{k,p} = hP^{k,p_t}$ olacak Ģekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Bu durumda $p \neq 2$ olmak üzere her $\alpha \geq t$ için,

$$hJ_{k,p^t} = p^{\alpha - t} \cdot hJ_p$$

dir.

ii. t, $hJ^{k,p} = hP^{k,p_t}$ olacak Çekilde en büyük pozitif tamsayı olsun. Bu durumda $p \neq 2$ olmak üzere her $\alpha \geq t$ için,

$$hJP^{k,p^t} = p^{\alpha-t} \cdot hJP^{k,p}$$

dir (Deveci, Baskıda).

İspat: i. q bir pozitif tamsayı olsun. $C_{hJ^{k,p^{q+1}}} \equiv I\left(\bmod p^{q+1}\right)$ yani $C_{hJ^{k,p^{q+1}}} \equiv I\left(\bmod p^{q}\right)$

olduğu için hJ^{k,p_q} 'nın $hJ^{k,p^{q+1}}$ yı böldüğü görülmektedir. $C_{hJ^{k,p^q}} = I + \left(a_{ij}^{(q)} \cdot p^q\right)$ yazılarak,

$$C_{hJ}^{k,p^q \cdot p} = \left(I + \left(a_{ij}^{(q)} \cdot p^q\right)\right)^p = \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} \left(a_{ij}^{(q)} \cdot p^q\right)^i \equiv I \left(\bmod p^{q+1}\right)$$

elde ederizki, bu da $hJ^{k,p^{q+1}}$ nın hJ^{k,p^q} yı böldüğünü gösterir. Böylece ya $hJ^{k,p^{q+1}} = hJ^{k,p^q}$ ya da $hJ^{k,p^{q+1}} = hJ^{k,p_q}$ olduğunu gösterirki buradaki ikinci durum ancak ve ancak . $a_{ij}^{(q)}$ 'nin p tarafından bölünmemesi halinde sağlanır. Bir $a_{ij}^{(t+1)}$, p tarafından bölünmemek koÇuluyla $hJ^{k,p^t} \neq hJ^{k,p^{t+1}}$ elde edilir.Böylece $hJ^{k,p^{t+1}} \neq hJ^{k,p^{t+2}}$ sonucuna ulaÇılır. q üzerinde tümevarım yöntemiyle ispat tamamlanır.

ii. Ġspatı benzer Çekilde yapılır.

Teorem 5.3.4: p_i 'ler farklı asal sayılar olmak üzere eğer , $m = \prod_{i=1}^{t} p_i^{e_i}$ $t \geq 1$ ise,

$$hJ^{k,m} = okek\left[hJ^{k,p_i^{e_i}}\right] \text{ ve } hJP^{k,m} = okek\left[hJP^{k,p_i^{e_i}}\right]$$

dir (Deveci, Baskıda).

(Burada $okek\left[hJ^{k,p_i^{e_i}}\right]$; $hJ^{k,p_1^{e_1}}, hJ^{k,p_2^{e_2}}, , hJ^{k,p_t^{e_t}}$ lerin en küçük ortak katıdır.)

İspat: $hJ^{k,m} = okek\left[\left[hJ^{k,p_i^{e_i}}\right]\right]$ durumunu ele alalım. $hJ^{k,p_i^{e_i}}$, $\left\{J_n^{k,p_i^{e_i}}\right\}$ dizisinin periyodu olduğunda $\left\{J_n^{k,p_i^{e_i}}\right\}$ dizisi $u \in$ için, $u \cdot hJ^{k,p_i^{e_i}}$ terimde bir tekrar eder. Buradan $hJ^{k,m}$, $\left\{J_n^{k,m}\right\}$ dizisinin periyodu olduğundan her i değeri için, $\left\{J_n^{k,p_i^{e_i}}\right\}$ dizisi tekrar eder. Böylece $hJ^{k,m}$ terimde bir tekrar eder. $hJ^{k,m}$, $u \cdot hJ^{k,p_i^{e_i}}$ formda olup buradan $hJ^{k,m} = okek\left[hJ^{k,p_i^{e_i}}\right]$ elde edilir.

$hJP^{k,m} = okek\left[hJP^{k,p_i^{e_i}}\right]$ için ispat benzer Çekildedir.

