T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT TOPOLOJİK UZAYLARDA TERS VE DÜZ SİSTEMLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NESRİN DEMİRCİ

DANIŞMAN

DOÇ. DR. SADİ BAYRAMOV

HAZİRAN 2014

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Nesrin DEMİRCİ' nin Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV' un danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı " Soft Topolojik Uzaylarda Ters ve Düz Sistemler " adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek **oy birliği** ile kabul edilmiştir.

13.06.2014

Adı ve Soyadı	İmza
Başkan: Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV	....
Üye: Doç. Dr. Çiğdem GÜNDÜZ (ARAS)	....
Üye: Yrd. Doç. Dr. Taha Yasin ÖZTÜRK	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 13/06/2014 gün ve ..../ ....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....

Doç. Dr. Muzaffer ALKAN

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Beni bu konuya yönlendiren ve çalışmamda büyük emeği geçen, yoğun çalışmalarından bana zaman ayırarak derin bilgilerinden faydalanma fırsatı veren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum, değerli hocam Sayın Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV' a ve bölümümün değerli tüm hocalarına en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca her türlü maddi manevi katkılarını esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Nesrin DEMİRCİ

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SOFT TOPOLOJİK UZAYLARIN TERS VE DÜZ SİSTEMLERİ

Nesrin DEMİRCİ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV

Doğa bilimlerinden ortaya çıkan bazı problemlerin çözümünde klasik matematiğin yöntemleri yetersiz kalmaktadır. Böyle problemlerin çözümü ile ilgili yeni yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerle ilgili fuzzy kümeler, intuitionistic fuzzy kümeler, soft kümeler v.b. teoriler inşa edilmiştir. Matematiksel açıdan yeni kategoriler oluşturulmuş ve bu kategorilerin cebirsel işleme göre kapalılık problemi büyük önem taşır.

Bu tezde, soft topolojik uzaylar kategorisinde cebirsel işlemlere göre kapalılık problemi araştırılır. Bunun için soft topolojik uzayların ters ve düz sistemlerinin limitlerinin varlığı ispatlanır.

2014, 72 sayfa

Anahtar Kelimeler: Soft küme, Soft topolojik uzay, Soft sürekli dönüşüm, Soft topolojik uzayların ters ve düz sistemleri.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

INVERSE AND DIRECT SYSTEMS OF SOFT TOPOLOGICAL SPACES

Nesrin DEMİRCİ

Kafkas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Sadi BAYRAMOV

Classic Mathematics methods are insufficient in solution of some problems occur in natural sciences. There has been developed new methods about the solutions of these problems. Fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets, soft sets and etc. theories constructed about these methods. New categories formed in terms of mathematics and the closeness problem of these categories according to algebraic operations is of great importance.

In this thesis; the closure problem is investigated according to algebraic operations in the category of soft topological spaces. For this, the existence of limits of inverse and direct systems of soft topological spaces is proven.

2014, 72 pages

Keywords: Soft set, Soft topological spaces, Soft continuous mapping, Inverse and direct systems of soft topological spaces.

SİMGELER DİZİNİ

$\underline{X}$	: Topolojik uzayların ters sistemi
$\overline{X}$	: Topolojik uzayların düz sistemi
$Hom(X,Y)$	: X nesnesinden Y nesnesine giden morfizmalar kümesi
U	: Herhangi bir evrensel küme
$P(U)$	: U'nun kuvvet kümesi
E	: Parametreler kümesi
A	: E parametreler kümesinin boş olmayan alt kümesi
(F,A)	: U üzerinde bir soft küme
$({}^{Y}F,E)$	: Y üzerinde (F,E)'nin soft alt kümesi
(X,τ,E)	: X üzerinde bir soft topolojik uzay
$\overline{(F,E)}$	: (F,E) soft kümesinin soft kapanışı
$(F,E)^{\circ}$	: (F,E) soft kümesinin soft içi
(x_e,E)	: Soft nokta
$SS(U)_A$	: Soft kümelerin ailesi
$Stop$	: Soft topolojik uzaylar kategorisi
$(\underline{X},\underline{E})$	: Soft topolojik uzayların ters sistemi
$\lim\limits_{\overleftarrow{\alpha\epsilon A}} X_\alpha$	: Soft topolojik uzayın ters limiti
$\left({}^{X}/_{\sim_1},\tilde{\tau},{}^{E}/_{\sim_2}\right)$	: (X,τ,E) soft uzayının soft bölüm uzayı
$(\overline{X},\overline{E})$	: Soft topolojik uzayların düz sistemi
$\lim\limits_{\overrightarrow{\alpha\epsilon \mathrm{A}}} X_\alpha$	: Soft topolojik uzayların düz limiti
$Dir(Stop)$	: Soft topolojik uzayların düz sistemler kategorisi
$Inv(Stop)$	: Soft topolojik uzayların ters sistemler kategorisi

1. GİRİŞ

Sosyal bilimlerde, ekonomide, mühendislikte v.b. alanlarda karmaşık problemleri çözmek için klasik metotları kullanamayız. Bu tür problemlerin çözümü matematiksel temel prensipleri, belirsizliği ve kesinlik olmayan durumları içerir. Dolayısıyla, bu durumlarda klasik kümeler teorisi bu tür belirsizlik içeren problemlerin ele alınmasında tam olarak uygun olmayabilir. Bu tür belirsizlikleri etkili bir yolla ele alınmasını sağlayan birçok sayıda teori öne sürülmüştür. Bunlardan fuzzy kümeler teorisi, intuitionistic fuzzy kümeler teorisi, aralıklar matematik teorisi ve rough kümeler teorisi v.b. [5, 16, 17, 30, 32, 44,57]. Bu kavramlar oldukça geniş uygulama alanına sahiptir. Örneğin; mantık programlamada, tıbbi teşhislerde, karar analizlerinde, model tanımada v.b. alanlarda uygulamaya sahiptir [23, 30, 56, 58, 59, 68, 69, 70]. Bununla beraber bu teorilerin kendi zorlukları vardır. 1999'da Molodtsov belirsizliği modellemek için tamamen yeni bir yaklaşım olan soft küme kavramını tanımlamış ve bazı özelliklerini vermiştir [54]. Soft kümelerle ilgili olarak birçok araştırmalar ve incelemeler yapılmıştır [50, 51, 52, 61]. Bu yeni teorinin temel sonuçlarını sunmuş ve bunu başarılı bir şekilde fonksiyonların düzgünlüğü, oyun teorisi, işlemlerin araştırılması, Rieman integrasyonu, Peron integrasyonu, olasılık teorisi v.b. alanlara uygulanmıştır.

Bilindiği üzere soft kümelerle fuzzy kümeler arasında bağlantı vardır. Fuzzy küme teorisi ise ilk olarak 1965 yılında Zadeh tarafından geliştirilmiş ve günümüz bilgisayarlarının bu denli gelişmesinin temelini bu çalışmalar oluşturmuştur [69].

Fuzzy ve intuitionistic fuzzy kümelerde topolojik yapılar verilerek genel topoloji alanında birçok çalışma yapılmıştır [11, 13, 48, 49].

Maji, Biswas ve Roy soft ve fuzzy yapıları bir araya getirerek, fuzzy soft küme tanımını vererek bu kümelerin bazı özelliklerini araştırmışlardır [50].

Cebirde soft kavramını ilk olarak Aktaş ve Çağman kullanarak, soft grup kavramını tanımlayarak bazı incelemeler yapmışlardır [2]. Acar ve diğerleri soft halka kavramını, Sun ve diğerleri de soft modüller kavramını tanımlayarak bazı özelliklerini araştırmışlardır [1, 67].

Fuzzy soft yapısını cebire ilk olarak Jin-liang ve diğerleri taşıyarak fuzzy soft grup kavramını vermişlerdir [33]. Gündüz (Aras) ve Bayramov fuzzy soft modül ve intuitionistic fuzzy soft modüller kategorisini tanımlayarak bu kategoride bazı araştırmalar yapmışlardır [26, 27]. Yine soft ve fuzzy soft gruplar kategorisinde izomorfizma hakkında teoremler [9, 25] çalışmalarında ispatlanmıştır.

Soft kümelerde topolojik yapı, cebirin aksine ilk olarak 2011 yılında tanımlanmıştır. Cebirde ise çalışmalar 2006 yılında başlamıştır [65]. Bu çalışmalardan birçok araştırmacılar genel topolojinin sonuçlarını soft topolojik uzaylara taşımaya çalışmışlardır [6, 15, 28, 31, 53, 62, 65, 71]. Soft topolojik uzayların araştırılmasında en önemli kavramlardan biri soft nokta kavramıdır. [6, 65, 71] çalışmalarında farklı soft nokta tanımı verilmektedir. [28] çalışmasında soft nokta tanımı diğer çalışmalardan farklı olarak verilir ve ortaya çıkan birçok problemlerin aradan kaldırılmasına yardımcı olur.

Matematikte en önemli problemlerden birisi, ele alınan yeni kategoride cebirsel işlemlerin verilmesi ve bu işlemlere göre bu kategorinin kapalı olmasıdır. Ters ve düz limitler tüm cebirsel işlemleri içerdiğinden verilmesi gereken işlemlerin en başında gelir. Bu nedenle her yeni kategorinin bu işlemlere göre kapalılığını göstermek büyük önem taşır. Herhangi bir uzaya yapısı iyi konulmuş uzaylarla yaklaşma problemi için ilk olarak Alexandrov, ters sistemler kavramını tanımlayarak bu problemi çözmüştür [18]. Öte yandan ters ve düz limitler matematiğin birçok alanında da kullanılmaktadır. Serre, ters limit kavramını kullanarak yeni bir grup sınıfı oluşturmuştur. Bu gruplar, sonlu grupların ters sisteminin limitidir. Bu gruplara pro-sonlu gruplar adı verilmiştir [63]. Ters ve düz sistemleri kullanarak topolojik uzaylar kategorisinde spektral homoloji teori inşa edilmiştir [18, 66]. Bazı yeni kategorilerde ters ve düz sistemlerin limitinin varlığı çalışmaları da yapılmıştır [8, 10, 22, 27, 47, 48, 49].

Tezin giriş bölümünde; topolojik uzay, topolojik uzayların ters ve düz sistemleri, topolojik uzayların ters ve düz sistemlerinin limitleri, topolojik uzayların ters ve düz sistemlerinin morfizması, kategori ve funktor kavramlarıyla ilgili gerekli temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tezin materyal ve yöntem bölümünde; soft küme, soft topoloji, soft topolojik uzaylar ve soft ayırma aksiyomları ile ilgili gerekli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin araştırma bulguları yönteminde; soft topolojik uzaylar kategorisinde ters ve düz sistemler tanımlanmış ve bu sistemlerin limitlerinin varlığı ispatlanmıştır. Düz sistemlerin limitini vermek için önce soft topolojik uzayların topolojik toplamı ve bölüm uzayı tanımlanmış ve bu uzayların bazı özellikleri araştırılmıştır. En önemli sonuçlardan biri soft kompakt uzayların ters limitinin de soft kompakt olduğunun ispatıdır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde, araştırmamızda ihtiyaç duyduğumuz temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1. Bazı Topolojik Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1.$[\mathbf{7},\mathbf{18}]$ A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere

$$A \times B = \{(x, y): x \in A, y \in B\}$$

biçiminde sıralı ikililerin kümesine A ve B kümelerinin kartezyen çarpımı denir.

Tanım 2.1.2. $[\mathbf{7},\mathbf{18}]$ A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere $A \times B$ nin boş olmayan her alt kümesine A'dan B' ye bir bağıntı denir. Buna göre $R \subset A \times B$ ise o zaman R, A kümesinden B kümesine bir bağıntı olur ve aRb şeklinde gösterilir.

R, A' dan B' ye bir bağıntı ise, yani $R = \{(x, y): x \in A, y \in B\}$ şeklinde ise R' nin tersi

$$R^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in R\}$$

olarak tanımlanır.

$\alpha \subset A \times B$ ve $\beta \subset B \times C$ bağıntılarının çarpımı

$$\beta \circ \alpha = \{(a, c) \in A \times C: \exists\, b \in B, a\alpha b \text{ ve } b\beta c\}$$

biçiminde tanımlanır.

$A \times A$ nın köşegeni $\Delta = \{(x, y) \in A \times A: x = y\}$ kümesidir.

Tanım 2.1.3. $[\mathbf{7},\mathbf{18}]$ $E \subset X \times X$ bir bağıntı olsun. Eğer E bağıntısı için

1) $\Delta \subset E$,

2) $E = E^{-1}$,

3) $E \circ E \subset E$

koşulları sağlanırsa E bağıntısına X üzerinde bir denklik bağıntısı denir.

Tanım 2.1.4. $[\mathbf{7,18}]$ X bir küme, $\varphi \subset X \times X$ de bir bağıntı olsun. Eğer φ bağıntısı aşağıdaki koşulları sağlarsa;

1) φ nin yansıma özelliği vardır, yani $\forall\, x \in X$ için $x\varphi x$ dir;

2) φ nin geçişme özelliği vardır, yani $x\varphi y$ ve $y\varphi z$ koşullarını sağlayan $\forall\, x, y, z \in X$ için $x\varphi z$ dir;

3) φ nin ters simetri özelliği vardır, yani $x\varphi y$ ve $y\varphi x$ ise $x = y$ dir

φ bağıntısına yarı-sıralama (kısmı sıralama) bağıntısı, (X, φ) ikilisine ise yarı-sıralanmış (kısmı sıralanmış) küme denir. Genellikle φ yarı-sıralama bağıntısı " $\leq$ " ile gösterilir.

Tanım 2.1.5. $[\mathbf{7,18}]$ $(X, \leq)$ yarı-sıralanmış küme olsun.

1) Eğer $\forall\, x, y \in X$ için $x \leq y$ veya $y \leq x$ ise $(X, \leq)$ kümesine tam sıralanmış (lineer sıralanmış) küme adı verilir.

2) Eğer yarı-sıralanmış kümede $\forall\, x, y \in X$ için $x \leq z$, $y \leq z$ sağlanacak şekilde $z \in X$ varsa $(X, \leq)$ kümesine yönlendirilmiş küme denir.

Tanım 2.1.6. $[\mathbf{7,18}]$ $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\tau = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subset 2^X$ in bir alt ailesi olsun. τ ailesi için aşağıdaki koşullar sağlanırsa:

1) $X, \emptyset \in \tau$,

2) $\forall\, A' \subset A$ alt kümesi için $\bigcup_{\alpha \in A'} U_\alpha \in \tau$,

3) τ da alınan her sonlu sayıda elemanın kesişimi τ ya aittir

τ ya X üzerinde bir topoloji, (X, τ) ikilisine topolojik uzay, τ nun her U_α elemanına açık küme denir.

Tanım 2.1.7. $[\mathbf{7,18}]$ (X, τ) bir topolojik uzay, $B \subset X$ bir küme olsun. Eğer B kümesinin bütünleyeni $\bar{B} = X \setminus B$ açık ise B kümesine bu uzayda kapalıdır denir.

Her açık kümenin bütünleyeni kapalıdır.

(X, τ) topolojik uzayında $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ kapalı kümeler ailesi olsun. Bu aile aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) $X, \emptyset$ kapalı kümedir,

2) Eğer $B_{\alpha_1}, \dots, B_{\alpha_n}$ kapalı kümeler ise $\bigcup_{i=1}^{n} B_{\alpha_i}$ kümesi kapalıdır,

3) Her $A' \subset A$ indis kümesi ve $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A'}$ kapalı kümeler ailesi için $\bigcap_{\alpha \in A'} B_\alpha$ kümesi kapalıdır.

Teorem 2.1.8. $[\mathbf{7}, \mathbf{18}]$ $X \neq \emptyset$ bir küme, $\mathcal{B} = \{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ X in alt kümeler ailesi olsun. Eğer

1) $X, \emptyset \in \mathcal{B}$,

2) $\mathcal{B}$ ailesinin her sonlu alt ailesinin birleşimi $\mathcal{B}$ ye aittir,

3) Her $A' \subset A$ için $\bigcap_{\alpha \in A'} B_\alpha \in \mathcal{B}$

ise $\tau = \{U : \exists B \in \mathcal{B}, U = \bar{B}\}$ ailesi X kümesi üzerinde bir topolojidir ve $\mathcal{B}$ ailesi bu topolojide kapalı kümeler ailesidir.

Tanım 2.1.9. $[\mathbf{7}, \mathbf{18}]$ (X, τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ bir nokta ve $x \in A \subset X$ bir alt küme olsun. Eğer $x \in U \subset A$ sağlanacak şekilde $U \in \tau$ varsa A kümesine x noktasının bir komşuluğu denir.

Tanım 2.1.10. $[\mathbf{7}, \mathbf{18}]$ (X, τ), (Y, τ') iki topolojik uzay olsun. Eğer $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun ve $x_0 \in X$ olsun.

1) Eğer $y_0 = f(x_0)$ noktasının her V_{y_0} komşuluğu için $f(U_{x_0}) \subset V_{y_0}$ olacak şekilde x_0 noktasının en az bir U_{x_0} komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir.

2) Eğer f fonksiyonu her $x \in X$ noktasında sürekli ise f fonksiyonuna X de süreklidir denir.

Tanım 2.1.11. $[\mathbf{7},\mathbf{18}]$ (X,τ), (Y,τ') iki topolojik uzay olsun. Eğer $f\colon X\longrightarrow Y$ fonksiyonu için,

1) f bire-bir ve örtendir,

2) f süreklidir,

3) f^{-1} süreklidir

koşulları sağlanırsa $f\colon X\longrightarrow Y$ fonksiyonuna (X,τ), (Y,τ') uzayları arasında bir homeomorfizma denir.

Eğer iki topolojik uzay arasında en az bir homeomorfizma varsa bu uzaylara homeomorf uzaylar denir.

2.2. Alt Uzaylar

(X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ bir küme olsun. $\tau_A=\{U\cap A\colon U\in\tau\}$ ailesi için

1) $\bigcup\limits_{\alpha}(U_\alpha\cap A)=\left(\bigcup\limits_{\alpha}U_\alpha\right)\cap A\in\tau_A$,

2) $(U_1\cap A)\cap(U_2\cap A)=(U_1\cap U_2)\cap A\in\tau_A$

koşulları sağlandığından τ_A ailesi A üzerinde bir topolojidir.

Tanım 2.2.1. $[\mathbf{7},\mathbf{18}]$ (X,τ) bir topolojik uzay, $A\subset X$ bir küme ve $\tau_A=\{U\cap A\colon U\in\tau\}$ ailesi A kümesi üzerinde bir topoloji olsun.

1) (A,τ_A) çiftine (X,τ) uzayının bir alt uzayı, τ_A topolojisine alt uzay topolojisi denir.

2) Her (X,τ) topolojik uzayı ve (A,τ_A) alt uzayı için $i_A(x)=x$ formülü ile tanımlanan $i_A\colon A\longrightarrow X$ fonksiyonuna gömme fonksiyon denir.

$i_A^{-1}(U)=U\cap A\in\tau_A$ olduğundan i_A fonksiyonu süreklidir. Açıktır ki τ_A topolojisi A kümesinde $i_A\colon A\longrightarrow X$ fonksiyonundan üretilen topolojiye eşittir.

Tanım 2.2.2. $[\mathbf{7,18}]$ (X,τ) bir topolojik uzay, $M \subset X$ bir alt uzay olsun.

1) $A \subset M$ kümesi (M,τ_M) de kapalıdır $\Leftrightarrow$ $A = M \cap F$ sağlanacak şekilde kapalı $F \subset X$ kümesi vardır.

2) Eğer $A^c_{\tau_M}$ kümesi A nın M alt uzayında kapanışı ise $A^c_{\tau_M} = A^c \cap M$ dir.

Tanım 2.2.3. (X,τ), (Y,τ') iki topolojik uzay, $M \subset X$ bir alt uzay, $f{:}\,X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. $f \circ i_M{:}\,M \longrightarrow Y$ fonksiyonuna f fonksiyonunun M alt uzayına daraltılması denir ve $f\big|_M{:}\,M \longrightarrow Y$ ile gösterilir.

2.3. Topolojik Toplam

(X,τ) bir topolojik uzay, $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ise $X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ koşulunu sağlayan alt uzaylar ailesi olsun. Alt uzay topolojisinin tanımından her $\alpha \in A$ ve her $U \subset X$ açık (kapalı) küme için $U \cap X_\alpha$ kümesi X_α da açıktır (kapalıdır).

Tanım 2.3.1. $[\mathbf{7,18}]$ (X,τ) bir topolojik uzay, $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ise $X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ koşulunu sağlayan alt uzaylar ailesi olsun. Eğer,

$U \subset X$ kümesi X de açıktır (kapalıdır) $\Leftrightarrow$ $\forall\alpha \in A$ için $U \cap X_\alpha$ kümesi X_α da açıktır (kapalıdır)

koşulu sağlanırsa X uzayına $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ alt uzaylarının serbest birleşimi denir.

Eğer (X,τ) uzayı $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ alt uzaylarının serbest birleşimi ve $B \subset X$ kümesi açık veya kapalı ise (B,τ_B) alt uzayı $\{B \cap X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ alt uzaylarının serbest birleşimidir.

Teorem 2.3.2. $[\mathbf{7,18}]$ (X,τ) bir topolojik uzay, $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ise $X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ koşulunu sağlayan alt uzaylar ailesi olsun. Eğer,

1) Her $\alpha \in A$ için X_α kümesi X de açıktır,

veya

2) Her $\alpha \in A$ için X_α kümesi X de kapalı ve $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ailesi yerel sonlu ise

X uzayı $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ alt uzaylar ailesinin serbest birleşimidir.

Teorem 2.3.3. $[\mathbf{7}, \mathbf{18}]$ $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ailesi ve $X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ olsun.

Eğer her $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ için $X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2}$ kümesi $(X_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1})$ ve $(X_{\alpha_2}, \tau_{\alpha_2})$ uzaylarında açık (kapalı) ise X uzayı $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ uzayların serbest birleşimidir ve her X_α kümesi X de açıktır.

Eğer $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ ailesinde her $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ için $X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} = \emptyset$ ise $X = \bigcup_{\alpha\in A} X_\alpha$ uzayı $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ uzaylar ailesinin serbest birleşimidir.

Tanım 2.3.4. $[\mathbf{7}, \mathbf{18}]$ $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ topolojik uzaylar ailesi olsun. Eğer her $\alpha_1, \alpha_2 \in A$ için $X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2} = \emptyset$ ise (X_α, τ_α) uzayların serbest birleşimine bu uzayların topolojik toplamı denir ve $X = \bigoplus_{\alpha\in A} X_\alpha$ ile gösterilir.

2.4. Topolojik Çarpım

$\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ topolojik uzayların bir ailesi olsun. $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ kümesinde tüm

$$p_\alpha: \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$$

izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan topolojiyi tanımlayalım.

İndis kümesi A dan keyfi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ şeklinde sonlu tane eleman alalım. $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ çarpım kümesinde $X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_n}$ kümelerinin yerine uygun $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ açık kümelerini, $\alpha \neq \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ olduğunda ise X_α kümesinin kendisini yazalım. Bu kümeyi

$$U_{\alpha_1} \times \dots \times U_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha\neq\alpha_i} X_\alpha$$

ile gösterelim ve $U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ tabanlı silindir adını verelim.

Lemma 2.4.1. [**7**, **18**]

$$B = \left\{ U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i} X_\alpha : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ sonlu}, U_{\alpha_1} \in \tau_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n} \in \tau_{\alpha_n} \right\}$$

ailesi $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ çarpım kümesinde topolojinin bir tabanıdır.

Tanım 2.4.2. [**7**, **18**] $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ çarpım kümesinde

$$B = \left\{ U_{\alpha_1} \times \ldots \times U_{\alpha_n} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_i} X_\alpha : (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \text{ sonlu}, U_{\alpha_1} \in \tau_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n} \in \tau_{\alpha_n} \right\}$$

tabanından üretilen topolojiye çarpım topolojisi veya Tychonoff topolojisi, $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ kümesine bu topoloji ile birlikte topolojik çarpım denir.

