T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

CAUCHY ÇEKİRDEKLİ SİNGÜLER İNTEGRALLERE YAKLAŞIMLAR

Melek GÜNGÖR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

HAZİRAN-2014
KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Melek GÜNGÖR'ün Doç. Dr. Nizami MUSTAFA'nın danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Cauchy Çekirdekli Singüler İntegrallere Yaklaşım" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy birliği ile kabul edilmiştir.

13.06.2014

Adı ve Soyadı	**İmza**
Başkan: Doç. Dr. Erhan DENİZ	....
Üye: Doç. Dr. Nizami MUSTAFA	....
Üye: Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun ..../..../..... gün ve

..../.............

sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Muzaffer ALKAN

Enstitü Müdürü

İÇİNDEKİLER

CAUCHY TİPLİ SİNGÜLER İNTEGRALLERE YAKLAŞIMLAR

Melek GÜNGÖR

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Nizami MUSTAFA

ÖZET

Bu tez "Singüler İntegrallerin Yaklaşık Hesaplanması" konusunda hazırlanmış bir Yüksek Lisans tez çalışmasıdır.

Bilindiği üzere singüler integral operatör Hölder sınıfında iyi tanımlıdır, yani Hölder sınıfını Hölder sınıfına dönüştürüyor.

Tezde öncelikle Hölder sınıfından olan fonksiyonların yaklaşımına dayanarak singüler integralerin yaklaşık hesaplanması çalışılmıştır.

Ayrıca, singüler integralin çekirdek fonksiyonuna kübik ve kuadratik spline fonksiyonları ile yaklaşarak singüler integrallerin yaklaşık hesaplanması verilmeye çalışılmıştır.

Kapalı aralık ve kapalı düzgün eğri üzerinden tanımlı singüler integrallerin yaklaşık hesaplanması yapılmıştır. Bu durumlar için ayrı ayrı örnekler incelenmiştir.

Son olarak örneklerde yaklaşım hataları verilmiştir.

2014, 52 sayfa

Anahtar kelimeler: Kapalı düzgün Jordan eğrisi, singüler integral, Hölder sınıfı.

THE APPROXIMATION OF CAUCHY TYPE SINGULAR INTEGRALS

Melek GÜNGÖR
M.Sc. Thesis
The Thesis Advisor: Associate Prof. Dr. Nizami MUSTAFA

ABSTRACT

This study is about " Approximate Calculation of Singular Integrals" and his study is presented as a master degree thesis.

As it is known, singular integral operator in Hölder class is well-defined, in other expression it mapps a Hölder class to a Hölder class.

In this thesis, we study the approximate calculation of sıngular integrals by using the approximation of functions in Hölder class.

Furthermore, we try to give the calculation of singular integrals by approximating to kernel function of singular integral with cubic and quadratic spline functions.

We have done the approximate calculation of singular integrals that is defined on closed interval and closed uniform curve. For this situations, separate examples are investigated.

Finally in the examples, approximation errors are given.

2014, 52 pages

Key Words: Closed uniform Jordan curve, singular integral, Hölder class.

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda katkı ve yardımlarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi değerli danışman hocam Doç. Dr. Nizami MUSTAFA' ya, Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Doç. Dr. Erhan DENİZ' e, her zaman yanımda olan aileme ve arkadaşlarıma en içten teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Kars-2014 Melek GÜNGÖR

SİMGELER DİZİNİ

Şimdi tezde kullanılan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
$\exists$	En az
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar
γ^{+}	γ eğrisinin içi
γ^{-}	γ eğrisinin dışı
$\lVert . \rVert$	Normlu uzayda norm
$C(X)$	X ' de sürekli fonksiyonlar kümesi
$C^{(k)}(X)$	X ' de $k.$ mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonlar kümesi

GİRİŞ

Birçok esneklik teorisi, aerodinamik, hidrodinamik, termodinamik, mekanik, fizik, dinamik ve matematik problemlerinin incelenmesinde singüler integral denklemler teorisinin yöntemleri geniş uygulama alanı bulmaktadır (bkz. [1,2,3,4,5]). Öyle ki bir çok uygulamalı problemlerin çözümü singüler integral denklemlerin çözümüne indirgenebilir.

Singüler integral denklemlerin çözümü ise her zaman analitik olarak bulunamamaktadır. Bu yüzden singüler integral denklemlerin yaklaşık çözülmesi önem taşımaktadır. Bu konuda birçok çalışmalar vardır (bkz. [6,7,8]).

Ayrıca, singüler integral denklemleri yaklaşık çözmek için kullanılan yöntemlerde singüler integrallerin yaklaşık hesaplanması önemlidir. Bunun için çekirdek fonksiyonun yaklaşımı öğrenilir (bkz. [9,10,11]).

Singüler integrallerin yaklaşık hesaplanması ve bunların singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümüne uygulaması üzerine birçok çalışma verilebilir (bkz.[12,13]).

Yukarıdaki sebeplerden dolayı singüler integrallerin yaklaşık hesaplanması günümüzde de önem taşımaktadır (bkz. [14,15,16]).

γ kompleks düzlemde kapalı bir eğri olsun. $H_\alpha(\gamma), 0<\alpha<1$ ile γ üzerinde tanımlı fonksiyonların Hölder sınıfını gösterelim. $G_n(f,\gamma)$ γ üzerinde tanımlı f fonksiyonunun yaklaşımı olsun.

Bilindiği üzere eğer $f\in H_\alpha(\gamma), 0<\alpha<1$ ise

$$Sf(t)=\frac{1}{\pi i}\int_\gamma \frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau, \quad t\in\gamma \tag{1}$$

Cauchy singüler integrali için de $Sf\in H_\alpha(\gamma),\ 0<\alpha<1$ yazarız (bkz. [17]) .

(1) singüler integralini içeren singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümünün kesin çözümüne yaklaşım hızı $G_n(f,\gamma)$ büyüklüğüdür. Bu büyüklük singüler integral denklemin katsayılarıyla, denklemdeki singüler integralin çekirdeği ve singüler integralin yaklaşımı ile belirlendiğinden $G_n(f,\gamma)$ büyüklüğünün bilinmesi büyük önem taşır. Böylece, singüler integral denklemlerin yaklaşık çözümünün yaklaşım hızını bulmak için bilinen $G_n(f,\gamma)$ değerlendirilmesine göre $G_n(Sf,\gamma)$ büyüklüğünü değerlendirmeyi başarmak gerekir.

Bu tez çalışması bu konu üzerinedir.

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tezde kullanılan temel bilgiler verilir.

İkinci bölümde kapalı aralık üzerinde verilen Cauchy çekirdekli singüler integrallerin yaklaşık hesaplanması için bir kuadratur formül kurulur ve bu kuadratur formül için singüler integralin hatası üzerine bir teorem ispatlanır. Elde edilen sonuçlar bir örnekle doğrulanır. Tezin üçüncü bölümünde kapalı düzgün eğri üzerinde tanımlı Cauchy tipli singüler integraller için farklı iki kuadratur formül verilir. Bu kuadratur formüller için singüler integralin hatası üzerine teoremler ispatlanır. Sonuçlar örneklerle doğrulanır.

1. ÖN BİLGİLER

1.1. Kompleks Düzlemde Eğri

Bu bölümde ön bilgi olarak kullanacağımız kavramlardan kompleks düzlemde eğri üzerine gerekli bilgi verilecektir $([18],[19],[20],[21])$.

Matematiğin temel kavramlarından olan eğri ve yay sözcükleri için kesin bir terim birliği sağlanmış değildir. Bazen eğri ve yay kelimeleri eş anlamlı kullanıldığı gibi bazen de farklı kavramlar olarak kullanılmaktadır. Biz günlük konuşmada kullanılan eğri sözcüğünü benimseyecek ve diğerlerini buna bağlı olarak tanımlayacağız. Burada düzlemdeki eğrilerden bahsedilecektir.

Tanım 1.1.1:

a) $[a,b]\subset\mathbb{R}$ olmak üzere sürekli bir $\Gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ fonksiyonuna $\mathbb{C}$ düzleminde bir **eğri** denir. Burada $\Gamma(a)$ ve $\Gamma(b)$ noktalarına sırasıyla eğrinin başlangıç ve bitim noktaları denir.

b) Bir Γ eğrisi verildiğinde $\Gamma(a)=\Gamma(b)$ ise, Γ ’ ya **kapalı eğri** denir.

c) Bir Γ eğrisi verildiğinde Γ' türevi var ve sürekli ise, Γ **diferansiyellenebilir** bir eğridir denir.

d) Γ diferansiyellenebilir bir eğri olsun. Eğer, $\Gamma'\neq 0$ ise Γ ’ ya **düzgün (regüler) eğri** denir.

e) $[a,b]$ aralığının sonlu sayıda noktası hariç Γ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda Γ ’ nın sağdan ve soldan türevleri var ve bunlar Γ' türevinin bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse Γ **parçalı diferansiyellenebilir eğridir** denir.

f) Γ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer her $t\in[a,b]$ için $\Gamma'\neq 0$ ise, Γ ’ya **parçalı düzgün eğridir** denir.

g) Bir Γ eğrisi sadece $t_1=t_2$ için $\Gamma(t_1)=\Gamma(t_2)$ oluyorsa, Γ ’ ya **basit eğri** denir. Bazen basit eğrilere **Jordan eğrisi** de denir. Γ basit bir eğri ve $\Gamma(a)=\Gamma(b)$ ise **kapalı basit eğri** (kapalı Jordan eğrisi) denir.

h) $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ vektör değerli fonksiyonu E üzerinde sınırlı olsun.

$d(E)$, E ' nin çapı olmak üzere

$$\omega_f : (0, d(E)] \to \mathbb{R}_+,\ \omega_f(\delta) = \omega_f(\delta; E) = \sup\{df(x'), df(x'') : x', x'' \in E, d(x', x'') \leq \delta\}$$

fonksiyonuna f ' nin E üzerindeki **süreklilik modülü** denir.

Uyarı 1.1.1: Burada $\mathbb{C}$ düzlemindeki eğriler söz konusu olduğundan çoğu kez

$$z(t) = \Gamma(t) = x(t) + iy(t)$$

biçiminde yazacağız. Bazen bir Γ eğrisi

$$x = x(t), y = y(t), \quad a \leq t \leq b$$

parametrik gösterimi ile de verilebilir.

1.2. Hölder Koşulunu Sağlayan Fonksiyonlar Sınıfı

Bu kısımda tezle ilgili ön bilgi olarak Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı hakkında gerekli tanımlar verilecektir.

Tanım 1.2.1: $\varphi : X \to Y$ reel veya kompleks fonksiyon olsun. Eğer, herhangi $t_1, t_2 \in X$ ve $K > 0$, $0 < \mu < 1$ için

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| \leq K.|t_1 - t_2|^\mu$$

oluyorsa $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde K sabiti ve μ üssü ile Hölder koşulunu sağlar diyeceğiz ve bunu $\varphi \in KH_\mu(X)$ şeklinde belirteceğiz.

Uyarı 1.2.1: Süreklilik modülünün tanımından ve Tanım 1.2' den görülür ki, eğer $\varphi \in KH_\mu(X)$ ise $\omega(\varphi; \delta) \leq K.\delta^\mu$ dır.

Sonuç 1.2.1: $C(X)$, X üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi olsun.

$$KH_\mu(X) \subset C(X)$$

olduğu açıktır.

Tanım 1.2.2: $\varphi : X \to Y$ **,** $n.(n \in \mathbb{N})$ mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer, herhangi $t_1, t_2 \in X$ ve $K > 0,\ 0 < \mu < 1$ için

$$\left|\varphi^{(n)}(t_1) - \varphi^{(n)}(t_2)\right| \le K.\left|t_1 - t_2\right|^{\mu}$$

oluyorsa $\varphi(t)$ fonksiyonu X üzerinde $KH_{\mu}^{(n)}(X)$ sınıfındandır diyeceğiz.

Not 1.2.1: $C^{n}(X)$, $n.(n \in \mathbb{N})$ mertebeden türevi X üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfı olsun.

$$KH_{\mu}^{(n)}(X) \subset C^{(n)}(X)$$

olduğu açıktır.

Not 1.2.2: $\omega(\delta)$ bir süreklilik modülü olsun. $H_{\omega}(X)$ ile X ' de sürekli ve süreklilik modülü

$$\omega(\varphi, \delta) \le \omega(\delta)$$

koşulunu sağlayan $\varphi(t)$, $t \in X$ fonksiyonlar kümesini göstereceğiz.

Not 1.2.3: $H_{\mu}(X)$ ile $0 < \mu \le 1$ indisli ve herhangi bir K sabiti ile Hölder koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfını göstereceğiz. Yani,

$$H_{\mu}(X) = \bigcup_{K>0} KH_{\mu}(X)$$

dir.

Uyarı 1.2.2: $\mu > 1$ ise $H_{\mu}(X)$ sınıfı X ' de sabit fonksiyonlar kümesidir.