5.4. Sonlu Gruplarda Genelleştirilmiş *k*-Basamak Jacobsthal ve Jacobshal-Padovan Dizileri

Tanım 5.4.1: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ olmak üzere, sonlu üretilmiÇ bir $G = \langle A \rangle$ grubu için A geren kümesine göre $J_A^k(G)$ genelleÇtirilmiÇ *k*-basamak Jacobsthal orbiti $0 \le i \le k-1$ için $x_i = a_{i+1}$ baÇlangıç değerleri ile $i \ge 0$ için,

$$x_{i+k} = \begin{cases} (x_i)(x_{i+1})^2, & k = 2, \\ (x_i)(x_{i+k-2})^2(x_{i+k-1}), & k \ge 3 \end{cases}$$

Çeklinde tanımlanır (Deveci, Baskıda).

Tanım 5.4.2: $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ olmak üzere sonlu üretilmiÇ bir $G = \langle A \rangle$ grubu için A geren kümesine göre $JP_A^k(G)$ genelleÇtirilmiÇ *k*-basamak Jacobsthal-Padovan orbiti aÇağıdaki gibi tanımlanır;

$x_0 = a_1, x_1 = a_2, \ldots, x_{k-1} = a_k, x_k = a_k$ baÇlangıç değerleri ile $i \ge 0$ için,

$$x_{i+k+1} = (x_i)(x_{i+1})(x_{i+k-2})^2(x_{i+k-1})$$

dir (Deveci, Baskıda).

Teorem 5.4.1: Sonlu bir grubun bir genelleÇtirilmiÇ *k-basamak bir* Jacobsthal orbiti ve *k-basamak* Jacobsthal-Padovan orbiti periyodiktir (Deveci, et.al [18]).

İspat: G 'nin mertebesi n olsun. Biz G grubunun genelleÇtirilmiÇ k-basamak Jacobsthal orbitini düÇünelim. G 'nin elemanlarından meydana gelen sıralı k-lıların sayısı n^k olduğundan bu sıralı k-lıların en az birisi dizide iki defa karÇımıza çıkar. Böylece genelleÇtirilmiÇ k-basamak Jacobsthal orbiti sıralı k-lılardan meydana gelen alt diziler Çeklinde oluÇur. Bu tekrarlardan dolayı genelleÇtirilmiÇ k-basamak Jacobsthal orbiti periyodiktir.

GenelleÇtirilmiÇ k-basamak Jacobsthal-Padovan orbiti için ispat benzer Çekildedir.

Teorem 5.4.2: i. $LJ^{3}_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times {}_{2m}\right) = okek\left[7, hJP^{3,2m}\right]$ dir.

ii. $LJP^{3}_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times {}_{2m}\right) = okek\left[12, hJP^{3,2m}\right]$ dir (Deveci, et.al [18]).

İspat: i. $J^{3}_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times {}_{2m}\right)$ orbiti,

$$x, y, z, xy^{2}z, xyz^{3}, xyz^{6}, y^{-1}z^{13}, xz^{27}, yz^{59}, z^{126}, \ldots,$$

Çeklindedir. Buradan bu dizinin aÇağıdaki formda olduğu görülür:

$$\begin{aligned}
&x_0 = x, x_1 = y, x_2 = z, \ldots,\\
&x_7 = xz^{J_{63}}, x_8 = yz^{J_{73}}, x_9 = z^{J_{83}}, \ldots,\\
&x_{14} = xz^{J_{133}}, x_{15} = yz^{J_{143}}, x_{16} = z^{J_{153}}, \ldots,\\
&x_{7.i} = xz^{J_{7.3i-1}}, x_{7.i+1} = yz^{J_{7.3i}}, x_{7.i+2} = z^{J_{7.3i+1}}, \ldots .
\end{aligned}$$

Yukarıdaki koÇulları sağlayan en küçük tamsayı, $J^{3}_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times {}_{2m}\right)$ dizisinin periyodu olacağından periyodu $okek\left[7, hJ^{3,2m}\right] = hJ^{3,2m}$ olarak elde edilir.

ii. $JP^{3}_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times {}_{2m}\right)$ orbiti,

$$x, y, z, z, xy^{2}z, yz^{3}, xy^{2}z^{4}, yz^{6}, y^{-2}z^{11}, y^{2}z^{17}, xy^{2}z^{27}, y^{-1}z^{45}, xz^{72}, yz^{116}, z^{189}, z^{305}, \ldots,$$