$\forall\, \alpha_0 \in A$ ve $U_{\alpha_0} \in \tau_{\alpha_0}$ için

$$p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0}) = U_{\alpha_0} \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha$$

kümesi tabana ait olduğundan her p_{α_0} izdüşüm fonksiyonu süreklidir. İzdüşüm fonksiyonu açıktır, fakat kapalı değildir.

2.5. Bölüm Uzayları

Teorem 2.5.1. [**7**, **18**] (X, τ) bir topolojik uzay, $Y \neq \emptyset$ bir küme ve $f : X \longrightarrow Y$ bir fonksiyon ise $\tau_f^* = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \tau\}$ ailesi Y kümesinde f fonksiyonunu sürekli yapan en ince topolojidir.

Tanım 2.5.2. [**7**, **18**] (X, τ) bir topolojik uzay, Y bir küme olmak üzere $f : (X, \tau) \longrightarrow Y$ fonksiyonunu sürekli yapan $\tau_f^* = \{V \subset Y : f^{-1}(V) \in \tau\}$ topolojisine f ile üretilen tümel topoloji denir.

Teorem 2.5.3. [**7**, **18**] $(X, \tau), (Y, \tau^*)$ iki topolojik uzay, $f : (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau^*)$ sürekli, örten ve açık (kapalı) bir fonksiyon ise τ^* topolojisi f ile üretilen τ_f^* tümel topolojisine eşittir.

(X,τ) bir topolojik uzay, E, X kümesinde bir denklik bağıntısı, $X/_E$ bölüm kümesi ve $q: X \longrightarrow X/_E$ kanonik örten fonksiyon olsun.

Tanım 2.5.4. $[\mathbf{7},\mathbf{18}]$ $X/_E$ bölüm kümesinde $q: X \longrightarrow X/_E$ fonksiyonu ile üretilen tümel topolojiye bölüm topolojisi, $X/_E$ kümesine bu topoloji ile birlikte bölüm uzayı denir.

2.6. Topolojik Uzayların Ters ve Düz Sistemleri

Tanım 2.6.1. $[\mathbf{7},\mathbf{18}]$ $(A,\prec)$, A yönlendirilmiş bir küme, her $\alpha \in A$ için X_α bir topolojik uzay ve her $\alpha \prec \alpha' \in A$ için $p_\alpha^{\alpha'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer

1) Her $\alpha \in A$ için $p_\alpha^\alpha: X_\alpha \longrightarrow X_\alpha$ ise $p_\alpha^\alpha = 1_{X_\alpha}$;

2) Her $\alpha \prec \alpha' \prec \alpha''$ için $p_\alpha^{\alpha''} = p_\alpha^{\alpha'} \circ p_{\alpha'}^{\alpha''}$

$$\begin{tikzcd} & X_{\alpha'} \arrow[d, "p_\alpha^{\alpha'}"] \\ X_{\alpha''} \arrow[ur, "p_{\alpha'}^{\alpha''}"] \arrow[r, "p_\alpha^{\alpha''}"'] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

koşulları sağlanırsa $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \left\{p_\alpha^{\alpha'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha\right\}_{\alpha\prec\alpha'\in A}\right)$ ailesine topolojik uzayların ters sistemi denir.

Tanım 2.6.2. (Ters Sistemlerin Dönüşümü) $[\mathbf{7},\mathbf{18}]$ **:** A ve B yönlendirilmiş iki küme olsun.

$\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \left\{p_\alpha^{\alpha'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha\right\}_{\alpha\prec\alpha'\in A}\right)$ ve $\underline{Y} = \left(\{Y_\beta\}_{\beta\in B}, \left\{q_\beta^{\beta'}: Y_{\beta'} \longrightarrow Y_\beta\right\}_{\beta\prec\beta'\in B}\right)$

topolojik uzayların ters sistemleri verilsin. $\pi: B \longrightarrow A$ izoton (yönü koruyan) örten dönüşüm olsun. Yani; $\beta \prec \beta'$ ise $\pi(\beta) \prec \pi(\beta')$ olur. Her $\beta \in B$ için $f_\beta: X_{\pi(\beta)} \longrightarrow Y_\beta$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\beta \prec \beta' \in B$ için

$$\begin{tikzcd} X_{\pi(\beta')} \arrow[r, "f_{\beta'}"] \arrow[d, "p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}"'] & Y_{\beta'} \arrow[d, "q_\beta^{\beta'}"] \\ X_{\pi(\beta)} \arrow[r, "f_\beta"'] & Y_\beta \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif ise yani; $q_\beta^{\beta'} \circ f_{\beta'} = f_\beta \circ p_{\pi(\beta)}^{\pi(\beta')}$ sağlanıyor ise

$\underline{f} = \left(\pi: B \longrightarrow A,\ \left\{f_\beta: X_{\pi(\beta)} \longrightarrow Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right)$ ailesine $\underline{X}$ ters sisteminden $\underline{Y}$ ters sistemine giden dönüşüm denir.

Tanım 2.6.3. (Ters Sistemlerin Morfizması) [**7, 18**]**:** A, B ve C yönlendirilmiş kümeler olsun.

$\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \left\{p_\alpha^{\alpha'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha\right\}_{\alpha\prec\alpha'\in A}\right)$, $\underline{Y} = \left(\left\{Y_\beta\right\}_{\beta\in B}, \left\{q_\beta^{\beta'}: Y_{\beta'} \longrightarrow Y_\beta\right\}_{\beta\prec\beta'\in B}\right)$ ve $\underline{Z} = \left(\left\{Z_\gamma\right\}_{\gamma\in C}, \left\{r_\gamma^{\gamma'}: Z_{\gamma'} \longrightarrow Z_\gamma\right\}_{\gamma\prec\gamma'\in C}\right)$ topolojik uzayların ters sistemleri verilsin.

$\underline{f}: \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ ve $\underline{g}: \underline{Y} \longrightarrow \underline{Z}$ sürekli dönüşümlerini $\underline{f} = \left(\pi: B \longrightarrow A,\ \left\{f_\beta: X_{\pi(\beta)} \longrightarrow Y_\beta\right\}_{\beta\in B}\right)$ ve $\underline{g} = \left(\rho: C \longrightarrow B,\ \left\{g_\gamma: Y_{\rho(\gamma)} \longrightarrow Z_\gamma\right\}_{\gamma\in C}\right)$ şeklinde tanımlayalım.

$$
\begin{tikzcd}
Y_{\rho(\gamma')} \arrow[r, "g_{\gamma'}"] \arrow[d, "q^{\rho(\gamma')}_{\rho(\gamma)}"'] & Z_{\gamma'} \arrow[d, "r^{\gamma'}_{\gamma}"] \\
Y_{\rho(\gamma)} \arrow[r, "g_{\gamma}"'] & Z_{\gamma}
\end{tikzcd}
$$

diyagramı komutatif ise $\underline{g} \circ \underline{f} = \left(\pi \circ \rho : C \longrightarrow A,\ \left\{g_\gamma \circ f_{\rho(\gamma)} : X_{\pi\rho(\gamma)} \longrightarrow Z_\gamma\right\}_{\gamma \in C}\right)$ ailesine $\underline{f}$ ile $\underline{g}$ dönüşümlerinin morfizması denir.

Ters sistemlerin morfizma olması için $\gamma \prec \gamma'$ iken

$$
\begin{tikzcd}
X_{\pi\rho(\gamma')} \arrow[r, "g_{\gamma'} \circ f_{\rho(\gamma')}"] \arrow[d, "p^{\pi\rho(\gamma')}_{\pi\rho(\gamma)}"'] & Z_{\gamma'} \arrow[d, "r^{\gamma'}_{\gamma}"] \\
X_{\pi\rho(\gamma)} \arrow[r, "g_{\gamma} \circ f_{\rho(\gamma)}"'] & Z_{\gamma}
\end{tikzcd}
$$

diyagramı komutatif olmalı. Böylece ters sistemler ve onların morfizmaları bir kategori oluşturur.

Tanım 2.6.4. $[\mathbf{7}, \mathbf{18}]$ $(A, \prec)$, A yönlendirilmiş bir küme, her $\alpha \in A$ için X^α bir topolojik uzay ve her $\alpha \prec \alpha' \in A$ için $q^{\alpha'}_{\alpha} : X^\alpha \longrightarrow X^{\alpha'}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer,

1) Her $\alpha \in A$ için $q^{\alpha}_{\alpha} : X^\alpha \longrightarrow X^\alpha$ ise $q^\alpha_\alpha = 1_{X^\alpha}$;

2) Her $\alpha \prec \alpha' \prec \alpha''$ için $q^{\alpha''}_{\alpha} = q^{\alpha''}_{\alpha'} \circ q^{\alpha'}_{\alpha}$

koşulları sağlanırsa $\overline{X} = \left(\{X^\alpha\}_{\alpha \in A},\ \left\{q^{\alpha'}_{\alpha} : X^\alpha \longrightarrow X^{\alpha'}\right\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}\right)$ ailesine topolojik uzayların düz sistemi denir.

Tanım 2.6.5. (Düz Sistemlerin Dönüşümü) [7, 18]: A ve B yönlendirilmiş iki küme olsun.

$\overline{X} = \left(\{X^\alpha\}_{\alpha\in A}, \left\{q_\alpha^{\alpha'}: X^\alpha \longrightarrow X^{\alpha'}\right\}_{\alpha\prec\alpha'\in A}\right)$ ve $\overline{Y} = \left(\left\{Y^\beta\right\}_{\beta\in B}, \left\{r_\beta^{\beta'}: Y^\beta \longrightarrow Y^{\beta'}\right\}_{\beta\prec\beta'\in B}\right)$ topolojik uzayların düz sistemleri, $\phi: A \to B$ izoton (yönü koruyan) örten dönüşüm ve her $\alpha \in A$ için $f^\alpha: X^\alpha \to Y^{\phi(\alpha)}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer her $\alpha \prec \alpha' \in A$ için

$$\begin{tikzcd} X^\alpha \arrow[r, "f^\alpha"] \arrow[d, "q_\alpha^{\alpha'}"'] & Y^{\phi(\alpha)} \arrow[d, "r_{\phi(\alpha)}^{\phi(\alpha')}"] \\ X^{\alpha'} \arrow[r, "f^{\alpha'}"'] & Y^{\phi(\alpha')} \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif ise $\overline{f} = \left(\phi: A \to B,\ \left\{f^\alpha: X^\alpha \longrightarrow Y^{\phi(\alpha)}\right\}_{\alpha\in A}\right)$ ailesine $\overline{X}$ düz sisteminden $\overline{Y}$ düz sistemine giden dönüşüm denir.

Tanım 2.6.6. (Düz Sistemlerin Morfizması) [7, 18]: A, B ve C yönlendirilmiş kümeler olsun. $\overline{X} = \left(\{X^\alpha\}_{\alpha\in A}, \left\{q_\alpha^{\alpha'}: X^\alpha \longrightarrow X^{\alpha'}\right\}_{\alpha\prec\alpha'\in A}\right)$, $\overline{Y} = \left(\left\{Y^\beta\right\}_{\beta\in B}, \left\{r_\beta^{\beta'}: Y^\beta \longrightarrow Y^{\beta'}\right\}_{\beta\prec\beta'\in B}\right)$ ve $\overline{Z} = \left(\{Z^\gamma\}_{\gamma\in C}, \left\{t_\gamma^{\gamma'}: Z^\gamma \longrightarrow Z^{\gamma'}\right\}_{\gamma\prec\gamma'\in C}\right)$ topolojik uzayların düz sistemleri verilsin.

$\overline{f}: \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ ve $\overline{g}: \overline{Y} \longrightarrow \overline{Z}$ sürekli dönüşümleri $\overline{f} = \left(\phi: A \longrightarrow B,\ \left\{f^\alpha: X^\alpha \longrightarrow Y^{\phi(\alpha)}\right\}_{\alpha\in A}\right)$ ve $\overline{g} = \left(\rho: B \longrightarrow C,\ \left\{g^\beta: Y^\beta \longrightarrow Z^{\rho(\beta)}\right\}_{\beta\in B}\right)$ şeklinde tanımlansın.

$\overline{g} \circ \overline{f} = \left(\rho \circ \phi: A \longrightarrow C,\ \left\{g^{\phi(\alpha)} \circ f^\alpha: X^\alpha \longrightarrow Z^{\rho\phi(\alpha)}\right\}_{\alpha\in A}\right)$ ailesine $\overline{f}$ ile $\overline{g}$ dönüşümlerinin bileşkesi denir. Böylece düz sistemler ve onların morfizmaları bir kategori oluşturur.

Tanım 2.6.7. [7, 18] $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{p_\alpha^{\alpha'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha\prec\alpha'\in A}\right)$ topolojik uzayların ters sistemi olsun.

$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ topolojik çarpım uzayının

$$\left\{\{x_\alpha\} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha : \forall\alpha \prec \alpha' \text{ için } p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'}) = x_\alpha\right\}$$

alt uzayına $\underline{X}$ ters sisteminin limiti denir ve $\varprojlim \underline{X}$ ile gösterilir.

Tanım 2.6.8. [7, 18] $\overline{X} = \left(\{X^\alpha\}_{\alpha\in A}, \{q_\alpha^{\alpha'}: X^\alpha \longrightarrow X^{\alpha'}\}_{\alpha\prec\alpha'\in A}\right)$ topolojik uzayların düz sistemi, $X = \bigoplus_{\alpha\in A} X^\alpha$ topolojik toplam ve $\left\{i_\alpha: X^\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in A} X^\alpha\right\}$ gömme fonksiyonları olsun. X uzayında denklik bağıntısı, $x^\alpha \in X^\alpha, x^{\alpha'} \in X^{\alpha'}$ için;

$x^\alpha \sim x^{\alpha'} \Leftrightarrow q_\alpha^{\alpha''}(x^\alpha) = q_{\alpha'}^{\alpha''}(x^{\alpha'})$ koşulunu sağlayan $\alpha'' \succ \alpha, \alpha'' \succ \alpha'$ $\alpha'' \in A$ vardır

şeklinde verilsin. X uzayının bu denklik bağıntısına göre bölüm uzayına $\overline{X}$ düz sisteminin limiti denir ve $\varinjlim \overline{X}$ ile gösterilir.

Örnek 2.6.9. [7] M keyfi bir küme ve her $m \in M$ için X_m bir topolojik uzay olsun. M nin tüm sonlu alt kümelerinin kümesi A, $\alpha \prec \alpha' \in A \Leftrightarrow \alpha \subset \alpha'$ bağıntısı ile yönlendirilmiş bir kümedir.

Her $\alpha \in A$ için $X_\alpha = \prod_{i\in\alpha} X_i$ ve her $\alpha \prec \alpha' \in A$ için $p_\alpha^{\alpha'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha$ projeksiyon dönüşümü ise $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{p_\alpha^{\alpha'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha\prec\alpha'\in A}\right)$ topolojik uzayların ters sistemidir ve $\varprojlim \underline{X} = \prod_{m\in M} X_m$ dir.

Örnek 2.6.10. [7] M keyfi bir küme ve her $m \in M$ için X_m bir topolojik uzay olsun. M nin tüm sonlu alt kümelerinin kümesi A, $\alpha \prec \alpha' \in A \Leftrightarrow \alpha \subset \alpha'$ bağıntısı ile yönlendirilmiş bir kümedir.

Her $\alpha \in A$ için $X^\alpha = \bigoplus_{i\in\alpha} X_i$ ve her $\alpha \prec \alpha' \in A$ için $q_\alpha^{\alpha'}: X^\alpha \to X^{\alpha'}$ gömme dönüşümü ise $\overline{X} = \left(\{X^{\alpha}\}_{\alpha \in A}, \left\{q_{\alpha}^{\alpha'}: X^{\alpha} \longrightarrow X^{\alpha'}\right\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}\right)$ topolojik uzaylarının düz sistemidir ve $\lim\limits_{\longrightarrow} \overline{X} = \bigoplus\limits_{m \in M} X_m$ dir.

$\underline{X} = \left(\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}, \left\{p_{\alpha}^{\alpha'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_{\alpha}\right\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}\right)$ topolojik uzayların ters sistemi için

$\lim\limits_{\longleftarrow} \underline{X} \subset \prod\limits_{\alpha \in A} X_{\alpha}$ olduğundan $p_{\alpha}: \prod\limits_{\alpha \in A} X_{\alpha} \longrightarrow X_{\alpha}$ projeksiyon dönüşümünün $p_{\alpha}\big|_{\lim\limits_{\longleftarrow} \underline{X}}$ daraltılmasını ele alabiliriz. Bu daraltılmayı

$$\pi_{\alpha}: \lim_{\longleftarrow} \underline{X} \longrightarrow X_{\alpha}$$

ile gösterelim. Her $\alpha \in A$ için π_{α} süreklidir ve her $\alpha \prec \alpha'$ için

$$\pi_{\alpha} = p_{\alpha}^{\alpha'} \circ \pi_{\alpha'}$$

sağlanır.

$\overline{X} = \left(\{X^{\alpha}\}_{\alpha \in A}, \left\{q_{\alpha}^{\alpha'}: X^{\alpha} \longrightarrow X^{\alpha'}\right\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}\right)$ topolojik uzayların düz sistemi için

$q: \bigoplus\limits_{\alpha \in A} X^{\alpha} \longrightarrow \lim\limits_{\longrightarrow} \overline{X}$ kanonik örten fonksiyon ise her $\alpha \in \mathrm{A}$ için

$$\pi^{\alpha} = q \circ i_{\alpha}: X^{\alpha} \longrightarrow \lim_{\longrightarrow} \overline{X}$$

fonksiyonu süreklidir ve her $\alpha \prec \alpha'$ için $\pi^{\alpha} = \pi^{\alpha'} \circ q_{\alpha}^{\alpha'}$ sağlanır.

$\pi_{\alpha}: \lim\limits_{\longleftarrow} \underline{X} \longrightarrow X_{\alpha}$, $\pi^{\alpha}: X^{\alpha} \longrightarrow \lim\limits_{\longrightarrow} \overline{X}$ fonksiyonlarına projeksiyon adı verelim.

Teorem 2.6.11. $[\mathbf{7}, \mathbf{18}]$ $\underline{X} = \left(\{X_{\alpha}\}_{\alpha \in A}, \left\{p_{\alpha}^{\alpha'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_{\alpha}\right\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}\right)$ topolojik uzayların ters sistemi olsun.

$$B = \{\pi_{\alpha}^{-1}(U): \alpha \in A, U \in \tau_{\alpha}\}$$

ailesi $X = \lim\limits_{\longleftarrow} \underline{X}$ uzayının topolojisinin bir tabanıdır.

İspat) Her $\alpha \in A$ için $\pi_\alpha : \varprojlim \underline{X} \longrightarrow X_\alpha$ sürekli olduğundan B ailesinin kümeleri açıktır. B nin bir taban olduğunu göstermek için her açık $U \subset \varprojlim \underline{X}$ kümesi ve her $x \in U$ noktası için $x \in \pi_{a_0}^{-1}(U_{a_0}) \subset U$ koşulunu sağlayan $a_0 \in A$ ve $U_{a_0} \in \tau_{a_0}$ bulunması gerekir.

$U \subset \varprojlim \underline{X}$ keyfi açık küme, $x = \{x_\alpha\} \in U$ herhangi bir nokta olsun. Alt uzay topolojisinin tanımından $U = \varprojlim \underline{X} \cap V$ sağlanacak biçimde $V \subset \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ açık kümesi vardır. Çarpım topolojisinin tanımından ise

$$x \in p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \dots \cap p_{\alpha_k}^{-1}(U_{\alpha_k}) \subset V$$

koşulunu sağlayan $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in A$ elemanları ve $U_{\alpha_i} \in \tau_{\alpha_i}$ kümeleri mevcuttur. Şimdi A yönlendirilmiş küme olduğundan $\alpha_0 \succ \alpha_1, \dots, \alpha_0 \succ \alpha_k$ koşulunu sağlayan $\alpha_0 \in A$ vardır. $p_{\alpha_i}^{\alpha_0} : X_{\alpha_0} \to X_{\alpha_i}, i = \overline{1,k}$ sürekli fonksiyonlar için $\left(p_{\alpha_i}^{\alpha_0}\right)^{-1}\left(U_{\alpha_i}\right)$ kümeleri ve onların sonlu arakesiti $\bigcap_{i=1}^{k} \left(p_{\alpha_i}^{\alpha_0}\right)^{-1} \left(U_{\alpha_i}\right) = U_{\alpha_0}, X_{\alpha_0}$ uzayında açıktır. $p_{\alpha_i}^{\alpha_0}\left(x_{\alpha_0}\right)$
$= x_{\alpha_i}$

olduğu için $x_{\alpha_0} \in U_{\alpha_0}$ dır ve $x = \{x_\alpha\} \in \pi_{\alpha_0}^{-1}\left(U_{a_0}\right)$ dır. Buradan

$$\pi_{\alpha_0}^{-1}\left(p_{\alpha_i}^{\alpha_0}\right)^{-1}\left(U_{\alpha_i}\right) = \pi_{\alpha_i}^{-1}\left(U_{\alpha_i}\right) = X \cap p_{\alpha_i}^{-1}\left(U_{\alpha_i}\right)$$

dir. Böylece

$$x \in \pi_{\alpha_0}^{-1}\left(U_{\alpha_0}\right) = \pi_{\alpha_i}^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k} \left(p_{\alpha_i}^{\alpha_0}\right)^{-1} \left(U_{\alpha_i}\right)\right) = \bigcap_{i=1}^{k} \pi_{\alpha_i}^{-1}\left(p_{\alpha_i}^{\alpha_0}\right)^{-1} \left(U_{\alpha_i}\right) =$$

$$\bigcap_{i=1}^{k} \left(X \cap p_{\alpha_i}^{-1}\left(U_{\alpha_i}\right)\right) = X \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k} p_{\alpha_i}^{-1}\left(U_{\alpha_i}\right)\right) \subset X \cap V = U \text{ dur. } \blacksquare$$

Teorem 2.6.12. [7, 18] $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha<\alpha'\in A}\right)$ topolojik uzayların ters sistemi, $B \subset \varprojlim \underline{X}$ alt uzay, $\pi_\alpha(B) = B_\alpha$ *ve* $\overline{p}_\alpha^{\alpha'} = p_\alpha^{\alpha'}|_{B_{\alpha'}^c}$ ise $\underline{B} = \left(\{B_\alpha^c\}_{\alpha\in A}, \left\{\overline{p}_\alpha^{\alpha'} : B_{\alpha'}^c \longrightarrow B_\alpha^c\right\}_{\alpha<\alpha'\in A}\right)$ topolojik uzayların ters sistemi ve $\varprojlim \underline{B} = B^c \subset \varprojlim \underline{X}$ dir.

İspat) Her $x \in \beta$ ve $\alpha \prec \alpha' \in A$ için $\pi_\alpha(x) = \overline{p}_\alpha^{\alpha'}\left(\pi_{\alpha'}(x)\right)$ olduğundan

$$\overline{p}_\alpha^{\alpha'}\left(B_{\alpha'}^c\right) = \overline{p}_\alpha^{\alpha'}\left(\left(\pi_{\alpha'}(B)\right)^c\right) \subset \left(\overline{p}_\alpha^{\alpha'} \circ \pi_{\alpha'}(B)\right)^c = \left(\pi_\alpha(B)\right)^c = B_\alpha^c$$

dır, yani $\underline{B}$ ters sistemdir ve $\varprojlim \underline{B} \subset \varprojlim \underline{X}$ dir.

$\varprojlim \underline{B}$ nin kapalı alt uzay olduğunu gösterelim.

Her $x = \{x_\alpha\} \in \varprojlim \underline{X} \setminus \varprojlim \underline{B}$ için

$$x_{\alpha(x)} \in X_{\alpha(x)} \setminus B_{\alpha(x)}^c$$

koşulunu sağlayan $\alpha(x) \in A$ vardır.

O zaman $\pi_{\alpha(x)}^{-1}\left(X_{\alpha(x)} \setminus B_{\alpha(x)}^c\right)$ kümesi x noktasının açık bir komşuluğudur ve $\varprojlim \underline{B}$ kümesi ile arakesiti boş kümedir. Böylece $\varprojlim \underline{B}$ kapalıdır ve $B^c \subset \varprojlim \underline{B}$ dir.