Hölder sınıfından olan fonksiyonların bazı özelliklerini verelim:

1. $\omega(\delta)$ bir süreklilik modülü, $\varphi(t)$ X ' de sınırlı fonksiyon olsun.

Eğer $\delta \in [0,\delta_0], \delta_0 > 0$ için

$$\omega(\varphi,\delta) \le \omega(\delta)$$

ise $\varphi \in H_{K\omega}(X)$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır.

2. Eğer X kapalı ve sınırlı ise $0 < \mu_1 < \mu_2 \le 1$ için,

$$H_{\mu_2}(X) \subset H_{\mu_1}(X)$$

dir.

3. Eğer, $\varphi : X \to Y$ ve $\omega : X \to Y$ ve $\varphi \in H_{\mu_1}(X), \omega \in H_{\mu_2}(X), 0 < \mu_1, \mu_2 \le 1$ ise $\varphi + \omega$, $\varphi.\omega$ ve $\varphi / \omega(\omega \ne 0)$ fonksiyonları $H_\mu(X)$ sınıfındandır.

Burada $\mu = \min(\mu_1, \mu_2)$ dir.

4. $t = t(s),\ s \in M$ fonksiyonu $H_\mu(M),\ (0 < \mu \le 1)$ ve $\varphi(t)$ fonksiyonu da $t = t(s)$ fonksiyonunun değer kümesi üzerinde $H_\beta(M), (0 < \beta \le 1)$ sınıfından ise, $\Phi(s) = \varphi(t(s)),\ t \in M$ fonksiyonu M üzerinde $H_{\mu.\beta}(M)$ sınıfındandır.

5. $t = t(s),\ s \in M$ (M -kapalı kümedir) fonksiyonu $H_\mu(M),\ 0 < \mu \le 1$ sınıfından $\varphi(t)$ fonksiyonu da sürekli türevlenebilirse $\Phi(s) = \varphi(t(s))$ fonksiyonu M üzerinde $H_\mu(M),\ 0 < \mu \le 1$ sınıfındandır.

6. t ve t_0 noktaları bir $\Gamma \subset \mathbb{C}$ eğrisi üzerinde sırasıyla değişken ve sabitlenmiş noktalar ise,

$$\varphi(t) = |t - t_0|^\mu,\ 0 < \mu \le 1$$

fonksiyonu Γ üzerinde $H_\mu(\Gamma)$ sınıfındandır.

7. $\varphi \in H_\mu(\Gamma),\ (0 < \mu \le 1)$ t, Γ üzerinde değişken ve $t_0 \in \Gamma$ sabitlenmiş noktalar olsun. Bu taktirde , $0 < \beta < \mu \le 1$ olmak üzere

$$\Phi(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{|t-t_0|^{\beta}}$$

fonksiyonu Γ eğrisi üzerinde $H_{\mu-\beta}(\Gamma)$ sınıfındandır.

1.3. Cauchy Çekirdekli Singüler İntegral

Tanım 1.3.1 : $\varphi(t)$, Γ kapalı düzgün eğrisi üzerinde tanımlı kompleks bir fonksiyon ise,

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt, \quad z\notin\Gamma \tag{1.1}$$

fonksiyonuna **Cauchy tipli integral** denir.

Aksi verilmediği sürece biz her zaman $\varphi(t)$ fonksiyonunu sınırlı ve integrallenebilir olarak alırız. (1.1) denklemi $z=\infty$ olmak üzere $\forall\, z\notin\Gamma$ için anlamlıdır ve kolayca gösterilir ki; $F(\infty)=0$ dır. Bu nedenle $F(z)$, Γ eğrisi hariç tüm kompleks düzlem üzerinde tanımlanır.

Cauchy Çekirdekli İntegral

(1.1) Cauchy tipli integralinde,

$$\lim_{z\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-z}dt, \quad t_0\in\Gamma \tag{1.2}$$

limiti doğal olarak,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt, \quad t_0\in\Gamma$$

dir. Bununla birlikte, bu integral genel olarak birbirinden farklıdır. Yani Γ üzerinde t_0 noktasından farklı keyfi iki t',t'' noktaları alınırsa,

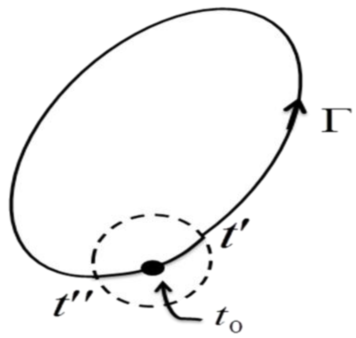
$$\lim_{t',t''\to t_0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma-t't''}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \tag{1.3}$$

limiti genel olarak mevcut değildir.

Yine de Şekil 1'de gösterildiği gibi, eğer merkezi t_0 olan ve yeterince küçük η yarıçaplı daire Γ' dan $\Gamma_\eta = \overset{\frown}{t't''}$, yayını keser.

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma - \Gamma_\eta} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt \qquad (1.4)$$

limitine bakalım.



Şekil 1

Tanım 1.3.2: (1.4) de gösterilen integrale Cauchy tipli **singüler integral** denir ve aşağıdaki şekilde gösterilir

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt.$$

Burada, $\dfrac{1}{(t - t_0)}$ ifadesine **Cauchy çekirdeği** ve $\varphi(t)$' ye **çekirdek ya da yoğunluk fonksiyonu** denir.

2. ARALIK ÜZERİNDEN TANIMLI CAUCHY TİPLİ SİNGÜLER İNTEGRALİN YAKLAŞIMI İÇİN BİR KUADRATUR FORMÜL

Bu bölümde Cauchy tipli singüler integraller için bir kuadratur formül yapısı ele alınmıştır. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Bu kuadratur formülün yapısında ayrık modifikasyon yöntemi ve lineer spline interpolasyonu esas alınmıştır. Hata tahminleri $H^{\alpha}([-1,1],K)$ ve $C^{1}([-1,1])$ sınıfında elde edilmiştir.

Çalışma

$f(t)\in H^{\alpha}(K,[-1,1])$ olmak üzere,

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(t)}{t-x}dt \qquad , x\in(-1,1) \tag{2.1}$$

(2.1) Cauchy tipli singüler integral üzerinedir.

((2.1) integralinin sayısal değerlendirmesi için bkz. $[22]$)

Burada, $x\in\left[t_j+\delta, t_{j+1}-\delta\right]$ aralığında kuadratur form yakınsaktır. $\{t_j\}$, $[-1,1]$ aralığındadır ve

$$\delta\in\left[\frac{h}{4},\frac{3h}{4}\right] \ , \quad h=\frac{2}{N+1} \ , \quad t_{j+1}=t_j+h \ \text{ dir.}$$

Çalışmada $\left[t_j,t_{j+1}\right]$ kapalı aralığındaki herhangi bir singüler x noktası için kuadratur formülün yakınsaklığı incelenmiş ve yakınsaklık oranı $H^{\alpha}([-1,1],K)$ ve $C^{1}([-1,1])$ fonksiyon sınıflarında bulunmuştur. Sayısal örnekler ayrık vorteks yöntemiyle elde edilen kuadratur toplam ile karşılaştırılmıştır.

2.1. Kuadratur Formülün Yapımı (QF)

(2.1) integralini inceleyelim. $[t_k, t_{k+1}],\ k=0,1,...,N$, $t_k=-1+kh,\quad k=0,1,...,N+1$ denkleminin çözümü için $[-1,1]$ aralığını $N+1$ eş parçaya bölelim. $E=\{t_k, k=1,...,N\}$ kümesi $[-1,1]$ aralığının doğal bir bölümüdür $[23]$.

$\theta(j)=\{j-1, j, j+1, j=1,...,N\}$ de $\{j\}$ sabit bir tamsayı olmak üzere,

1) Singüler x noktası $\{-1=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_N<t_{N+1}=1\}$ düğüm noktaları ile çakışmaz ise, $x=t_j+\varepsilon,\ \ j=1,\ldots,N\quad \varepsilon\in(0,4)$ dir.

2) Singüler x noktası düğüm noktaları ile çakışır ise, $x=t_j$, $j=1,...,N$ dir.

$s_{1,\nu}(t)$ ve $s_{2,\nu}(t)$ lineer spline interpolasyonları $[24]$

$$s_{1,\nu}(t)=\frac{1}{h}\Big[(t_{\nu+1}-t)\,f(t_\nu)+(t-t_\nu)\,f(t_{\nu+1})\Big],\quad \nu=0,...,N,\ \ t\in[t_\nu,t_{\nu+1}] \tag{2.2}$$

$$s_{2,\nu}(t)=\frac{1}{2h}\Big[(t_{\nu+1}-t)\,f(t_{\nu-1})+(t-t_{\nu-1})\,f(t_{\nu+1})\Big],\quad \nu=0,...,N,\ \ t\in[t_{\nu-1},t_{\nu+1}] \tag{2.3}$$

şeklinde olduğundan aşağıdaki özelliklere sahiptir.

a) Eğer $f(t)=c$ ise , $s_{1,\nu}(t)=s_{2,\nu}(t)=c$

b) Eğer $f(t)=at+b$ ise, $s_{1,\nu}(t)=s_{2,\nu}(t)=at+b$

İlk durumda (2.1)deki singüler integrali hesaplamak için (2.2)deki kuadratur form yapısındaki $s_{1,\nu}(t)$ spline interpolasyon fonksiyonu kullanılır

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\,dt}{t-(t_j+\varepsilon)}&=\sum_{k=0,k\notin\theta(j)}^{N}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{f(t)\,dt}{t-(t_j+\varepsilon)}+\sum_{\nu=j-1}^{j+1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\frac{f(t)\,dt}{t-(t_j+\varepsilon)}\\&=\sum_{k=0,k\notin\theta(j)\cup\{j+2\}}^{N+1}A_k(t_j+\varepsilon)\,f(t_k)+\sum_{\nu=j-1}^{j+1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\frac{s_{1,\nu}(t)\,dt}{t-(t_j+\varepsilon)}+R(t_j+\varepsilon)\end{aligned} \tag{2.4}$$

elde edilir.

Burada,

$$A_k\left(t_j+\varepsilon\right)=\frac{h}{t_k-\left(t_j+\varepsilon\right)}\ ,\ k=1,...,j-2,\ j+3,...,N \qquad (2.5)$$

dir.

A_k nın katsayıları ayrık vorteks yöntemi ile elde edilen katsayılarla benzerdir $[23]$.

(2.4) kuadratur formundaki $f(t)$ lineer fonksiyonu ve bunun lineer spline interpolasyon fonksiyonları tam olduğundan katsayılar A_0 ve A_{N+1} olarak bulunur

$$\left.\begin{aligned}
A_0\left(t_j+\varepsilon\right)&=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1}\frac{(1-t)\,dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}-\int_{t_{j-1}}^{t_{j+2}}\frac{(1-t)\,dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}-\sum_{k=1,k\notin\theta(j)\cup\{j+2\}}^{N}\frac{(1-t_k)\,h}{t_k-\left(t_j+\varepsilon\right)}\right],\\
A_{N+1}\left(t_j+\varepsilon\right)&=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1}\frac{(1+t)\,dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}-\int_{t_{j-1}}^{t_{j+2}}\frac{(1+t)\,dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}-\sum_{k=1,k\notin\theta(j)\cup\{j+2\}}^{N}\frac{(1+t_k)\,h}{t_k-\left(t_j+\varepsilon\right)}\right].
\end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

(2.4) de (2.5) ve (2.6) denklemlerini yerine yazarsak,

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}=\sum_{k=1,k\neq j+2,k\notin\theta(j)}^{N}\frac{\varphi(t_k)\,h}{t_k-\left(t_j+\varepsilon\right)}+\sum_{\nu=j-1}^{j+1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\frac{s_{1,\nu}^{*}(t)}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}+R_N\left(t_j+\varepsilon\right) \qquad (2.7)$$

olur.

Burada,

$$\varphi(t)=f(t)-\frac{1}{2}\left[(1-t)\,f(-1)+(1+t)\,f(1)\right] \qquad (2.8)$$

$$s_{1,\nu}^{*}(t)=s_{1,\nu}(t)-\frac{1}{2}\left[(1-t)\,f(-1)+(1+t)\,f(1)\right] \qquad (2.9)$$

dir.

