T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

LİNEER OLMAYAN SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN BİR OPTİMAL KONTROL PROBLEMİ

ERAY AKSOY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Prof. Dr. GABİL YAGUB

TEMMUZ-2014

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Öğrencisi **Eray AKSOY** un **Prof. Dr. Gabil YAGUB** danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "**Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi İçin Bir Optimal Kontrol Problemi**" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy..birliği.. ile kabul edilmiştir.

04.07.2014

Adı ve Soyadı:	**İmza**
Başkan: Prof. Dr. Gabil YAGUB	....
Üye : Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV	....
Üye : Yrd. Doç. Dr. Nigar YILDIRIM AKSOY	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun .../.../20 gün ve .... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisans tezi olarak hazırlanmıştır.

Çalışmada Lineer olmayan Schrödinger Denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. Ele alınan optimal kontrol probleminin varlık ve tekliği, amaç fonksiyonelinin Frechet diferansiyellenebilirliği incelenmiş ve çözüm için varyasyon eşitsizliği biçiminde bir gerek şart elde edilmiştir.

Yüksek Lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmada, fikirleriyle bana yol gösteren, hiçbir özveriden kaçınmayıp değerli bilgi ve katkılarını benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Sayın Prof. Dr. Gabil YAGUB danışman hocama ve Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV'a şükran ve teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, çalışmalarım esnasında maddi ve manevi desteğiyle her zaman yanımda olan değerli eşim Nigar YILDIRIM AKSOY'a da sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kars-2014 Eray AKSOY

ĶÇĶNDEKĶLER

ÖZET

Bu tezde, lineer olmayan kısmında kompleks katsayı olan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmıştır. İlk bölümde optimal kontrol teorisi hakkında genel bir bilgi verildikten sonra, ikinci bölümde tezde kullanılan teoremler, lemmalar ve bazı matematiksel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde, ele alınan optimal kontrol probleminin oluşturulması için gerekli olan sınır değer problemi, amaç fonksiyoneli ve olası kontroller kümesi verilmiştir. Bu çalışmada olası kontroller kümesi, ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Ayrıca, bu bölümde sınır değer probleminin çözümünün varlık ve teklik teoremi verilmiştir. Dördüncü bölümde, ilk olarak optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiş, amaç fonksiyonelinin Frechet diferansiyellenebilir olduğu elde edilmiş ve gradyenti bulunmuştur. Son olarak, optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde bir gerek şart elde edilmiştir. Beşinci bölümde ise bu tezin önceki çalışmalardan farklılığı vurgulanmıştır.

2014, 42 Sayfa

Anahtar Kelimeler: Schrödinger denklemi, Optimal kontrol, Amaç fonksiyoneli, Ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayı

ABSTRACT

In this thesis, an optimal control problem for the nonlinear Schrödinger equation that has a complex coefficient in nonlinear part is considered. In the first chapter, after giving a general information about the optimal control theory, in the second chapter, theorems, lemmas and some mathematical concepts used in this thesis are presented. In the third chapter, firstly, a boundary-value problem, the cost functional and the set of probable controls required for the constitution of the considered optimal control problem is given. In this thesis, the set of probable controls is a space of measurable square integrable functions. Also, in this section, the theorem of existence and uniqueness of the solution of the boundary value problem is given. In the fourth chapter, firstly, the existence and uniqueness of the solution of the optimal control problem is shown, secondly, Frechet differentiability of the cost functional is obtained and its gradient is finded. Finally, a necessary condition in variational inequality form for the solution of optimal control problem is obtained. In fifth chapter, it is emphasized that this thesis is different from the former studying.

2014, 42 Pages

Keywords: Schrödinger equation, Optimal control, Cost functional, The space of measurable square integrable functions.