Diğer yandan her $x = \{x_\alpha\} \in \varprojlim \underline{B}$ için Teorem 2.6.11. den

$$\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) : \alpha \in A,\ \ U_\alpha \in \tau_\alpha,\ \ x_\alpha \in U_\alpha\}$$

ailesi $\varprojlim \underline{X}$ uzayında x noktasının bir komşuluk tabanıdır. Her U_α *için* $x_\alpha \in U_\alpha \cap B_\alpha^c$ olduğundan $U_\alpha \cap B_\alpha \neq \emptyset$ dır ve $B \cap \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \neq \emptyset$ dır, yani $x \in B^c$dir. Böylece $\varprojlim \underline{B} \subset B^c$ elde edilir. O halde $B^c = \varprojlim \underline{B}$ bulunur. ∎

Sonuç 2.6.13. [7, 18] $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}, \{p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha\}_{\alpha<\alpha'\in A}\right)$ topolojik uzayların ters sistemi, $B \subset \varprojlim \underline{X}$ bir kapalı alt uzay ise B uzayı, X_α uzaylarının kapalı alt uzaylarından oluşan

$$\underline{B} = \left(\{B_\alpha^c\}_{\alpha \in A}, \left\{ \overline{p}_\alpha^{\alpha'} : B_{\alpha'}^c \longrightarrow B_\alpha^c \right\}_{\alpha \prec \alpha' \in A} \right)$$

ters sisteminin limitine eşittir.

Teorem 2.6.14. $[\mathbf{7}, \mathbf{18}]$ $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, \left\{ p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha \right\}_{\alpha \prec \alpha' \in A} \right)$ topolojik uzayların ters sistemi olsun.

1) Eğer her $p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha$ birebir ise her $\pi_\alpha : \varprojlim \underline{X} \longrightarrow X_\alpha$ fonksiyonu da birebirdir.

2) Eğer her $p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha$ birebir ve örten ise her $\pi_\alpha : \varprojlim \underline{X} \longrightarrow X_\alpha$ fonksiyonu da birebir örtendir.

İspat)

1) $x = \{x_\alpha\} \neq y = \{y_\alpha\} \in \varprojlim \underline{X}$ noktaları için

$$\pi_{\alpha_1}(x) = x_{\alpha_1} = y_{\alpha_1} = \pi_{\alpha_1}(y)$$

olsun. Her $\alpha' \succ \alpha_1$ için $p_{\alpha_1}^{\alpha'} : X_{\alpha'} \longrightarrow X_{\alpha_1}$ birebir ve

$$p_{\alpha_1}^{\alpha'}(x_{\alpha'}) = x_{\alpha_1} = y_{\alpha_1} = p_{\alpha_1}^{\alpha'}(y_{\alpha'})$$

olduğundan $x_{\alpha'} = y_{\alpha'}$ dür. Keyfi $\alpha \in A$ için A yönlendirilmiş küme olduğundan α, α' için $\alpha' \succ \alpha, \alpha' \succ \alpha_1$ koşulunu sağlayan $\alpha' \in A$ mevcuttur. O halde $x_{\alpha_1} = y_{\alpha_1}$ olduğu için $x_{\alpha'} = y_{\alpha'}$ dür. Buradan da $x_\alpha = p_{\alpha_1}^{\alpha'}(x_{\alpha'}) = p_{\alpha_1}^{\alpha'}(y_{\alpha'}) = y_\alpha$ dır, yani $x = y$ dir.

2) π_{α_1} fonksiyonunun birebir olduğu 1) şıkkında ispatlandı. Şimdi π_{α_1} in örten olduğunu gösterelim. $x_{\alpha_1} \in X_{\alpha_1}$ keyfi bir eleman olsun. Her $\alpha' \succ \alpha_1$ için $\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)^{-1}(x_{\alpha_1}) = x_{\alpha'}$ alalım. Her $\alpha \in A$ için $\alpha' \succ \alpha, \alpha' \succ \alpha_1$ koşulunu sağlayan $\alpha' \in A$ vardır. O zaman $x_\alpha = p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'}) = p_\alpha^{\alpha'}\left(\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)^{-1}(x_{\alpha_1})\right)$ alalım. $x = \{x_\alpha\}$ elemanının $\varprojlim \underline{X}$ ye ait olduğunu gösterelim. Her $\alpha \prec \tilde{\alpha}$ $için$ $\alpha' \succ \alpha, \alpha' \succ \alpha_1$ ve

$\widetilde{\alpha'} \succ \tilde{\alpha}, \widetilde{\alpha'} \succ \alpha_1$ olsun. Bu durumda

$$x_\alpha = p_\alpha^{\alpha'}(x_{\alpha'}) = p_\alpha^{\alpha'}\left(\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)^{-1}\left(x_{\alpha_1}\right)\right), x_{\tilde{\alpha}} = p_{\tilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha'}}(x_{\widetilde{\alpha'}}) = p_{\tilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha'}}\left(\left(p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}}\right)^{-1}\left(x_{\alpha_1}\right)\right)$$

dir. $\alpha', \widetilde{\alpha'}$ elemanları için $\alpha'' \succ \alpha', \alpha'' \succ \widetilde{\alpha'}$ koşulunu sağlayan $\alpha'' \in A$ elemanını seçelim. O zaman

$$x_{\alpha_1} = p_{\alpha_1}^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = \left(p_{\alpha_1}^{\alpha'} \circ p_{\alpha'}^{\alpha''}(x_{\alpha''})\right) = \left(p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}} \circ p_{\widetilde{\alpha'}}^{\alpha''}(x_{\alpha''})\right)$$

ve

$$x_{\alpha_1} = p_{\alpha_1}^{\alpha'}(x_{\alpha'}) = p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}}(x_{\widetilde{\alpha'}})$$

dır. $p_{\alpha_1}^{\alpha'}, p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha'}}$ fonksiyonları birebir, örten oldukları için $p_{\alpha'}^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = x_{\alpha'}$ ve $p_{\widetilde{\alpha'}}^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = x_{\widetilde{\alpha'}}$ dir. O halde

$$p_\alpha^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = \left(p_\alpha^{\alpha'} \circ p_{\alpha'}^{\alpha''}\right)(x_{\alpha''}) = x_\alpha, \qquad p_{\widetilde{\alpha'}}^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = \left(p_{\tilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha'}} \circ p_{\widetilde{\alpha'}}^{\alpha''}\right)(x_{\alpha''}) = x_{\tilde{\alpha}}$$

dır. Buradan da $p_\alpha^{\tilde{\alpha}}(x_{\tilde{\alpha}}) = p_\alpha^{\alpha''}(x_{\alpha''}) = x_\alpha$ elde edilir. Açıktır ki $\pi_{\alpha_1}(x) = x_{\alpha_1}$ dir. ■

Sonuç 2.6.15. $[\mathbf{7}, \mathbf{18}]$ Eğer $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, \left\{p_\alpha^{\alpha'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha\right\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}\right)$ topolojik uzayların ters sisteminde her $p_\alpha^{p'}: X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha$ bir homeomorfizma ise

$$\pi_\alpha: \lim_{\leftarrow} \underline{X} \longrightarrow X_\alpha$$

fonksiyonu da bir homeomorfizmadır.

Teorem 2.6.16. $[\mathbf{7}, \mathbf{18}]$ $\overline{X} = \left(\{X^\alpha\}_{\alpha \in A}, \left\{q_\alpha^{\alpha'}: X^\alpha \longrightarrow X^{\alpha'}\right\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}\right)$ topolojik uzayların düz sistemi olsun.

1) Eğer her $q_\alpha^{\alpha'}: X^\alpha \longrightarrow X^{\alpha'}$ fonksiyonu birebir ise her $\pi^\alpha: X^\alpha \longrightarrow \lim_{\rightarrow} \overline{X}$ fonksiyonu da birebirdir.

2) Eğer her $q_\alpha^{\alpha'}: X^\alpha \longrightarrow X^{\alpha'}$ fonksiyonu birebir, örten ise her $\pi^\alpha: X^\alpha \longrightarrow \lim_{\rightarrow} \overline{X}$

fonksiyonu da birebir ve örtendir.

İspat)

1) $x^\alpha, y^\alpha \in X^\alpha, x^\alpha \neq y^\alpha, \pi^\alpha(x^\alpha) = \pi^\alpha(y^\alpha)$ olsun. Bu durumda x^α, y^α elemanları denktir, yani $q_\alpha^\beta(x^\alpha) = q_\alpha^\beta(y^\alpha)$ koşulunu sağlayan $\beta \succ \alpha$ olacak şekilde $\beta \in A$ elemanı vardır. q_α^β fonksiyonu birebir olduğundan $x^\alpha = y^\alpha$ dır, yani, π^α fonksiyonu birebirdir.

2) $[x] \in \varinjlim \overline{X}$ keyfi bir eleman olsun. $q: \bigoplus_{\alpha \in A} X^\alpha \longrightarrow \varinjlim \overline{X}$ fonksiyonu örten olduğu için $q(\tilde{x}) = [x]$ koşulunu sağlayan $\tilde{x} \in \bigoplus_{\alpha \in A} X^\alpha$ elemanı vardır. Topolojik toplam tanımı gereği $\tilde{x} \in X^{\alpha'}$ dür. Bu elemanı $\tilde{x} = x^{\alpha'} \in X^{\alpha'}$ ile gösterelim.

Böylece her $[x] \in \varinjlim \overline{X}$ için $\pi^{\alpha'}(x^{\alpha'}) = [x]$ koşulunu sağlayan $\alpha' \in A$ ve $x^{\alpha'} \in X^{\alpha'}$ mevcuttur. $\alpha, \alpha' \in A$ için $\alpha'' \succ \alpha, \alpha'' \succ \alpha'$ koşulu altında $\alpha'' \in A$ elemanını seçelim $q_\alpha^{\alpha''}: X^\alpha \to X^{\alpha''}$ örten olduğundan $q_{\alpha'}^{\alpha''}(x^{\alpha'}) \in X^{\alpha''}$ elemanı için $q_\alpha^{\alpha''}(x^\alpha) = q_{\alpha'}^{\alpha''}(x^{\alpha'})$ sağlanacak biçimde $x^\alpha \in X^\alpha$ elemanı vardır. O halde $x^\alpha \in X^\alpha, x^{\alpha'} \in X^{\alpha'}$ elemanları denktir ve $\pi^\alpha(x^\alpha) = \pi^{\alpha'}(x^{\alpha'}) = [x]$ dir, yani π^α fonksiyonu örtendir. ■

Sonuç 2.6.17. $[\mathbf{7}, \mathbf{18}]$ Eğer $\overline{X} = \left(\{X^\alpha\}_{\alpha \in A}, \{q_\alpha^{\alpha'}: X^\alpha \longrightarrow X^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}\right)$ topolojik uzayların düz sisteminde $\forall\, q_\alpha^{\alpha'}: X^\alpha \to \mathrm{X}^{\alpha'}$ homeomorfizma ve $q: \bigoplus_{\alpha \in A} X^\alpha \longrightarrow \varinjlim \overline{X}$ açık fonksiyon ise her $\pi^\alpha: X^\alpha \longrightarrow \varinjlim \overline{X}$ fonksiyonu da bir homeomorfizmadır.

$\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}, \{p_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha \prec \alpha' \in A}\right)$, $\underline{Y} = \left(\{Y_\beta\}_{\beta \in B}, \{r_\beta^{\beta'}\}_{\beta \prec \beta' \in B}\right)$ topolojik uzayların ters sistemleri, $\underline{f} = \left(\phi: B \longrightarrow A, \{f_\beta: X_{\varphi(\beta)} \longrightarrow Y_\beta\}_{\beta \in B}\right): \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ bu ters sistemlerin bir dönüşümü olsun. Her $x = \{x_\alpha\} \in \varprojlim \underline{X}$ ve her $\beta \in B$ için $y_\beta = f_\beta(x_{\varphi(\beta)})$ alalım. $y = \{y_\beta\}$ elemanının $\varprojlim \underline{Y}$ uzayına ait olduğunu gösterelim. Her $\beta' \succ \beta \in B$ için

$$q_\beta^{\beta'}(y_{\beta'}) = q_\beta^{\beta'}\left(f_{\beta'}\left(x_{\varphi(\beta')}\right)\right) = f_\beta\left(p_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\beta')}\left(x_{\varphi(\beta')}\right)\right) = f_\beta\left(x_{\varphi(\beta')}\right) = y_\beta$$

olduğundan $y = \{y_\beta\}$ elemanı $\varprojlim \underline{Y}$ uzayına aittir. Böylece her $x = \{x_\alpha\} \in \varprojlim \underline{X}$ elemanına karşı $y = \{y_\beta\} = \{f_\beta(x_{\varphi(\beta)})\} \in \varprojlim \underline{Y}$ elemanı karşı gelir. Buradan $\varprojlim \underline{X}$ den $\varprojlim \underline{Y}$ ye giden bir fonksiyon tanımlanır. Bu fonksiyonu

$$\varprojlim \underline{f} : \varprojlim \underline{X} \longrightarrow \varprojlim \underline{Y}$$

ile gösterelim.

Tanım 2.6.18. [**7, 18**] $\varprojlim \underline{f} : \varprojlim \underline{X} \longrightarrow \varprojlim \underline{Y}$ fonksiyonuna $\underline{f} : \underline{X} \longrightarrow \underline{Y}$ dönüşümünün limiti denir.

Tanımdan açıkça gözüküyor ki her $\beta \in B$ için

$$\begin{tikzcd} \varprojlim \underline{X} \arrow[r, "\pi_{\varphi(\beta)}"] \arrow[d, "\varprojlim \underline{f}"'] & X_{\varphi(\beta)} \arrow[d, "f_\beta"] \\ \varprojlim \underline{Y} \arrow[r, "\pi_\beta"'] & Y_\beta \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatiftir.

$\varprojlim \underline{f}$ fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için ise Teorem 2.6.11 den yararlanarak $\pi_\beta^{-1}(U_\beta)$ kümelerinin $\varprojlim \underline{f}$ altında ters görüntülerinin açık olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\left(\varprojlim \underline{f}\right)^{-1}\left(\pi_\beta^{-1}(U_\beta)\right) = \left(\pi_\beta \circ \varprojlim \underline{f}\right)^{-1}(U_\beta) =$$

$$= \left(f_\beta \circ \pi_{\varphi(\beta)}\right)^{-1}(U_\beta) = \left(\pi_{\varphi(\beta)}\right)^{-1}\left(f_\beta^{-1}(U_\beta)\right)$$

ve $f_\beta, \pi_{\varphi(\beta)}$ fonksiyonları sürekli olduğundan dolayı $\varprojlim \underline{f}$ fonksiyonu süreklidir.

$\overline{X} = \left(\{X^\alpha\}_{\alpha\in A}, \{p_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha\prec\alpha'\in A}\right)$, $\overline{Y} = \left(\{Y^\beta\}_{\beta\in B}, \{r_\beta^{\beta'}\}_{\beta\prec\beta'\in B}\right)$ topolojik uzayların düz sistemleri, $\overline{f} = \left(\phi: A \longrightarrow B, \ \{f^\alpha: X^\alpha \longrightarrow Y^{\phi(\alpha)}\}_{\alpha\in A}\right): \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ bu sistemlerin bir dönüşümü olsun. $\{f^\alpha: X^\alpha \longrightarrow Y^{\phi(\alpha)}\}_{\alpha\in A}$ fonksiyonlarından yararlanarak

$$f = \bigoplus_{\alpha\in A} f^\alpha : \bigoplus_{\alpha\in A} X^\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in A} Y^{\phi(\alpha)}$$

fonksiyonunu verelim. f fonksiyonunun denklik bağıntısını koruduğunu gösterelim. $x^\alpha \in X^\alpha, x^{\alpha'} \in X^{\alpha'}$ elemanları denk olsunlar. O zaman $q_\alpha^{\alpha''}(x^\alpha) = q_{\alpha'}^{\alpha''}(x^{\alpha'})$ ve $\alpha'' \succ \alpha, \alpha'' \succ \alpha'$ sağlanacak şekilde $\alpha'' \in A$ elemanı vardır. $\phi: A \to B$ izoton dönüşümü olduğundan $\phi(\alpha'') \succ \phi(\alpha)$, $\phi(\alpha'') \succ \phi(\alpha')$ dür. O halde

$$r_{\phi(\alpha)}^{\phi(\alpha'')}\left(f^\alpha(x^\alpha)\right) = f^{\alpha''}\left(q_\alpha^{\alpha''}(x^\alpha)\right) = f^{\alpha''}\left(q_{\alpha'}^{\alpha''}\left(x^{\alpha'}\right)\right) = r_{\phi(\alpha')}^{\phi(\alpha'')}\left(f^{\alpha'}\left(x^{\alpha'}\right)\right)$$

olduğundan $f^\alpha(x^\alpha), f^{\alpha'}\left(x^{\alpha'}\right)$ elemanları denktir. Böylece $f: \bigoplus_{\alpha\in A} X^\alpha \longrightarrow \bigoplus_{\alpha\in A} Y^{\phi(\alpha)}$ fonksiyonu denklik sınıfını denklik sınıfına götürdüğü için bölüm uzaylarının

$$\lim_{\longrightarrow} \overline{f} : \lim_{\longrightarrow} \overline{X} \longrightarrow \lim_{\longrightarrow} \overline{Y}$$

sürekli fonksiyonu tanımlanır.

Tanım 2.6.18. $[7, 18]$ $\lim\limits_{\longrightarrow} \overline{f} : \lim\limits_{\longrightarrow} \overline{X} \longrightarrow \lim\limits_{\longrightarrow} \overline{Y}$ fonksiyonuna $\overline{f}: \overline{X} \longrightarrow \overline{Y}$ dönüşümünün limiti denir. Her $\alpha \in A$ için

$$\begin{tikzcd}
X^\alpha \arrow[r, "\pi^\alpha"] \arrow[d, "f^\alpha"'] & \lim\limits_{\longrightarrow} \overline{X} \arrow[d, "\lim\limits_{\longrightarrow} \overline{f}"] \\
Y^{\phi(\alpha)} \arrow[r, "\pi^{\phi(\alpha)}"'] & \lim\limits_{\longrightarrow} \overline{Y}
\end{tikzcd}$$

diyagramın komutatif olduğu açıktır.

Teorem 2.6.19. [**7, 18**] $\underline{X} = \left(\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}\,,\, \{p_\alpha^{\alpha'}\}_{\alpha<\alpha'\in A}\right)$, $\underline{Y} = \left(\{Y_\beta\}_{\beta\in B}\,,\, \{r_\beta^{\beta'}\}_{\beta<\beta'\in B}\right)$ topolojik uzayların ters sistemleri, $\underline{f} = \left(\phi: B \to A,\ \{f_\beta: X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta\}_{\beta\in B}\right): \underline{X} \to \underline{Y}$ bu ters sistemlerin bir dönüşümü olsun. Eğer her $\beta \in B$ için $f_\beta: X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta$ fonksiyonu bir homeomorfizma ise

$$\varprojlim \underline{f} : \varprojlim \underline{X} \longrightarrow \varprojlim \underline{Y}$$

fonksiyonu da bir homeomorfizmadır.

İspat) Önce $\varprojlim \underline{f}$ fonksiyonunun birebir olduğunu gösterelim.

$$x = \{x_\alpha\}, z = \{z_\alpha\} \in \varprojlim \underline{X}\ , x \neq z\ ise\ x_{\alpha_0} \neq z_{\alpha_0}$$

sağlanacak biçimde $\alpha_0 \in A$ vardır. $\varphi(\beta) \succ \alpha_0$ koşulu altında $\beta \in B$ elemanını seçelim.

$$p_{\alpha_0}^{\varphi(\beta)}\left(x_{\varphi(\beta)}\right) = x_{\alpha_0} \neq z_{\alpha_0} = p_{\alpha_0}^{\varphi(\beta)}\left(z_{\varphi(\beta)}\right)$$

olduğu için $x_{\alpha_0} \neq z_{\alpha_0}$ dır. f_β fonksiyonu birebir olduğundan $f_\beta\left(x_{\varphi(\beta)}\right) \neq f_\beta\left(z_{\varphi(\beta)}\right)$ dır. Doloyısıyla $\varprojlim \underline{f}$ fonksiyonu birebirdir.

Şimdi $\varprojlim \underline{f}$ nin örten olduğunu gösterelim. $y = \{y_\beta\} \in \varprojlim Y$ keyfi eleman olsun.

Her $\beta \in B$ için $f_\beta: X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta$ örten olduğundan $f_\beta\left(z_{\varphi(\beta)}\right) = y_\beta$ sağlanacak şekilde $z_{\varphi(\beta)} \in X_{\varphi(\beta)}$ elemanı bulunabilir. Her $\alpha \in A$ için $\varphi(\beta) \succ \alpha$ koşulunu sağlayan $\beta \in B$ elemanını alalım ve $x_\alpha = p_\alpha^{\varphi(\beta)}\left(z_{\varphi(\beta)}\right)$ olsun.

O halde kolayca gösterebiliriz ki x_α elemanı $\beta \in B$ elemanından bağımsızdır.

$x = \{x_\alpha\} \in \varprojlim X$ ve $\left(\varprojlim \underline{f}\right)(x) = y$ dir.

Teoremin ispatını tamamlamak için $\varprojlim \underline{f}$ nin açık olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunun için Teorem 2.6.11 den yararlanarak her $\beta \in B$ ve her açık $U \subset X_{\varphi(\beta)}$ kümesi için $\pi_{\varphi(\beta)}^{-1}(U) \subset \varprojlim \underline{X}$ kümesinin $\varprojlim \underline{f}$ altında görüntüsünün açık olduğunu göstermek yeterlidir. Her $\beta \in B$ için $f_\beta \circ \pi_{\varphi(\beta)} = \pi_\beta \circ \underleftarrow{\lim} \underline{f}$ olduğundan

$$\left(\pi_{\varphi(\beta)}\right)^{-1} \circ \left(f_\beta\right)^{-1} = \left(\underleftarrow{\lim} \underline{f}\right)^{-1} \circ \left(\pi_\beta\right)^{-1}$$

dir. $A = f_\beta(U)$ olsun. $f_\beta : X_{\varphi(\beta)} \to Y_\beta$ homeomorfizma olduğundan

$$\pi_{\varphi(\beta)}^{-1}(U) = \pi_{\varphi(\beta)}^{-1} \circ f_\beta^{-1}\left(f_\beta(U)\right) = \left(\underleftarrow{\lim} \underline{f}\right)^{-1} \pi_\beta^{-1}\left(f_\beta(U)\right)$$

dur. Buradan ise

$$\left(\underleftarrow{\lim} \underline{f}\right)\left(\pi_{\varphi(\beta)}^{-1}(U)\right) = \left(\underleftarrow{\lim} \underline{f}\right) \circ \left(\underleftarrow{\lim} \underline{f}\right)^{-1}\left(\pi_\beta^{-1}\left(f_\beta(U)\right)\right) = \pi_\beta^{-1}\left(f_\beta(U)\right)$$

dur. $\pi_\beta^{-1}\left(f_\beta(U)\right)$ kümesi ise $\underleftarrow{\lim} \underline{Y}$ uzayında açıktır. ■

2.7. Kategori ve Funktor

Tanım 2.7.1.[18] $X, Y, Z, \ldots$ herhangi nesneler olsun. Bu nesneler küme, grup, uzay vs olabilir. Herhangi X, Y nesneleri için $Hom(X, Y)$ kümesi verilsin. Bu kümeye X nesnesinden Y nesnesine giden morfizmalar kümesi denir.

$\forall\, X, Y, Z$ nesneleri için;

$\mu: Hom(X, Y) \times Hom(Y, Z) \longrightarrow Hom(X, Z)$ dönüşümü verilsin. $\forall\, f \in Hom(X, Y)$ ve $\forall\, g \in Hom(Y, Z)$ morfizmaları için μ fonksiyonunun görüntüsü $\mu(f, g) = g \circ f$ olsun. Farzedelim ki μ fonksiyonu için aşağıdaki özellikler sağlanır.