(2.7) integraline karşılık gelen aşağıdaki kuadratur formülü değerlendirelim

$$\int_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{t-(t_j+\varepsilon)}=\sum_{k=0}^{N+1}A_k(t_j+\varepsilon)f(t_k)+R_N(t_j+\varepsilon) \tag{2.10}$$

Burada,

$$A_k(t_j+\varepsilon)=\frac{h}{t_k-(t_j+\varepsilon)} \qquad k=1,\ldots,j-2,j+3,\ldots,N$$

$$A_0(t_j+\varepsilon)=\frac{1}{2}\Big[\big(1-(t_j+\varepsilon)\big)T_N(t_j+\varepsilon)-2h\Big]$$

$$A_{N+1}(t_j+\varepsilon)=\frac{1}{2}\Big[\big(1-(t_j+\varepsilon)\big)T_N(t_j+\varepsilon)+2h\Big]$$

$$A_{j-1}(t_j+\varepsilon)=-\left(1+\frac{\varepsilon}{h}\ln\frac{\varepsilon}{h+\varepsilon}\right)$$

$$A_j(t_j+\varepsilon)=\ln\frac{h-\varepsilon}{h+\varepsilon}+\varepsilon\ln\frac{\varepsilon^2}{h^2-\varepsilon^2}$$

$$A_{j+1}(t_j+\varepsilon)=2\ln\frac{2h-\varepsilon}{h-\varepsilon}+\varepsilon\ln\frac{(h-\varepsilon)^2}{\varepsilon(2h-\varepsilon)}$$

$$A_{j+2}(t_j+\varepsilon)=1-\frac{h-\varepsilon}{h}\ln\frac{2h}{h-\varepsilon}$$

$$T_N(t_j+\varepsilon)=\ln\left|\frac{1-(t_j+\varepsilon)}{1+(t_j+\varepsilon)}\cdot\left|\frac{h+\varepsilon}{2h-\varepsilon}\right|\right|-\sum_{k=1,k\notin\theta(j)\cup\{j+2\}}^{N}\frac{h}{t_k-(t_j+\varepsilon)}.$$

İkinci durumda,

$$\left.\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)dt}{t-t_j}&=\sum_{k=0,k\notin\theta(j)}^{N}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\frac{f(t)dt}{t-t_j}+\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\frac{f(t)dt}{t-t_j}\\&=\sum_{k=0,k\notin\theta(j)}^{N+1}B_k(t_j)f(t_k)+\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\frac{s_{2,\nu}(t)dt}{t-t_j}+R(t_j)\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

Burada,

$$B_k\left(t_j\right)=\frac{h}{t_k-t_j} \quad k=1,...,j-2,j+2,...,N \tag{2.12}$$

$\left(2.11\right)$ denkleminde ikinci kısmın sağ tarafına $\left(2.3\right)$ deki $s_{1,\nu}$ lineer spline interpolasyon fonksiyonu kullanılır. İlkinde olduğu gibi katsayılar B_0 ve B_{N+1}

$$\left.\begin{aligned} B_0\left(t_j\right)&=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\left(1-t\right)dt}{t-t_j}-\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\frac{\left(1-t\right)dt}{t-t_j}-\sum_{k=1,k\notin\theta(j)}^{N}\frac{\left(1-t_k\right)h}{t_k-t_j}\right]\\ B_{N+1}\left(t_j\right)&=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{1}\frac{\left(1+t\right)dt}{t-t_j}-\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\frac{\left(1+t\right)dt}{t-t_j}-\sum_{k=1,k\notin\theta(j)}^{N}\frac{\left(1+t_k\right)h}{t_k-t_j}\right]\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

olarak bulunur.

$\left(2.12\right)$ ve $\left(2.13\right)$, $\left(2.11\right)$ de yerine yazılırsa

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi\left(t\right)dt}{t-t_j}=\sum_{k=1,k\notin\theta(j)}^{N}\frac{\varphi\left(t_k\right)h}{t_k-t_j}+\int_{t_{j-1}}^{t_{j+1}}\frac{s_{2,\nu}^{*}\left(t\right)}{t-t_j}+R\left(t_j\right) \tag{2.14}$$

elde edilir. Burada $\varphi\left(t\right)$ $\left(2.8\right)$ denkleminde tanımlandığı gibidir ve

$$s_{2,\nu}^{*}\left(t\right)=s_{2,\nu}\left(t\right)-\frac{1}{2}\left[\left(1-t\right)f\left(-1\right)+\left(1+t\right)f\left(1\right)\right]$$

şeklindedir.

$\left(2.14\right)$'ten

$$\int_{-1}^{1}\frac{f\left(t\right)dt}{t-t_j}=\sum_{k=0}^{N+1}B_k\left(t_j\right)f\left(t_k\right)+R\left(t_j\right) \tag{2.15}$$

değerlendirmesini elde ederiz.

Burada,

$$B_k\left(t_j\right)=\frac{h}{t_k-t_j} \qquad k=1,...,j-2,j+2,...,N$$

$$B_0\left(t_j\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1-t_j\right)T_N\left(t_j\right)-2h\right]$$

$$B_{N+1}\left(t_j\right)=\frac{1}{2}\left[\left(1+t_j\right)T_N\left(t_j\right)+2h\right]$$

$$B_{j-1}\left(t_j\right)=-1$$

$$B_j\left(t_j\right)=0$$

$$B_{j+1}\left(t_j\right)=2\ln 2$$

$$T_N\left(t_j\right)=\ln\left|\frac{1-t_j}{2\left(1+t_j\right)}\right|-\sum_{k=1,k\notin\theta(j)}^{N}\frac{h}{t_k-t_j}.$$

2.2. Hataların Tahmini

Bu kısımda daha sonra kullanılmak üzere bazı fonksiyon sınıflarının tanımları verilmiştir.

1) $f\left(x\right), H^{\alpha}\left(\left[-1,1\right],K\right)$ sınıfından bir fonksiyon yani $\left[-1,1\right]$ aralığında herhangi iki x değeri için Hölder koşullarını sağlayan bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur

$$\left|f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right|\le K\left|x_1-x_2\right|^{\alpha},$$

burada, $0<\alpha\le 1$, $x_1,x_2\in\left[-1,1\right]$ ve K bir Hölder sabitidir.

2) $f\left(x\right)$, $C^1\left[-1,1\right]$ sınıfından bir fonksiyon yani birinci türevi $\left[-1,1\right]$ üzerinde sürekli olan bir fonksiyondur. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Teorem 2.2.1 : $f(t) \in H^{\alpha}([-1,1], K)$ ve E, $[-1,1]$ aralığında parçalanmış Kanonik bir küme olsun. Bu halde (2.10) kuadratur formülün hatası için aşağıdaki tahmin geçerlidir

$$\left|R_n(t_j+\varepsilon)\right| \le \begin{cases} L_1 h^{\alpha} \ln(N+1), & \varepsilon = \dfrac{h}{2} \\ L_1 h^{\alpha} \ln(N+1) + L_2 h^{\alpha}, & \varepsilon \ne \dfrac{h}{2} \\ L_1 h^{\alpha} \ln(N+1), & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Burada,

$$L_1 = 8K\left(1 + \frac{1.506}{\alpha \ln(N+1)}\right),$$

$$L_2 = K\left(0.068h^{5-\delta} + 0.567h^{2-\delta} + 0.516\right) \quad \text{ve} \quad 0 < \delta < \log_h \frac{|2\varepsilon - h|h}{(2h-\varepsilon)(h+\varepsilon)}$$

dir. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Teorem 2.2.2 : $f(t) \in C^{1}([-1,1])$ ve E, $[-1,1]$ aralığında parçalanmış Kanonik bir küme olsun. (2.10) kuadratur formülündeki hata aşağıdaki şekildedir

$$\left|R_n(t_j+\varepsilon)\right| \le \begin{cases} L_1^{*} h \ln(N+1), & \varepsilon = \dfrac{h}{2} \\ L_1^{*} h \ln(N+1) + L_2^{*} h^{\delta}, & \varepsilon \ne \dfrac{h}{2} \\ L_1^{*} h \ln(N+1), & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Burada,

$$L_1^* = 8M_1\left(1 + \frac{0.78}{\ln\left(N+1\right)}\right),$$

$$L_2^* = M_1\left(0.068h^{5-\delta} + 0.567h^{2-\delta} + 0.516\right) \quad \text{ve} \quad M_1 = \max\left|f'\left(\theta\right)\right|, \quad -1 \le \theta \le 1.$$

(Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Teorem 2.2.3: (Euler – Macleron Teoremi)

$f\left(x\right)$, $\left[a,b\right]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $f\left(x\right)$ $2k$ kadar sürekli türevlenebilir fonksiyon ise aşağıdaki formül doğrudur.

$$\int_a^b f\left(x\right)dx = \frac{h}{2}\left(f\left(a\right) + f\left(b\right)\right) + \sum_{j=1}^{n-1} f\left(a + jh\right)h + R_{2k}\left(f\right). \tag{2.16}$$

Burada,

$$R_{2k}\left(f\right) = -\frac{h^{2k}}{\left(2k\right)!}\left(b-a\right)B_{2k}\, f^{2k}\left(\xi\right), \quad \xi \in \left[a,b\right], \quad h = \frac{b-a}{n}$$

ve B_{2k} Bernoulli sayısıdır. Buna ek olarak herhangi $x \in \left[a,b\right]$ için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur

$$f^{(2k)}\left(x\right) \ge 0 \quad \text{ve} \quad f^{(2k+2)}\left(x\right) \ge 0 \quad \left(\text{veya} \quad f^{(2k)}\left(x\right) \le 0 \ \text{ ve } \ f^{(2k+2)}\left(x\right) \le 0\right).$$

Burada,

$$R_{2k}\left(f\right) = -\frac{h^{2k}B_{2k}}{\left(2k\right)!}\left[f^{(2k-1)}\left(b\right) - f^{(2k-1)}\left(a\right)\right] \quad \text{(ispat için } \left[24\right] \text{'e bakınız)}$$

Teorem 2.2.1 ve Teorem 2.2.2' nin ispatı aşağıdaki Lemmaya dayanmaktadır.

Lemma 2.2.1: $f(t)$, $[-1,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Ayrıca $\varphi(t)$ çekirdek fonksiyonu (2.8) deki gibi tanımlansın. Eğer $f(t) \in H^{\alpha}([-1,1], K)$ ise herhangi $t', t'', t \in [-1,1]$ için aşağıdaki tahminler doğrudur

a) $\left|\varphi(t'') - \varphi(t')\right| \leq 2K\left|t'' - t'\right|^{\alpha}$

b) $\left|\varphi(t)\right| \leq K\left(1 - t^2\right)^{\alpha}$.

Eğer $f(t) \in C^1([-1,1])$ ise herhangi $t', t'', t \in [-1,1]$ için aşağıdaki tahminler geçerlidir

c) $\left|\varphi(t'') - \varphi(t')\right| \leq 2M_1\left|t'' - t'\right|$

d) $\left|\varphi(t)\right| \leq M_1\left(1 - t^2\right)$

Burada, $M_1 = \max_{\xi \in [-1,1]} \left|f'(\xi)\right|$ dir. Lemma 2.2.1, $[25]$ de ispatlanmıştır. $x \in \left[t_j, t_{j+1}\right]$' den aşağıdaki Lemma 2.2.2 açıktır. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Lemma 2.2.2: x, $\left[t_j, t_{j+1}\right]$ $j = \overline{1, N}$ aralığında herhangi bir singüler nokta olsun. Aşağıdaki ifade doğrudur

$$\int_{-1}^{t_{j-1}} \frac{dt}{|t - x|} + \int_{t_{j+2}}^{1} \frac{dt}{t_{j+2}} \leq 2\ln(N + 1).$$

(Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Lemma 2.2.3: $[x_1, x_2]$, $\mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir aralık olsun. Eğer $a \in (x_1, x_2)$ ve $0 \leq \beta \leq 1$ ise aşağıdaki ifadeler geçerlidir

a) $r_1^{\beta} + r_2^{\beta} \leq 2^{1-\beta}\left(r_1 + r_2\right)^{\beta}$

b) $\left|r_1^{\beta} - r_2^{\beta}\right| \leq \left|r_1 - r_2\right|^{\beta}$.

Burada, $r_1 = |x_1 - a|$, $r_2 = |x_2 - a|$ dir. (Lemma 2.2.3' ün ispatı için bkz. $[26]$)

$g_{1,\nu}(x)$ fonksiyonunu

$$g_{1,\nu}(t) = f(t) - s_{1,\nu}(t), \quad \nu = j-1, j, j+1 \quad t \in [t_\nu, t_{\nu+1}] \qquad (2.17)$$

olarak tanımlayalım. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Lemma 2.2.4: $f(t)$ sürekli bir fonksiyon ve x, $[t_j, t_{j+1}]$ aralığında herhangi bir nokta olsun.

Bu takdirde aşağıdaki ifadeler doğrudur

a) Eğer $f(t) \in H^\alpha(K, [t_j, t_{j+1}])$ ise,

$$|g_{1,j}(x)| \le 2^\alpha K\left(|x - t_j||x - t_{j+1}|\right)^\alpha h^{-\alpha}$$

b) Eğer $f(t) \in C^1([t_j, t_{j+1}])$ ise,

$$|g_{1,j}(x)| \le M_1\left(|x - t_j||x - t_{j+1}|\right)h^{-1}.$$

Burada $M_1 = \max|f'(c_1) - f'(c_2)|$, $c_1 \in (t_j, x)$, $c_2 \in (x_2, t_{j+1})$ dir.