SĶMGELER DĶZĶNĶ

ķimdi tezde kullanēlan temel simgeleri gösterelim:

$\forall$	Herhangi
$\overset{o}{''}$	Hemen hemen her yerde
$i = \sqrt{-1}$	Sanal birim
$l > 0$	Verilen sayē
$T > 0$	Verilen sayē
$\Omega = \left(0,l\right)\times(0,T)$	Verilen bölge
$\Omega_t = (0,l)\times(0,t)$	Verilen bölge
$\tilde{\Omega}_t = (0,l)\times(t,T)$	Verilen bölge

1. GĶRĶŞ

Optimal kontrol teorisi günlük yaкamda hemen her alanda karкēmēza çēktēĝēndan aslēnda çok eski bir tarihe dayanēr. Var olan alternatifler arasēndan ñen iyi, en mükemmelò olanē seçmek her zaman olaĝandēr. Matematikte de bu ñen iyi, en mükemmelò olanē tercih etmek veya bulmak ñoptimalò olarak ifade edilir.

Ķnsanlar yüzyēllar boyunca karкēlaкtēklarē problemlere ñen iyi çözümü getirmekò gibi bir ihtiyaçla karкēlaкmēкlardēr. Karкēlaкēlan problemler asērlar boyunca kendine özgü yöntemlerle çözülmüк ve tüm problemlerin çözümüne yol gösterecek yaklaкēmlar oluкmamēкtēr. Ancak daha sonralarē ñbirçok doĝa yasasēnēn varyasyon prensipleriyle ifade edilebilirò olmasēnēn anlaкēlmasēyla matematiĝin çok önemli bir dalē olan ñvaryasyon hesabēò oluкmuкtur.

Matematiĝin bir dalē olan varyasyon hesabē, bir fonksiyonun ekstremumu ile ilgilidir. Fonksiyonlarēn maksimumunu veya minimumunu bulma teorisi oldukça eskidir. 1699ôda Johannes Bernoulli (1667ï 1748) aynē yatay veya düкey çizgide bulunmayan iki nokta arasēndaki en kēsa yolu bulma problemini ortaya atmēкtēr. Bu problemi 1638ôde ilk Galileo (1564ï 1642) düкünmüк, John ve kardeкi Jacob (1654ï 1705), Gottfried Leibniz (1646ï 1716), Isaac Newton (1642ï 1727) tarafēndan çözülmüкtür. Leonard Euler (1707ï 1783) ile Bernoulli, ilk varyasyon metodunu kullanarak bu tip problemlerin çözüm yolunu bulan Joseph-Louis Lagrangeôē (1736ï 1813) etkileyen olaĝanüstü sonuçlara ulaкmēкlardēr. Böylece Euler varyasyon hesabē cümlesini kullanmēкtēr. Daha sonra bir fonksiyonun ekstremumu için gerekli кarta Euler-Lagrange denklemi denilmiкtir. Ayrēca, Lagrange çarpan metodunu üreterek optimizasyonda çok önemli bir yere sahip olmuкtur.

Son yēllarda teknolojinin hēzla geliкmesi sonucu, özellikle de uzay teknolojisinde karкēlaкēlan bir takēm problemler klasik varyasyon hesabē yöntemleri ile çözülemediĝinden yeni metodlarēn geliкtirilmesine ihtiyaç duyulmuкtur. Bu süreçte, Dinamik programlama ve Pontryaginô in maksimum prensibinin formülüzasyonu ile modern anlamda optimal kontrol teorisinin temelleri atēlmēк oldu. Optimal kontrol teorisinin geliκmesinde dünyaca ünlü matematikçilerden L. S. Pontryagin, J. L. Lions, A. G. Butkovskiy, A. Ķ. Yegorov, Yu. V. Egorov, K. A. Lurye, V. I. Plotnikov, G. T. Ahmedov, A. D. Ķskenderov, F. P. Vasilyev, C. Sokolowski, M. G. Bidout, M. Goebel ve diĝer bilim adamlarēnēn önemli rolleri olmuκtur [2], [4], [5], [9], [10], [13], [14], [15], [16], [17], [21], [22], [25], [26], [27], [29], [30], [36].

Schrödinger denklemiyle ifade edilen kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol teorisi de modern optimal kontrol teorisinin önemli alanlarēndan biridir. Bu teorinin problemleri çoĝunlukla kuantum mekaniĝinde, nükleer fizikte, lineer olmayan optikte ve çaĝdaκ fiziĝin ve tekniĝin farklē alanlarēnda ortaya çēktēĝēndan böyle problemlerin incelenmesi hem teorik hem de pratik bir öneme sahiptir.