1) $\forall X, Y, Z, K$ ve $\forall f \in Hom(X, Y)$, $\forall g \in Hom(Y, Z)$, $\forall h \in Hom(Z, K)$ için

$$\mu(\mu(f, g), h) = \mu\left(f, \mu(g, h)\right)$$

$$\mu(g \circ f, h) = \mu(f, h \circ g)$$

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

2) $\forall\, X, Y$ için öyle $1_X \in Hom(X, X)$ ve $1_Y \in Hom(Y, Y)$ morfizmaları var ki her $f \in Hom(X, Y)$ için $\mu(1_X, f) = f$ ve $\forall g \in Hom(Y, X)$ için $\mu(g, 1_Y) = g$ sağlanır.

$$\text{Yani } f \circ 1_x = f\,, \qquad 1_Y \circ g = g \text{ dir.}$$

1_X, 1_Y morfizmalarına birim morfizma denir.

3) $X \neq X_1 \ \vee Y \neq Y_1$ ise $Hom(X,Y) \cap Hom(X_1,Y_1) = \emptyset$ dir.

X, Y, Z nesneler ailesi ve nesnelerin morfizmalar kümesine 1,2,3 koşullarını sağlayan μ dönüşümü ile birlikte bu sisteme kategori denir.

Tanım 2.7.2. [**18**] C' ve C iki kategori olsun. Nesneleri ObC ve ObC' olarak yazalım. Eğer

1) $\forall\, X \in C'$ için $X \in C$

2) $\forall\, X, Y \in ObC'$ için $Hom_{C'}(X,Y) \subset Hom_C(X,Y)$

ise o zaman C' kategorisine C kategorisinin alt kategorisi denir.

C' kategorisi C kategorisinin alt kategorisi ve $\forall\, X, Y \in ObC'$ için

$$Hom_{C'}(X,Y) = Hom_C(X,Y)$$

ise C' kategorisine C kategorisinin tam alt kategorisi denir.

Tanım 2.7.3. [**18**] C_1, C_2 iki kategori olsun. F dönüşümü

$$\forall\, X \in ObC_1 \longmapsto F(X) \in ObC_2$$

$$\forall\, f \in Hom_{C_1}(X,Y) \longmapsto F(f) \in Hom_{C_2}\big(F(X), F(Y)\big)$$

olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın;

1) $\forall f\colon X \longrightarrow Y\,, g\colon Y \to Z$ için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

2) $1_X\colon X \longrightarrow X$ için $F(1_X) = 1_{F(X)}$

o zaman $F\colon C_1 \longrightarrow C_2$ dönüşümüne kovariant funktor denir.

Tanım 2.7.4. [**18**] C_1, C_2 iki kategori olsun. F dönüşümü

$$\forall\, X \in ObC_1 \longmapsto F(X) \in ObC_2$$

$$\forall\, f \in Hom_{C_1}(X,Y) \longmapsto F(f) \in Hom_{C_2}\big(F(Y),F(X)\big)$$

olsun ve aşağıdaki koşullar sağlansın;

1) $\forall f: X \longrightarrow Y\,, g: Y \to Z$ için $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$

2) $1_X: X \longrightarrow X$ için $F(1_X) = 1_{F(X)}$

o zaman $F: C_1 \longrightarrow C_2$ dönüşümüne kontravariant funktor denir.

Tanım 2.7.5. [**18**] $F: C \longrightarrow C'$, $G: C \longrightarrow C'$ iki kovariant funktor olsun. $\forall f: X \longrightarrow Y \in C$ için

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\
G(X) \arrow[r, "G(f)"'] & G(Y)
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif yapan $\eta = \{\eta_X: F(X) \longrightarrow G(X)\}_{X \in ObC}$ C' kategorisinin morfizmalar ailesine F, G kovariant funktorların morfizması denir.

Tanım 2.7.6. [**18**] $F: C \longrightarrow C'$, $G: C \longrightarrow C'$ iki kontravariant funktor olsun. $\forall f: X \longrightarrow Y \in C$ için

$$\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[d, "\eta_X"'] & F(Y) \arrow[l, "F(f)"'] \arrow[d, "\eta_Y"] \\
G(X) & G(Y) \arrow[l, "G(f)"]
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif yapan $\eta = \{\eta_X : F(X) \longrightarrow G(X)\}_{X \in ObC}$ C' kategorisinin morfizmalar ailesine F, G kontravariant funktorların morfizması denir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu başlık altında tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılacak tanım ve teoremler verilecektir.

3.1. Soft Kümeler

Tanım 3.1.1.[54] U bir evrensel küme ve E parametrelerin kümesi olsun. U nun kuvvet kümesini $P(U)$ ile gösterelim ve A , E parametreler kümesinin boş olmayan alt kümesi olsun. (F,A) çifti U üzerinde bir soft küme olarak adlandırılır.

Burada F, $F: A \longrightarrow P(U)$ ile verilen bir dönüşümdür.

Başka bir ifadeyle, U üzerinde bir soft küme, U evrensel kümesinin alt kümelerinin bir parametrelenmiş ailesidir. $\varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon)$ kümesi (F,A) soft kümesinin $\varepsilon -$elemanlarının kümesi ya da $\varepsilon -$yaklaşımlarının kümesi olarak düşünülebilir. Açıktır ki, soft küme bir küme değildir.

Örnek 3.1.2. [54] Bir (F,A) soft kümesi X şahsının almak için düşündüğü evin özelliklerinin tasviri olsun.

Farz edelim ki $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ durumunda altı ev vardır ve $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ parametrelerinin kümesi olsun. e_i $(i = 1,2,3,4,5)$ sırasıyla “ $pahalı$ ”, “ $güzel$ ”, “$ahşap$ ”, “$ucuz$ ” ve “ $bahçeli$ ” parametrelerine karşılık gelir. $(.)$, $e_i \in E$ parametrelerinin birini işaret etmek üzere F dönüşümü “ $ev(.)$ ” şeklinde verildiği düşünülsün. Örneğin $F(e_1)$, “ $ev(pahalı)$ ” anlamındadır ve onun fonksiyon değeri $\{h \in U: h\ pahalı\ evdir\}$ kümesidir.

Farz edelim ki $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \emptyset$, $F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$ ve $F(e_5) = \{h_1\}$ dir. O halde (F,E) soft kümesini yaklaşımların aşağıdaki gösterimini içeren bir küme olarak görebiliriz.

$$(F,E) = \left\{ \begin{matrix} (pahalı\ ev, \{h_2, h_4\}), (güzel\ ev, \{h_1, h_3\}), (ahşap\ ev, \emptyset\ ), \\ (ucuz\ ev, \{h_1, h_3, h_5\}), (bahçeli\ ev, \{h_1\}) \end{matrix} \right\}$$

Tanım 3.1.3. $[52]$ U evrensel kümesi üzerinde (F, A) ve (G, B) soft kümeleri için, eğer

1) $A \subset B$ ve

2) $\forall e \in A$ için $F(e) \subset G(e)$ ise

(F, A) ya, (G, B) nin soft alt kümesidir denir ve $(F, A) \tilde{\subset} (G, B)$ şeklinde gösterilir.

Eğer (G, B) , (F, A) nın soft alt kümesi ise (F, A) ya (G, B) nin soft üst kümesi denir. $(F, A) \tilde{\supset} (G, B)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.4. $[52]$ U evrensel kümesi üzerinde (F, A) ve (G, B) iki soft küme olsun. Eğer (F, A), (G, B) nin soft alt kümesi ve (G, B), (F, A) nın soft alt kümesi ise (F, A) ve (G, B) soft kümelerine soft eşit denir.

Tanım 3.1.5. $[52]$ $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ parametrelerin kümesi olsun. E kümesinin değili $\forall\, i$ için $\lceil e_i \neq e_i$ olmak üzere $\lceil E = \{\lceil e_1, \lceil e_2, \dots, \lceil e_n\}$ dir ve $\lceil E$ ile gösterilir.

Önerme 3.1.6. $[52]$ **1**) $\lceil(\lceil A) = A$

2) $\lceil(A \cup B) = \lceil A \cup \lceil B$

3) $\lceil(A \cap B) = \lceil A \cap \lceil B$

Tanım 3.1.7. $[52]$ (F, A) soft kümesinin tümleyeni $(F, A)^c$ ile gösterilir ve $(F, A)^c = (F^c, \lceil A)$ şeklinde tanımlanır. Burada $F^c\colon \lceil A \longrightarrow P(U)$, $\forall \alpha \in \lceil A$ için $F^c(\alpha) = U \setminus F(\lceil \alpha)$ ile verilen dönüşümdür.

F^c, F nin soft tümleyen fonksiyonu olarak adlandırılsın. Açıktır ki $(F^c)^c$, F ile aynıdır ve $((F, A)^c)^c = (F, A)$ dır.

Tanım 3.1.8. $[52]$ (F, A), U üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = \emptyset$ (boş küme) ise (F, A) soft kümesine boş soft küme denir ve Φ ile gösterilir.

Tanım 3.1.9. $[52]$ (F, A), U üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall \varepsilon \in A$ için $F(\varepsilon) = U$ ise (F, A) soft kümesine mutlak soft küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir.

Açıktır ki $\tilde{A}^c = \Phi$ ve $\Phi^c = \tilde{A}$ dır.

Tanım 3.1.10. [52] (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki soft küme ise $(F,A) \wedge (G,B)$ şeklinde gösterilen "$(F,A)\, VE\, (G,B)$" işlemi, $(F,A) \wedge (G,B) = (H, A \times B)$ olarak tanımlanır. Burada $\forall\, (\alpha,\beta) \in A \times B$ için $H\big((\alpha,\beta)\big) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ dır.

Tanım 3.1.11. [52] (F,A) ve (G,B) U üzerinde iki soft küme ise $(F,A) \vee (G,B)$ şeklinde gösterilen "$(F,A)\, VEYA\, (G,B)$" işlemi, $(F,A) \vee (G,B) = (O, A \times B)$ olarak tanımlanır. Burada $\forall\, (\alpha,\beta) \in A \times B$ için $O\big((\alpha,\beta)\big) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ dır.

Önerme 3.1.12. [3] **1)** $\big((F,A) \vee (G,B)\big)^c = (F,A)^c \wedge (G,B)^c$

2) $\big((F,A) \wedge (G,B)\big)^c = (F,A)^c \vee (G,B)^c$

Tanım 3.1.13. [52] U evrensel küme üzerindeki (F,A) ve (G,B) iki soft kümenin birleşimi (H,C) soft kümesidir. Burada $C = A \cup B$ ve $\forall e \in C$ için

$$H(e) = \begin{cases} F(e) & , \ eğer\ e \in A - B\ ise \\ G(e) & , \ eğer\ e \in B - A\ ise \\ F(e) \cup G(e), & eğer\ e \in A \cap B\ ise \end{cases}$$

şeklindedir. Bu işlem $(F,A) \cup (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.14. [52] U evrensel küme üzerindeki (F,A) ve (G,B) iki soft kümenin kesişimi (H,C) soft kümesidir. Burada $C = A \cap B$, $\forall e \in C$ için $H(e) = F(e) \cap G(e)$ dir ve $(F,A) \cap (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.15.[3] Farz edelim ki $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6, h_7\}$, $A = \{pahalı, orta, ucuz\}$ ve $B = \{güzel, modern, ucuz\}$ dır. $F(pahalı) = \{h_2, h_4\}$, $F(orta) = \{h_1, h_3, h_5\}$, $F(ucuz) = \{h_6, h_7\}$, $G(güzel) = \{h_2, h_3, h_4\}$, $G(modern) = \{h_1, h_5, h_6\}$, $G(ucuz) = \{h_6, h_7\}$ olsun. O halde:

$$(F,A)\ \tilde{\cap}\ (G,B) = (H,C), C = A \cap B \text{ olmak üzere } H(ucuz) = \{h_6, h_7\}$$

$$(F,A)\ \tilde{\cup}\ (G,B) = (H,C), C = A \cup B \text{ olmak üzere } H(pahalı) = \{h_2, h_4\}$$

$$H(orta) = \{h_1, h_3, h_5\}, H(ucuz) = \{h_6, h_7\}, H(güzel) = \{h_2, h_3, h_4\},$$

$$H(modern) = \{h_1, h_5, h_6\}$$

olur.

3.2. Soft Topoloji ve Soft Topolojik Uzaylar

X bir evrensel küme ve E parametrelerin boş olmayan kümesi olsun.

Tanım 3.2.1.[65] X üzerinde (F,E) ve (G,E) iki soft küme olsun. (F,E) ve (G,E) soft kümelerinin farkı $\forall e \in E$ için $H(e) = F(e) \setminus G(e)$ dir ve $(H,E) = (F,E) \setminus (G,E)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. [65] Y, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. X üzerinde (Y,E) soft kümesi $\forall \alpha \in E$ için $Y(\alpha) = Y$ dir ve $\tilde{Y}$ ile gösterilir.

Özellikle (X,E), $\tilde{X}$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.3. [65] (F,E), X üzerinde bir soft küme ve Y, X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Y üzerinde (F,E) nin alt soft kümesi aşağıdaki gibi tanımlanır

$$\forall \alpha \in E \; için \; {}^{Y}F(\alpha) = Y \cap F(\alpha)$$

Bu işlem $\left({}^{Y}F,E\right)$ ile gösterilir.

Başka bir ifadeyle $\left({}^{Y}F,E\right) = \tilde{Y} \cap (F,E)$ dir.

Tanım 3.2.4. [65] X evrensel küme üzerinde (F,A) bir soft küme olsun. (F,A) soft kümesinin bağıl tümleyeni $(F,A)'$ ile gösterilir ve $(F,A)' = (F',A)$ şeklinde tanımlanır. Burada $F': A \longrightarrow P(U)$, $\forall \alpha \in A$ için $F'(\alpha) = U - F(\alpha)$ ile verilen dönüşümdür.

Tanım 3.2.5. [65] τ, X üzerinde soft kümelerin ailesi olsun. τ ailesi için aşağıdaki koşullar sağlanırsa:

1) $\Phi, \tilde{X} \in \tau$

2) τ sınıfındaki soft kümelerin herhangi sayıda birleşimi τ ya aittir.

3) τ sınıfındaki herhangi iki soft kümenin kesişimi τ ya aittir.

τ ya X üzerinde bir soft topoloji denir.

(X,τ,E) üçlüsü X üzerinde bir soft topolojik uzay olarak adlandırılır.

Tanım 3.2.6. $[65]$ (X,τ,E), X üzerinde bir soft uzay olsun. τ nun elemanlarına X de soft açık kümeler denir.

Tanım 3.2.7. $[65]$ (X,τ,E), X üzerinde bir soft uzay ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. Eğer (F,E) nin $(F,E)'$ bağıl tümleyeni τ ya ait ise (F,E) soft kümesine X de soft kapalı küme denir.

Önerme 3.2.8. $[65]$ (X,τ,E), X üzerinde bir soft uzay olsun. O zaman

1) $\Phi,\tilde{X}$ kümeleri X üzerinde kapalı soft kümelerdir.

2) Soft kapalı kümelerin herhangi sayıda kesişimi X üzerinde bir soft kapalı kümedir.

3) Herhangi iki soft kapalı kümenin birleşimi X üzerinde bir soft kapalı kümedir.

Tanım 3.2.9. $[65]$ X bir evrensel küme, E parametrelerin kümesi ve $\tau=\{\Phi,\tilde{X}\}$ olsun. τ ya X üzerinde soft indiskret topoloji ve (X,τ,E) ye X üzerinde bir soft indiskret uzay denir.

Tanım 3.2.10. $[65]$ X bir evrensel küme, E parametrelerin kümesi ve τ, X üzerinde tanımlanabilecek bütün soft kümelerin ailesi olsun. O zaman τ, X de soft diskret topoloji olarak adlandırılır ve (X,τ,E) ye X üzerinde bir soft diskret uzay denir.

Önerme 3.2.11. $[65]$ (X,τ,E), X üzerinde bir soft uzay olsun. Herbir $\alpha\in E$ için $\tau_\alpha=\{F(\alpha)\mid(F,E)\in\tau\}$ ailesi X de bir topoloji tanımlar.

Örnek 3.2.12. $[65]$ $X=\{h_1,\ h_2,h_3\}$, $E=\{e_1,e_2\}$ ve $\tau=\{\Phi,\tilde{X},(\mathrm{F}_1,\mathrm{E}),(\mathrm{F}_2,\mathrm{E}),(\mathrm{F}_3,\mathrm{E}),(\mathrm{F}_4,\mathrm{E})\}$ olsun, burada $(\mathrm{F}_1,\mathrm{E}),(\mathrm{F}_2,\mathrm{E}),(\mathrm{F}_3,\mathrm{E}),(\mathrm{F}_4,\mathrm{E})$ X üzerindeki soft kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$F_1(e_1)=\{h_2\}$ $\quad F_1(e_2)=\{h_1\}$

$F_2(e_1)=\{h_2,h_3\}$ $\quad F_2(e_2)=\{h_1,h_2\}$

$F_3(e_1)=\{h_1,h_2\}$ $\quad F_3(e_2)=X$

$F_4(e_1)=\{h_1,h_2\}$ $\quad F_4(e_2)=\{h_1,h_3\}$

O zaman τ, X de bir soft topoloji tanımlar ve buradan (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay olur.

$\tau_{e_1} = \{\emptyset, X, \{h_2\}, \{h_2,h_3\}, \{h_1,h_2\}\}$ ve $\tau_{e_2} = \{\emptyset, X, \{h_1\}, \{h_1,h_3\}, \{h_1,h_2\}\}$ X de topolojidirler.

Örnek 3.2.13. $[65]$ $X = \{h_1,\ h_2, h_3\}$, $E = \{e_1, e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi, \tilde{X}, (\mathrm{F}_1,\mathrm{E}), (\mathrm{F}_2,\mathrm{E}), (\mathrm{F}_3,\mathrm{E}), (\mathrm{F}_4,\mathrm{E})\}$ olsun, burada $(\mathrm{F}_1,\mathrm{E}), (\mathrm{F}_2,\mathrm{E}), (\mathrm{F}_3,\mathrm{E}), (\mathrm{F}_4,\mathrm{E})$ X üzerindeki soft kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$F_1(e_1) = \{h_2\}$ $F_1(e_2) = \{h_1\}$

$F_2(e_1) = \{h_2,h_3\}$ $F_2(e_2) = \{h_1,h_2\}$

$F_3(e_1) = \{h_1,h_2\}$ $F_3(e_2) = \{h_1,h_2\}$

$F_4(e_1) = \{h_2\}$ $F_4(e_2) = \{h_1,h_3\}$

O zaman τ, X de bir soft topoloji değildir çünkü $(\mathrm{F}_2,\mathrm{E}) \cup (\mathrm{F}_3,\mathrm{E}) = (\mathrm{G},\mathrm{E})$ burada $G(e_1) = X$ ve $G(e_2) = \{h_1,h_2\}$ ve de $(\mathrm{G},\mathrm{E}) \notin \tau$ olur.

Üstelik $\tau_{e_1} = \{\emptyset, X, \{h_2\}, \{h_2,h_3\}, \{h_1,h_2\}\}$ ve $\tau_{e_2} = \{\emptyset, X, \{h_1\}, \{h_1,h_3\}, \{h_1,h_2\}\}$ X de topolojidirler.

Tanım 3.2.14. $[65]$ (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve (F,E), X üzerinde bir soft küme olsun. (F,E) nin soft kapanışı (F,E) nin bütün soft kapalı üst kümelerinin kesişimidir ve $\overline{(F,E)}$ ile gösterilir.

Açıktır ki $\overline{(F,E)}$, (F,E) soft kümesini kapsayan X üzerinde en küçük soft kapalı kümedir.

Teorem 3.2.15. $[65]$ (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay, (F,E) ve (G,E) X üzerinde soft kümeler olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $\overline{\Phi} = \Phi$ ve $\overline{\tilde{X}} = \tilde{X}$

2) $(F,E) \tilde{\subseteq} \overline{(F,E)}$

3) (F,E) kapalı kümedir $\Leftrightarrow$ $(F,E) = \overline{(F,E)}$

4) $\overline{\overline{(F,E)}} = \overline{(F,E)}$

5) $(F,E) \tilde{\subseteq} (G,E) \Longrightarrow \overline{(F,E)} \tilde{\subseteq} \overline{(G,E)}$

6) $\overline{(F,E) \cup (G,E)} = \overline{(F,E)} \cup \overline{(G,E)}$

7) $\overline{(F,E) \cap (G,E)} \tilde{\subseteq} \overline{(F,E)} \cap \overline{(G,E)}$.

Tanım 3.2.16. $[\mathbf{65}]$ (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve (F,E) X üzerinde bir soft küme olsun. $(\bar{F},E)$ soft kümesi $\forall\alpha \in E$ için $\bar{F}(\alpha) = \overline{F(\alpha)}$ ile verilir. Burada $\overline{F(\alpha)}$ herbir $\alpha \in E$ için τ_α da $F(\alpha)$ nın kapanışıdır.

Önerme 3.2.17. $[\mathbf{65}]$ (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve (F,E) X üzerinde bir soft küme olsun. $(\bar{F},E) \tilde{\subseteq} \overline{(F,E)}$ dir.

Sonuç 3.2.18. $[\mathbf{65}]$ (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve (F,E) X üzerinde bir soft küme olsun. O zaman

$$(\bar{F},E) = \overline{(F,E)} \Leftrightarrow (\bar{F},E)' \in \tau.$$

Örnek 3.2.19.$[\mathbf{65}]$ $X = \{h_1,\ h_2,h_3\}$, $E = \{e_1,e_2\}$ ve $\tau = \{\Phi,\tilde{X},(\mathrm{F}_1,\mathrm{E}),(\mathrm{F}_2,\mathrm{E}),\dots,(\mathrm{F}_7,\mathrm{E})\}$ olsun. Burada

$F_1(e_1) = \{h_1,h_2\}$ $\quad$ $F_1(e_2) = \{h_1,h_2\}$

$F_2(e_1) = \{h_2\}$ $\quad$ $F_2(e_2) = \{h_1,h_3\}$

$F_3(e_1) = \{h_2,h_3\}$ $\quad$ $F_3(e_2) = \{h_1\}$

$F_4(e_1) = \{h_2\}$ $\quad$ $F_4(e_2) = \{h_1\}$

$F_5(e_1) = \{h_1,h_2\}$ $\quad$ $F_5(e_2) = X$

$F_6(e_1) = X$ $\quad$ $F_6(e_2) = \{h_1,h_2\}$

$F_7(e_1) = \{h_2,h_3\}$ $\quad$ $F_7(e_2) = \{h_1,h_3\}$

O zaman (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzaydır.

(F,E) ve (G,E) aşağıdaki gibi tanımlansın:

$F(e_1) = \{h_1,h_3\}$, $F(e_2) = \emptyset$ ve $G(e_1) = \{h_2,h_3\}$, $G(e_2) = \{h_1,h_2\}$.

O zaman $(F \cap G)(e_1) = \{h_3\}$, $(F \cap G)(e_2) = \emptyset$ ile $(F,E) \cap (G,E) = \big((F \cap G), E\big)$ verilir.

$\overline{(F,E)} = \tilde{X} \cap (F_2,E)' \cap (F_4,E)' = (F_2,E)'$ ve $\overline{(G,E)} = \tilde{X}$ olsun.

Buradan $\overline{(F,E)} \cap \overline{(G,E)} = \overline{(F,E)}$ şeklindedir.

Ayrıca $\overline{(F,E) \cap (G,E)} = \cap \{\tilde{X}, (F_1,E)', (F_2,E)', (F_4,E)', (F_5,E)'\} = (F_5,E)'$ dır.

Bu yüzden $\overline{(F,E) \cap (G,E)} \,\tilde{\subset}\, \overline{(F,E)} \cap \overline{(G,E)}$ dır fakat $\overline{(F,E) \cap (G,E)} \neq \overline{(F,E)} \cap \overline{(G,E)}$ dır.