(Z. K. Eshkuvvatov 2007)

İspat:

a) $x \in [t_j, t_{j+1}]$ için (2.2) ve (2.17) den

$$\begin{aligned} |g_{1,j}(x)| &= \frac{1}{h}\left|(t_{j+1} - x)\left(f(x) - f(t_j)\right) + (x - t_j)\left(f(x) - f(t_{j+1})\right)\right| \\ &\le \frac{K}{h}\left(|x - t_j||x - t_{j+1}|\right)^\alpha \left(|x - t_{j+1}|^{1-\alpha} + |x - t_j|^{1-\alpha}\right) \\ &\le 2^\alpha K\left(|x - t_j||x - t_{j+1}|\right)^\alpha h^{-\alpha}, \end{aligned}$$

b) $(2.2),(2.17)$ ve Ortalama Değer Teoreminden

$$\begin{aligned}\left|g_{1,j}(x)\right| &= \frac{1}{h}\left|\left(t_{j+1}-x\right)f'(c_1)\left(x-t_j\right)+\left(x-t_j\right)f'(c_2)\left(x-t_{j+1}\right)\right| \\ &\le M_1\left(\left|x-t_j\right|\left|x-t_{j+1}\right|\right)h^{-1}\end{aligned}$$

yazarız. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Lemma 2.2.5: $f(t)$ sürekli bir fonksiyon ve $x\in\left[t_j,t_{j+1}\right]$ aralığında herhangi bir nokta olsun. Bu takdirde aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir

a) Eğer $f(t)\in M^{\alpha}\left(K,\left[t_{j-1},t_{j+2}\right]\right)$ ise

$$\left|s_{1,\nu}(t)-s_{1,j}(x)\right|\le Kh^{\alpha-1}\left|t-x\right|,\quad \nu=j-1,j,j+1,$$

b) Eğer $f(t)\in C^1\left(\left[t_{j-1},t_{j+2}\right]\right)$ ise

$$\left|s_{1,\nu}(t)-s_{1,j}(x)\right|\le \tilde{M}_1\left|t-x\right|,\quad \nu=j-1,j,j+1.$$

Burada, $\tilde{M}_1=\max\limits_{t_{j-1}\le\theta\le t_{j+2}}\left|f'(\theta)\right|$ dir. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

İspat:

a) $\nu=j-1$ alınıp (2.2) ve Lemma 2.2.3(a) uygulanırsa,

$$\begin{aligned}\left|s_{1,j-1}(t)-s_{1,j}(x)\right| &= \frac{1}{h}\left|\left(t-t_j\right)\left(f(t_j)-f(t_{j-1})\right)+\left(x-t_j\right)\left(f(t_j)-f(t_{j+1})\right)\right| \\ &\le Kh^{\alpha-1}\left[\left|t-t_j\right|+\left|x-t_j\right|\right]\le Kh^{\alpha-1}\left|t-x\right|\end{aligned}$$

$\nu=j+1$ için benzer şekilde ispatlanır.

$\nu=j$ için x ve t noktaları $\left[t_j,t_{j+1}\right]$'e aittir. (2.2) ifadesi kullanılırsa,

$$\left|s_{1,j}(t)-s_{1,j}(x)\right|=\frac{1}{h}\left|(x-t)\left(f(t_j)-f(t_{j+1})\right)\right|\le Kh^{\alpha-1}\left|t-x\right|$$

elde edilir.

b) benzer şekilde ispatlanır. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Lemma 2.2.6: $f(t)$, $[-1,1]$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve x, $\left[t_j, t_{j+1}\right]$ aralığında herhangi bir nokta olsun.

a) Eğer $f(t) \in H^{\alpha}\left(K, \left[t_j, t_{j+1}\right]\right)$ ise,

$i)$ $\left|g_{1,\nu}(t) - g_{1,j}(x)\right| \le 3K\left|t-x\right|^{\alpha}$, $\nu = j-1, j+1$ ise,

$ii)$ $\left|g_{1,\nu}(t) - g_{1,j}(x)\right| \le 2K\left|t-x\right|^{\alpha}$, $\nu = j$ ise,

b) Eğer $f(t) \in C^1\left([-1,1]\right)$ ise,

$$\left|g_{1,\nu}(t) - g_{1,j}(x)\right| \le 2M_1\left|t-x\right|, \ \forall\ \nu = j-1, j, j+1 .$$

Burada, $M_1 = \max\limits_{\xi \in \left[t_{j-1}, t_{j+2}\right]} \left|f'(\xi)\right|$ dir. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

İspat:

a) $i)$ $x \in \left[t_j, t_{j+1}\right]$, $t \in \left[t_{j-1}, t_j\right]$ ve $\nu = j-1$ için Lemma 2.2.5(a)' dan

$$\begin{aligned}\left|g_{1,j-1}(t) - g_{1,j}(x)\right| &= \left|f(t) - f(x) - \left(s_{1,j-1}(t) - s_{1,j}(x)\right)\right| \\ &\le K\left|t-x\right|^{\alpha} + Kh^{\alpha-1}\left|t-x\right| \le 3K\left|t-x\right|^{\alpha}\end{aligned}$$

yazarız.

$\nu = j$ için benzer şekilde yapılır.

$ii)$ $t, x \in \left[t_j, t_{j+1}\right]$ ve $\nu = j$ için Lemma 2.2.5(a)**'** dan

$$\begin{aligned}\left|g_{1,j}(t) - g_{1,j}(x)\right| &= \left|f(t) - f(x) - \left(s_{1,j}(t) - s_{1,j}(x)\right)\right| \\ &\le K\left|t-x\right|^{\alpha} + Kh^{\alpha-1}\left|t-x\right| \le 2K\left|t-x\right|^{\alpha}\end{aligned}$$

olur.

b) $\nu = j-1$, $t \in \left[t_{j-1}, t_j\right]$ Lemma 2.2.5(a) 'dan $\forall x \in \left[t_j, t_{j+1}\right]$ için

$$\left|g_{1,j-1}(t)-g_{1,j}(x)\right| = \left| f(t) - f(x) - \left(s_{1,j-1}(t) - s_{1,j}(x)\right)\right|$$
$$\leq \left| f'(c_1)\right| |t-x| + M_1 |t-x| \leq 2M_1 |t-x|$$

elde ederiz.

$R^*\left(t_j+\varepsilon\right)$'i aşağıdaki şekilde tanımlayalım

$$R^*\left(t_j+\varepsilon\right) = \left(1-\left(t_j+\varepsilon\right)^2\right)^{\alpha} \left| \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)} + \int_{t_{j+2}}^{1} \frac{dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)} - \sum_{k=1,k\notin\theta(j)\cup\{j+2\}}^{N} \frac{h}{t_k-\left(t_j+\varepsilon\right)} \right|. \qquad (2.18)$$

$\varepsilon = 0$ alındığında

$$R^*\left(t_j\right) = \left(1-t_j^{\,2}\right)^{\alpha} \left| \int_{-1}^{t_{j-1}} \frac{dt}{t-t_j} + \int_{t_{j+1}}^{1} \frac{dt}{t-t_j} - \sum_{k=1,k\notin\theta(j)}^{N} \frac{h}{t_k-t_j} \right|$$

yazılır. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Lemma 2.2.7: $t_j \in E$ olan herhangi bir $\left(t_j+\varepsilon\right)$ singüler noktası için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.

$$\left|R^*\left(t_j+\varepsilon\right)\right| \leq \begin{cases} c_1 h^{\alpha}, & \varepsilon = \dfrac{h}{2} \\ c_2 h^{\delta}, & \varepsilon \neq \dfrac{h}{2} \\ c_1 h^{\alpha}, & \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Burada $c_1 = 0,5 + 0,067h$ ve $c_2 = 0,068h^{5-\delta} + 0,567h^{2-\delta} + 0,516$ dir.

(Z. K. Eshkuvvatov 2007)

İspat: Aşağıdaki fonksiyonu inceleyelim

$$f(t)=\frac{1}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)} \tag{2.19}$$

Burada, t, $\left[-1,t_{j-1}\right]$ veya $\left[t_{j+2},1\right]$' e gider. (2.19) fonksiyonunun ikinci ve dördüncü türevlerinin, $t\in\left[-1,t_{j-1}\right]$ üzerinde olduğunda negatif ve $t\in\left[t_{j+2},1\right]$ üzerinde olduğunda pozitif olduğu açıktır. (2.16)'ya Euler – Macleron formülünü uygularsak,

$$\int_{-1}^{t_{j-1}}\frac{dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}=\sum_{k=1}^{j-2}\frac{h}{t_k-\left(t_j+\varepsilon\right)}-\frac{h}{2}\left(\frac{1}{1+\left(t_j+\varepsilon\right)}+\frac{1}{h+\varepsilon}\right)+\frac{h^4}{120}\left(-\frac{1}{\left(h+\varepsilon\right)^4}+\frac{1}{\left(1+\left(t_j+\varepsilon\right)\right)^4}\right)$$

ve

$$\int_{t_{j+2}}^{1}\frac{dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}=\sum_{k=j+3}^{N}\frac{h}{t_k-\left(t_j+\varepsilon\right)}+\frac{h}{2}\left(\frac{1}{2h-\varepsilon}-\frac{1}{1-\left(t_j+\varepsilon\right)}\right)+\frac{h^4}{120}\left(-\frac{1}{\left(1-\left(t_j+\varepsilon\right)\right)^4}+\frac{1}{\left(2h-\varepsilon\right)^4}\right)$$

yazarız.

(2.18)' de bu ifadeler yerine konulur ve

$$A(\varepsilon)=\frac{\left|2\varepsilon-h\right|h}{2\left(2h-\varepsilon\right)\left(h+\varepsilon\right)} \qquad \text{alınırsa,}$$

$$\begin{aligned}R^*\left(t_j+\varepsilon\right)\le\left(1-\left(t_j+\varepsilon\right)^2\right)^{\alpha}&\left[\frac{\left|t_j+\varepsilon\right|h}{2\left(1-\left(t_j+\varepsilon\right)^2\right)}+\frac{\left|t_j+\varepsilon\right|h^4}{15\left(1-\left(t_j+\varepsilon\right)^2\right)^3}\right.\\&\left.+\mathrm{A}\left(\varepsilon\right)\left(1+\frac{h^4\left(5h^2-2h\varepsilon+2\varepsilon^2\right)}{20\left[\left(2h-\varepsilon\right)\left(h+\varepsilon\right)\right]^3}\right)\right]\end{aligned} \tag{2.20}$$

elde ederiz.

Eğer $\varepsilon = \dfrac{h}{2}$ alınırsa, $A(\varepsilon) \equiv 0$ olur. Bundan dolayı,

$$R^*(t_{0j}) \le \left(1 - t_{0j}^2\right)^{\alpha} \left[\frac{|t_{0j}|h}{2\left(1 - t_{0j}^2\right)} + \frac{|t_{0j}|h^4}{15\left(1 - t_{0j}^2\right)^3} \right]$$

sağ taraftaki ifadeler $j = N$ de maksimum değerine ulaşır. Bu nedenle,

$$R^*(t_{0N}) \le \left(1 - t_{0N}^2\right)^{\alpha} \left[\frac{|t_{0N}|h}{2\left(1 - t_{0N}^2\right)} + \frac{|t_{0N}|h^4}{15\left(1 - t_{0N}^2\right)^3} \right] \le \frac{h^{\alpha}}{2} + \frac{1}{15} h^{1+\alpha} = c_1 h^{\alpha}$$

$\varepsilon \ne \dfrac{h}{2}$ için $t_j = 0$ olduğundan (2.20) denkleminin sağ tarafı maksimum değerini alır. Böylece,

$$R^*(\varepsilon) \le \left(1 - \varepsilon^2\right)^{\alpha} \left[\frac{\varepsilon h}{2\left(1 - \varepsilon^2\right)} + \frac{\varepsilon h^4}{15\left(1 - \varepsilon^2\right)^3} \right] + \frac{|2\varepsilon - h|h}{2(2h - \varepsilon)(h + \varepsilon)} \left(1 + \frac{h^4\left(5h^2 - 2h\varepsilon + 2\varepsilon^2\right)}{20\left[(2h - \varepsilon)(h + \varepsilon)\right]^3} \right)$$
$$\le 0,567h^2 + 0,068h^5 + 0,516 \frac{|2\varepsilon - h|h}{(2h - \varepsilon)(h + \varepsilon)}.$$

$0 < \varepsilon < h$ için

$$\frac{|2\varepsilon - h|h}{(2h - \varepsilon)(h + \varepsilon)} < h^{\delta}, \quad 0 < \delta \le \log_h \frac{|2\varepsilon - h|h}{(2h - \varepsilon)(h + \varepsilon)}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

Böylece hata,

$R^*(\varepsilon) \le c_2 h^{\delta}$

şekilde olur. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Teorem 2.2.1'in İspatı: (2.7)' den

$$\left|R_N\left(t_j+\varepsilon\right)\right| = \left|\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)} - \sum_{k=1,k\notin\theta(j)\cup\{j+2\}}^{N}\frac{\varphi(t_k)h}{t_k-\left(t_j+\varepsilon\right)} - \sum_{\nu=j-1}^{j+1}\int_{\nu=j-1}^{t_{\nu+1}}\frac{s_{1,\nu}(t)\,dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}\right|$$
$$\le R_1\left(t_j+\varepsilon\right)+R_2\left(t_j+\varepsilon\right)+R_3\left(t_j+\varepsilon\right)+R_4\left(t_j+\varepsilon\right)+R_5\left(t_j+\varepsilon\right), \tag{2.21}$$

yazılır.