1926 de ünlü fizikçi Erwin Schrödinger tarafēndan kurulan Schrödinger denklemi bir dinamik sistemin durumunun deĝiκimi hakkēnda bilgi verdiĝinden, Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemlerinin incelenmesi ile kuantum mekaniĝinde potansiyelin bulunmasē arasēnda çok yakēn bir iliκki vardēr [5]. Dēκ kuvvetlerin etkisi ile hareketi sēnērlanan bir parçacēk için sistemin potansiyelini fizikçiler ilk olarak sezgisel bilgilerle belirlemiκlerdir.

Kuantum mekanik potansiyelin bulunmasē problemini çözmek için varyasyonel metodlar [7] çalēκmasēnda kullanēlmēκ ve sonuçta öĝrenilen problemler lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemleri için optimal kontrol problemlerine indirgenmiκtir. Bu problemlerde kontrol olarak Schrödinger denkleminin katsayēsē olan kuantum mekanik potansiyeli kullanēlmēκtēr. Kontrolün denklemin katsayēsēnda olmasē durumunda kuantum mekanik sistemler için optimal kontrol problemleri ilk kez ciddi bir biçimde A. D. Ķskenderov ve G. Ya. Yagubov tarafēndan çalēκēlmēκtēr.

Optimal kontrol problemleri incelenirken bir takēm sorularēn cevaplarē aranēr. Bunlar,

1. Optimal kontrol probleminin iyi konulup konulmadēĝē ēdēr. Bu araκtērēlērken, optimal kontrol probleminin çözümünün varlēĝē, amaç fonksiyonelinin alttan sēnērlē olup olmadēĝē ve herhangi minimalleκtirici dizinin minimum noktalar kümesine yakēnsayēp yakēnsamadēĝē incelenir.

2. Optimal kontrol probleminin çözümü için gerek ve yeter şartlar nelerdir?

3. Optimal kontrol probleminin nümerik çözümü için hangi hesaplama metodlarının kullanılacağıdır.

Lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemlerine ait olan bu sorular [5], [8], [14], [15], [16], [30], [31], [32], [33], [37], [38], [39], [40] çalışmalarında cevaplandırılmıştır. Ayrıca Schrödinger denkleminin katsayısı olan kuantum mekanik potansiyelin karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayından olması durumunda, optimal kontrol problemlerine ait olan bu sorular ilk olarak [16], [6], [3], [34], [37] ve [40] çalışmalarında incelenmiştir. Söylemek gerekir ki, [6] ve [3] çalışmalarında durumu Schrödinger denklemi için Cauchy problemiyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri ele alınmıştır. [40] çalışmasında ise lineer olmayan Schrödinger denkleminin sınırsız katsayısıyla bir optimal kontrol problemi incelenmiş olup bu çalışmada kontrol yani, kuantum mekanik potansiyel, $(0,l)$ aralığında ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır. [34] çalışmasında ise lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi göz önüne alınmıştır ve amaç fonksiyoneli

$$J_\alpha(v) = \|\psi(,T)\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\|v-w\|^2_{L_2(0,T)}$$

biçimindedir. Bu çalışmada ise lineer olmayan kısmında kompleks katsayı olan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmış olup kontroller kümesi $(0,T)$ aralığında ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır ve amaç fonksiyoneli

$$J_\alpha(v) = \beta_0\int_\Omega |\psi(x,t;v) - y_0(x,t)|^2\,dxdt + \beta_1\int_0^l |\psi(x,T;v) - y_1(x)|^2 dx + \alpha\|v-w\|^2_{L_2(0,T)}$$

biçimindedir.

Bu tez çalışması, lineer olmayan Schrödinger denklemiyle ifade edilen sistemler için ele alınan optimal kontrol problemlerini incelemeye ve yukarıda bahsettiğimiz soruları cevaplamaya yönelik olarak hazırlanmıştır.

Tezin ilerleyen bölümlerinde ilk olarak, 2. bölümünde, bu tezin oluşturulmasında temel teşkil edecek olan L_p uzayları ve Sobolev uzaylarının yanı sıra bir sonraki bölümde kullanacağımız teoremler ve lemmalar ile bazı kavramların tanımları verilmiştir.