Sonra $\tau_{e_1} = \big\{\emptyset, X, \{h_2\}, \{h_2,h_3\}, \{h_1,h_2\}\big\}$ ve $\tau_{e_2} = \big\{\emptyset, X, \{h_1\}, \{h_1,h_3\}, \{h_1,h_2\}\big\}$ olduğu görülebilir.

Burada $(\bar{F},E)$, $\bar{F}(e_1) = \{h_1,h_3\}$ ve $\bar{F}(e_2) = \emptyset$ ile verilir.

Açıktır ki $\overline{(F,E)} \,\tilde{\subset}\, (\bar{F},E)$ dir fakat $\overline{(F,E)} \neq (\bar{F},E)$ dir.

Tanım 3.2.20.[31] (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. X üzerinde (F,E) soft kümesinin soft içi (F,E) nin kapsadığı bütün soft açık kümelerin birleşimine denir ve $(F,E)^{\circ}$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.21.[31] (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve (F,E) ve (G,E) X üzerinde soft kümeler olsun. Aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $\Phi^{\circ} = \Phi$ ve $\tilde{X}^{\circ} = \tilde{X}$.

2) $(F,E)^{\circ} \,\tilde{\subset}\, (F,E)$.

3) $((F,E)^{\circ})^{\circ} = (F,E)$.

4) (F,E) bir soft açık kümedir $\Leftrightarrow (F,E)^{\circ} = (F,E)$.

5) $(F,E) \,\tilde{\subset}\, (G,E) \;\Rightarrow\; (F,E)^{\circ} \,\tilde{\subset}\, (G,E)$.

6) $(F,E)^{\circ} \cap (G,E)^{\circ} = \big((F,E) \cap (G,E)\big)^{\circ}$.

7) $(F,E)^{\circ} \cup (G,E)^{\circ} \,\tilde{\subset}\, \big((F,E) \cup (G,E)\big)^{\circ}$.

Tanım 3.2.22.[65] (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve Y, X in boş olmayan alt kümesi olsun. $\tau_Y = \big\{\big({}^{Y}F, E\big) \mid (F,E) \in \tau\big\}$ ye Y üzerinde soft göreli (relative) topoloji denir ve (Y,τ_Y,E), (X,τ,E) soft uzayının bir soft alt uzayı olarak adlandırılır.

Önerme 3.2.23.[65] (X, τ, E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve Y, X in boş olmayan alt kümesi olsun. Her $\alpha \in E$ için $(Y, \tau_{\alpha Y})$, (X, τ_α) nın bir alt uzayıdır.

Önerme 3.2.24.[65] (Y, τ_Y, E), (X, τ, E) soft topolojik uzayının bir soft alt uzayı ve (F, E), Y de bir soft açık küme olsun. Eğer $\tilde{Y} \in \tau$ ise $(F, E) \in \tau$ olur.

Teorem 3.2.25.[65] (Y, τ_Y, E), (X, τ, E) soft topolojik uzayının bir soft alt uzayı ve (F, E), X üzerinde bir soft küme olsun. O zaman

1) (F, E), Y de bir soft açıktır $\Leftrightarrow$ Herhangi bir $(G, E) \in \tau$ için $(F, E) = \tilde{Y} \cap (G, E)$ dir.

2) (F, E), Y de bir soft kapalıdır $\Leftrightarrow$ X de herhangi bir (G, E) soft kapalı kümesi için $(F, E) = \tilde{Y} \cap (G, E)$ dir.

Tanım 3.2.26.[28] (F, E), X üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $e \in E$ elemanı için $F(e) = \{x\}$ ve her $e' \in E - \{e\}$ için $F(e') = \emptyset$ ise (F, E) soft kümesi bir soft nokta olarak adlandırılır ve (x_e, E) ile gösterilir.

Tanım 3.2.27.[28] X evrensel küme üzerinde (x_e, E) ve $(y_{e'}, E)$ iki soft nokta olsun. Eğer $x \neq y$ veya $e \neq e'$ ise noktalara farklı noktalar denir.

Önerme 3.2.28.[28] (F, E), X üzerinde bir soft küme olsun. O zaman (F, E), kendisinin soft noktalarının birleşimidir. Yani;

$$(F, E) = \bigcup_{e \in E} \bigcup_{x \in F(e)} (x_e, E)$$

dir.

Tanım 3.2.29.[28] (X, τ, E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve (F, E), (X, τ, E) de bir soft küme olsun. $(x_e, E) \in (G, E) \subset (F, E)$ sağlanacak şekilde (G, E) soft açık kümesi bulunabiliyorsa (F, E) soft kümesine (x_e, E) soft noktasının bir soft komşuluğu denir.

Teorem 3.2.30.[28] (X, τ, E) soft topolojik uzayda (x_e, E) nin $U(x_e, E)$ soft komşuluk sistemi aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) Eğer $(F, E) \in U(x_e, E)$ ise $(x_e, E) \in (F, E)$ dir.

2) Eğer $(F,E) \in U(x_e,E)$ ve $(F,E) \subset (G,E)$ ise $(G,E) \in U(x_e,E)$ dir.

3) Eğer $(F_1,E),(F_2,E) \in U(x_e,E)$ ise $(F_1,E) \cap (F_2,E) \in U(x_e,E)$ dir.

4) Eğer $(F,E) \in U(x_e,E)$ ise $(G,E) \in U(x_e,E)$ dir öyle ki herbir $(y_{e'},E) \in (G,E)$ için $(F,E) \in U(y_{e'},E)$ olur.

Tanım 3.2.31.[43] $SS(U)_A$ ve $SS(V)_B$ soft kümelerin aileleri olsun. $u: U \longrightarrow V$ ve $p: A \longrightarrow B$ dönüşümler olsun. $f_{pu}: SS(U)_A \longrightarrow SS(V)_B$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

1) (F,A), $SS(U)_A$ da bir soft küme olsun. Bu soft kümenin görüntüsü $\forall\, y \in B$ için

$$f_{pu}(F)(y) = \begin{cases} \bigcup_{x \in p^{-1}(y) \cap A} u\big(F(x)\big), & p^{-1}(y) \cap A \neq \emptyset \\ \emptyset, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde bir kümedir ve $f_{pu}(F,A) = \big(f_{pu}(F), p(A)\big)$ ile gösterilir.

2) (G,B), $SS(V)_B$ da bir soft küme olsun. Bu soft kümenin ters görüntüsü $\forall\, x \in A$ için

$$f_{pu}^{-1}(G)(x) = \begin{cases} u^{-1}\Big(G\big(p(x)\big)\Big), & p(x) \in B \\ \emptyset, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

şeklinde bir soft kümedir ve $f_{pu}^{-1}(G,B) = \big(f_{pu}^{-1}(G), p^{-1}(B)\big)$ ile gösterilir.

Teorem 3.2.32.[43] $SS(U)_A$ ve $SS(V)_B$ soft kümelerin aileleri olsun. $f_{pu}: SS(U)_A \longrightarrow SS(V)_B$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $f_{pu}(\Phi_A) = \Phi_B$

2) $f_{pu}(\mathrm{U}_A) \mathrel{\tilde{\subseteq}} \mathrm{U}_B$

3) $f_{pu}\big((F,A) \mathbin{\tilde{\cup}} (G,A)\big) = f_{pu}(F,A) \mathbin{\tilde{\cup}} f_{pu}(G,A)$ burada $(F,A),(G,A) \in SS(U)_A$ dır. Genel olarak;

$$f_{pu}\Big(\tilde{\bigcup_i}(F_i,A)\Big) = \tilde{\bigcup_i} f_{pu}(F_i,A) \text{ burada}, (F_i,A) \in SS(U)_A \text{ dır.}$$

4) Eğer $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, A)$ ise, $f_{pu}(F, A) \tilde{\subseteq} f_{pu}(G, A)$ dır, burada $(F, A), (G, A) \in SS(U)_A$ olur.

5) Eğer $(G, B) \tilde{\subseteq} (H, B)$ ise, $f_{pu}^{-1}\big((G, B)\big) \tilde{\subseteq} f_{pu}^{-1}\big((H, B)\big)$ dir, burada $(G, B), (H, B) \in SS(V)_B$ olur.

Eğer p ve u surjektif ise f_{pu} soft fonksiyonuna surjektif denir. Eğer p ve u injektif ise f_{pu} soft fonksiyonuna injektif denir.

Teorem 3.2.33.[71] $SS(U)_A$ ve $SS(V)_B$ soft kümelerin aileleri olsun. $f_{pu}: SS(U)_A \longrightarrow SS(V)_B$ fonksiyonu için aşağıdaki ifadeler doğrudur.

1) $SS(V)_B$ de (G, B) herhangi soft kümesi için $f_{pu}^{-1}((G, B)^c) = \left(f_{pu}^{-1}(G, B)\right)^c$ dir.

2) $SS(V)_B$ de (G, B) herhangi soft kümesi için $f_{pu}\left(f_{pu}^{-1}\left((G, B)\right)\right) \tilde{\subseteq} (G, B)$ dir. Eğer f_{pu} surjektif ise eşitliği korur.

3) $SS(U)_A$ da (F, A) herhangi soft kümesi için $(F, A) \tilde{\subseteq} f_{pu}^{-1}\left(f_{pu}(F, A)\right)$ dır. Eğer f_{pu} injektif ise eşitliği korur.

Tanım 3.2.34.[28] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki soft topolojik uzay, $f: (X, \tau, E) \longrightarrow (Y, \tau', E)$ bir dönüşüm olsun. $(f(x)_e, E)$ nin herhangi (H, E) soft komşuluğu için $f\big((F, E)\big) \subset (H, E)$ sağlanacak şekilde (x_e, E) nin bir (F, E) soft komşuluğu bulunabiliyorsa f dönüşümüne (x_e, E) de soft sürekli dönüşüm denir.

Eğer $f: (X, \tau, E) \longrightarrow (Y, \tau', E)$ soft dönüşümü her soft noktada sürekli ise f soft sürekli dönüşüm denir.

Teorem 3.2.35.[28] (X, τ, E) ve (Y, τ', E) iki soft topolojik uzay, $f: (X, \tau, E) \longrightarrow (Y, \tau', E)$ bir dönüşüm olsun. O zaman aşağıdaki koşullar denktir:

1) $f: (X, \tau, E) \longrightarrow (Y, \tau', E)$ soft sürekli dönüşümdür,

2) Y üzerinde herbir (G, E) soft açık küme için $f^{-1}\big((G, E)\big)$, X üzerinde soft açık kümedir,

3) Y üzerinde herbir (H,E) soft kapalı küme için $f^{-1}((H,E))$, X üzerinde soft kapalı kümedir,

4) X üzerinde herbir (F,E) soft küme için, $f\left(\overline{(F,E)}\right) \subset \left(\overline{f(F,E)}\right)$,

5) Y üzerinde herbir (G,E) soft küme için, $\left(\overline{f^{-1}(G,E)}\right) \subset f^{-1}\left(\overline{(G,E)}\right)$,

6) Y üzerinde herbir (G,E) soft küme için, $f^{-1}((G,E)^{\circ}) \subset \left(f^{-1}(G,E)\right)^{\circ}$.

3.3. Soft Ayırma Aksiyomları

Tanım 3.3.1. [**28**] (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(x_e,E) \neq (y_{e'},E)$ olsun.

$$(x_e,E) \in (F,E) \text{ ve } (y_{e'},E) \notin (F,E) \text{ veya } (y_{e'},E) \in (G,E) \text{ ve } (x_e,E) \notin (G,E)$$

sağlanacak şekilde (F,E) ve (G,E) soft açık kümeleri bulunabiliyorsa (X,τ,E) uzayına bir soft T_0- uzayı denir.

Tanım 3.3.2. [**28**] (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(x_e,E) \neq (y_{e'},E)$ olsun.

$$(x_e,E) \in (F,E), (y_{e'},E) \notin (F,E) \text{ ve } (y_{e'},E) \in (G,E), (x_e,E) \notin (G,E)$$

sağlanacak şekilde (F,E) ve (G,E) soft açık kümeleri bulunabiliyorsa (X,τ,E) uzayına bir soft T_1- uzayı denir.

Önerme 3.3.3. [**28**] (X,τ,E), X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun.

1) Eğer (X,τ,E) bir soft T_0- uzayı ise $\forall e \in E$ için (X,τ_e) bir soft T_0- uzayıdır.

2) Eğer (X,τ,E) bir soft T_1- uzayı ise $\forall e \in E$ için (X,τ_e) bir soft T_1- uzayıdır.

Tanım 3.3.4. [28] (X, τ, E), X üzerinde bir soft topolojik uzay ve $(x_e, E) \neq (y_{e'}, E)$ olsun.

$$(x_e, E) \in (F, E), (y_{e'}, E) \in (G, E) \text{ ve } (F, E) \cap (G, E) = \Phi$$

sağlanacak şekilde (F, E) ve (G, E) soft açık kümeleri bulunabiliyorsa (X, τ, E) uzayına bir soft $T_2 -$ uzayı denir.

Önerme 3.3.5. [28] (X, τ, E), X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) bir soft $T_2 -$ uzayı ise $\forall e \in E$ için (X, τ_e) bir soft $T_2 -$ uzayıdır.

Tanım 3.3.6. [28] (X, τ, E), X üzerinde bir soft topolojik uzay, (F, E), X de soft kapalı küme ve $(x_e, E) \notin (F, E)$ olsun.

$$(x_e, E) \in (G_1, E), (F, E) \subset (G_2, E) \text{ ve } (G_1, E) \cap (G_2, E) = \Phi$$

sağlanacak şekilde (G_1, E) ve (G_2, E) soft açık kümeleri bulunabiliyorsa (X, τ, E) uzayına bir soft regüler uzay denir.

Tanım 3.3.7. [28] (X, τ, E), X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) bir soft regüler ve soft $T_1 -$ uzayı ise (X, τ, E) soft topolojik uzayına soft $T_3 -$ uzayı denir.

Tanım 3.3.8. [28] (X, τ, E), X üzerinde bir soft topolojik uzay, (F, E) ve (G, E), X de iki soft kapalı ve $(F, E) \cap (G, E) = \Phi$ koşulunu sağlayan kümeler olsun.

$$(F, E) \subset (F_1, E), (G, E) \subset (F_2, E) \text{ ve } (F_1, E) \cap (F_2, E) = \Phi$$

sağlanacak şekilde (F_1, E) ve (F_2, E) soft açık kümeleri bulunabiliyorsa (X, τ, E) uzayına bir soft normal uzay denir.

(X, τ, E), X üzerinde bir soft topolojik uzay olsun. Eğer (X, τ, E) bir soft normal ve soft $T_1 -$ uzayı ise (X, τ, E) soft topolojik uzayına soft $T_4 -$ uzayı denir.

3.4. Soft Kompakt Uzaylar

Tanım 3.4.1. $[\mathbf{28}]$ Eğer X in her soft açık örtüsü bir sonlu soft açık alt örtüye sahip ise (X, τ, E) soft topolojik uzayına soft kompakt uzay denir.

Tanım 3.4.2. $[\mathbf{28}]$ (X, τ, E) bir soft topolojik uzay ve (F, E) bir soft küme olsun. Eğer (F, E) nin her açık örtüsü için (F, E) nin bir sonlu alt örtüsü var ise o zaman (F, E) ye bir soft kompakt küme denir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde çalışmamızda elde edilen bulgulara yer verilmiştir.

4.1. Soft Topolojik Uzayların Ters Sistemleri

A, yönlendirilmiş bir küme olsun. $Stop$ ile soft topolojik uzaylar kategorisini gösterelim.

Tanım 4.1.1. Her $F\colon \mathrm{A}^{op} \longrightarrow Stop$ funktoruna soft topolojik uzaylar kategorisinde ters sistem denir ve bu ters sistemin limitine bu funktorun limiti denir.

Şimdi bu tanımı inceleyelim.

Soft topolojik uzayların ters sistemi

$$(\underline{X}, \underline{E}) = \left(\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon \mathrm{A}} \ , \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right) : (X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'}) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$$

şeklinde bir sistemdir. Bu sistemden

$$\left(\{X_\alpha\}_{\alpha\epsilon \mathrm{A}} , \left\{p_\alpha^{\alpha'} : X_{\alpha'} \longrightarrow X_\alpha\right\}_{\alpha<\alpha'}\right) \qquad (4.1.1)$$

$$\left(\{E_\alpha\}_{\alpha\epsilon \mathrm{A}} , \left\{q_\alpha^{\alpha'} : E_{\alpha'} \longrightarrow E_\alpha\right\}_{\alpha<\alpha'}\right) \qquad (4.1.2)$$

şeklinde kümelerin iki ters sistemini oluşturabiliriz. Bu sistemlerin ters limitini ele alalım:

$$X = \varprojlim_{\alpha\epsilon A} X_\alpha \quad \text{ve} \quad E = \varprojlim_{\alpha\epsilon A} E_\alpha \ .$$

$\left(\prod_{\alpha\epsilon A} X_\alpha , \prod_{\alpha\epsilon A} \tau_\alpha , \prod_{\alpha\epsilon A} E_\alpha\right)$ soft topolojik uzayların çarpımı olsun.

Şimdi (X, E) soft kümede soft topoloji tanımlayalım. Eğer

$\left(\mathrm{F}, \prod_{\alpha\epsilon A} E_\alpha\right) \in \prod_{\alpha\epsilon A} \tau_\alpha$ ise $\mathrm{F}\,\big|\varprojlim_{\alpha\epsilon A} E_\alpha : \varprojlim_{\alpha\epsilon A} E_\alpha \longrightarrow \prod_{\alpha\epsilon A} X_\alpha$ soft kümesini aşağıdaki

şekilde tanımlayalım.

$$\forall \{e_\alpha\} \epsilon \varprojlim_{\alpha \epsilon A} E_\alpha \quad \text{için} \quad F \,\Big|\, \varprojlim_{\alpha \epsilon A} E_\alpha (\{e_\alpha\}) = F(\{e_\alpha\}) \,\Big|\, \varprojlim_{\alpha \epsilon A} X_\alpha$$

Bu şekilde tanımlanan soft küme $\varprojlim_{\alpha \epsilon A} X_\alpha$ da değer almaktadır. Bu soft kümeyi

$\left(F \,\Big|\, \varprojlim_{\alpha \epsilon A} E_\alpha , \varprojlim_{\alpha \epsilon A} E_\alpha \right)$ ile gösterelim.

Kolayca gösterebiliriz ki

$$\left\{ \left(F \,\Big|\, \varprojlim_{\alpha \epsilon A} E_\alpha , \varprojlim_{\alpha \epsilon A} E_\alpha \right) : \left(F, \prod_{\alpha \epsilon A} E_\alpha \right) \in \prod_{\alpha \epsilon A} \tau_\alpha \right\}$$

ailesi (X, E) soft kümesinde bir soft topoloji oluşturur. Bu soft topolojiyi τ ile gösterelim. Böylece (X, τ, E) bir soft topolojik uzay olmaktadır.

$$\forall \alpha \in A \text{ için } \quad \pi_\alpha : \varprojlim_{\alpha \epsilon A} X_\alpha \longrightarrow X_\alpha , \qquad q_\alpha : \varprojlim_{\alpha \epsilon A} E_\alpha \longrightarrow E_\alpha$$

projeksiyon dönüşümleri olsun. Açıktır ki $(\pi_\alpha, q_\alpha): (X, \tau, E) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ soft dönüşümleri soft süreklidir.

Teorem 4.1.2. Soft topolojik uzaylar kategorisinde her

$$(\underline{X}, \underline{E}) = \left(\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha \in A} , \left\{ \left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'} \right) : (X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'}) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \right\}_{\alpha < \alpha'} \right)$$

şeklinde ters sistemin limiti vardır, tektir ve $\left(\varprojlim_{\alpha \epsilon A} X_\alpha , \tau, \varprojlim_{\alpha \epsilon A} E_\alpha \right)$ soft topolojik uzayına eşittir.

İspat) Göstermemiz gereken her (Y, τ', E') soft topolojik uzay ve aşağıdaki diyagramı komutatif yapan

$$\{(\varphi_\alpha, \psi_\alpha): (Y, \tau', E') \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

soft sürekli dönüşümler ailesi için:

$$
\begin{tikzcd}
 & (X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'}) \arrow[d, "\left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)"] \\
(Y, \tau', E') \arrow[ur, "(\varphi_{\alpha'}, \psi_{\alpha'})"] \arrow[dr, "(\varphi_\alpha, \psi_\alpha)"'] & \\
 & (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)
\end{tikzcd}
\tag{4.1.3}
$$

öyle tek $(f, \varkappa): (Y, \tau', E') \longrightarrow (X, \tau, E)$ soft sürekli dönüşüm vardır ki her $\alpha \in A$ için

$$
\begin{tikzcd}
(Y, \tau', E') \arrow[d, "(f, \varkappa)"'] \arrow[dr, "(\varphi_\alpha, \psi_\alpha)"] & \\
 & (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \\
(X, \tau, E) \arrow[ur, "(\pi_\alpha, q_\alpha)"'] &
\end{tikzcd}
\tag{4.1.4}
$$

diyagramı komutatiftir.

$f: Y \longrightarrow X$ ve $\varkappa: E' \longrightarrow E$ dönüşümlerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

Her $e' \in E'$ için $\varkappa(e') = \{\psi_\alpha(e')\}$ ve her $y_{e'}$ soft noktası için $f(y_{e'}) = \left\{\varphi_\alpha(y)_{\psi_\alpha(e')}\right\}$ olsun.

(4.1.3) diyagramının komutatifliğinden kolayca gösterebiliriz ki $\varkappa(e') \in \varprojlim_{\alpha \epsilon \Lambda} E_\alpha$ ve $f(y_{e'})$ soft noktası (X, τ, E) soft uzayına aittir. $(f, \varkappa)$ soft dönüşümü soft süreklidir. (4.1.4) diyagramının komutatifliğine bakalım. Her bir $y_{e'} \in (Y, \tau', E')$ soft noktası için

$(\varphi_\alpha, \psi_\alpha)(y_{e'}) = \left(\varphi_\alpha(y)\right)_{\psi_\alpha(e')}$ dir.

$$
\begin{aligned}
(\pi_\alpha, q_\alpha) \circ (f, \varkappa)(y_{e'}) &= (\pi_\alpha, q_\alpha)\left(\left(f(y)\right)_{\varkappa(e')}\right) = (\pi_\alpha, q_\alpha)\left(\left\{\left(\varphi_\alpha(y)\right)_{\psi_\alpha(e')}\right\}\right) \\
&= \left(\varphi_\alpha(y)\right)_{\psi_\alpha(e')}
\end{aligned}
$$

f ve $\varkappa$ dönüşümleri tek türlü belirlendiğinden $(f,\varkappa)$ soft dönüşümü tektir.

Şimdi ters limitin bir funktor olduğunu gösterelim. Onun için soft topolojik uzayların ters sistemlerinin bir kategori oluşturduğunu kanıtlayalım.

$$\left(\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon \mathrm{A}}\ ,\ \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right):(X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'})\longrightarrow(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$$

ve

$$\left(\left\{\left(Y_\beta,\tau_\beta',E_\beta'\right)\right\}_{\beta\epsilon \mathrm{B}}\ ,\ \left\{\left(r_\beta^{\beta'},\varkappa_\beta^{\beta'}\right):\left(Y_{\beta'},\tau_{\beta'}',E_{\beta'}'\right)\longrightarrow(Y_\beta,\tau_\beta',E_\beta')\right\}_{\beta<\beta'}\right)$$

soft topolojik uzayların iki ters sistemi , $\varphi: B\longrightarrow A$ izoton dönüşüm ve her $\beta\epsilon$ B için

$$(f_\beta,g_\beta):\left(X_{\varphi(\beta)},\tau_{\varphi(\beta)},E_{\varphi(\beta)}\right)\longrightarrow\left(Y_\beta,\tau_\beta',E_\beta'\right)$$

soft topolojik uzayların soft sürekli dönüşümleri olsun.