Burada

$$R_1\left(t_j+\varepsilon\right)=\left|\int_{-1}^{t_1}\frac{\varphi(t)-\varphi\left(t_j+\varepsilon\right)}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}dt\right| \qquad R_2\left(t_j+\varepsilon\right)=\left|\frac{\varphi\left(t_{j+2}\right)-\varphi\left(t_j+\varepsilon\right)}{t_{j+2}-\left(t_j+\varepsilon\right)}h\right|$$

$$R_3\left(t_j+\varepsilon\right)=\left|\sum_{k=1,k\in\theta(j)}^{N}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\left(\frac{\varphi(t)-\varphi\left(t_j+\varepsilon\right)}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}-\frac{\varphi(t_k)-\varphi\left(t_j+\varepsilon\right)}{t_k-\left(t_j+\varepsilon\right)}\right)dt\right|$$

$$R_4\left(t_j+\varepsilon\right)=\left|\varphi\left(t_j+\varepsilon\right)\right|\left|\left(\int_{-1}^{t_{j-1}}+\int_{t_{j+2}}^{1}\right)\frac{dt}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}-\sum_{k=1,k\in\theta(j)\cup\{j+2\}}^{N}\frac{h}{t_k-\left(t_j+\varepsilon\right)}\right|$$

$$R_5\left(t_j+\varepsilon\right)=\left|\sum_{\nu=j-1}^{j+1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\frac{f(t)-s_{1,\nu}(t)}{t-\left(t_j+\varepsilon\right)}dt\right|$$

dir.

Lemma 2.2.1(a)' dan

$$R_1\left(t_j+\varepsilon\right)\le 2K\int_{-1}^{t_1}\frac{dt}{\left|t-\left(t_j+\varepsilon\right)\right|^{1-\alpha}}\le\frac{2K}{\alpha}h^{\alpha}$$

$$R_2\left(t_j+\varepsilon\right)\le 2K\frac{h}{\left|t_{j+2}-\left(t_j+\varepsilon\right)\right|^{1-\alpha}}\le 2Kh^{\alpha}$$

yazarız.

R_3 için yazalım,

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(t_j+\varepsilon)}{t-(t_j+\varepsilon)}-\frac{\varphi(t_k)-\varphi(t_j+\varepsilon)}{t_k-(t_j+\varepsilon)}=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_k)}{t-(t_j+\varepsilon)}+\frac{\varphi(t_k)-\varphi(t_j+\varepsilon)}{t_k-(t_j+\varepsilon)}\cdot\frac{t_k-t}{t-(t_j+\varepsilon)}$$

Lemma 2.2.1(a) ve Lemma 2.2.2' yi uygularsak,

$$R_3(t_j+\varepsilon)\le 8Kh^{\alpha}\ln(N+1)$$

Lemma 2.2.1(b) ve Lemma 2.2.7 den R_4 için

$$\left|R_4(t_j+\varepsilon)\right|\le\begin{cases} K(0,5+0,067h)h^{\alpha}, & \varepsilon=\dfrac{h}{2}\\ K\left(0,567h^{2-\delta}+0,068h^{5-\delta}+0,516h^{\delta}\right), & \varepsilon\ne\dfrac{h}{2}\\ K(0,5+0,067h)h^{\alpha}, & \varepsilon=0\end{cases}$$

elde ederiz.

R_5 i elde etmek için (2.17) formülünü Lemma 2.2.3 , Lemma 2.2.4(a) ve

Lemma 2.2.6(a)' yı kullanırsak

$$\begin{aligned} R_5(t_j+\varepsilon)&\le\left|\sum_{\nu=j-1}^{j+1}\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\frac{g_{1,\nu}(t)-g_{1,j}(t_j+\varepsilon)}{t-(t_j+\varepsilon)}dt\right|+\left|\sum_{\nu=j-1}^{j+1}g_{1,j}(t_j+\varepsilon)\int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}}\frac{dt}{t-(t_j+\varepsilon)}\right|\\ &\le 3K\int_{t_{j-1}}^{t_j}\frac{dt}{\left|t-(t_j+\varepsilon)\right|^{1-\alpha}}+2^{\alpha}Kh^{-\alpha}\left(\varepsilon(h-\varepsilon)\right)^{\alpha}\left|\ln\frac{t_{j+2}-(t_j+\varepsilon)}{t_{j-1}-(t_j+\varepsilon)}\right|\\ &\le\frac{10K}{\alpha}h^{\alpha}+0,3365.2^{-3\alpha}Kh^{\alpha}\le\frac{10,012K}{\alpha}h^{\alpha}\end{aligned}$$

elde ederiz. R_1-R_5' i (2.21) de yerine yazarsak Teorem 2.2.1 ispatlanır. $\varepsilon=0$ alındığında QF (2.14),Euler Macleron (2.16) ve Lemma 2.2.1- 2.2.7 kanıtlanmış olur. Teorem 2.2.2 benzer şekilde kanıtlanır. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

2.3. Sayısal Deneyler

$f(t) = t^2 - 3t + 5$ olsun. (2.1) singüler integrali için kesin sonuç,

$$J(x) = \left(x^2 - 3x + 5\right)\ln\frac{1-x}{1+x} + 2x - 6 \tag{2.22}$$

tarafından verilir. Ayrık vorteks metodu aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\tilde{J}\left(t_j + \varepsilon\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{f\left(t_k\right)dt}{t_k - \left(t_j + \varepsilon\right)} \tag{2.23}$$

Aşağıdaki tabloda (2.10) tarafından hesaplanan QF ile ayrık vorteks metodunun karşılaştırılması verilmiştir. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

Tablo 2.3.1

$$N = 19,\ h = 0.1,\ \varepsilon = \frac{h}{2} = 0.05$$

J	**X**	**Gerçek Değer**	**(10)**	**(23)**	**Hata (10)**	**Hata (23)**
1	-0.85	13.083048	13.2432	16.294800	0.160177	3.211752
2	-0.75	7.702423	7.846796	9.517194	0.144373	1.814771
5	-0.45	-0.548003	-0.459877	0.182127	0.088126	0.730130
9	-0.05	-5.584320	-5.574487	-5.252632	0.009833	0.331688
10	0.05	-6.385655	-6.395488	-6.385655	0.009833	0.2698655
11	0.15	-7.082179	-7.111669	-6.869733	0.029490	0.212446
15	0.55	-9.417276	-9.524661	-9.473978	0.107385	0.056703
17	0.75	-10.9458274	-11.09020	-11.33129	0.144373	0.385463
18	0.85	-12.270290	-12.43046	-13.13934	0.160177	0.869058

Tablo 2.3.2

$$N = 99,\ h = 0.01,\ \varepsilon = \frac{3h}{10} = 0.006,\ x = t_j + \varepsilon$$

J	X	Gerçek Değer	(10)	(23)	Hata (10)	Hata (23)
1	-0.974	30.459549	30.4924675	43.742878	0.032918	13.283329
2	-0.954	24.978597	25.008975	36.371769	0.030379	11.393172
10	-0.794	9.753531	9.758610	18.691516	0.005080	8.937985
30	-0.394	-1.508749	-1.553432	5.353967	0.044683	6.862715
49	-0.014	-5.886809	-5.957720	0.465924	0.070911	5.420886
50	0.006	-6.047785	-6.119505	-0.693341	0.071720	5.354444
51	0.026	-6.204037	-6.276508	-0.915147	0.072471	5.288890
60	0.206	-7.437330	-7.513989	-2.699397	0.076659	4.737933
80	0.606	-9.775212	-9.844543	-6.030498	0.069330	3.744715
90	0.806	-11.597817	-11.654772	-8.281660	0.056954	3.316157
97	0.946	-15.065660	-15.109793	-12.374845	0.044133	2.690815
98	0.966	-16.382829	-16.424344	-14.093328	0.041515	2.289501

Sonuç: Tablo 2.3.1' de x singüler noktası $\left[t_j, t_{j+1}\right]$ alt aralığının ortasında yer alır ve her iki yöntemde de uyum sağlanır. Bununla birlikte kuadratur formülde hata açısından (2.23), (2.10)'a göre daha iyidir. Tablo 2.3.2' de x singüler noktası aralığın ortasında yer almaz bu bize MDV (2.21)de yakınsama olmadığını gösterir ancak QF yine yakınsama sağlar. Dolayısıyla bizim QF, (-1,1) aralığındaki herhangi bir x singüler noktası için yakınsama sağlar. (Z. K. Eshkuvvatov 2007)

3. KAPALI DÜZGÜN EĞRİ ÜZERİNDEN CAUCHY TİPLİ SİNGÜLER İNTEGRALİN YAKLAŞIMI İÇİN KUADRATUR FORMÜL

3.1. Kuadratur Formülün Yapımı

Bu bölümde, parçalı düzgün bir eğri üzerindeki Cauchy tipli singüler integrallerin kübik spline yaklaşımları ele alınmıştır. (M. Nadır 2004)

Γ parçalı düzgün bir eğri olsun. Diğer bir deyişle Γ,

$$t(s) = x(s) + iy(s), \quad a \le s \le b, \ a, b \in \mathbb{R}$$

formunda simgelenebilecek, kompleks bir düzlemde sınırlı sayıda kesişmeyen kapalı eğrilerden oluşmaktadır ki; burada $x(s)$ ve $y(s)$ $[a,b]$ aralığında süreklidir. $x'(s)$ ve $y'(s)$ türevleri vardır ve bu türevler hiçbir zaman aynı anda sıfır değiller. $F(t_0)$

$$F(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t - t_0}dt, \qquad t_0 \in \Gamma \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanmış bir Cauchy Çekirdekli singüler İntegral olarak ele alınmıştır. Verilen $\varphi(t)$ çekirdek fonksiyonunun esas değerinin (P.V.) varlığı için süreklilikten daha fazlasına ihtiyacımız olacaktır. Diğer bir deyişle, $\varphi(t)$ çekirdek fonksiyonu Hölder şartını $(\varphi \in H(\mu))[26]$' i sağlamalıdır.

Şimdi yeterince büyük keyfi bir N doğal sayısı alalım. $[a,b]$ aralığını , I_1 den I_N 'ye kadar, $[a,b] = \{a = s_0 < s_1 < s_2 \cdots < s_N = b\}$ olacak şekilde N tane alt aralıklara bölelim. Böylece $I_{\sigma+1} = [s_\sigma, s_{\sigma+1}]$ $\sigma = 0,1,2,...,N$ olur. Ayrıca $h_{\sigma+1} = s_{\sigma+1} - s_\sigma$ alt alanların eşit uzunlukta olmaması gerekir. Fakat bizim durumumuzda ve alt aralıkların aynı alınması gereken durumlarda, alt aralıklar σ noktaları yardımıyla N eşit parçaya bölünür.

$$s_\sigma = a + \sigma\frac{l}{N}, \quad l = b - a, \quad \sigma = 0,1,2,...,N$$

$t_\sigma = t(s_\sigma)$ alarak ve Γ' nın düzgün olduğu dikkate alınarak $h_{\sigma+1} = t_{\sigma+1} - t_\sigma$ alınır $[27,29]$ ve $\sigma, \upsilon = 0,1,2,...,N-1$ alınırsa, t_0 noktası $t_\upsilon t_{\upsilon+1}$ eğrisine ait olur. Burada $t_\upsilon t_{\upsilon+1}$ eğrisi t_υ ile başlayan ve $t_{\upsilon+1}$ ile biten en küçük eğriyi ifade eder $[27,28]$.

$1,2,...,N-1$' den alınan keyfi σ,υ sayıları için φ, t ve t_0 sayılarına bağlı olarak $\beta_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0)$ fonksiyonunu;

$$\beta_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0) = \left(S_3(\varphi;t,\sigma) - S_3(\varphi;t_0,\upsilon)\right)\frac{2(t-t_0)}{(t_\sigma - t_0)+(t_{\sigma+1}-t_0)} \tag{3.2}$$

şeklinde tanımlayalım. Buradaki $S_3(\varphi;t,\sigma)$ ifadesi $\varphi(t)$ çekirdek fonksiyonunun Γ eğrisi üzerindeki kübik spline fonksiyonudur ve aşağıdaki şekilde verilir;

$$S_3(\varphi,t,\sigma) = \frac{M_\sigma (t_{\sigma+1}-t)^3}{6h_{\sigma+1}} + \frac{M_{\sigma+1}(t-t_\sigma)^3}{6h_{\sigma+1}} + \left(\varphi(t_\sigma) - \frac{M_\sigma h_{\sigma+1}^2}{6}\right)\frac{t_{\sigma+1}-t}{h_{\sigma+1}} + \left(\varphi(t_{\sigma+1}) - \frac{M_{\sigma+1}h_{\sigma+1}^2}{6}\right)\frac{t-t_\sigma}{h_{\sigma+1}}$$

ve φ çekirdek fonksiyonu Γ eğrisi üzerinde tanımlı $H(\mu)$ sınıfından verilen bir fonksiyondur.