3. bölümde lineer olmayan kısmında kompleks katsayı olan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi göz önüne alınmıştır. Bu problemin oluşturulması için gerekli olan şartlar, sınır değer problemi, amaç fonksiyoneli ve olası kontroller kümesi verilmiştir. Ayrıca, bu bölümde Schrödinger denklemiyle ifade edilen sınır değer probleminin çözümünün varlık ve teklik teoremi ifade edilmiş ve çözüm için bir kestirim verilmiştir.

4. bölümde ele alınan optimal kontrol probleminin iyi konulması araştırılmıştır. Bu amaçla 4.1. bölümde optimal kontrol probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir.

4.2. bölümde Lagrange fonksiyoneli kullanılarak bir eşlenik problem oluşturulmuş ve amaç fonksiyonelinin Frechet diferansiyellenebilir olduğu gösterilmiştir. Ayrıca amaç fonksiyonelinin gradyenti için bir formül elde edilmiştir.

4.3. bölümde ise optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği biçiminde bir gerek şart elde edilmiştir.

Son olarak, 5. bölümde ise bu çalışmanın daha önceki yapılan çalışmalardan farklılığı ortaya koyulmuş ve tezin önemi vurgulanmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

Bu bölümde ilerde kullanacağımız teoremler, lemmalar ile bazı uzayların ve kavramların tanımlarını vereceğiz:

Tanım 2.1: $L_2(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemanları $(0,l)$ aralığında ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm

$$\langle u,v\rangle_{L_2(0,l)} = \int_0^l u(x)\bar{v}(x)dx$$
$$\|u\|_{L_2(0,l)} = \sqrt{\langle u,u\rangle_{L_2(0,l)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.2: $L_\infty(0,l)$ Banach uzayı olup, $(0,l)$ aralığında ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|u\|_{L_\infty(0,l)} = vrai\sup_{x\in(0,l)}|u(x)| = ess\sup\{|u(x)| : x\in(0,l)\}$$
$$= \inf\left\{c\geq 0 : \overset{o}{\forall}\, x\in(0,l) \text{ için } |u(x)|\leq c\right\}$$

normuna sahip $u = u(x)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.3: $L_2(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanları Ω dikdörtgeninde ölçülebilir ve modülünün karesiyle integrallenebilir fonksiyonların uzayıdır. Burada iç çarpım ve norm

$$\langle \psi,\phi\rangle_{L_2(\Omega)} = \int_\Omega \psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt,$$
$$\|\psi\|_{L_2(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi,\psi\rangle_{L_2(\Omega)}}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.4: $L_\infty(\Omega)$ Banach uzayı olup Ω bölgesinde ölçülebilir, sınırlı ve sonlu

$$\|\psi\|_{L_\infty(\Omega)} = vrai\sup_{(x,t)\in\Omega}|\psi(x,t)|$$

normuna sahip $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonlarının uzayıdır.

Tanım 2.5: $C^k\left([0,T],B\right)$ Banach uzayı olup, elemanları $[0,T]$ aralığında tanımlanmış $k.$ mertebeden sürekli türevlere sahip ve değerleri B-Banach uzayına ait fonksiyonların uzayıdır. Burada norm

$$\|u\|_{C^k([0,T],B)} = \sum_{m=0}^{k} \max_{0\le t\le T} \left\| \frac{d^m u(t)}{dt^m} \right\| < +\infty$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Tanım 2.6: $L_2\left([0,T],B\right)$ Banach uzayı olup, elemanları $[0,T]$ aralığında tanımlı, ölçülebilir, karesel integrallenebilir ve değerleri B Banach uzayına ait olan fonksiyonların uzayıdır. Burada norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\|u\|_{L_2([0,T],B)} = \left(\int_0^T \|u(.,t)\|_B^2 dt \right)^{1/2} < +\infty.$$

Tanım 2.7: u fonksiyonu D bölgesinde tanımlı bir fonksiyon ve D de u nun sıfırdan farklı olduğu noktaların kümesi K olsun. Bu K kümesinin kapanışı olan $\bar{K}$ kümesine u nun supportu denir. Eğer $\bar{K}$ kümesi kompakt ise u ya D üzerinde kompakt supporta sahiptir denir.