Tanım 4.1.3. Eğer her $\beta' > \beta$ için aşağıdaki diyagram komutatif ise

$$\begin{tikzcd}
\left(X_{\varphi(\beta')},\tau_{\varphi(\beta')},E_{\varphi(\beta')}\right) \arrow[r, "{(f_{\beta'},g_{\beta'})}"] \arrow[d, "{\left(p_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\beta')},q_{\varphi(\beta)}^{\varphi(\beta')}\right)}"'] & \left(Y_{\beta'},\tau_{\beta'}',E_{\beta'}'\right) \arrow[d, "{\left(r_\beta^{\beta'},\varkappa_\beta^{\beta'}\right)}"] \\
\left(X_{\varphi(\beta)},\tau_{\varphi(\beta)},E_{\varphi(\beta)}\right) \arrow[r, "{(f_\beta,g_\beta)}"'] & \left(Y_\beta,\tau_\beta',E_\beta'\right)
\end{tikzcd}$$

$$\left(\varphi: B\longrightarrow A\,,\left\{\left(f_\beta,g_\beta\right):\left(X_{\varphi(\beta)},\tau_{\varphi(\beta)},E_{\varphi(\beta)}\right)\longrightarrow\left(Y_\beta,\tau_\beta',E_\beta'\right)\right\}_{\beta\epsilon \mathrm{B}}\right)$$

ailesine

$$\left(\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon \mathrm{A}}\ ,\ \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right):(X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'})\longrightarrow(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$$

ters sistemden

$$\left(\{(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta)\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\ ,\ \left\{\left(r_\beta^{\beta'},\varkappa_\beta^{\beta'}\right):\left(Y_{\beta'},\tau'_{\beta'},E'_{\beta'}\right)\longrightarrow(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta)\right\}_{\beta<\beta'}\right)$$

ters sistemine giden morfizma denir.

Açıktır ki soft topolojik uzayların ters sistemleri ve onların morfizmaları bir kategori oluşturur. Bu kategoriyi $Inv(Stop)$ ile gösterelim.

$\left(\varphi: B\longrightarrow A\,,\left\{g_\beta\colon E_{\varphi(\beta)}\longrightarrow E'_\beta\right\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\right)$ ailesi kümelerin $\left(\{E_\alpha\}_{\alpha\epsilon A}\,,\left\{q_\alpha^{\alpha'}\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$ ters sisteminden $\left(\{E'_\beta\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\,,\left\{\varkappa_\beta^{\beta'}\right\}_{\beta<\beta'}\right)$ ters sistemine giden bir morfizmadır. Aynı şekilde $\left(\varphi: B\longrightarrow A\,,\left\{f_\beta\colon X_{\varphi(\beta)}\longrightarrow Y_\beta\right\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\right)$ ailesi de $\left(\{X_\alpha\}_{\alpha\epsilon A}\,,\left\{p_\alpha^{\alpha'}\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$ kümelerin ters sisteminden $\left(\{Y_\beta\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\,,\left\{r_\beta^{\beta'}\right\}_{\beta<\beta'}\right)$ ters sistemine giden bir morfizmadır. Bu

morfizmaların limitini $\varprojlim_{\beta\in B} f_\beta$ ve $\varprojlim_{\beta\in B} g_\beta$ ile gösterelim. O halde

$$\left(\varprojlim_{\beta\in B} f_\beta\,,\varprojlim_{\beta\in B} g_\beta\right):\left(\varprojlim_{\alpha\in\mathrm{A}}(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\longrightarrow\varprojlim_{\beta\in B}\left(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta\right)\right)$$

ters limitlerin bir morfizması olmaktadır.

Teorem 4.1.4. $\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}\longmapsto\varprojlim_{\alpha\epsilon A}(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$

$$\left(\varphi: B\longrightarrow A\,,\{(f_\beta,g_\beta)\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\right)\longmapsto\left(\varprojlim_{\beta\in B} f_\beta\,,\varprojlim_{\beta\in B} g_\beta\right)$$

karşı gelmesi $Inv(Stop)$ kategorisinden $Stop$ kategorisine giden bir funktordur.

Teorem 4.1.5. $(\underline{X},\underline{E})=\left(\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon\mathrm{A}}\ ,\ \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'},q_\alpha^{\alpha'}\right)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$ soft topolojik uzayların ters sistemi olsun.

$$\mathcal{B}=\{(\pi_\alpha,q_\alpha)^{-1}(F_\alpha,E_\alpha)\mid\alpha\epsilon\mathrm{A}\,,(\mathrm{F}_\alpha,\mathrm{E}_\alpha)\in\tau_\alpha\}$$

ailesi $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ uzayının soft topolojisinin bir soft tabanıdır.

İspat) Her $\alpha \epsilon A$ için $(\pi_\alpha, q_\alpha)\colon \underset{\leftarrow}{\lim}(\underline{X}, \underline{E}) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ soft sürekli olduğundan $\mathcal{B}$ ailesinin kümeleri soft açıktır. $\mathcal{B}$ ailesinin bir taban olduğunu göstermek için her soft açık $(G, E) \subset \underset{\leftarrow}{\lim}(\underline{X}, \underline{E})$ ve her $x_e \in (G, E)$ soft noktası için

$$x_e \in (\pi_{\alpha_0}, q_{\alpha_0})^{-1}(F_{\alpha_0}, E_{\alpha_0}) \subset (G, E)$$

sağlanacak şekilde $\alpha_0 \epsilon A$ ve $(F_{\alpha_0}, E_{\alpha_0}) \in \tau_{\alpha_0}$ bulunması gerekir.

$(G, E) \subset \underset{\leftarrow}{\lim}(\underline{X}, \underline{E})$ keyfi soft açık küme ve $x_e = \{x^{\alpha}_{e_\alpha}\} \in (G, E)$ herhangi bir soft nokta olsun. Soft alt uzay topolojisinin tanımından $(G, E) = \underset{\leftarrow}{\lim}(\underline{X}, \underline{E}) \cap (H, E)$ sağlanacak biçimde $(H, E) \subset \prod(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ soft açık kümesi vardır. Çarpım topolojisinin tanımından

$$x_e \in (p_{\alpha_1}, q_{\alpha_1})^{-1}(F_{\alpha_1}, E_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap (p_{\alpha_k}, q_{\alpha_k})^{-1}(F_{\alpha_K}, E_{\alpha_K}) \subset (H, E)$$

koşulunu sağlayan $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in A$ elemanları ve $(F_{\alpha_i}, E_{\alpha_i}) \in \tau_{\alpha_i}$ kümeleri mevcuttur. A yönlendirilmiş küme olduğundan $\alpha_0 > \alpha_1, \ldots, \alpha_0 > \alpha_k$ koşulunu sağlayan $\alpha_0 \in A$ vardır. $(p^{\alpha_0}_{\alpha_i}, q^{\alpha_0}_{\alpha_i})\colon (X_{\alpha_0}, \tau_{\alpha_0}, E_{\alpha_0}) \longrightarrow (X_{\alpha_i}, \tau_{\alpha_i}, E_{\alpha_i})$ $i = \overline{1, k}$ soft sürekli olduğundan

$$\bigcap_{i=1}^{k}(p^{\alpha_0}_{\alpha_i}, q^{\alpha_0}_{\alpha_i})^{-1}(F_{\alpha_i}, E_{\alpha_i}) = (F_{\alpha_0}, E_{\alpha_0})$$

soft alt kümesi $(X_{\alpha_0}, \tau_{\alpha_0}, E_{\alpha_0})$ soft uzayında soft açık kümedir $(p^{\alpha_0}_{\alpha_i}, q^{\alpha_0}_{\alpha_i})\left(x^{\alpha_0}_{e_{\alpha_0}}\right) = x^{\alpha_1}_{e_{\alpha_1}}$ olduğundan $x^{\alpha_0}_{e_{\alpha_0}} \in (F_{\alpha_0}, E_{\alpha_0})$ dır ve $x_e \in (\pi_{\alpha_0}, q_{\alpha_0})^{-1}(F_{\alpha_0}, E_{\alpha_0})$ dır. O halde

$$(\pi_{\alpha_0}, q_{\alpha_0})^{-1}(p^{\alpha_0}_{\alpha_i}, q^{\alpha_0}_{\alpha_i})(F_{\alpha_i}, E_{\alpha_i}) = (\pi_{\alpha_i}, q_{\alpha_i})^{-1}(F_{\alpha_i}, E_{\alpha_i})$$

$$\prod_{\alpha \in A}(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \cap (p^{\alpha_0}_{\alpha_i}, q^{\alpha_0}_{\alpha_i})^{-1}(F_{\alpha_i}, E_{\alpha_i})$$

sağlanır. Böylece

$$x_e \in (\pi_{\alpha_0}, q_{\alpha_0})^{-1}(F_{\alpha_0}, E_{\alpha_0}) = (\pi_{\alpha_0}, q_{\alpha_0})^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k}(p^{\alpha_0}_{\alpha_i}, q^{\alpha_0}_{\alpha_i})^{-1}(F_{\alpha_i}, E_{\alpha_i})\right)$$

$$= \bigcap_{i=1}^{k} \left(\prod (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \cap \left(p_{\alpha_i}, q_{\alpha_i}\right)^{-1} \left(F_{\alpha_i}, E_{\alpha_i}\right) \right)$$

$$= \prod (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \cap \bigcap_{i=1}^{k} \left(p_{\alpha_i}^{\alpha_0}, q_{\alpha_i}^{\alpha_0}\right)^{-1} \left(F_{\alpha_i}, E_{\alpha_i}\right) \subset \prod (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \cap (H, E) \subset (G, E)$$

olur.

Teorem 4.1.6. $(\underline{X}, \underline{E}) = \left(\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha \epsilon \mathrm{A}} \,,\, \left\{ \left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right) \right\}_{\alpha < \alpha'} \right)$ soft topolojik uzayların ters sistemi olsun.

1) Eğer $\left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right) : \left(X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'}\right) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ birebir ise her $\alpha \epsilon$ A için

$$(\pi_\alpha, q_\alpha) : \lim_{\longleftarrow} (\underline{X}, \underline{E}) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$$

soft dönüşümleri de birebirdir.

2) Eğer $\left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right) : \left(X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'}\right) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ birebir ve örten ise her $\alpha \epsilon$ A için

$$(\pi_\alpha, q_\alpha) : \lim_{\longleftarrow} (\underline{X}, \underline{E}) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$$

soft dönüşümleri de birebir ve örtendir.

İspat)

1) $x_e = \{x_{e_\alpha}^\alpha\} \neq y_{e'} = \left\{y_{e'_\alpha}^\alpha\right\} \in \lim_{\longleftarrow} (\underline{X}, \underline{E})$ soft noktaları için

$$\left(\pi_{\alpha_1}, q_{\alpha_1}\right)(x_e) = \left(\pi_{\alpha_1}, q_{\alpha_1}\right)\left(y_{e'}\right)$$

olsun. Her $\alpha' > \alpha_1$ için $\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right) : \left(X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'}\right) \longrightarrow \left(X_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}, E_{\alpha_1}\right)$ birebir ve $\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right) = x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1} = y_{e'_{\alpha_1}}^{\alpha_1} = \left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)\left(y_{e'_{\alpha'}}^{\alpha'}\right)$ olduğundan $x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'} = y_{e'_{\alpha'}}^{\alpha'}$ dür. Keyfi $\alpha \epsilon$ A için A yönlendirilmiş küme olduğundan α, α_1 için $\alpha' > \alpha, \alpha' > \alpha_1$ sağlanacak şekilde $\alpha' \epsilon$ A vardır. O halde $x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1} = y_{e'_{\alpha_1}}^{\alpha_1}$ olduğu için $x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'} = y_{e'_{\alpha'}}^{\alpha'}$. Buradan ise $x_{e_\alpha}^\alpha = \left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right) = \left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(y_{e'_{\alpha'}}^{\alpha'}\right) = y_{e'_\alpha}^\alpha$ dır, yani $x_e = y_{e'}$ sağlanır

2) $\left(\pi_{\alpha_1}, q_{\alpha_1}\right): \varprojlim\left(\underline{X}, \underline{E}\right) \longrightarrow \left(X_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}, E_{\alpha_1}\right)$ soft dönüşümün örten olduğunu gösterelim. $x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1} \in \left(X_{\alpha_1}, \tau_{\alpha_1}, E_{\alpha_1}\right)$ keyfi bir soft nokta olsun. Her $\alpha' > \alpha_1$ için $x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'} = \left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)^{-1}\left(x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\right)$ alalım. Her $\alpha \epsilon$ A için $\alpha' > \alpha$ ve $\alpha' > \alpha_1$ sağlayan $\alpha' \epsilon$ A vardır. O zaman $x_{e_\alpha}^{\alpha} = \left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right) = \left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)^{-1}\left(x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\right)$ soft noktasını elde ederiz.

$x_e = \left\{x_{e_\alpha}^{\alpha}\right\}$ elemanının $\varprojlim\left(\underline{X}, \underline{E}\right)$ soft uzayına ait olduğunu gösterelim.

Her $\alpha < \widetilde{\alpha}$ için $\alpha' > \alpha$, $\alpha' > \alpha_1$ ve $\widetilde{\alpha}' > \widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\alpha}' > \alpha_1$ koşulu altında $\alpha', \widetilde{\alpha}'$ seçelim. O halde

$$x_{e_\alpha}^{\alpha} = \left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right) = \left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)^{-1}\left(x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\right)$$

$$x_{e_{\widetilde{\alpha}}}^{\widetilde{\alpha}} = \left(p_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha}'}, q_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha}'}\right)\left(x_{e_{\widetilde{\alpha}'}}^{\widetilde{\alpha}'}\right) = \left(p_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha}'}, q_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha}'}\right)\left(\left(p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha}'}, q_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha}'}\right)^{-1}\left(x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}\right)\right)$$

Şimdi $\alpha'' > \alpha'$, $\alpha'' > \widetilde{\alpha}'$ koşulu altında α'' elemanını alalım. O zaman

$$x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1} = \left(p_{\alpha_1}^{\alpha''}, q_{\alpha_1}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = \left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)\left(p_{\alpha'}^{\alpha''}, q_{\alpha'}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = \left(p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha}'}, q_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha}'}\right)\left(p_{\widetilde{\alpha}'}^{\alpha''}, q_{\widetilde{\alpha}'}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right)$$

ve

$$x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1} = \left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right) = \left(p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha}'}, q_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha}'}\right)\left(x_{e_{\widetilde{\alpha}'}}^{\widetilde{\alpha}'}\right)$$

olur.

$\left(p_{\alpha_1}^{\alpha'}, q_{\alpha_1}^{\alpha'}\right)$, $\left(p_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha}'}, q_{\alpha_1}^{\widetilde{\alpha}'}\right)$ soft fonksiyonları birebir, örten oldukları için $\left(p_{\alpha'}^{\alpha''}, q_{\alpha'}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}$ ve $\left(p_{\widetilde{\alpha}'}^{\alpha''}, q_{\widetilde{\alpha}'}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = x_{e_{\widetilde{\alpha}'}}^{\widetilde{\alpha}'}$ dır. O halde

$$\left(p_\alpha^{\alpha''}, q_\alpha^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = \left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(p_{\alpha'}^{\alpha''}, q_{\alpha'}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = x_{e_\alpha}^{\alpha},$$

$$\left(p_{\widetilde{\alpha}}^{\alpha''}, q_{\widetilde{\alpha}}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = \left(p_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha}'}, q_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\alpha}'}\right)\left(p_{\widetilde{\alpha}'}^{\alpha''}, q_{\widetilde{\alpha}'}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = x_{e_{\widetilde{\alpha}}}^{\widetilde{\alpha}}$$

dır. Buradan $\left(p_{\alpha}^{\tilde{\alpha}}, q_{\alpha}^{\tilde{\alpha}}\right)\left(x_{e_{\tilde{\alpha}}}^{\tilde{\alpha}}\right) = \left(p_{\alpha}^{\alpha''}, q_{\alpha}^{\alpha''}\right)\left(x_{e_{\alpha''}}^{\alpha''}\right) = x_e$ elde edilir. Böylece $x_e = \left(x_{e_\alpha}^{\alpha}\right)$ elemanı $\lim\limits_{\leftarrow}\left(\underline{X}, \underline{E}\right)$ soft uzayına ait olur ve $\left(\pi_{\alpha_1}, q_{\alpha_1}\right)(x_e) = x_{e_{\alpha_1}}^{\alpha_1}$ dir.

Sonuç 4.1.7. Eğer $\left(\underline{X}, \underline{E}\right) = \left(\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon\mathrm{A}}, \left\{\left(p_{\alpha}^{\alpha'}, q_{\alpha}^{\alpha'}\right)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$ soft topolojik uzayların ters sisteminde $\left(p_{\alpha}^{\alpha'}, q_{\alpha}^{\alpha'}\right): \left(X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'}\right) \longrightarrow \left(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha\right)$ soft homeomorfizma ise

$$(\pi_\alpha, q_\alpha): \lim_{\leftarrow}\left(\underline{X}, \underline{E}\right) \longrightarrow (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$$

soft fonksiyonu da bir soft homeomorfizmadır.

İspat) Teorem 4.1.6. dan (π_α, q_α) birebir, örten ve süreklidir. Teorem 4.1.5. den $\{(\pi_\alpha, q_\alpha)^{-1}(F_\alpha, E_\alpha): \alpha\epsilon\mathrm{A}, (\mathrm{F}_\alpha, \mathrm{E}_\alpha) \in \tau_\alpha\}$ ailesi $\lim\limits_{\leftarrow}\left(\underline{X}, \underline{E}\right)$ soft uzayının topolojisinin bir tabanıdır. O halde $(\pi_\alpha, q_\alpha)\left((\pi_\alpha, q_\alpha)^{-1}(F_\alpha, E_\alpha)\right) = (F_\alpha, E_\alpha)$ olduğundan (π_α, q_α) soft açık dönüşümdür. Böylece (π_α, q_α) bir soft homeomorfizmadır.

Lemma 4.1.8. $\left(\underline{X}, \underline{E}\right) = \left(\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon\mathrm{A}}, \left\{\left(p_{\alpha}^{\alpha'}, q_{\alpha}^{\alpha'}\right)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$, soft $T_2 -$ uzaylarının ters sistemi ise $\lim\limits_{\leftarrow}\left(\underline{X}, \underline{E}\right)$ soft uzayı $\prod\limits_{\alpha\in A}(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ soft uzayında soft kapalı kümedir.

İspat) $\lim\limits_{\leftarrow}\left(\underline{X}, \underline{E}\right)$ soft kümesinin soft kapalı olduğunu göstermek için

$$\left(\prod(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \Big/ \lim_{\leftarrow} \underline{E}\right) \setminus \lim_{\leftarrow}\left(\underline{X}, \underline{E}\right)$$ kümesinin soft açık olduğunu göstermek yeterlidir.

Her $x_e = \left\{x_{e_\alpha}^{\alpha}\right\} \in \left(\prod(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \Big/ \lim\limits_{\leftarrow} \underline{E}\right) \setminus \lim\limits_{\leftarrow}\left(\underline{X}, \underline{E}\right)$ için $x_e \neq \lim\limits_{\leftarrow}\left(\underline{X}, \underline{E}\right)$ olduğundan $\left(p_{\alpha}^{\beta}, q_{\alpha}^{\beta}\right)\left(x_{e_\beta}^{\beta}\right) \neq x_{e_\alpha}^{\alpha}$ sağlanacak şekilde $\alpha < \beta \in \mathrm{A}$ bulunabilir.

$x^{\alpha}_{e_{\alpha}}, \left(p^{\beta}_{\alpha}, q^{\beta}_{\alpha}\right)\left(x^{\beta}_{e_{\beta}}\right) \in (X_{\alpha}, \tau_{\alpha}, E_{\alpha})$ ve $(X_{\alpha}, \tau_{\alpha}, E_{\alpha})$ soft $T_2 -$ uzayı olduğundan

$$\exists\ (F_{\alpha}, E_{\alpha}), (G_{\alpha}, E_{\alpha}) \in \tau_{\alpha}\ ;\ x^{\alpha}_{e_{\alpha}} \in (F_{\alpha}, E_{\alpha}), \left(p^{\beta}_{\alpha}, q^{\beta}_{\alpha}\right)\left(x^{\beta}_{e_{\beta}}\right) \in (G_{\alpha}, E_{\alpha}) \text{ ve}$$

$$(F_{\alpha}, E_{\alpha}) \cap G_{\alpha}, E_{\alpha} = \Phi$$

elde edilir. $\prod(X_{\alpha}, \tau_{\alpha}, E_{\alpha}) \big/ \underset{\leftarrow}{\lim} \underline{E_{\alpha}}$ uzayında (X_{α}, E_{α}) nın yerine (F_{α}, E_{α}) soft

kümesini, (X_{β}, E_{β}) nın yerine $\left(p^{\beta}_{\alpha}, q^{\beta}_{\alpha}\right)^{-1}(G_{\alpha}, E_{\alpha})$ kümesini yazalım.

O halde $(F_{\alpha}, E_{\alpha}) \times \left(p^{\beta}_{\alpha}, q^{\beta}_{\alpha}\right)^{-1}(G_{\alpha}, E_{\alpha}) \times \prod\limits_{\gamma \neq \alpha, \beta}(X_{\gamma}, \tau_{\gamma}, E_{\gamma})$ soft kümesi x_e soft noktasının bir soft komşuluğudur ve $\underset{\leftarrow}{\lim}(\underline{X}, \underline{E})$ arakesiti boş soft kümesidir.

Böylece

$$x_e \in (F_{\alpha}, E_{\alpha}) \times \left(p^{\beta}_{\alpha}, q^{\beta}_{\alpha}\right)^{-1}(G_{\alpha}, E_{\alpha}) \times \prod_{\gamma \neq \alpha, \beta}(X_{\gamma}, \tau_{\gamma}, E_{\gamma}) \subset \prod(X_{\alpha}, \tau_{\alpha}, E_{\alpha}) \big/ \underset{\leftarrow}{\lim}(\underline{X}, \underline{E})$$

dir, yani $\prod(X_{\alpha}, \tau_{\alpha}, E_{\alpha}) \big/ \underset{\leftarrow}{\lim}(\underline{X}, \underline{E})$ soft açıktır ve $\underset{\leftarrow}{\lim}(\underline{X}, \underline{E})$ soft kapalı kümedir.

Teorem 4.1.9. $(\underline{X}, \underline{E}) = \left(\{(X_{\alpha}, \tau_{\alpha}, E_{\alpha})\}_{\alpha \in \mathrm{A}}\ , \left\{\left(p^{\alpha'}_{\alpha}, q^{\alpha'}_{\alpha}\right)\right\}_{\alpha < \alpha'}\right)$ boş olmayan soft kompakt $T_2 -$ uzayların ters sistemi ise $\underset{\leftarrow}{\lim}(\underline{X}, \underline{E})$ boş olmayan soft kümedir ve soft kompakttır.

İspat) Soft kompakt uzayların çarpımı $\prod(X_{\alpha}, \tau_{\alpha}, E_{\alpha})$ soft kompakttır.

$\prod(X_{\alpha}, \tau_{\alpha}, E_{\alpha}) \big/ \underset{\leftarrow}{\lim} E_{\alpha}$ uzayıda soft kompakttır. Lemma 4.1.8. den $\underset{\leftarrow}{\lim}(\underline{X}, \underline{E})$ soft kümesi $\prod(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\Big/\varprojlim E_\alpha$ uzayında soft kapalıdır. Soft kompakt uzayın soft kapalı kümesi soft kompakt olduğundan $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ soft kompakttır.