$\left[(t_\sigma - t_0)+(t_{\sigma+1}-t_0)\right]=0$ eşitliğinin sadece $\sigma=\upsilon$ eşitliği durumunda mümkün olduğundan bu durumda biz $\beta_\sigma(\varphi;t,t_0)$ fonksiyonunu $\dfrac{2(t-t_0)}{(t_\sigma - t_0)+(t_{\sigma+1}-t_0)}$ ifadesini göz ardı ederek

$$\beta_{\sigma\sigma}(\varphi;t,t_0) = S_3(\varphi;t,\sigma) - S_3(\varphi;t_0,\sigma) \tag{3.3}$$

şeklinde $\beta_{\sigma\sigma}(\varphi;t,t_0)$ vereceğiz.

Yeterince büyük N için, $\dfrac{2(t-t_0)}{(t_\sigma - t_0)+(t_{\sigma+1}-t_0)}$ ifadesinin limitinin bire eşit olduğunu görmek kolaydır. Bununla birlikte (3.2) ve (3.3) ifadeleri neredeyse eşittir. Bu yüzden biz şunu doğrulayabiliriz; $\beta_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0)$ fonksiyonu $t,t_0 \in \Gamma$ değişkenlerinin bütün değerleri için tanımlanır ve bütün $\sigma,\upsilon = 0,1,2,...,N-1$ değerleri için bütün noktalarda neredeyse süreklidir. Şimdi aşağıdaki fonksiyonu tanımlayalım;

$$\Psi_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0)=\left\{\begin{matrix}\varphi(t_0)+\beta_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0),\ t\in\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}\ ,t_0\in\tau_\upsilon\tau_{\upsilon+1}\\ \sigma=0,1,...,N-1;\ \upsilon=0,1,...,N-1\end{matrix}\right\}.$$

Kolayca görülür ki tüm $\sigma,\upsilon=0,1,2,...,N-1$ değerleri için $\beta_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0)$ fonksiyonu $(t-t_0)$ elemanını içerir. Böylece, $\Psi_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0)$ aşağıdaki şekilde ifade edilir;

$$\Psi_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0)=\varphi(t_0)+(t-t_0)\mathrm{Q}_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0) \tag{3.4}$$

Bu yapılanmadan sonra

$$F(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt$$

(3.1) singüler integralini

$$S(\varphi;t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\frac{\Psi_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}dt=\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma\mathrm{Q}_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0)dt \tag{3.5}$$

ifadesi ile değiştirebiliriz.

Şimdi (3.1) singüler integrallere (3.5)şekilli ifadelerle yaklaşımın doğruluğu üzerine teoremi verelim.

Teorem 3.1.1: Γ sonlu uzunlukta düzgün basit bir eğri ve φ çekirdek fonksiyonu $(H(\mu))$ Hölder şartını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$|F(t_0)-S(\varphi;t_0)|\le\frac{C_N}{N^\mu},\ \ N>1$$

değerlendirmesi doğrudur. (M. Nadır 2004)

Burada C_N sabiti sadece Γ eğrisine bağlıdır. Ayrıca eğer φ ve onun birinci türevleri sürekli ve $\max_{t\in\Gamma}|\varphi^4(t)|=M$ ise,

$$|F(t_0)-S(\varphi;t_0)|\le\frac{C_N}{N^{\mu+4}},\quad N>1$$

elde edilir. Basitlik için sadece ilk kısmı kanıtlayalım. Gerçekten de biz

$t \in t_\sigma t_{\sigma+1}$ ve $t_0 \in t_\upsilon t_{\upsilon+1}$ için,

$\varphi(t) - \Psi_{\sigma\upsilon}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t) - \{\varphi(t_0) + \beta_{\sigma\upsilon}(\varphi; t, t_0)\}$ yazarız.

Basitlik için kübik spline M_σ momentleri tarafından karakterize edilen 3. dereceden polinom olarak alırsak

$$S_3(\varphi; t, \sigma) = \alpha_\sigma + \beta_\sigma (t - t_\sigma) + \gamma_\sigma (t - t_\sigma)^2 + \delta_\sigma (t - t_\sigma)^3, \quad \mathrm{t} \in [t_\sigma, t_{\sigma+1}]$$

olur.

Burada,

$$\alpha_\sigma = \varphi(t_\sigma), \quad \beta_\sigma = \frac{\varphi(t_{\sigma+1}) - \varphi(t_\sigma)}{h_{\sigma+1}} - \frac{2M_\sigma + M_{\sigma+1}}{6} h_{\sigma+1}, \quad \gamma_\sigma = \frac{M_\sigma}{2}, \quad S_\sigma = \frac{M_{\sigma+1} - M_\sigma}{6h_{\sigma+1}}$$

olur. Tüm $t \in t_\sigma t_{\sigma+1}$ ve $t_0 \in t_\upsilon t_{\upsilon+1}$ $\sigma \neq \upsilon$ için

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \Psi_{\sigma\upsilon}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t) - \varphi(t_0) - \Big\{ & \varphi(t_\sigma) + \beta_\sigma (t - t_\sigma) + \gamma_\sigma (t - t_\sigma)^2 + \delta_\sigma (t - t_\sigma)^3 \\ & - \varphi(t_\upsilon) - \beta_\upsilon (t - t_\upsilon) - \gamma_\upsilon (t - t_\upsilon)^2 - \delta_\upsilon (t - t_\upsilon)^3 \Big\} \frac{2(t - t_0)}{(t_\sigma - t_0) + (t_{\sigma+1} - t_0)} \end{aligned} \tag{3.6}$$

yazarız.

Eğer $\sigma = \upsilon$ ise ifadeyi kolaylıkla aşağıdaki şekilde yazarız;

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \Psi_{\sigma\upsilon}(\varphi; t, t_0) = \varphi(t) - \varphi(t_0) - \Big\{ & \beta_\sigma + \gamma_\sigma \left[(t - t_\sigma) + (t_0 - t_\sigma) \right] \\ & + \delta_\sigma \left[(t - t_\sigma)^2 + (t - t_\sigma)(t_0 - t_\sigma) + (t_0 - t_\sigma)^2 \right] \Big\} (t - t_0) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Yukarıdaki (3.6) ve (3.7) ifadelerini dikkate alarak

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)-\Psi_{\sigma\upsilon}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}dt &= \sum_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq\upsilon}}^{N-1}\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\left\{\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}-\left[\varphi(t_\sigma)+\beta_\sigma(t-t_\sigma)\right.\right.\\
&\quad +\gamma_\sigma(t-t_\sigma)^2+\delta_\sigma(t-t_\sigma)^3-\varphi(t_\upsilon)-\beta_\upsilon(t-t_\upsilon)\\
&\quad \left.\left.-\gamma_\upsilon(t-t_\upsilon)^2-\delta_\upsilon(t-t_\upsilon)^3\right].\frac{1}{\frac{t_\sigma+t_{\sigma+1}}{2}-t_0}\right\}dt\\
&\quad +\frac{1}{\pi i}\int_{t_\upsilon t_{\upsilon+1}}\left\{\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}-\left[\beta_\upsilon+\gamma_\upsilon\left((t-t_\upsilon)+(t_0+t_\upsilon)\right)\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+\delta_\upsilon\left((t-t_\upsilon)^2+(t-t_\upsilon)(t_0-t_\upsilon)+(t_0-t_\upsilon)^2\right)\right]\right\}dt
\end{aligned}\right\} \qquad (3.8)
$$

elde edilir.

Şimdi biz (3.8) ifadesinin değerlendirmesini $t_0\in t_\upsilon t_{\upsilon+1}$ ve $\sigma\neq\upsilon$ için yazarız

$$
\left|\sum_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq\upsilon}}^{N-1}\int_{t_\sigma t_{\sigma+1}}\left\{\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}-\left[\varphi(t_\sigma)-\varphi(t_\upsilon)+\beta_\sigma(t-t_\sigma)-\beta_\upsilon(t-t_\upsilon)\right]\frac{1}{\frac{t_\sigma+t_{\sigma+1}}{2}-t_0}\right\}dt\right|=O\left(N^{-\mu}\right)
$$

Doğal olarak yukarıda verilen hesap β_σ ve $\varphi\in H(\mu)$ ifadeleri kullanılarak elde edilmiştir $[26]$.

Bunun yanı sıra,

$$
\left|\sum_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq\upsilon}}^{N-1}\int_{t_\sigma t_{\sigma+1}}\left\{\gamma_\sigma(t-t_\sigma)^2-\gamma_\upsilon(t_0-t_\upsilon)^2\right\}\frac{1}{\frac{t_\sigma+t_{\sigma+1}}{2}-t_0}dt\right|=O\left(N^{-2}\right)
$$

ve

$$
\left|\sum_{\substack{\sigma=0\\ \sigma\neq\upsilon}}^{N-1}\int_{t_\sigma t_{\sigma+1}}\left\{\delta_\sigma(t-t_\sigma)^3-\delta_\upsilon(t_0-t_\upsilon)^3\right\}\frac{1}{\frac{t_\sigma+t_{\sigma+1}}{2}-t_0}dt\right|=O\left(N^{-3}\right)
$$

olduğu görülür. Daha ileri gidecek olursak, $\varphi\in H(\mu)$ koşulunu ve Γ' nın kapalılık koşulunu kullanarak,

$$\left| \int_{t_\upsilon t\upsilon+1} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0} dt \right| \le A \int_{s_\upsilon}^{s_{\upsilon+1}} |s-s_0|^{\mu-1} ds = O\left(N^{-\mu}\right)$$

elde ederiz.

Yine β_υ ifadesi için $\varphi \in H(\mu)$ üzerinde kolaylıkla,

$$\left| \int_{t_\upsilon t_{\upsilon+1}} \left\{ \beta_\upsilon + \gamma_\upsilon \left((t-t_\upsilon) + (t_0 - t_\upsilon) \right) + \delta_\upsilon \left((t-t_\upsilon)^2 + (t-t_\upsilon)(t_0-t_\upsilon) + (t_0-t_\upsilon)^2 \right) \right\} dt \right| = O\left(N^{-\mu}\right)$$

yazılır. (M. Nadır 2004)

3.2. Sayısal Deneyler

Bu kısımda kübik spline yaklaşımı kullanılarak, singüler integrallere alogaritma uygulanmış ve hesaplamaların doğruluğuyla ilgili sonuçlar sunulmuştur.

Tablo I ' deki sayısal ifadeler tam değerleri simgelemektedir ve $\tilde{I}$ interpolasyon noktalarındaki tahminlerden üretilen yaklaşım hesabına karşılık gelmektedir.

(M. Nadır 2004)

Örnek 3.2.1: $I = F(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(t)}{t - t_0} dt$ singüler integral olmak üzere, burada Γ eğrisi birim çemberi ifade eder ve fonksiyon çekirdeği φ

$$\varphi(t) = \frac{-2t^2 + 8t + 12}{4t\left(t^2 - t - 6\right)}$$

şeklindedir. (M. Nadır 2004)

N	$\|I - \tilde{I}\|_1$	$\|I - \tilde{I}\|_2$	$\|I - \tilde{I}\|_\infty$
20	1.8246599E-02	9.1665657E-03	5.0822943E-03
40	3.6852972E-03	1.9270432E-03	1.5697196E-03
60	2.3687426E-03	1.1880117E-03	6.6070486E-04

3.3. Singüler İntegraller İçin Uyarlanmış Kuadratur Yaklaşım

Bu bölümün hedefi Cauchy tipli singüler integrallerin çekirdek fonksiyonuna mevcut parabolik yaklaşımı uygulamaktır. Bu yaklaşımın amacı integralin singüleritesini gidermek ve yönlendirilmiş düzgün eğri üzerinde Cauchy tipi çekirdek ile singüler integral denklemlerin sayısal çözümüne yardımcı olmaktır. Birçok matematiksel fizik, mühendislik ve elastik teorisinin temas teoremleri Cauchy tipi çekirdek ile singüler integral denklemler yolu ile çözülür;

$$a(t_0)\varphi(t_0)+\frac{b(t_0)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t_0)}{t-t_0}dt+\int_\Gamma k(t,t_0)\varphi(t)dt=f(t_0) \qquad (3.9)$$

burada Γ belirli yönlü düzgün bir eğri, t ve t_0 noktaları Γ üzerindedir. Bu denklem uygulamalı bilimlerin modern sayısal hesaplamalarında, özellikle de uygulamalı matematik de önemli rol oynar. Bizim şema

$$F(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt \quad , \qquad t,t_0\in\Gamma \qquad (3.10)$$

Cauchy çekirdekli singüler integral operatörlere sayısal integral operatörlerin dizisi ile kuadratur yöntemle yaklaşımı tanımlar. Şunu belirtelim ki, verilen $\varphi(t)$ çekirdeği için bu integralin baş değerinin (P.V.) varolması için süreklilikten daha fazlasına ihtiyacımız olacaktır. Başka bir deyişle, $\varphi(t)$ çekirdeği $H(\mu)$ Hölder koşulunu sağlamak zorundadır.$[26]$ $\varphi(t)$ fonksiyonu Γ üzerinde Hölder koşulunu sağlar demek ki herhangi iki t_1,t_2 noktaları için,

$$\left|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)\right|\le A\left|t_2-t_1\right|^{\mu}, \quad 0<\mu\le 1$$

doğrudur. Burada A pozitif sabittir Hölder sabiti olarak adlandırılır ve μ Hölder indeksidir. (M. Nadır 2010)

3.4. Kuadratur Formül

Γ eğrisinin parametrik denklemini

$$t(s)=x(s)+iy(s)\ , \quad a\le s\le b$$

olacak şekilde belirtelim. Burada $x(s)$ ve $y(s)$ fonksiyonları $[a,b]$ sonlu aralığında sürekli ve birinci türevleri $x'(s)$ ve $y'(s)$ de aynı aralıkta sıfırdan farklı ve süreklidir.