Tanım 2.8: D, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. D üzerinde her mertebeden sürekli diferansiyellenebilir, kompakt supporta sahip $\phi : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu test fonksiyonu olarak adlandırılır ve bu fonksiyonların uzayı $C_0^\infty(D)$ ile gösterilir.

Tanım 2.9: D, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Eğer D nin her kompakt K alt kümesinde

$$\int_K |f|\, dx < \infty$$

ise f ye D üzerinde lokal integrallenebilirdir denir ve $f \in L_1^{loc}(D)$ ile gösterilir.

Tanım 2.10: A, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge, $u, v \in L_1^{loc}(A)$ ve α bir multiindeks olsun. Her $\phi \in C_0^\infty(A)$ test fonksiyonları için

$$\int_A u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_A v \phi dx$$

şartını sağlayan $v = D^{\alpha} u$ fonksiyonuna u nun α. mertebeden genelleştirilmiş kısmi türevi denir. Burada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n$ ve $D^{\alpha} = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n}$, $D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ şeklindedir.

Tanım 2.11: $W_2^1(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların birinci mertebeden genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^1(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x) \overline{\phi}(x) + \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \frac{\partial \overline{\phi}(x)}{\partial x} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^1(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^1(0,l)}}.$$

$\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)$ uzayı $W_2^1(0,l)$ uzayının alt uzayı olup, $(0,l)$ aralığının uç noktalarında sıfıra eşit olan fonksiyonların uzayıdır.

Tanım 2.12: $W_2^2(0,l)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların ikinci mertebeye kadar genelleştirilmiş türevleri $L_2(0,l)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^2(0,l)} = \int_0^l \left(\psi(x) \overline{\phi}(x) + \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} \frac{\partial \overline{\phi}(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \overline{\phi}(x)}{\partial x^2} \right) dx,$$

$$\|\psi\|_{W_2^2(0,l)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^2(0,l)}},$$

$$\overset{0}{W}{}_2^2(0,l) \equiv W_2^2(0,l) \cap \overset{0}{W}{}_2^1(0,l).$$

Tanım 2.13: $W_2^{0,1}(\Omega)$ Hilbert uzayı olup elemanlarının kendisi ve onların t değişkenine göre genelleştirilmiş türevleri $L_2(\Omega)$ uzayından olan Sobolev uzayıdır. Bu uzayda iç çarpım ve norm aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır;

$$\langle \psi, \phi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \int_\Omega \left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t) + \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} \frac{\partial \overline{\phi}(x,t)}{\partial t} \right) dxdt,$$

$$\|\psi\|_{W_2^{0,1}(\Omega)} = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle_{W_2^{0,1}(\Omega)}}.$$

Tanım 2.14: $\{x_n\}$, H hilbert uzayında bir dizi olsun. Eğer her $y \in H$ için $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y)_H = (x, y)_H$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in H$ elemanına zayıf yakınsıyordur denir.

Tanım 2.15: $\{x_n\}$, $(X, \|\ \|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$ oluyorsa $\{x_n\}$ dizisi $x \in X$ elemanına normda ya da kuvvetli yakınsar denir.

Tanım 2.16: $\{f_n\}$, bir X kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer her bir $x \in X$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ oluyorsa, $\{f_n\}$ dizisi X üzerinde bir f fonksiyonuna noktasal yakınsar denir. Yani, verilen $x \in X$ ve $\varepsilon > 0$ için $n \geq N$ olduğunda $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(x, \varepsilon) > 0$ sayısı vardır.

Tanım 2.17: $\{f_n\}$, bir X uzayı üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer hemen hemen bütün $x \in X$ için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ oluyorsa, $\{f_n(x)\}$ dizisi bir $f(x)$ fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsar denir. Yani, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ eşitliğini sağlamayan noktaların kümesinin ölçümü sıfırdır.

Tanım 2.18: Sürekli fonksiyonların uzayı üzerinde

$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|$$

olarak tanımlanan norm düzgün ya da sup normu olarak adlandırılır. $\{f_n\}$, bir X metrik uzayı üzerinde sınırlı, reel değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ oluyorsa $\{f_n\}$ dizisi $f \in X$ fonksiyonuna düzgün yakınsar denir. Burada norm sup normudur.