Çeklindedir. Buradan bu dizinin aÇağıdaki formda olduğu görülür:

$$x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z,\ x_3 = z,\ \ldots,$$

$$x_{12} = xz^{JP^3(11)},\ x_{13} = yz^{JP^3(12)},\ x_{14} = z^{JP^3(13)},\ x_{15} = z^{JP^3(14)},\ \ldots,$$

$$x_{24} = xz^{JP^3(23)},\ x_{25} = yz^{JP^3(24)},\ x_{26} = z^{JP^3(25)},\ x_{27} = z^{JP^3(26)},\ \ldots,$$

$$x_{12.i} = xz^{JP^3(12.i-1)},\ x_{12.i+1} = yz^{JP^3(12.i)},\ x_{12.i+2} = z^{JP^3(12.i+1)},\ x_{12.i+3} = z^{JP^3(12.i+2)},\ \ldots.$$

Yukarıdaki koÇulları sağlayan en küçük tamsayı, $JP^3_{(x,y,z)}(D_{2n} \times_{\varphi} Z_{2m})$ dizisinin periyodu olacağından periyodu $okek\left[12, hJP^{3,2m}\right]$ olarak elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

$J_A^k(G)$ genelleÇtirilmiÇ k-basamak Jacobsthal orbiti ve $JP_A^k(G)$ genelleÇtirilmiÇ k-basamak Jacobsthal-Padovan orbitinin periyotlarının uzunluklarını $LJ_A^k(G)$ ve $LJP_A^k(G)$ Çeklinde ifade edelim (Deveci, et.al [18]).

$J_A^k(G)$ ve $JP_A^k(G)$ dizilerinin tanımlarından kolayca görülüyorki bu dizilerin periyotlarının uzunlukları G grubunun geren kümesine ve geren elemanların baÇlangıç değerleri olarak sıralanıÇına bağlı olarak değiÇir (Deveci, et.al [18]).

Teorem 5.4.3: i.

$$LJ^3_{(x,y,z)}(D_{2n} \times_{\varphi} Z_{2m}) = \begin{cases} okek\left[7.\dfrac{n}{4}, hJ^{3,2m}\right] & n \equiv 0 \pmod 4 \ ise, \\ okek\left[7.\dfrac{n}{2}, hJ^{3,2m}\right] & n \equiv 2 \pmod 4 \ ise, \\ okek\left[7.n, hJ^{3,2m}\right] & n \equiv 1 \pmod 4 \ ya\ da\ n \equiv 3 \pmod 4 \ ise, \end{cases}$$

ii. $$LJP^3_{(x,y,z)}(D_{2n} \times_{\varphi} Z_{2m}) = \begin{cases} okek\left[3n, hJ^{3,2m}\right] & n\ çift\ ise, \\ okek\left[6n, hJ^{3,2m}\right] & n\ tek\ ise, \end{cases}$$

dir (Deveci, et.al [18]).

İspat: i. $J^3_{(x,y,z)}(D_{2n} \times_{\varphi} Z_{2m})$ orbiti,

$$x, y, z, xy^2z, z^3yx, z^6y^5x, z^{13}y^{-1}, z^{28}x, z^{60}y^5, z^{129}y^4, \ldots,$$

Çeklindedir.. Buradan bu dizinin aÇağıdaki formda olduğu görülür:

$$x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z,\ \ldots,$$
$$x_7 = z^{J_6^3} x,\ x_8 = z^{J_7^3} y^5,\ \ldots,\ x_{14} = z^{J_8^3} y^4,\ \ldots,$$
$$x_{14} = z^{J_{13}^3} x,\ x_{15} = z^{J_{14}^3} y^9,\ x_{16} = z^{J_{15}^3} y^8,\ \ldots,$$
$$x_{7.i} = z^{J_{7.i-1}^3} x,\ x_{7.i+1} = z^{J_{7.i}^3} y^{4.i+1},\ x_{7.i+2} = z^{J_{7.i+1}^3} y^{4.i},\ \ldots .$$

Burada periyodu belirlemek için $u \in$ olmak üzere $4.i = n.u$ ve

$J_{7.i-1}^3 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2m)$, $J_{7.i}^3 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2m)$ ve $J_{7.i+1}^3 \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2m)$ olacak Çekilde bir i tamsayısını belirlememiz gerekmektedir.