N keyfi bir doğal sayı olsun. Genelde N çok büyük sayıdır. $[a,b]$ aralığını $s_\sigma = a+\sigma\dfrac{l}{N},\ \ l=b-a,\ \ \sigma=0,1,\ldots,N$ noktalarıyla N tane eşit $I_1,I_2,\ldots,I_N$ alt aralıklarına bölelim.

Ayrıca $M>1$ doğal sayısını kaydederek, $[s_\sigma,s_{\sigma+1}]=I_\sigma$ aralıklarını eşit uzaklıkta olan

$s_{\sigma k}=s_\sigma+k\dfrac{h}{2M},\ \ \mathrm{h}=\dfrac{1}{N},\ \ k=0,1,\ldots,2M$ noktaları ile bölelim.

Diğer bir deyişle, her $[s_\sigma,s_{\sigma+1}]$ alt aralığının aşağıdaki alt bölümlerini(aralıklarını) elde ederiz;

$$[s_\sigma,s_{\sigma+1}]=\{s_\sigma=s_{\sigma 0}<s_{\sigma 1}<\cdots<s_{\sigma 2M}=s_{\sigma+1}\}$$

Notasyon olarak,

$$t_\sigma=t(s_\sigma),\ \mathrm{t}_{\sigma k}=t(s_{\sigma k});\ \sigma=0,1,\ldots,N\ \ k=0,1,\ldots,2M$$

tanımlayalım.

$\sigma,\nu=0,1,2,...,N+1$ indisleri için t ve t_0 noktalarının sırasıyla $t_\sigma t_{\sigma+1}$ ve $t_\nu t_{\nu+1}$ yaylarına ait olduğunu varsayalım. Burada $t_\alpha t_{\alpha+1}$, t_α dan $t_{\alpha+1}$'ye olan küçük yayı belirtirmektedir (bkz. [27],[28],[30],[31].)

Keyfi bir $\sigma = 0,1,2,\ldots N-1$ sayısı için Γ eğrisinin $[t_\sigma, t_{\sigma+1}]$ alt aralığında $\varphi(t)$ çekirdek(yoğunluk) fonksiyonunun kuadratur yaklaşımını temsil eden φ, t ve σ ya bağımlı olan parçalı kuadratur Langrange interpolasyon polinomunu $S_2(\varphi; t, \sigma)$ ile tanımlayalım. Biliriz ki, $[t_\sigma, t_{\sigma+1}]$ aralığı $\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma k}\right)$, $k = 2i$,$i = 0,1,..., M-1$ uzunluklu $\left[t_{\sigma k}, t_{k(\sigma+2)}\right]$ alt aralıklarına bölünüyor.

Biz $\varphi(t)$ çekirdek(yoğunluk) fonksiyonunun sırasıyla $t_{\sigma k}$, $t_{\sigma(k+1)}$ ve $t_{\sigma(k+2)}$ noktalarındaki $\varphi(t_{\sigma k}), \varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right)$ ve $\varphi\left(t_{\sigma(k+2)}\right)$ değerleriyle kuadratur polinomial interpolasyonunu aşağıdaki formülle vereceğiz.

$t_{\sigma k} \le t \le t_{\sigma(k+2)}$ için,

$$
\begin{aligned}
S_2(\varphi; t, \sigma) = {} & \frac{\left(t - t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t - t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)} - t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma k}\right)} \varphi(t_{\sigma k}) \\
& - \frac{\left(t - t_{\sigma k}\right)\left(t - t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)} - t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma(k+1)}\right)} \varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right) \\
& + \frac{\left(t - t_{\sigma k}\right)\left(t - t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma(k+1)}\right)} \varphi\left(t_{\sigma(k+2)}\right)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

Elde edilen bu parçalı kuadratur interpolasyon polinomu mevcuttur ve tektir.

$0 \le \sigma, \nu \le N-1$ şartlarını sağlayan keyfi σ ve ν sayıları için φ, t ve t_0 ‘a bağımlı olan aşağıdaki $\beta_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0)$ fonksiyonunu tanımlayalım:

$$
\beta_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0) = U(\varphi; t, \sigma) - V(\varphi; t_0, \sigma, \nu) \tag{3.12}
$$

$U(\varphi; t, \sigma)$ fonksiyonu $\varphi(t)$ çekirdek(yoğunluk) fonksiyonunun Γ eğrisinin $[t_\sigma, t_{\sigma+1}]$ alt aralığı üzerindeki değiştirilmiş kuadratur interpolasyonunu temsil eder.

Gerçekten de, $t_{\sigma k} \le t \le t_{\sigma(k+2)}$ için

$$U(\varphi;t,\sigma)=\frac{\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)}\varphi\left(t_{\sigma k}\right)\frac{t-t_0}{t_{\sigma k}-t_0}$$
$$-\frac{\left(t-t_{\sigma k}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)}\varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right)\frac{t-t_0}{t_{\sigma(k+1)}-t_0}$$
$$+\frac{\left(t-t_{\sigma k}\right)\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)}\varphi\left(t_{\sigma(k+2)}\right)\frac{t-t_0}{t_{\sigma(k+2)}-t_0}$$

koyarız ve $V(\varphi;t_0,\sigma,\nu)$ fonksiyonu

$$V(\varphi;t_0,\sigma,\nu)=\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma k}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)}$$
$$-\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)(t-t_{\sigma k})\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)}$$
$$+\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)(t-t_{\sigma k})\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)}$$

şeklinde verilir.

$\psi_{\sigma\nu}(\varphi;t,t_0)$, $0 \le \sigma,\nu \le N-1$ ile $t \in [t_\sigma, t_{\sigma+1}]$ noktasında $\varphi(t)$ çekirdek fonksiyonunun kübik yaklaşımını gösterirsek $\forall t_0 \in [t_\sigma, t_{\sigma+1}]$ için,

$$\psi_{\sigma\nu}(\varphi;t,t_0)=\varphi(t_0)+\beta_{\sigma\nu}(\varphi,t,t_0) \tag{3.13}$$

elde ederiz.

(3.10) ' deki $F(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt$ singüler integralinde $\varphi(t)$ 'i (3.13) genişlemesi ile değiştirirsek aşağıdaki yaklaşımı elde ederiz:

$$S(\varphi,t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\psi_{\sigma\nu}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}dt=\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\beta_{\sigma\nu}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}dt. \tag{3.14}$$

3.5. Ana Sonuçlar

Teorem 3.5.1 : Γ pozitif yönlü düzgün bir eğri ve φ, Γ üzerinde tanımlı $H(\mu)$ Hölder koşulunu sağlayan bir çekirdek fonksiyonu olsun. Bu takdir de

$$\left|F(t_0)-S(\varphi;t_0)\right|\le \max\left(\frac{C\ln(2MN)}{(2MN)^{\mu}},\frac{C}{N^{\mu}}\right)\qquad N,M>1$$

değerlendirmesi geçerlidir.

Burada C sabiti sadece Γ eğrisine bağımlıdır. (M. Nadır 2004)

İspat: $t\in[t_\sigma,t_{\sigma+1}]$ ve $t_0\in[t_\nu,t_{\nu+1}]$ noktalarını alırsak biz,

$t_{\sigma k}\le t\le t_{\sigma(k+2)}$ ve $t_{\nu k}\le t_0\le t_{\nu(k+2)}$ için

$$\begin{aligned}
\varphi(t)-\psi_{\sigma\nu}(\varphi;t,t_0)&=\varphi(t)-\varphi(t_0)\\
&=-\left\{\frac{\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)}\varphi(t_{\sigma k})\frac{t-t_0}{t_{\sigma k}-t_0}\right.\\
&\quad-\frac{\left(t-t_{\sigma k}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)}\varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right)\frac{t-t_0}{t_{\sigma(k+1)}-t_0}\\
&\quad+\frac{\left(t-t_{\sigma k}\right)\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)}\varphi\left(t_{\sigma(k+2)}\right)\frac{t-t_0}{t_{\sigma(k+2)}-t_0}\\
&\quad-\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma k}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)}\\
&\quad+\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)(t-t_{\sigma k})\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)}\\
&\quad\left.-\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)(t-t_{\sigma k})\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)}\right\}
\end{aligned}\qquad(3.15)$$

yazarız.

(3.15) ifadesini dikkate alırsak,

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)-\psi_{\sigma\nu}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}dt=\frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=0}^{N-1}\int_{t_\sigma t_{\sigma+1}}\frac{\varphi(t)-\psi_{\sigma\nu}(\varphi;t,t_0)}{t-t_0}dt \tag{3.16}$$

elde ederiz.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
F(t_0)-S(\varphi;t_0)&=\frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1}\int_{t_\sigma t_{\sigma(2k+2)}}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\\
&=-\left\{\frac{\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)}\varphi(t_{\sigma k})\frac{t-t_0}{t_{\sigma k}-t_0}\right.\\
&\quad-\frac{\left(t-t_{\sigma k}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)}\varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right)\frac{t-t_0}{t_{\sigma(k+1)}-t_0}\\
&\quad+\frac{\left(t-t_{\sigma k}\right)\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)}\varphi\left(t_{\sigma(k+2)}\right)\frac{t-t_0}{t_{\sigma(k+2)}-t_0}\\
&\quad-\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma k}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)}\\
&\quad+\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)\left(t-t_{\sigma k}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)}\\
&\quad\left.-\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)\left(t-t_{\sigma k}\right)\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)}\right\}\frac{1}{t-t_0}dt
\end{aligned}$$

Belirtelim ki , $t_{\sigma k}-t_0=0$, $t_{\sigma(k+1)}-t_0=0$ ve $t_{\sigma(k+2)}-t_0=0$ eşitlikleri sadece $\sigma=\nu-1$, $\sigma=\nu+1$, $\sigma=\nu$ durumlarında mümkündür.

Her iki durumda da (3.16) integrali mevcuttur, çünkü $t_{\sigma k}$ t_0 ya da $t_{\sigma(k+2)}$ t_0 eğilimindedir.

Diğer durumlarda eğer $\sigma=\nu$ ise biz $\beta_{\sigma\sigma}(\varphi;t,t_0)$ fonksiyonunun $(t_{\sigma k}-t_0),\left(t_{\sigma(k+1)}-t_0\right)$ ve $\left(t_{\sigma(k+2)}-t_0\right)$ çarpanlarını içerdiğini kolayca görüyoruz.