Tanım 2.19: V , X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $u,v\in V$ ve $\alpha\in[0,1]$ için $\alpha u+(1-\alpha)v\in V$ oluyorsa, V kümesine X de konveks (dışbükey) küme denir.

Tanım 2.20: f konveks bir X kümesi üzerinde tanımlı, reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y\in X$ ve $\alpha\in[0,1]$ için

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\leq \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

oluyorsa f ye konveks fonksiyon denir.

Tanım 2.21: $\left(X,\|\ \|\right)$ bir normlu uzay olsun. $0<\varepsilon\leq 2$ şartını sağlayan her ε sayısı için, eğer $x,y\in X$ için $\|x\|=\|y\|=1$ ve $\|x-y\|\geq\varepsilon$ iken $\left\|\frac{x+y}{2}\right\|\leq 1-\delta(\varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa $\left(X,\|\ \|\right)$ uzayına düzgün konveks uzay denir. $1<p<\infty$ için $L_p(\Omega)$ uzayı düzgün konveks uzaydır.

Tanım 2.22: $\left(X,\|\ \|\right)$ bir normlu uzay ve $E\subset X$ olsun. E içindeki her dizinin E de bir limit noktası varsa E kümesine X de kompakt küme denir.

Tanım 2.23: E , $\left(X,\|\ \|\right)$ Banach uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer E içindeki her $\{x_n\}$ dizisinin bir $x\in E$ noktasına zayıf yakınsayan bir alt dizisi varsa E kümesine $\left(X,\|\ \|\right)$ de zayıf kompakt küme denir.

Tanım 2.24: X normlu uzayında bir E kümesi verilsin. Eğer E deki bütün yakınsak dizilerin limit noktaları E deyse E kümesine X de kapalı küme denir.

Tanım 2.25: X , Banach uzayı ve $E\subset X$ olsun. Eğer $\{x_n\}\in E$ ve $\{x_n\}$ dizisi bir x elemanına zayıf yakınsadığında $x\in E$ ise E kümesine X de zayıf kapalıdır denir.

Tanım 2.26: X , bir normlu uzay ve $E\subset X$ olsun. Eğer X in her bir x elemanı, E nin elemanlarının bir dizisinin limiti ise E ye X de yoğundur denir.

Tanım 2.27: X bir vektör uzayı olmak üzere, $l : X \to \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) lineer operatörüne X üzerinde bir lineer fonksiyonel denir. X üzerindeki sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayına X in duali denir ve X^* ile gösterilir.

Tanım 2.28: X ve Y normlu uzaylar ve $f : X \to Y$ bir operatör olsun. X de sınırlı olan her E alt kümesi için $f(E)$, Y de ön-kompakt ise f ye kompakt operatör denir. Yani, bütün sınırlı $E \subset X$ için $\overline{f(E)}$, Y de kopmaktır.

Tanım 2.29: X ve Y normlu uzaylar olsun. Eğer,

i) X, Y nin bir alt vektör uzayı ve

ii) Her $x \in X$ için $Ix = x$ olarak tanımlanan $I : X \to Y$ özdeşlik operatörü sürekliyse,

X uzayı Y uzayına (sürekli) gömülür denir. Yani, $X \subset Y$ ve her $x \in X$ için $\|Ix\|_Y \leq M \|x\|_X$ olacak şekilde bir M sabiti vardır. Eğer I operatörü kompakt ise X uzayı Y uzayına kompakt gömülür denir.

Tanım 2.30: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına kuvvetli yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\underline{\lim}_{k \to \infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan yarı süreklidir denir.

Tanım 2.31: $J(u)$ fonksiyoneli B Banach uzayının U alt kümesinde tanımlanmış olsun. Eğer $u \in U$ noktasına zayıf yakınsayan $\{u_k\} \in U$ dizisi için $\underline{\lim}_{k \to \infty} J(u_k) \geq J(u)$ şartı sağlanıyorsa bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneline u noktasında alttan zayıf yarı süreklidir denir.

Tanım 2.32: F, bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ ve her $f \in F$ için $t_1, t_2 \in I$ olmak üzere $|t_1 - t_2| \leq \delta(\varepsilon)$ olduğunda

$\left|f(t_1)-f(t_2)\right|\le\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)>0$ sayısı varsa F ye I üzerinde aynı dereceden sürekli (eşsürekli) dir denir.