$n \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 4)$ ise $i = \dfrac{n}{4}$ olup, buradan $LJ^3\left(D_{2n} \times_\varphi \ _{2m}\right) = okek\left[7.\dfrac{n}{4}, hJ^{3,2m}\right]$

elde edilir.

$n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$ ise $i = \dfrac{n}{2}$ olup, buradan $LJ^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n} \times_\varphi \ _{2m}\right) = okek\left[7.\dfrac{n}{2}, hJ^{3,2m}\right]$

elde edilir.

$n \equiv 1\ \mathrm{mod}\ 4$ ya da $n \equiv 3\ \mathrm{mod}\ 4$ ise $i = n$ olup, buradan

$LJ^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n} \times_\varphi \ _{2m}\right) = okek\left[7.n, hJ^{3,2m}\right]$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

ii. $JP^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n} \times_\varphi \ _{2m}\right)$ orbiti,

$x, y, z, z, xy^2 z, yz^3, z^4 y^2 x, z^6 x, z^{11}, z^{17} y^2, \ldots,$

Çeklindedir. Buradan bu dizinin aÇağıdaki formda olduğu görülür:

$$x_0 = x,\ x_1 = y,\ x_2 = z,\ x_3 = z,\ \ldots,$$
$$x_6 = z^{JP^3(5)} y^2 x,\ x_7 = z^{JP^3(6)} y^3,\ x_8 = z^{JP^3(7)},\ x_9 = z^{JP^3(8)} y^2,\ldots$$
$$x_{12} = z^{JP^3(11)} y^4 x,\ x_{13} = z^{JP^3(12)} y^5,\ x_{14} = z^{JP^3(13)},\ x_{15} = z^{JP^3(14)} y^4,\ \ldots,$$
$$x_{6.i} = z^{JP^3(6.i-1)} y^{2.i} x,\ x_{6.i+1} = z^{JP^3(6.i)} y^{2.i+1},\ x_{6.i+2} = z^{JP^3(6.i+1)},\ x_{6.i+3} = z^{JP^3(6.i+2)} y^{2.i},\ldots$$

Yukarıdaki koÇulları sağlayan en küçük tamsayı, $JP^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n} \times_\varphi \ _{2m}\right)$ dizisinin periyodu olacağından, burada periyodu belirlemek için $v \in$ olmak üzere $2i = nv$ ve

$JP^3(6.i-1) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2m)$, $JP^3(6.i) \equiv 0(\mathrm{mod}\ 2m)$, $JP^3(6.i+1) \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2m)$

$JP^3(6.i+2) \equiv 1(\mathrm{mod}\ 2m)$ olacak Çekilde bir i tamsayısını belirlememiz gerekmektedir.

n çift ise $i = \frac{n}{2}$ olup, buradan

$$LP^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times\varphi_{2m}\right) = okek\left[6.\frac{n}{2}, hJ^{3,2m}\right] = okek\left[3n, hJ^{3,2m}\right] \text{ elde edilir.}$$

n tek ise $i = n$ olup, buradan $LP^3_{(x,y,z)}\left(D_{2n}\times\varphi_{2m}\right) = okek\left[6n, hJ^{3,2m}\right]$ elde edilir.

Böylece ispat tamamlanır.

Tanım 5.4.3: $hJ^{k,m}_{(a_1,a_2,\ldots a_k)}$, $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + \ldots + u_{n-k}$, $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$, …, $u_k = a_k$

Çeklindeki indirgemeli bağıntı yardımıyla tanımlanan tamsayı dizisinin en küçük periyodu olsun

(Deveci ve Sağlam 2013).

Teorem 5.4.4: $p \neq 2$ ve $obeb\left(a_1, a_2, \ldots, a_k, p\right) = 1$ ve $obeb\left(x_1, x_2, \ldots, x_k, p\right) = 1$ olacak

Çekilde p asal tamsayı olmak üzere $a_1, a_2, \ldots, a_k, x_1, x_2, \ldots, x_k \in$ için,

$$hJ^{k,p}_{(a_1,a_2,\ldots a_k)} = hJ^{k,p}_{(x_1,x_2,\ldots x_k)}$$

dir (Deveci, Baskıda).