Şimdi $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ uzayının boş olmadığını gösterelim. Her $\beta \in A$ için

$$\left(Y_\beta,\prod(E_\alpha)\right)=\left\{\{x^\alpha_{e_\alpha}\}\in\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha,E_\alpha):\forall\,\gamma<\beta\ için\ \left(p^\beta_\gamma,q^\beta_\gamma\right)\left(x^\beta_{e_\beta}\right)=x^\gamma_{e_\gamma}\right\}$$

Bu soft küme boş olmayan soft kümedir. Gerçekten $(X_\beta,\tau_\beta,E_\beta)$ uzayında keyfi $z^\beta_{e_\beta}\in(X_\beta,\tau_\beta,E_\beta)$ soft noktasını alalım ve her $\gamma<\beta$ için $z^\gamma_{e_\gamma}=\left(p^\beta_\gamma,q^\beta_\gamma\right)(z)$, diğer $\sigma\in$ A indisleri için $z^\sigma_{e_\sigma}$ keyfi soft noktalar olsun. O halde $z_e=\{z^\alpha_{e_\alpha}\}$ soft noktası $\left(Y_\beta,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right)$ soft kümesine aittir. Lemma 4.1.8. de olduğu gibi $\left(Y_\beta,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right)$ soft kümesinin soft kapalı olduğu gösterilebilir. Açıktır ki her $\alpha<\beta$ için $\left(Y_\beta,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right)\subset\left(Y_\alpha,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right)$ dır. O halde $\left\{Y_\beta,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right\}$ ailesi $\prod_{\alpha\in A}(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ uzayında merkezleşmiş soft kapalı kümeler ailesidir ve bu uzay soft kompakt olduğundan $\bigcap\left(Y_\beta,\prod_{\alpha\in A}E_\alpha\right)\neq\Phi$ dir. Bu arakesitin noktaları $\varprojlim(\underline{X},\underline{E})$ olduğundan

$$\varprojlim(\underline{X},\underline{E})\neq\Phi.$$

Teorem 4.1.10. $(\underline{X},\underline{E})=\left(\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\epsilon\mathrm{A}}\ ,\left\{\left(p^{\alpha'}_\alpha,q^{\alpha'}_\alpha\right)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$, $(\underline{Y},\underline{E'})=\left(\{(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta)\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\ ,\left\{\left(r^{\beta'}_\beta,\gamma^{\beta'}_\beta\right)\right\}_{\beta<\beta'}\right)$ soft topolojik uzayların ters sistemleri,

$(\underline{f},\underline{g})=\left(\varphi:B\longrightarrow A,\{\,(f_\beta,g_\beta):(X_{\varphi(\beta)},\tau_{\varphi(\beta)},E_{\varphi(\beta)})\longrightarrow(Y_\beta,\tau'_\beta,E'_\beta)\}_{\beta\epsilon\mathrm{B}}\right)$ de ters sistemlerin soft dönüşümü olsun. Eğer her $\beta\epsilon$B için

$(f_\beta, g_\beta): (X_{\varphi(\beta)}, \tau_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}) \longrightarrow (Y_\beta, \tau'_\beta, E'_\beta)$ bir soft homeomorfizma ise

$\varprojlim(\underline{f}, \underline{g}) : \varprojlim(\underline{X}, \underline{E}) \longrightarrow \varprojlim(\underline{Y}, \underline{E'})$ de bir soft homeomorfizmadır.

İspat) Önce $\varprojlim(\underline{f}, \underline{g})$ soft dönüşümün birebir olduğunu gösterelim.

$x_e = \{x^{\alpha}_{e_\alpha}\}, y_{\bar{e}} = \{y^{\alpha}_{\bar{e}_\alpha}\} \in \varprojlim(\underline{X}, \underline{E})$ $, x_e \neq y_{\bar{e}}$ olsun. $x_e \neq y_{\bar{e}}$ olduğundan

$x^{\alpha_0}_{e_{\alpha_0}} \neq y^{\alpha_0}_{\bar{e}_{\alpha_0}}$ sağlanacak biçimde $\alpha_0 \in$ A vardır. $\varphi(\beta) > \alpha_0$ koşulu altında $\beta \epsilon$B seçelim.

$\left(p^{\varphi(\beta)}_{\alpha_0}, q^{\varphi(\beta)}_{\alpha_0}\right)\left(x^{\varphi(\beta)}_{e_{\varphi(\beta)}}\right) = x^{\alpha_0}_{e_{\alpha_0}} \neq y^{\alpha_0}_{\bar{e}_{\alpha_0}} = \left(p^{\varphi(\beta)}_{\alpha_0}, q^{\varphi(\beta)}_{\alpha_0}\right)\left(y^{\varphi(\beta)}_{\bar{e}_{\varphi(\beta)}}\right)$ olduğu için

$x^{\varphi(\beta)}_{e_{\varphi(\beta)}} \neq y^{\varphi(\beta)}_{\bar{e}_{\varphi(\beta)}}$ dir. (f_β, g_β) soft dönüşümü birebir olduğundan

$(f_\beta, g_\beta)\left(x^{\varphi(\beta)}_{e_{\varphi(\beta)}}\right) \neq (f_\beta, g_\beta)\left(y^{\varphi(\beta)}_{\bar{e}_{\varphi(\beta)}}\right)$ ve böylece $\varprojlim(\underline{f}, \underline{g})$ soft dönüşümü birebirdir.

Şimdi $\varprojlim(\underline{f}, \underline{g})$ soft dönüşümün örten olduğunu gösterelim.

$y_{e'} = \left\{y^{\beta}_{e'_\beta}\right\} \in \varprojlim(\underline{Y}, \underline{E'})$ keyfi eleman olsun.

$(f_\beta, g_\beta): (X_{\varphi(\beta)}, \tau_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}) \longrightarrow (Y_\beta, \tau'_\beta, E'_\beta)$ soft dönüşümü örten olduğundan

$(f_\beta, g_\beta)\left(z^{\varphi(\beta)}_{\bar{e}_{\varphi(\beta)}}\right) = y^{\beta}_{e'_\beta}$ sağlanacak şekilde $z^{\varphi(\beta)}_{\bar{e}_{\varphi(\beta)}}$ soft noktası bulunabilir. Her $\alpha \in$ A için $\varphi(\beta) > \alpha$ koşulunu sağlayan $\beta \epsilon$ B elemanını alalım ve $x^{\alpha}_{e_\alpha} = \left(p^{\varphi(\beta)}_{\alpha}, q^{\varphi(\beta)}_{\alpha}\right)\left(z^{\varphi(\beta)}_{\bar{e}_{\varphi(\beta)}}\right)$ olsun. $x^{\alpha}_{e_\alpha}$ soft noktası $\beta \epsilon$ B elemanından bağımsızdır,

$x_e = \{x^{\alpha}_{e_\alpha}\} \in \varprojlim(\underline{X}, \underline{E})$ ve $\varprojlim(\underline{f}, \underline{g})(x_e) = y_{e'}$ dir.

İspatı tamamlamak için $\varprojlim(\underline{f}, \underline{g})$ soft dönüşümün soft açık olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için Teorem 4.1.5. den yararlanarak her $\beta \epsilon$ B ve her

$\left(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}\right) \in \tau_{\varphi(\beta)}$ soft kümesi için $\left(\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)}\right)^{-1}\left(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}\right)$ soft kümesinin $\underset{\longleftarrow}{\lim}\left(\underline{f}, \underline{g}\right)$ soft dönüşümü altında görüntüsünün soft açık olduğunu göstermek yeterlidir. Her $\beta \epsilon$ B için

$$\left(f_\beta, g_\beta\right) \circ \left(\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)}\right) = \left(\pi_\beta, q_\beta\right) \circ \underset{\longleftarrow}{\lim}\left(\underline{f}, \underline{g}\right)$$

olduğundan

$$\left(\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)}\right)^{-1}\left(f_\beta, g_\beta\right)^{-1} = \left[\underset{\longleftarrow}{\lim}\left(\underline{f}, \underline{g}\right)\right]^{-1}\left(\pi_\beta, q_\beta\right)^{-1}$$

olur. $\left(f_\beta, g_\beta\right)\left(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}\right) = \left(G_\beta, E'_\beta\right)$ olsun. $\left(f_\beta, g_\beta\right)$ soft homeomorfizma olduğundan

$$\left(\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)}\right)^{-1}\left(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}\right) = \left(\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)}\right)^{-1}\left(f_\beta, g_\beta\right)^{-1}\left(\left(f_\beta, g_\beta\right)\left(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}\right)\right)$$

$$= \left[\underset{\longleftarrow}{\lim}\left(\underline{f}, \underline{g}\right)\right]^{-1}\left(\pi_\beta, q_\beta\right)^{-1}\left(\left(f_\beta, g_\beta\right)\left(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}\right)\right)$$

dır. Buradan ise

$$\underset{\longleftarrow}{\lim}\left(\underline{f}, \underline{g}\right)\left[\left(\pi_{\varphi(\beta)}, q_{\varphi(\beta)}\right)^{-1}\left(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}\right)\right] =$$

$$= \underset{\longleftarrow}{\lim}\left(\underline{f}, \underline{g}\right) \circ \left(\left[\underset{\longleftarrow}{\lim}\left(\underline{f}, \underline{g}\right)\right]^{-1}\left(\pi_\beta, q_\beta\right)^{-1}\left(f_\beta, g_\beta\right)\left(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}\right)\right)$$

dır. $\left(\pi_\beta, q_\beta\right)^{-1}\left(f_\beta, g_\beta\right)\left(F_{\varphi(\beta)}, E_{\varphi(\beta)}\right)$ soft kümesi soft açıktır.

4.2. Soft Topolojik Uzayların Düz Sistemleri

Soft topolojik uzaylar kategorisinde düz sistemleri ve onların limitlerini tanımlamak için soft topolojik uzayların bölüm uzaylarını ve soft topolojik toplamı tanımlayalım.

(X, τ, E) bir soft topolojik uzay ve X kümesinde " $\sim_1$ " denklik bağıntısı, E kümesinde " $\sim_2$ " denklik bağıntısı verilsin. $p: X \longrightarrow X/_{\sim_1}$, $q: E \longrightarrow E/_{\sim_2}$ kanonik dönüşümler olsun. O zaman $(p,q):(X,\tau,E) \longrightarrow \left({}^{X}/_{\sim_1}, {}^{E}/_{\sim_2}\right)$ soft topolojik uzaydan soft kümeler kümesine giden bir dönüşümdür. $\left({}^{X}/_{\sim_1}, {}^{E}/_{\sim_2}\right)$ de $\tilde{\tau}$ soft topolojisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$\left(F, {}^{E}/_{\sim_2}\right) \in \tilde{\tau} \Leftrightarrow (p,q)^{-1}\left(F, {}^{E}/_{\sim_2}\right) \in \tau$$

Açıktır ki $\tilde{\tau}$ bir soft topolojidir ve bu topolojide (p,q) soft dönüşümü soft süreklidir.

Tanım 4.2.1. $\left({}^{X}/_{\sim_1}, \tilde{\tau}, {}^{E}/_{\sim_2}\right)$ soft topolojik uzayına (X,τ,E) soft uzayının bölüm uzayı denir.

Örnek 4.2.2. $E = \{e_1, e_2, e_3\}$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ olsun.

$$F_1(e_1) = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad F_1(e_2) = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad F_1(e_3) = \{x_4, x_5\},$$

$$F_2(e_1) = \{x_1, x_2\}, \quad F_2(e_2) = \{x_2, x_4, x_5\}, \quad F_2(e_3) = \{x_4, x_5\},$$

$$F_3(e_1) = \{x_1, x_2\}, \quad F_3(e_2) = \{x_2\}, \quad F_3(e_3) = \{x_4, x_5\},$$

$$F_4(e_1) = \{x_1, x_2, x_3\}, \quad F_4(e_2) = X, \quad F_4(e_3) = \{x_4, x_5\}$$

$\tau = \{\tilde{X}, \Phi, (F_1, E), (F_2, E), (F_3, E), (F_4, E)\}$ ailesi bir soft topolojidir. E kümesinde $e_1 \sim e_2$, $e_3 \sim e_3$, X kümesinde $x_1 \sim x_2 \sim x_3$, $x_4 \sim x_5$ denklik bağıntıları verilsin. ${}^{E}/_{\sim} = \{[e_1], e_3\}$, ${}^{X}/_{\sim} = \{[x_1], [x_4]\}$ bölüm kümeleri için $\tilde{\tau}$ soft topoloji aşağıdaki soft kümelerden oluşur

$$\tilde{\tau} = \left\{ {}^{\tilde{X}}/_{\tau} , \Phi , \left(\mathrm{G}, {}^{E}/_{\sim}\right) \right\}$$

$$G([e_1]) = [x_1] , G([e_3]) = [x_4]$$

Dikkat edelim ki soft bölüm uzayında her $x_\alpha \in (X,\tau,E)$ soft noktanın sınıfı $[x]_{[\alpha]}$ şeklinde bir soft noktadır.

Şimdi $(f,g):(X,\tau,E)\longrightarrow(Y,\tau',E')$ soft topolojik uzayların soft sürekli dönüşümü olsun, X,E,Y,E' kümelerinde "$\sim_X$", "$\sim_E$", "$\sim_Y$", "$\sim_{E'}$" denklik bağıntıları verilsin ve f,g dönüşümleri denklik bağıntılarını korusun. O halde (f,g) soft dönüşümü soft bölüm uzaylarının $(\tilde{f},\tilde{g}):\left(X/\sim_X,\tilde{\tau},E/\sim_E\right)\longrightarrow\left(Y/\sim_Y,\widetilde{\tau'},E'/\sim_{E'}\right)$ soft dönüşümünü belirler, burada her $[x]_{[\alpha]}$ soft noktası için $(\tilde{f},\tilde{g})\left([x]_{[\alpha]}\right)=[f(x)]_{[g(\alpha)]}$ şeklinde tanımlanır.

Önerme 4.2.3. Eğer $(f,g):(X,\tau,E)\longrightarrow(Y,\tau',E')$ soft sürekli dönüşüm denklik bağıntılarını korursa $(\tilde{f},\tilde{g}):\left(X/\sim_X,\tilde{\tau},E/\sim_E\right)\longrightarrow\left(Y/\sim_Y,\widetilde{\tau'},E'/\sim_{E'}\right)$ soft dönüşümü soft süreklidir ve $(p_1,q_1):(X,\tau,E)\longrightarrow\left(X/\sim_X,\tilde{\tau},E/\sim_E\right)$, $(p_2,q_2):(Y,\tau',E')\longrightarrow\left(Y/\sim_Y,\widetilde{\tau'},E'/\sim_{E'}\right)$ soft kanonik dönüşümler olmak üzere aşağıdaki diyagram komutatiftir

$$\begin{tikzcd}
(X,\tau,E) \arrow[r, "{(f,g)}"] \arrow[d, "{(p_1,q_1)}"'] & (Y,\tau',E') \arrow[d, "{(p_2,q_2)}"] \\
\left(X/\sim_X,\tilde{\tau},E/\sim_E\right) \arrow[r, "{(\tilde{f},\tilde{g})}"'] & \left(Y/\sim_Y,\widetilde{\tau'},E'/\sim_{E'}\right)
\end{tikzcd}$$

$\{(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ soft topolojik uzaylar ailesi ayrık olsun, yani $\forall\ \alpha\neq\alpha'\in A$ için

$$X_\alpha\cap X_{\alpha'}=\emptyset\,,E_\alpha\cap\ E_{\alpha'}=\emptyset$$

olsun. $\tilde{X}$ ile bu soft topolojik uzayların soft noktalarının birleşimini gösterelim ve

$E=\bigcup\limits_{\alpha\in A}E_\alpha$ kümesi üzerinde soft küme ancak $\tilde{X}$ kümesinin soft noktalarının birleşimi şeklinde gösterilen soft kümeler ele alınacak. Bu şekildeki soft kümeler ailesinin birleşimini $(\tilde{X},E)$ ile gösterelim.

Örnek 4.2.4. $X_1 = \{x^1, x^2, x^3\}$, $E_1 = \{e_1, e_2\}$, $X_2 = \{x^4, x^5\}$, $E_2 = \{e_3, e_4\}$ olsun. O halde $\tilde{X} = \left\{x^1_{e_1}, x^1_{e_2}, x^2_{e_1}, x^2_{e_2}, x^3_{e_1}, x^3_{e_2}, x^4_{e_3}, x^4_{e_4}, x^5_{e_3}, x^5_{e_4}\right\}$ dir. Eğer $X = X_1 \cup X_2$ kümesinde $E = E_1 \cup E_2$ kümesi üzerinde soft kümeleri ele alırsak o zaman $\tilde{X}$ ye ait olmayan $x^1_{e_3}$, $x^1_{e_4}$, $x^2_{e_3}$, $x^2_{e_4}$, $x^3_{e_3}$, $x^3_{e_4}$, $x^4_{e_1}$, $x^4_{e_2}$, $x^5_{e_1}$, $x^4_{e_2}$ soft noktaları bulunmaktır.

$(\tilde{X}, E)$ de τ soft topoloji tanımlayalım.

Tanım 4.2.5. $(F, E) \in \tau$ dur $\Leftrightarrow \forall\, \alpha \in \mathrm{A}$ için $(F, E) \cap (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \in \tau_\alpha$ dır.

τ'nun bir soft topoloji olduğu açıktır.

Tanım 4.2.6. $(\tilde{X}, \tau, E)$ soft topolojik uzaya, $\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ soft topolojik uzaylar ailesinin soft topolojik toplamı denir ve $\sum (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ ile gösterilir.

Açıktır ki eğer her $\alpha \in \mathrm{A}$ için $i_\alpha = X_\alpha \longrightarrow X = \bigcup X_\alpha$, $j_\alpha = E_\alpha \longrightarrow E = \bigcup E_\alpha$ gömme dönüşümleri ise

$$(i_\alpha, j_\alpha) \colon (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (\tilde{X}, \tau, E)$$

soft dönüşümü soft süreklidir.

Örnek 4.2.7. $E_1 = \{1,2\}$, $E_2 = \{3,4\}$, $X_1 = \{x_1, x_2, x_3\}$, $X_2 = \{x_4, x_5\}$ olsun. X_1 ve X_2 de sırasıyla $\tau_1 = \left\{\Phi, \widetilde{X_1}, (F_1, E_1), (F_2, E_1), (F_3, E_1)\right\}$, $\tau_2 = \left\{\Phi, \widetilde{X_2}, (G_1, E_2), (G_2, E_2), (G_3, E_2)\right\}$ iki soft topolojik uzay tanımlansın. Burada $(F_1, E_1), (F_2, E_1), (F_3, E_1), (G_1, E_2), (G_2, E_2)$ ve (G_3, E_2) soft kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F_1(1) = \{x_1, x_2\}, \qquad F_1(2) = \{x_2, x_3\},$$

$$F_2(1) = \{x_3\}, \qquad F_2(2) = \{x_1, x_2\},$$

$$F_3(1) = \emptyset, \qquad F_3(2) = \{x_2\},$$

ve

$G_1(3) = \{x_4\}, \qquad G_1(4) = \{x_5\},$

$G_2(3) = X_2, \qquad G_2(4) = \{x_4\},$

$G_3(3) = \{x_4\}, \qquad G_3(3) = \emptyset.$

Şimdi (X_1, τ_1, E_1) ve (X_2, τ_2, E_2) soft topolojik uzaylarının (X, τ, E) soft topolojik toplamını tanımlayalım, burada $X = X_1 \cup X_2 = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $E = E_1 \cup E_2 = \{1,2,3,4\}$ ve

$$\tau = \left\{\Phi, \widetilde{X_1}, (P_1, E), (P_2, E), (P_3, E), (P_4, E), (P_5, E), (P_6, E), (P_7, E), (P_8, E), (P_9, E)\right\}$$

dir. $(P_1, E), (P_2, E), (P_3, E), (P_4, E), (P_5, E), (P_6, E), (P_7, E), (P_8, E), (P_9, E)$ soft kümeleri X üzerinde aşağıdaki gibi tanımlanır:

$P_1(1) = \{x_1, x_2\}, \quad P_1(2) = \{x_2, x_3\}, \quad P_1(3) = \{x_4\}, \quad P_1(4) = \{x_5\},$

$P_2(1) = \{x_1, x_2\}, \quad P_2(2) = \{x_2, x_3\}, \quad P_2(3) = X_2, \quad P_2(4) = \{x_4\},$

$P_3(1) = \{x_1, x_2\}, \quad P_3(2) = \{x_2, x_3\}, \quad P_3(3) = \{x_4\}, \quad P_3(4) = \emptyset,$

$P_4(1) = \{x_3\}, \quad P_4(2) = \{x_1, x_2\}, \quad P_4(3) = \{x_4\}, \quad P_4(4) = \{x_5\},$

$P_5(1) = \{x_3\}, \quad P_5(2) = \{x_1, x_2\}, \quad P_5(3) = X_2, \quad P_5(4) = \{x_4\},$

$P_6(1) = \{x_3\}, \quad P_6(2) = \{x_1, x_2\}, \quad P_6(3) = \{x_4\}, \quad P_6(4) = \emptyset,$

$P_7(1) = \emptyset, \quad P_7(2) = \{x_2\}, \quad P_7(3) = \{x_4\}, \quad P_7(4) = \{x_5\},$

$P_8(1) = \emptyset, \quad P_8(2) = \{x_2\}, \quad P_8(3) = X_2, \quad P_8(4) = \{x_4\},$

$P_9(1) = \emptyset, \quad P_9(2) = \{x_2\}, \quad P_9(3) = \{x_4\}, \quad P_9(4) = \emptyset.$

$\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ ve $\{(Y_\alpha, \tau'_\alpha, E'_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ soft topolojik uzayların ikişerli ayrıklarının aileleri ve $(\tilde{X}, \tau, E) = \sum (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$, $(\tilde{Y}, \tau', E') = \sum (Y_\alpha, \tau'_\alpha, E'_\alpha)$ iki soft topolojik toplam olsun. Eğer $\{(f_\alpha, g_\alpha): (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (Y_\alpha, \tau'_\alpha, E'_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}}$ soft sürekli dönüşümlerin bir ailesi ise $\sum(f_\alpha, g_\alpha) : \sum(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow \sum(Y_\alpha, \tau'_\alpha, E'_\alpha)$ soft dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanır:

$\forall\, x_e \in \tilde{X}$ için $x_e \in (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ sağlanacak şekilde tek $\alpha_0 \in$ A vardır.

O halde $\sum(f_\alpha, g_\alpha)\,(x_e) = \left(f_{\alpha_0}(x)\right)_{\left(g_{\alpha_0}(e)\right)}$ formülü ile verilir.

Lemma 4.2.8. $(f,g) = \sum(f_\alpha, g_\alpha) : \sum(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow \sum(Y_\alpha, \tau'_\alpha, E'_\alpha)$ soft süreklidir ve $\sum : \prod Stop \longrightarrow Stop$ bir funktordur.

Eğer her $\alpha \in$ A için $(f_\alpha, g_\alpha) : (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (Y, \tau', E')$ soft sürekli dönüşüm ise $(f,g) = \nabla(f_\alpha, g_\alpha) : \sum(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (Y, \tau', E')$ soft dönüşümünü her $x_e \in \sum(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ soft noktası için $x_e \in \left(X_{\alpha_0}, \tau_{\alpha_0}, E_{\alpha_0}\right)$ olmak üzere

$$(f,g)(x_e) = \left(f_{\alpha_0}(x)\right)_{\left(g_{\alpha_0}(e)\right)}$$

formülü ile tanımlayalım. Eğer $(f,g) : \sum(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (Y, \tau', E')$ bir soft dönüşüm ise her $\alpha \in$ A için $(f,g) \circ (i_\alpha, j_\alpha) : (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (Y, \tau', E')$ soft dönüşümleri için $\nabla(f,g) \circ (i_\alpha, j_\alpha) = (f,g)$ sağlanır.

Önerme 4.2.9. $(f,g) : \sum(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (Y, \tau', E')$ soft süreklidir $\Longleftrightarrow$ Her $\alpha \in$ A için $(f,g) \circ (i_\alpha, j_\alpha) : (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (Y, \tau', E')$ soft süreklidir.

Tanım 4.2.10. Her $D :$ A $\longrightarrow Stop$ funktoruna soft topolojik uzaylar kategorisinde düz sistem denir, D funktorunun limitine düz limit denir, burada A yönlendirilmiş bir kümedir.