$t, t_0 \in [t_\sigma, t_{\sigma+1}]$ noktaları için öyle ki $t_{\sigma k} \le t, t_0 \le t_{\sigma(k+2)}$ biz

$$\beta_{\sigma\sigma}(\varphi; t, t_0) = U(\varphi; t, \sigma) - V(\varphi; t_0, \sigma, \sigma)$$

yazarız. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
\beta_{\sigma\sigma}(\varphi; t, t_0) = {} & \frac{\left(t - t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t - t_{\sigma(k+2)}\right)(t - t_0)}{\left(t_{\sigma(k+1)} - t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma k} - t_0\right)}\left(\varphi(t_{\sigma k}) - S_2(\varphi; t_0, \sigma)\right) \\
& - \frac{(t - t_{\sigma k})\left(t - t_{\sigma(k+2)}\right)(t - t_0)}{\left(t_{\sigma(k+1)} - t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+1)} - t_0\right)}\left(\varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right) - S_2(\varphi; t_0, \sigma)\right) \\
& + \frac{(t - t_{\sigma k})\left(t - t_{\sigma(k+1)}\right)(t - t_0)}{\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_0\right)}\left(\varphi\left(t_{\sigma(k+2)}\right) - S_2(\varphi; t_0, \sigma)\right)
\end{aligned} \qquad (3.17)$$

(3.15) ve (3.17) ifadeleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t) - \psi_{\sigma\nu}(\varphi; t, t_0)}{t - t_0}dt = {} & \frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1}\int_{t_{\sigma 2k}t_{\sigma(2k+2)}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \\
& - \left\{ \frac{\left(t - t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t - t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)} - t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma k}\right)}\varphi(t_{\sigma k})\frac{t - t_0}{t_{\sigma k} - t_0} \right. \\
& - \frac{(t - t_{\sigma k})\left(t - t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)} - t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma(k+1)}\right)}\varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right)\frac{t - t_0}{t_{\sigma(k+1)} - t_0} \\
& + \frac{(t - t_{\sigma k})\left(t - t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma(k+1)}\right)}\varphi\left(t_{\sigma(k+2)}\right)\frac{t - t_0}{t_{\sigma(k+2)} - t_0} \\
& - \frac{S_2(\varphi; t_0, \nu)(t - t_0)\left(t - t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t - t_{\sigma(k+2)}\right)}{(t_{\sigma k} - t_0)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+1)} - t_{\sigma k}\right)} \\
& + \frac{S_2(\varphi; t_0, \nu)(t - t_0)(t - t_{\sigma k})\left(t - t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)} - t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+1)} - t_{\sigma k}\right)} \\
& \left. - \frac{S_2(\varphi; t_0, \nu)(t - t_0)(t - t_{\sigma k})\left(t - t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)} - t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+2)} - t_{\sigma k}\right)} \right\} \frac{dt}{t - t_0}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi (3.16) ifadesinin değerlendirmesine geçersek $t_0 \in t_\nu t_{\nu+1}$ ve $\sigma \ne \nu - 1, \nu + 1, \nu$ için

$$\left|\begin{aligned}&\frac{1}{\pi i}\sum_{\sigma=0}^{N-1}\sum_{k=0}^{M-1}\int\limits_{t_{\sigma 2k}t_{\sigma(2k+2)}}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\\
&-\left\{\frac{\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)}\varphi\left(t_{\sigma k}\right)\frac{t-t_0}{t_{\sigma k}-t_0}\right.\\
&-\frac{\left(t-t_{\sigma k}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)}\varphi\left(t_{\sigma(k+1)}\right)\frac{t-t_0}{t_{\sigma(k+1)}-t_0}\\
&-\frac{\left(t-t_{\sigma k}\right)\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)}\varphi\left(t_{\sigma(k+2)}\right)\frac{t-t_0}{t_{\sigma(k+2)}-t_0}\\
&-\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{(t_{\sigma k}-t_0)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)}\\
&+\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)(t-t_{\sigma k})\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)}\\
&\left.-\frac{S_2(\varphi;t_0,\nu)(t-t_0)(t-t_{\sigma k})\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)}\right\}\frac{dt}{t-t_0}\end{aligned}\right|=O\left(\frac{\ln(2MN)}{(2MN)^{\mu}}\right)$$

elde ederiz. Doğal olarak, $H(\mu)$ [26] Hölder uzayının elemanı olan $\varphi(t)$ yoğunluk fonksiyonu için elde edilen yukarıdaki değerlendirmeden aşağıdaki değerlendirmeler yazılır

$$\left|\frac{(t-t_0)\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{(t_{\sigma k}-t_0)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)}\right|=O(1),$$

$$\left|\frac{(t-t_0)(t-t_{\sigma k})\left(t-t_{\sigma(k+2)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+1)}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+1)}-t_{\sigma k}\right)}\right|=O(1),$$

$$\left|\frac{(t-t_0)(t-t_{\sigma k})\left(t-t_{\sigma(k+1)}\right)}{\left(t_{\sigma(k+2)}-t_0\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma(k+1)}\right)\left(t_{\sigma(k+2)}-t_{\sigma k}\right)}\right|=O(1).$$

Bunun yanı sıra, kolaylıkla

$$\max_{t_0 \in t_\nu t_{\nu+1}} \left| O\left(\frac{1}{(2M)^\mu (N)^\mu} \right) \sum_{\substack{\sigma=0 \\ \sigma \neq \nu}}^{N-1} \sum_{k=0}^{M-1} \int_{t_{\sigma(2k)} t_{\sigma(2k+2)}} \frac{dt}{t-t_0} \right| = O\left| \frac{\ln(2M)N}{(2M)^\mu N^\mu} \right|$$

elde edilir.

Bundan başka, $\sigma = \nu - 1, \nu + 1, \nu$ durumlarında (3.17) uygulanır ve Γ 'nın pürüzsüz olması ve φ fonksiyonunun $H(\mu)$ uzayından olması dikkate alınırsa,

$$\left| \int_{t_\nu t_{\nu+1}} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0) dt}{t - t_0} \right| \leq A \int_{s_\nu}^{s_{\nu+1}} |s - s_0|^{\mu-1} ds = O\left(N^{-\mu}\right)$$

elde ederiz.

3.6. Sayısal Deneyler

Biz yaklaşımlar kullanarak, singüler integraller için alogaritma oluşturulmuş ve hesaplamaların doğruluğu konusunda sonuçlar sunulmuştur.

Her bir tablo I singüler integralinin esas değerini (V.P.) temsil eder ve $\tilde{\mathrm{I}}$ da bizim (3.14) yaklaşımı tarafından elde edilen yaklaşık hesaplamaya karşılık gelir.

(M. Nadır 2004)

Örnek 3.6.2: $\mathrm{I} = F(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt$ singüler integralini düşünelim.

Burada Γ merkezi 0 olan bir birim çember belirler. t ve t_0 Γ üzerinde herhangi iki nokta ve φ çekirdek fonksiyonu aşağıdaki ifadede verilsin. (M. Nadır 2004)

$$\varphi(t) = \frac{1}{t^2}$$

N	M	$\lVert \mathrm{I}-\tilde{\mathrm{I}} \rVert_1$	$\lVert \mathrm{I}-\tilde{\mathrm{I}} \rVert_2$	$\lVert \mathrm{I}-\tilde{\mathrm{I}} \rVert_\infty$
10	2	7.8253150E-03	5.2587800E-03	4.9651256E-03
11	2	6.1442256E-03	3.8414600E-03	3.5070777E-03
12	2	3.7623644E-03	2.3593807E-03	2.1644831E-03

Örnek 3.6.3: $\mathrm{I} = F(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(t)}{t-t_0}dt$ singüler integralini alalım. Γ eğrisi birim çember belirlemek üzere t, t_0 Γ üzerinde birer nokta ve φ çekirdek fonksiyonu

$$\varphi(t) = \sin t^2 + \cos t$$

olsun. (M. Nadır 2004)

N	M	$\left\|I-\tilde{I}\right\|_1$	$\left\|I-\tilde{I}\right\|_2$	$\left\|I-\tilde{I}\right\|_\infty$
10	2	2.1330118E-03	1.3611738E-03	1.2570620E-03
11	2	9.4902515E-04	5.7528692E-04	4.8601627E-04
12	2	4.9412251E-04	2.3593807E-04	2.9397011E-04

Sonuç

Önerilen yaklaşım (3.10) şekilli integralin Cauchy esas değerinin singüleritesini kaldırmak için kullanılabilir. Birçok Cauchy tipli singüler integrallerin sayısal hesaplaması için iyi sonuçlar verdiği test edilmiştir. (M. Nadır 2004)

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Çalışmada kapalı düzgün eğri üzerinden ve kapalı aralık üzerinden tanımlı singüler integrallere yaklaşımlarla ilgili teoremler verilmiş ve incelenmiştir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında kapalı aralık üzerinde tanımlı Cauchy tipli singüler integraller ve kapalı düzgün eğri üzerinde tanımlı Cauchy tipli singüler integraller için kuadratur formüller verilmiş ve singüler integrallerin yaklaşık değerleri incelenmiştir.

Bu formüller Cauchy çekirdekli singüler integral denklemlerinin yaklaşık çözümünde kullanılabilir.

KAYNAKÇA

[1] F.D. Gakhov, Boundary Value Poblems, English Edition, Pergamon Pres Ltd., 1966.

[2] A.I.Gusseinov and K.S.Mukhtarov, Introduction to the Theory of Nonlinear Singlar Integral Equations, Nauka, Moscow, 180 (in Russian).

[3] S.G.Mikhlin and S.Prossdorf, Singular Integral Operator, Academic-Verlag, Berlin, 1966.

[4] N.I.Muskhelishvili, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, Groningen, The Netherlans, 1953.

[5] N.I.Muskhelishvili, Singular Intgral Equations, Eglish Edition, Noordhoof Ltd., Gnoningen, Groningen, The Netherlans, 1968.

[6] N.M. Mustafaev, On the Approximate Solution of the Singular Integral Equation that is Defined on Closed Smooth Curve, Singulat Integral Oerators, AGU Publications, Bak, 1987, pp. 91-99.

[7] D.Jinyuan, THe collocation methods and singular integral equations with Cauchy kernels, Acta Math. Sc. 20(B3) (2000), pp. 289-302.

[8] B.I.Musaev, On Aproximate Solution of the Singular Integra Equations, An Az.SSR, Institute of Phyzics Preprint No 17, 1986.

[9] E.Deniz, Kompleks Değişkenli Sürekl Fonksiyonların En İyi Düzgün Yaklaşımı Üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars-2006.

[10] M.Çağlar, Kapalı Dügün Eğri Üzerine Tanımlı Singüler İntegrallere Yaklaşım, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars-2009.

[11] N.Mustafa, M.Çağlar, Kapalı Düzgün Eğri Üzerinde Tanımlı Fonksiyonlara Yaklaşım, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 3(1), (2010), pp. 49-57.

[12] N.M.Mustafaev, Approximate formulas for singular integrals and their application to the approximate solution of singular integral equations that are defined on closed smooth curve, Ph.D. Thesis,AN Az.SSR, Institute of Mathematics Mechanics, Baku, 1991.

[13] N.M.Mustafaev, Error of the approximatin to the singular integral equation that is defined on closed smooth curve, In Az. NIINTI 338-B88 (1988), pp.1-37.

[14] Z. K. Eshkuvvatov and N. M.A. Nik Long, A quadrature Formula for the Approximation of Cauchy type singular integrals on the interval, Journal of Math. Analysis, Vol. 1, 2007, no. 8, pp. 355-368.

[15] Nadır M. , On the approximation of singular integrals of Cauchy type, 5-10 July 2004, Antalya, Turkey, Dynamical systems and Applications, Proceedings, pp. 547-552

[16] Nadır M., Adapted quadratic approximation for singular integrals, Journal of Math. Inequalities, Volume 4, no. 3, 2010, pp. 423-430

[17] F.D. Gakhov, Boundary Value Poblems, Moscow, Nauka, 640 (1977).

[18] Başkan T. , Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, 4. baskı , VİPAŞ A.Ş., Bursa, 125-129(2000).

[19] İdemen M., Kompleks Değişkenli Fonksiyonlar Teorisi, 1. baskı, Elit Yayın Tanıtım Ltd. Şti., İstanbul (1999).

[20] Lu Jian-Ke, Boundary Value Problems for Analytic Functions, Vol. 16, Department of Mathematics Wuhan University, China.

[21] Çağlar M., Kapalı düzgün eğri üzerinde tanımlı singüler integrallere yaklaşım, Yüksek Lisans Tezi, Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kars, 12-15 (2009)

[22] Z.K. Eshkuvatov, A new quadrature formula for evaluation of singular integrals with the Cauchy Kernel, Simposium Kebangsaan Sains Matematik ke 12, 23-24 December , (2004). (English).

[23] S. Belotserkovskii, I. Lifanov, Numerical methods in singular integral equations, Nauka, Moscow (in Russian), 1985.

[24] M. I. Israilov, Numerical Methods, Uzbekistan Press, Tashkent (In Uzbek), 2003.

[25] M.I. Israilov Z.K. Eshkuvatov, On an accuratte of discrete vortex method for calculation of singular integrals, Dokl. AN RUZ, 6 (1994), 3-7 (in Russian).

[26] N.I. Muskhelishvili, Singular Integral equations, Naukah Moscow, 1968, English transl, of sted Noordhoff Holland, 1953; reprint, 1972.

[27] Nadır M. , Problemes aux limites qui se reduisent aux equations integrals de Fredholm, Seminaire de I'Institut de Mathematiques et Informatique, 1985, Annaba.

[28] Sanıkıdze J. , On the approximate calculation of singular line integral, Seminar of Institute of Applied Mathematics, 1970, Tbilissi.

[29] Sanıkıdze J. , Approximate solution of singular integrals equations in the case of closed contours of integration, Seminar of Institute of Applied Mathematics, 1971.

[30] Nadır M. , Antıdze J. On the numerical solution of singular integrals equations using Sanikidze's approximation, Comp Meth in Sc. Tech., 10, 1 (2004), 83-89.

[31] Nadır M., Lakehalı B., On The Approximation of singular integrals,

Fen Dergisi (E- Dergi), 2, (2007), 236-240.

ÖZGEÇMİŞ

Ben 16.02.1989 yılında Kars ilinde doğdum. İlk ve orta öğrenimini Kars' da tamamladım. 2007 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesini kazandım ve 2011 yılında mezun oldum. 2011 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans programına başladım.