İspat: $hJ^{k,p} = \left|\langle C\rangle_p\right| = r$ olsun. (6.1) den $\begin{bmatrix} u_{n+r} \\ u_{n+r-1} \\ \vdots \\ u_{n+r-k+1} \end{bmatrix} = C^r . \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n+r-1} \\ \vdots \\ u_{n-k+1} \end{bmatrix}$ olduğu görülür.

Böylece,

$$\begin{bmatrix} u_{n+r} \\ u_{n+r-1} \\ \vdots \\ u_{n+r-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{n+r} \\ u_{n+r-1} \\ \vdots \\ u_{n-k+1} \end{bmatrix} \quad (\mathrm{mod}\, p)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 5.4.5: $LJ^2_{(y,x)}\left(Q_{2^n}\right) = hJ^{2,2^{n-1}}$ dir (Deveci ve Sağlam 2013).

İspat: $J^{2}_{(y,x)}\left(Q_{2^n}\right)$ orbiti,

$$y, x, x^{2^{n-2}+1}, \ldots$$

Çeklinde olup, teorem (5.4.4) den dizinin periyodunun $hJ^{2,2^{n-1}}$ olduğu açıktır.

Teorem 5.4.6: $LJ^{3}_{(y,x,z)}\left(Q_{2^n} \times_{\varphi} \mathbb{Z}_{2m}\right) = okek\left[2^{n-2} \cdot 7, hJ^{3,2m}\right]$ dir (Deveci ve Sağlam 2013).

İspat: $J^{3}_{(y,x,z)}\left(Q_{2^n} \times_{\varphi} \mathbb{Z}_{2m}\right)$ orbiti,

$$y, x, z, yx^{2}z, yxz^{3}, x^{-1}y^{-1}z^{6}, x^{2^{n-2}-1}z^{13}, yx^{2}z^{28}, xz^{60}, x^{-2}z^{129},$$
$$yx^{2}z^{277}, yxz^{595}, x^{-3}y^{-1}z^{1278}, x^{-2^{n-2}+1}z^{2745}, yz^{5896}, x^{2^{n-1}-3}z^{12664}, \ldots.$$

Çeklindedir. Buradan bu dizinin aÇağıdaki formda olduğu görülür: $x_0 = y$, $x_1 = x$, $x_2 = z, \ldots,$

$$x_{13} = x^{-2^{n-2}+1}z^{2745},\ x_{14} = yz^{5896},\ x_{15} = x^{2^{n-1}-3}z^{12664},\ x_{15} = z^{27201}, \ldots$$
$$x_{14i-1} = x^{-2^{n-2}+1}z^{J^{3}_{14.i-3}}, x_{14i} = z^{J^{3}_{14i-2}}y,\ x_{14i+1} = x^{2^{n-1}-4i+1}z^{J^{3}_{14i-1}}, x_{14i+2} = z^{J^{3}_{14i}}, \ldots$$

Böylece dizinin periyodunu elde etmek için $x_{14i} = y, x_{14i+1} = x, x_{14i+2} = z$ olacak Çekilde bir i tamsayısını belirlememiz gerekmektedir. Eğer $i = 2^{n-3}$ olarak seçersek $J^{3}_{2^{n-2}\cdot 7-k+1}$, $J^{3}_{2^{n-2}\cdot 7-k+2}$ çift tamsayılar ve $J^{3}_{2^{n-2}\cdot 7-k+3}$ tek tamsayılar olmak üzere;

$$x_{2^{n-2}\cdot 7} = z^{J^{3}_{2^{n-2}\cdot 7-2}}y, x_{2^{n-2}\cdot 7+1} = xz^{J^{3}_{2^{n-2}\cdot 7-1}}, x_{2^{n-2}\cdot 7+2} = z^{J^{3}_{2^{n-2}\cdot 7}}, \ldots$$

elde ederiz. Böylece $J^{3}_{(y,x,z)}\left(Q_{2^n} \times_{\varphi} \mathbb{Z}_{2m}\right)$ dizisi, $2^{n-2} \cdot 7$ nin katları Çeklinde devam eder. Buradan kolaylıkla $J^{3}_{(y,x,z)}\left(Q_{2^n} \times_{\varphi} \mathbb{Z}_{2m}\right)$ 'nin periyodu , $okek\left[2^{n-2} \cdot 7, hJ^{3,2m}\right]$ olarak elde edilir.