$Stop$ kategorisinde her düz sistem

$$\left(\overline{X}, \overline{E}\right) = \left(\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}},\ \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right) : (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'})\right\}_{\alpha < \alpha'}\right)$$

şeklinde bir sistemdir. Bu sistemden

$$\left(\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}},\ \left\{p_\alpha^{\alpha'} : X_\alpha \longrightarrow X_{\alpha'}\right\}_{\alpha < \alpha'}\right) \qquad (4.2.1)$$

$$\left(\{E_\alpha\}_{\alpha\in A},\ \left\{q_\alpha^{\alpha'}: E_\alpha \longrightarrow E_{\alpha'}\right\}_{\alpha<\alpha'}\right) \qquad (4.2.2)$$

kümelerin iki düz sistemini oluşturabiliriz. Bu sistemlerin düz limitini ele alalım:

$$X = \varinjlim_{\alpha\in A} X_\alpha\,, E = \varinjlim_{\alpha\in A} E_\alpha$$

$(X,\tau,E) = \sum(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ soft topolojik toplamda aşağıdaki şekilde denklik bağıntısı verelim:

$$x_e \sim y_{e'}\ \ (x_e \in (X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha),\ y_{e'} \in (X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'})\,) \Leftrightarrow \exists\ \alpha'' > \alpha > \alpha' \text{ ve}$$

$$\left(p_\alpha^{\alpha''}, q_\alpha^{\alpha''}\right)(x_e) = \left(p_\alpha^{\alpha''}, q_\alpha^{\alpha''}\right)(y_{e'}) \text{ dır.}$$

Bu denklik bağıntısına göre (X,τ,E)soft uzayın bölüm uzayını $\varinjlim\left(\overline{X},\overline{E}\right)$ ile gösterelim.

Verilen denklik bağıntısına göre eğer $x_e \sim y_{e'}$ ise $x \sim y$ ve $e \sim e'$ olmaktadır. O halde $\varinjlim\left(\overline{X},\overline{E}\right)$ uzayının her soft noktası $[x]_{[e]}$ şeklindedir. Dolayısıyla

$$\varinjlim\left(\overline{X},\overline{E}\right) = \left(\varinjlim_{\alpha\in A} X_\alpha\,, \tilde{\tau}, \varinjlim_{\alpha\in A} E_\alpha\right)$$

şeklinde bir soft topolojik uzaydır.

Teorem 4.2.11. $Stop$ kategorisinde her düz sistemin limiti vardır ve tektir.

İspat) Her $\alpha \in A$ için $(i_\alpha, j_\alpha): (X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha) \longrightarrow \sum(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha)$ gömme dönüşümü,

$(p,q): \sum(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha) \longrightarrow \varinjlim\left(\overline{X},\overline{E}\right)$ kanonik dönüşüm olmak üzere

$(\pi_\alpha, q_\alpha) = (p,q) \circ (i_\alpha, j_\alpha): (X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha) \longrightarrow \varinjlim\left(\overline{X},\overline{E}\right)$ olsun.

Açıktır ki her $\alpha \in A$ için

$$\begin{tikzcd}
(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha) \arrow[d, "(p_\alpha^{\alpha'},\, q_\alpha^{\alpha'})"'] \arrow[dr, "(\pi_\alpha,\, q_\alpha)"] & \\
(X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'}) \arrow[r, "(\pi_{\alpha'},\, q_{\alpha'})"'] & \varinjlim(\overline{X},\overline{E})
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatiftir. $\varinjlim(\overline{X},\overline{E})$ soft uzayın düz limiti olduğunu kanıtlayalım.

Bunun için her (Y,τ',E') soft topolojik uzay ve

$$\begin{tikzcd}
(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha) \arrow[d, "(p_\alpha^{\alpha'},\, q_\alpha^{\alpha'})"'] \arrow[dr, "(\varphi_\alpha,\, \psi_\alpha)"] & \\
(X_{\alpha'},\tau_{\alpha'},E_{\alpha'}) \arrow[r, "(\varphi_{\alpha'},\, \psi_{\alpha'})"'] & (Y,\tau',E')
\end{tikzcd}$$

diyagramını komutatif yapan $\{(\varphi_\alpha,\psi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ soft sürekli dönüşümler için

$$\begin{tikzcd}
 & (Y,\tau',E') \\
(X_\alpha,\tau_\alpha,E_\alpha) \arrow[ur, "(\varphi_\alpha,\, \psi_\alpha)"] \arrow[r, "(\pi_\alpha,\, q_\alpha)"'] & \varinjlim(\overline{X},\overline{E}) \arrow[u, "(f,g)"']
\end{tikzcd} \qquad (4.2.3)$$

diyagramı komutatif yapan tek $(f,g)\colon (Y,\tau',E') \longrightarrow \varinjlim(\overline{X},\overline{E})$ soft sürekli dönüşümün var olduğunu göstermemiz gerekir. $\forall\ [x]_{[e]} \in \varinjlim(\overline{X},\overline{E})$ soft noktası için $(\pi_\alpha, q_\alpha)(x_{e_\alpha}^\alpha) \subset [x]_{[e]}$ sağlanacak şekilde $\alpha \in \mathrm{A}$ ve $x_{e_\alpha}^\alpha \in (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ vardır. O halde (f, g) soft dönüşümünü

$$(f, g)([x]_{[e]}) = (\varphi_\alpha, \psi_\alpha)(x_{e_\alpha}^\alpha)$$

formülü ile verelim. (f, g) soft dönüşümü iyi tanımlıdır ve $(4.2.3)$ diyagramı komutatiftir.

$$(\overline{X}, \overline{E}) = \left(\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}},\ \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\right\}_{\alpha < \alpha'}\right) \qquad (4.2.4)$$

$$(\overline{Y}, \overline{E'}) = \left(\left\{\left(Y_\beta, \tau'_\beta, E'_\beta\right)\right\}_{\beta \in \mathrm{B}},\ \left\{\left(r_\beta^{\beta'}, \varkappa_\beta^{\beta'}\right)\right\}_{\beta < \beta'}\right) \qquad (4.2.5)$$

iki düz sistem, $\varphi\colon \mathrm{A} \longrightarrow B$ izoton dönüşüm ve $\forall\ \alpha \in \mathrm{A}$ için

$$(f_\alpha, g_\alpha)\colon (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow \left(Y_{\varphi(\alpha)}, \tau'_{\varphi(\alpha)}, E'_{\varphi(\alpha)}\right)$$

soft sürekli dönüşüm olsun.

Tanım 4.2.12. Eğer her $\alpha < \alpha'$ için

$$\begin{tikzcd}
(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \arrow[r, "(f_\alpha, g_\alpha)"] \arrow[d, "\left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)"'] & \left(Y_{\varphi(\alpha)}, \tau'_{\varphi(\alpha)}, E'_{\varphi(\alpha)}\right) \arrow[d, "\left(r_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha')}, \varkappa_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\alpha')}\right)"] \\
(X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'}) \arrow[r, "(f_{\alpha'}, g_{\alpha'})"'] & \left(Y_{\varphi(\alpha')}, \tau'_{\varphi(\alpha')}, E'_{\varphi(\alpha')}\right)
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatif ise

$$(\overline{f}, \overline{g}) = (\varphi\colon \mathrm{A} \longrightarrow B,\ \{f_\alpha, g_\alpha\}_{\alpha \in \mathrm{A}}) \qquad (4.2.6)$$

ailesine $(4.2.4)$ düz sisteminden $(4.2.5)$ düz sistemine giden morfizma denir.

Açıktır ki soft topolojik uzayların düz sistemleri ve onların morfizmaları bir kategori oluşturur. Bu kategoriyi $Dir(Stop)$ ile gösterelim.

$(\overline{f},\overline{g}) = (\varphi\colon \mathrm{A} \longrightarrow B,\ \{f_\alpha, g_\alpha\}_{\alpha\in \mathrm{A}})$ düz sistemlerin morfizması olsun. O zaman

$$\sum_{\alpha\in A}(f_\alpha, g_\alpha) : \sum_{\alpha\in A}(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow \sum_{\alpha\in A}\left(Y_{\varphi(\alpha)}, \tau'_{\varphi(\alpha)}, E'_{\varphi(\alpha)}\right)$$

soft sürekli dönüşüm olmaktadır ve bu dönüşüm düz limitlerdeki denklik bağıntısını korumaktadır. O halde $\sum(f_\alpha, g_\alpha)$ soft dönüşümü bölüm uzaylarının soft dönüşümünü tanımlar. Bu soft dönüşümü

$$\lim_{\longrightarrow}(\overline{f},\overline{g}) : \lim_{\longrightarrow}(\overline{X},\overline{E}) \longrightarrow \lim_{\longrightarrow}(\overline{Y},\overline{E'})$$

ile gösterelim.

Teorem 4.2.13. $\lim\limits_{\longrightarrow}\colon Dir(Stop) \longrightarrow Stop$ bir funktordur.

Teorem 4.2.14. $(\overline{X},\overline{E}) = \left(\{(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha\in \mathrm{A}},\ \left\{\left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\right\}_{\alpha<\alpha'}\right)$ soft topolojik uzayların düz sistemi olsun.

1) Eğer her $\left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\colon (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'})$ soft dönüşümü birebir ise $(\pi_\alpha, q_\alpha)\colon (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow \lim\limits_{\longrightarrow}(\overline{X},\overline{E})$ soft dönüşümü de birebirdir.

2) Eğer her $\left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\colon (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'})$ soft dönüşümü birebir ve örten ise $(\pi_\alpha, q_\alpha)\colon (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow \lim\limits_{\longrightarrow}(\overline{X},\overline{E})$ soft dönüşümü de birebir ve örtendir.

İspat)

1) $x_{e_\alpha}^\alpha, y_{e'_\alpha}^\alpha \in (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha), x_{e_\alpha}^\alpha \neq y_{e'_\alpha}^\alpha$ ve $(\pi_\alpha, q_\alpha)(x_{e_\alpha}^\alpha) = (\pi_\alpha, q_\alpha)\left(y_{e'_\alpha}^\alpha\right)$ olsun. $x_{e_\alpha}^\alpha \neq y_{e'_\alpha}^\alpha$ olduğundan $x^\alpha \neq y^\alpha$ veya $e_\alpha \neq e'_\alpha$ dır. Varsayımdan $x_{e_\alpha}^\alpha, y_{e'_\alpha}^\alpha$ soft noktaları denktir. O halde

$$\left(p_\alpha^\beta, q_\alpha^\beta\right)(x_{e_\alpha}^\alpha) = \left(p_\alpha^\beta, q_\alpha^\beta\right)\left(y_{e'_\alpha}^\alpha\right)$$

koşulunu sağlayan $\beta > \alpha$ olacak şekilde $\beta \in \mathrm{A}$ vardır. $\left(p_\alpha^\beta, q_\alpha^\beta\right)$ birebir olduğundan

$$x_{e_\alpha}^{\alpha} = y_{e'_\alpha}^{\alpha} \Longrightarrow x^\alpha = y^\alpha \text{ ve } e_\alpha = e'_\alpha$$

olur. Böylece (π_α, q_α) soft dönüşümü birebirdir.

2) (π_α, q_α) soft dönüşümün örten olduğunu gösterelim.

$[x_e] \in \varinjlim(\overline{X}, \overline{E})$ keyfi bir soft nokta olsun.

$(p,q): \sum(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow \varinjlim(\overline{X}, \overline{E})$ kanonik dönüşümü örten olduğundan $(p,q)(\tilde{x}_{\tilde{e}}) = [x_e]$ koşulunu sağlayan $\tilde{x}_{\tilde{e}} \in \sum(X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ soft noktası vardır. Soft topolojik toplamın tanımından $\tilde{x}_{\tilde{e}} = x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'} \in (X_{\alpha'}, \tau_{\alpha'}, E_{\alpha'})$ dır. O halde $(\pi_{\alpha'}, q_{\alpha'})\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right) = [x_e]$ sağlanır. $\alpha, \alpha' \in$ A için $\alpha'' > \alpha, \alpha'' > \alpha'$ koşulu altında $\alpha'' \in$ A elemanını seçelim.

$$\left(p_\alpha^{\alpha''}, q_\alpha^{\alpha''}\right): (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha) \longrightarrow (X_{\alpha''}, \tau_{\alpha''}, E_{\alpha''})$$

soft dönüşümü örten olduğundan $\left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right) \in (X_{\alpha''}, \tau_{\alpha''}, E_{\alpha''})$ soft noktası için

$$\left(p_\alpha^{\alpha''}, q_\alpha^{\alpha''}\right)\left(x_{e_\alpha}^{\alpha}\right) = \left(p_\alpha^{\alpha'}, q_\alpha^{\alpha'}\right)\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right)$$

sağlanacak biçimde $x_{e_\alpha}^{\alpha} \in (X_\alpha, \tau_\alpha, E_\alpha)$ soft noktası vardır. O halde $x_{e_\alpha}^{\alpha}, x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}$ soft noktaları denktir ve

$$(\pi_\alpha, q_\alpha)\left(x_{e_\alpha}^{\alpha}\right) = (\pi_{\alpha'}, q_{\alpha'})\left(x_{e_{\alpha'}}^{\alpha'}\right) = [x_e]$$

dir. Yani (π_α, q_α) dönüşümleri örtendir.

KAYNAKLAR

[1] U. Acar, F. Koyuncu, B. Tanay, Soft sets and soft rings, Comput. Math. Appl., 59, (2010) 3458-3463.

[2] H. Aktaş, N. Çağman, Soft sets and soft group, Information Science, 177, (2007) 2726-2735.

[3] M. I. Ali, F. Feng, X. Y. Liu, W. K. Min, M. Shabir, On some new operations in soft set theory, Computers and Math. with Appl., 57, (2009) 1547-1553.

[4] K. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 20, (1986) 87-96.

[5] K. Atanassov, New operations defined over the intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 61, (1999) 137-142.

[6] A. Aygunoglu, H. Aygun, Some notes on soft topological spaces, Neural Comput & Applic, DOI: 10.1007/s00521-011-0722-3, 2011.

[7] Sadi Bayramov, Çiğdem Gündüz (Aras), Genel Topoloji, 2004.

[8] S. Bayramov, C. Gunduz (Aras), Inverse and direct systems in the category of intuitionistic fuzzy M-groups, İntern. Math. Forum, 19(4), (2009) 897-918.

[9] S. Bayramov, C. Gunduz (Aras), On isomorphism theorems of fuzzy soft groups, ICMS, Bolu, Turkey, (2010) 23-27.

[10] S. Bayramov, C. Gunduz (Aras) and M. İ. Yazar, Inverse systems of fuzzy soft modules, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics, 4(2), (2012) 349-363.

[11] S. Bayramov, C. Gunduz (Aras) and T. Y. Ozturk, Homology theory in the category of topological spaces, Lambert Academic Publishing, 143 p, (2012) Deutscland, Germany.

[12] S. Bayramov, Fuzzy and fuzzy soft structure in algebra, Lambert Academic Publishing, 175 p, (2012) Deutscland, Germany.

[13] C. L. Chang, Fuzzy topological spaces, J. Math. Anal. Appl., 24, (1968) 182-190.

[14] D. Chen, E. E. C. Tsong, D. S. Young and X. Wong, The parametrization reduction of soft sets and its applications, Computers and Math. Appl. , 49, (2005) 757-763.

[15] N. Çağman, S. Karataş, S. Enginoğlu, Soft topology, Comput. Math. Appl., 62, (2011) 351-358.

[16] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy set and systems theory and applications, Academic Press, New York, USA, (1980).

[17] D. Dubois, H. Prade and Z. Pawlak, Rough sets, Theoretical Aspects of Reasoning about Data, Kluwer, Dordrecht, Netherlands, (1991).

[18] E. Eilenberg, N. Steenrood, Foundations of Algebraic Topology, Princeton University Press, New Jersey, USA, (1952).

[19] F. Feng, Y. B. Jun, X. Zhao, Soft semirings, Comput. Math. Appl.,56(10), (2008) 2621-2628.

[20] F. Feng, Y. B. Jun, X. Liu, L. Li, An adjustable approach to fuzzy soft sets based decision making, Journal of Computational and Applied Mathematics, 234, (2010) 10-20.

[21] F. Feng, C. X. Li, B. Davvaz and M. I. Ali, Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach, Soft Comput., 14, (2010) 899-911.

[22] M. Ghadiri, B. Davvaz, Direct system and direct limit of $H_V-\mathrm{Modules}$, Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A, 28(2), (2004) 267-275.

[23] J. S. Golan, Making fuzzy modules, Fuzzy Sets and Systems, 32, (1989) 91-94.

[24] M. B. Gorzalzany, A method of inference in approximate reasoning based on interval-valued fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 21, (1987) 1-17.

[25] C. Gunduz (Aras) , B. Davvaz, The universal coefficient theorem in the category of intuitionistic fuzzy modules, Utilitas Math., 81, (2010) 131-156.

[26] C. Gunduz (Aras), S. Bayramov, Fuzzy soft modules, International Mathematical Forum, 6(11), (2011) 517-527.

[27] C. Gunduz (Aras), S. Bayramov, Intuitionistic fuzzy soft modules, Computers and Mathematics with Applications, 62, (2011) 2480-2486.

[28] C. Gunduz (Aras), S. Bayramov, Soft locally compact and soft paracompact spaces, Journal of Mathematics and System Science, 2, (2013).

[29] C. Gunduz (Aras), S. Bayramov, Intuitionistic fuzzy soft topological spaces, TWMS Pure Appl. Math. V5, 1, (2014) 66-79.

[30] W. L. Hung, M. S. Yang, On the J-Divergence of intuitionistic fuzzy sets with its application to pattern recognition, Information Sciences, 178, (2008) 1641-1650.

[31] S. Hussain, B. Ahmad, Some properties of soft topological spaces, Comput. Math. Appl., 62, (2011) 4058-4067.

[32] T. Iwinski, Algebraic approach to rough sets, Bull. Polish Acad. Sci. Math.,35, (1987) 673-683.

[33] L. Jin-liang, Y. Ruii-xia, Y. Bing-xue, Fuzzy soft sets and fuzzy soft groups, Chinese Control and Decision Conference, (2008) 2626-2629.

[34] Y. Jiang, Y. Tang, Q. Chen, J. Wang, and S. Tang, Extending soft sets with description logics, Comput. Math. Appl., 59, (2010) 2087-2096.

[35] Y. B. Jun, Soft BCK/BCI-algebras, Comput. Math. Appl., 56(5), (2008) 1408-1413.

[36] Y. B. Jun and C. H. Park, Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras, Inform. Sci., 178(11), (2008) 2466-2475.

[37] Y. B. Jun, K. J. Lee, C. H. Park, Soft set theory applied to commutative ideals, in BCK-algebras, Journal of Applied Mathematics Informatics, 26 (3-4), (2008) 707-720.

[38] Y. B. Jun, H. S. Kim, L. Neggers, Pseudo d-algebras, Information Sciences, 179, (2009) 1751-1759.

[39] Y. B. Jun, K. J. Lee, C. H. Park, Soft set theory applied to ideals in d-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 57, (2009) 367-378.

[40] Y. B. Jun, C. H. Park, Applications of soft sets in Hilbert algebras, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 6 (2), (2009) 55-86.

[41] Y. B. Jun, K. J. Lee, A. Khan, Soft ordered semigroups, Mathematical Logic Qarterly, 56 (1), (2010) 42-50.

[42] Y. B. Jun, K. J. Lee, C. H. Park, Fuzzy soft set theory applied to BCK/BCI-algebras, Computers and Mathematics with Applications, 59, (2010) 3180-3192.

[43] A. Kharal, B. Ahmad, Mappings of soft classes, to appear in New Math. Nat. Comput.

[44] G. J. Klir, T. A. Folger, Fuzzy sets, Uncertainty and Information. Prentice-Hall, (1988).

[45] Z. Kong, L. Wong, S. Li, The normal parameter reduction of soft sets and its algorithm, J. Comp. Appl. Math., 56, (2008) 3029-3037.

[46] E. F. Lashin, A. M. Kozae, A. A. Abo Khadra and T. Medhat, Rough set for topological spaces, Internat. J. Approx. Reason., 40, (2005) 35-43.

[47] V. Leoreanu, Direct limits and inverse limits of SHR semigroups, Southeast Asian Bulletion of Mathematics, 25, (2001) 421-426.

[48] S. G. Li, Inverse limits in category $L-Top(I)^1$, Fuzzy Sets and Systems, 108, (1999) 235-241.

[49] S. G. Li, Inverse limits in category $L-Top(II)^1$, Fuzzy Sets and Systems, 109, (2000) 291-299.

[50] P. K. Maji, R. Biswas, A. R. Roy, Fuzzy soft sets, The Journal of Fuzzy Mathematics, 9(3), (2001) 589-602.

[51] P. K. Maji, A. R. Roy, R. Biswas, An Aplication of soft sets in a decision making problem, Comput. Math. Appl., 44, (2002) 1077-1083.

[52] P. K. Maji, R. Biswas, A. R. Roy, Soft set theory, Comput. Math. Appl., 45, (2003) 555-562.

[53] W. K. Min, A note on Soft topological spaces, Comput. Math. Appl., 62, (2011) 3524-3528.

[54] D. Molodtsov, Soft set theory- first results, Comput. Math. Appl., 37, (1999) 19-31.

[55] D. Molodtsov, V. Y. Leonov, D. V. Kovkov, Soft sets technique and its application, Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya, 1 (1), (2006) 8-39.

[56] C. V. Negoita, D. A. Ralescu, Applications of fuzzy subsets to system analysis, Basel, (1975).

[57] Z. Pawlak, Rough sets, Int. J. Inform. Comput. Sci., 11, (1982) 341-356.

[58] W. Pedryez, L. Han, J. F. Peters, S. Ramanna and R. Zhai, Calibration of software quality: Fuzzy Neural and Rough Neural Computing Approaches, Neurocomputing, 36(1-4), (2001) 149-170.

[59] J. F. Peters, Z. Suraj, S. Shan, S. Ramanna, W. Pedryez and N. J. Pizzi, Classification of meterological volumetric radar data using rough set methods, Pattern Recog. Lett., 24 (6), (2003) 911-920.

[60] D. Pie, D. Miao, From soft sets to information Systems, Granular computing, IEEE Inter. Conf., 2, (2005) 617-621.

[61] A. R. Roy, P. K. Maji, A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems, Journal of Computational and Applied Mathematics, 203, (2007) 412-418.

[62] H. Sabir, A. Bashir, Some properties of soft topological spaces, Comput. Math. Appl., 62, (2011) 4058-4067.

[63] J. P. Serre, Cohomologie galoisienne, Springer, Berlin, Germany, (1964).

[64] M. Shabir, M. Irfan Ali, Soft ideals and generalized fuzzy ideals in semigroups, New Math. Nat. Comput., 5, (2009) 599-615.

[65] M. Shabir, M. Naz, On soft topological spaces, Comput. Math. Appl., 61, (2011) 1786-1799.

[66] E. Spainer, Algebraic topology, McGrane, New York, USA, (1975).

[67] Qiu-Mei Sun, Zi-Liong Zhang, Jing Liu, Soft sets and soft modules, Lecture Notes in Comput. Sci., 5009, (2008) 403-409.

[68] Z. Xu, J. Chen, J. Wu, Clustering algorithm for intuitionistic fuzzy sets, Infomation Sciences, 178, (2008) 3775-3790.

[69] L. A. Zadeh, Fuzzy sets, Information and Control, 8, (1965) 338-353.

[70] L. A. Zadeh, Toward a generalized theory of Uncertainty (GTU)-an outline, Inform. Sci.,172, (2005) 1-40.

[71] I. Zorlutuna, M. Akdağ, W. K. Min and S. Atmaca, Remarks on soft topological spaces, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics Vol 3, No 2, (2012) 171-185.

[72] Yan Zou, Zhi Xiao, Data analysis approaches of soft sets under incomplete information, Knowl.-Based Syst., 21, (2008) 941-945.

ÖZGEÇMİŞ

1989 yılında Kars'ta doğdum. İlk, orta ve lise öğrenimini Kars'ta tamamladım. 2008 yılında Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandım. 2012 yılında bölüm ikincisi olarak mezun oldum. 2012 Güz Dönemi'nde Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladım. 2014 yılında özel bir okulda göreve başladım ve bu göreve devam etmekteyim.