Teorem 5.4.7: $LJ^{3}_{(y,x,z)}\left(Q_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2m}\right) = okek\left[7, hJ^{3,2m}\right]$ dir (Deveci ve Sağlam 2013).

İspat: $J^{3}_{(y,x,z)}\left(Q_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2m}\right)$ orbiti,

$$y, x, z, yx^2z, yxz^3, yx^{2^{n-2}+1}z^6, x^{2^{n-1}}z^{13}, yz^{28}, xz^{60}, z^{129},$$

$$yx^2z^{277}, yxz^{595}, yx^{2^{n-2}+1}z^{1278}, x^{2^{n-1}}z^{2745}, yz^{5896}, xz^{12664}, \qquad .$$

Çeklindedir. Buradan bu dizinin aÇağıdaki formda olduğu görülür:

$$x_0 = yz^{J_{-3}^{1}}, x_1 = xz^{J_0^3}, x_2 = z^{J_1^3}, ,$$

$$x_7 = yz^{J_6^3}, x_8 = yz^{J_7^3}, x_9 = z^{J_8^3},$$

$$x_{14} = yz^{J_{13}^3}, x_{15} = xz^{J_{14}^3}, x_{15} = z^{J_{15}^3},$$

$$x_{7\cdot i} = yz^{J_{7\cdot i-1}^3}, x_{7\cdot i+1} = xz^{J_{7\cdot i}^3}y, x_{7i+2} = z^{J_{7i+1}^3}, ..$$

Böylece dizinin periyodunu elde etmek için $x_{7\cdot i} = y, x_{7\cdot i+1} = x, x_{7\cdot i+2} = z$ olacak Çekilde bir i tamsayısını belirlememiz gerekir. Böylece $J^3_{(y,x,z)}\left(Q_{2^n} \times {}_{2m}\right)$ dizisi, 42'nin katları Çeklinde

devam eder. Buradan kolaylıkla $J^3_{(y,x,z)}\left(Q_{2^n} \times {}_{2m}\right)$'nin periyodu, $okek\left[7, hJ^{3,2m}\right]$ olarak elde edilir.

6. ARAŞTIRMA BULGULARI

Yapılan bu tez çalıĢmasında, Jacobsthal ve Jacobsthal-Padovan dizisi kavramları tanıtılıp bu dizilerin özellikleri verildi.

Daha sonra genelleĢtirilmiĢ k-basamak Jacobsthal ve genelleĢtirilmiĢ k-basamak Jacobsthal-Padovan dizilerinin tanımları verilerek, bu dizilerin sonlu gruplardaki durumları ele alındı.

Yapılan bu çalıĢmada, Jacobsthal ve Jacobsthal-Padovan orbitleri tanımlanmıĢ ve bu orbitlerin uzunlukları hesaplanmıĢtır.

GenelleĢtirilmiĢ k-basamak Jacobsthal ve genelleĢtirilmiĢ k-basamak Jacobsthal-Padovan dizilerinin, Dihedral ve Quaternion gruplarındaki modüle göre durumları incelenerek, daha sonra bu gruplardaki orbitlerinin uzunlukları araĢtırıldı. Bu araĢtırmaların sonucunda bu orbitlerin uzunlukları hesaplandı. Yapılan bu araĢtırmaları en iyi Ģekilde ifade eden teoremler verilerek ispatlandı.

7. TARTIŞMA VE SONUÇ

Gruplarda lineer indirgemeli diziler, matematik biliminden birçok bilim alanına kadar yapılan çalıĢmalarda karĢımıza çıkmaktadır. Yapılan bu çalıĢmalarda bazı lineer indirgemeli dizilerin gruplardaki durumları ele alınmıĢ ve bu diziler, grup ailelerine kadar geniĢletilerek incelenmiĢtir. Tezde ele alınan genelleĢtirimiĢ *k*-basamak Jacobsthal ve genelleĢtirilmiĢ *k*- basamak Jacobsthal-Padovan dizileri, lineer indirgemeli diziler konusunda önemli yer iĢgal eden Jacobsthal ve Jacobshal-Padovan dizilerinin özel halleridir. Yapılan bu çalıĢmada, Jacobsthal ve Jacobsthal-Padovan orbitleri tanımlanmıĢ ve bu orbitlerin uzunlukları verilmiĢtir. Bu tezdeki yapılan çalıĢmada; genelleĢtirilmiĢ *k*-basamak Jacobsthal ve genelleĢtirilmiĢ *k*-basamak Jacobsthal-Padovan dizilerinin, Dihedral grubunun $D_{2n} \times {}_{2m}$ direkt çarpım ve $D_{2n} \times_{\varphi} {}_{2m}$ yarı-direkt çarpım ile Quaternion grubunun $Q_{2^n} \times {}_{2m}$ direkt çarpım ve $Q_{2^n} \times_{\varphi} {}_{2m}$ yarı-direkt çarpım gruplarındaki modüle göre durumları ve orbitleri üzerinde çalıĢıldı. Daha sonra bunların orbitleri hesaplanmıĢ, yapılan bu araĢtırmayı en iyi Ģekilde ifade eden teoremler verilip, elde edilen sonuçlar ispatlanarak gösterilmiĢtir.

KAYNAKLAR

[1] Aydın, H., 1991. Recurrence Relations in Finite Nilpotent Groups. Ph. Thesis, University of Bath.

[2] Bicknell. M. ‘’A primer on the Pell sequences and Related sequences and Related sequences’’, Fibonacci Quart. **13(4)** (1975), 345-350.

[3] Çallıap, F.,2001. Soyut Cebir (Ġstanbul).

[4] Campbell, C.M., Doostie, H. and Robertson, E.F. Fibonacci length of generating pairs in groups in *Applications of Fibonacci Numbers*, Vol. 3 Eds. G. E. Bergum et al. Kluwer Academic Publishers, (1990), 27-35.

[5] Campbell, C.M., Robertson, E.F. and Williams, P.D. On the efficiency of some direct powers of groups,: *Groups-Canberra* 1989, ed. L.g. Kovács, *Lecture Notes in Math*. **1456** Springer, Berlin, 1990, 106-113.

[6] Campbell, C.M. and Campbell, P.P., 2009. The Fibonacci Length of Binary Polyhedral Groups and Related Groups. Congressus Numerantium, 194, 95-102.

[7] Campbell, C.M. and Campbell, P.P., 2005. The Fibonacci Length of Certain Centro-Polyhedral Groups . J. Appl. Math. Comput., 19, 231-240.

[8] Campbell, P.P., 2003. Fibonacci Length and Efficiency in Groups Presentations. Ph. Thesis, Universty of St Andrews.

[9] Coxeter, J.H., and Moser, W.O.J., 1972. Generator and Relations for Discrete Groups. 3 rd edition, Springer, Berlin.

[10] Deveci, Ö. The Pell-Padovan sequences and the Jacobsthal-Padovan sequences in finite groups, *Util. Math*., to appear

[11] Deveci, Ö., and Karaduman, E., K., The *k*-nacci sequences in $Q_{2n} \times_{\varphi} {}_{2m}$, *Mathematical and Computer Modelling*, **55** (2012), 1450-1455.

[12] Deveci, Ö., and Karaduman, E., *k*-nacci sequences in Miller’s generalization of polyhedral groups, *Iranian J. Sci. & Tecnology, Transaction A*, **34(A4)** (2010), 275-283.

[13] Deveci, Ö., The polytopic-*k*-step Fibonacci sequences in finite groups, *Discrete Dyn. Nat. Soc.*,431840-1-431840-12 (2011).

[14] Deveci, Ö., The *k-nacci* sequences and the generalized order-*k* Pell sequences in the semi-direct product of finite cyclic groups, *Chiang Mai J. Sci*, **40(1)** (2013), 89-98.

[15] Deveci, Ö., and Karaduman, E., The generalized order-*k* Lucas sequences in Finite groups*, J. Appl. Math.,* 464580-1-464580-15 (2012).

[16] Deveci, Ö., and Karaduman, E., Recurrence sequences in groups, *LAMBERT Acedemic Publishing*, Germany, 2013.

[17] Deveci,Ö., and Karaduman, E., The Pell sequences in finite groups, *Util. Math.*, to appear.

[18] Deveci, Ö., Karaduman, E., and Saglam, G., The Jacobsthal sequences in finite groups, is submitted.

[19] Deveci, Ö., 2010. Sonlu Polyhedral ve Binary Polyhedral Gruplardaki K-nacci Dizileri. Doktora Tezi, Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[20] Deveci, Ö., and Sağlam, G., The Jacobsthal sequences in the groups Q_{2^n}, $Q_{2^n} \times_\varphi \mathbb{Z}_{2m}$, $Q_{2^n} \times \mathbb{Z}_{2m}$., International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ĠCAAMM 2013), Istanbul-Turkey.

[21] Doostie, H., and Campbell, P.P., Onthe commutator lengths of certain classes of finitely presented groups*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences,* Volume 2006, Article ID 74981, Pages 1-9, DOI 10.1155/IJMMS/2006/74981.

[22]Dummit, D.S., and Foote, R.M., 2004. Abstract Algebra . 3^{nd} editon (John Wiley&Sons,Inc.).

[23]Dummit, D.S., and Foote, R.M., 2004. Johs Wiley and Sons, Inc, ISBN 0-471-43334-9.

[24]Everest, G., Poorten, A. Vander., Shparlinski, I.,T.Word, Recurrence Sequences, American Math. Soc. 2003.

[25] Horadam, A.F., ''Pell Identies'', Fibonacci Quart., 9(3) (1971), 245-252.

[26] James, G., and Liebeck, M., Representation and Characters of Groups, 1993. Combridge University Press.

[27] Johnson, D.L.,1997. Presentations of Groups, 2^{nd} edition, London Math. Soc. Student Texts **15**, *Cambridge University Press*, Cambridge.

[28] Kalman, D., Generalized Fibonacci numbers by matrix methods, *The Fibonacci Quarterly*, **20(1)** (1982), 73-76.

[29] Karaduman, E., 2002. Sonlu Gruplarda 2-Basamak Fibonacci Dizileri. Doktora Tezi Atatürk Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü.

[30] KarakaǤ, H.Ġ., 2010. (ikinci baskı) Cebir Dersleri. (Tüba Yayınları, Ankara).

[31] Kiliç, and TaǤci, D., "The generalized Binet formula, representation and sums of the generalized order $-k$ Pell numbers", Taiwanese J. Math., **10(6)** (2006), 1661-1670

[32] Knox, S.W., Fibonacci sequences in finite groups, *The Fibonacci Quarterly*, **30(2)** (1992), 116-120.

[33] Köken, F., and Bozkurt, D., On the Jacobsthal numbers by matrix methods, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, **3(13)** (2008), 605-614.

[34] Lucas, E., 1878. Theories des Fonctions Numeriques Simplement Periodiques. Amer. J. Math., 1, 184-240, 289-321.

[35] Lü, K., and Wang, J., k-step Fibonacci sequence modulo m, *Util. Math.*, **71** (2007), 169-178.

[36] Özkan, E., Aydin, H., and Dikici, R., 3-step Fibonacci series modulo m , *Applied Mathematics and Computation*, 143 (2003), 165-172.

[37] Robinson, D.J.S., 1982. A Course in the Theory Groups (Springer-Verlag, New York).

[38] Sims, C.C., 1994. Computation With finitely Presented Groups. (Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 48, Cambridge University Press, Cambride).

[39] Suzuki, M., 1982. Groups Theory I. (ISBN 3-540-10915-3 Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Printed in the United States of America).

[40] TaÇçı, D., 2007. Soyut Cebir . (Alp Yayınevi ,Ankara).

[41] TaÇçı, D., 2010. (ikinci baskı) Soyut Cebir . (Alp Yayınevi ,Ankara).

[42] Thomas, R.M., 1991. The Fibonacci Groups Revised. in Groups-St Andrews, Vol. 2, eds. Campbell, C.M., Robertson, E.F., Cambridge University Press, Cambridge, 445-454.

[43] Wall, D.D., Fibonacci series modulo m, *Amer. Math. Monthly*, **67** (1960), 525-532.

[44] Wilcox, H.J., 1986. Fibonacci Sequences of Period n in Groups. The Fibonacci Quarterly, 24, 356-365.

[45] Yilmaz, F., and Bozkurt, D., The generalized order-k Jacobsthal numbers, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, **4(34)** (2009), 1685-1694.

ÖZGEÇMİŞ

1988 yılında Erzurum ġenkaya Ġlçesinin PaĢalı Köyünde doğdu. Ġlköğretimini PaĢalı Ġlköğretim Okulunda, liseyi ġenkaya Lisesinde tamamladı. 2007 yılında Kafkas

Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne baĢladı ve 2011 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans öğrenimine baĢaldı. Halen öğrenimine devam etmektedir.