Tanım 2.33: F, bir I aralığı üzerinde tanımlı $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer her $t\in I$ ve her $f\in F$ için $\left|f(t)\right|\le M$ olacak şekilde negatif olmayan bir M sayısı varsa F ye I üzerinde sınırlıdır denir.

Teorem 2.1 (Arzela-Ascoli): Sınırlı bir I aralığı üzerinde F, $f(t)$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer F, sonsuz, sınırlı ve aynı dereceden süreki ise F, I üzerinde düzgün yakınsak olan bir dizi içerir [11].

Tanım 2.34: B herhangi bir Banach uzayı ve $J(u)$ fonksiyoneli u noktasının herhangi bir $\omega(u,\gamma)=\left\{v: v\in B,\ \|v-u\|<\gamma\right\}$ komşuluğunda tanımlanmış olsun. Eğer fonksiyonelin artışı için

$$\lim_{\|h\|_B\to 0}\frac{o(h,u)}{\|h\|_B}=0$$

olacak şekilde $\Delta J(u)=J(u+h)-J(u)=\left(J'(u),h\right)_B+o(h,u)$ şartını sağlayan $J'(u)\in B^*$ elemanı varsa, bu takdirde $J(u)$ fonksiyoneli u noktasında Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir denir.

Tanım 2.35: $D\subset\mathbb{R}^n$ bir bölge olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ verildiğinde $\left|z\right|<\sigma$ şartını sağlayan tüm z ler için $1\le p<\infty$ iken $\left\|f(x+z)-f(x)\right\|_{L_p(D)}<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\sigma>0$ sayısı varsa, $f(x)$ fonksiyonuna L_p normu anlamında süreklidir denir.

Teorem 2.2: $1\le p<\infty$ iken $L_p(D)$ den olan her fonksiyon L_p normu anlamında süreklidir [23].

Teorem 2.3: $D \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir bölge olsun. Herhangi $u(x) \in \overset{0}{W}{}_m^1(D)$ fonksiyonu ve $m \geq 1,\ r \geq 1$ sayıları için $\alpha = \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} + \frac{1}{r}\right)^{-1}$ olmak üzere

$$\|u\|_{L_q(D)} \leq \beta \|u_x\|_{L_m(D)}^{\alpha} \|u\|_{L_r(D)}^{1-\alpha}$$

eşitsizliği geçerlidir. Ayrıca,

1. $m \geq n = 1$ için $q \in [r, \infty]$ ve $\beta = \left(1 + \frac{(m-1)r}{m}\right)^{\alpha}$ dır.

2. $n > 1$ ve $m < n$ için $\beta = \left(\frac{(n-1)m}{n-m}\right)^{\alpha}$ ve eğer, $r \leq \frac{nm}{n-m}$ ise $q \in \left[r, \frac{nm}{n-m}\right]$ ve $r \geq \frac{nm}{n-m}$ ise $q \in \left[\frac{nm}{n-m}, r\right]$ dir.

3. $m > n > 1$ için $q \in [r, \infty)$ ve $\beta = \max\left\{\frac{q(n-1)}{n}, 1 + (m-1)mr\right\}^{\alpha}$ dır [20].

Teorem 2.4 (Weierstrass Teoremi): U , B Banach uzayında zayıf kompakt bir küme olsun. $J(u)$ ise bu kümede tanımlanan sonlu değerlere sahip ve alttan zayıf yarı sürekli bir fonksiyonel olsun. Bu takdirde $J_* = \inf\limits_U J(u) > -\infty,\ U_* = \{u \in U : J(u) = J_*\} \neq \varnothing$ zayıf kompakttır ve U dan alınan herhangi minimalleştirici dizi, minimum noktaları kümesine zayıf yakınsar [30].

Teorem 2.5: Kabul edelim ki, $\tilde{X}$ düzgün konveks uzay, U kümesi $\tilde{X}$ uzayının kapalı sınırlı kümesi, $I(v)$ fonksiyoneli U kümesi üzerinde tanımlanan alttan sınırlı ve alttan yarı sürekli fonksiyonel ve $\alpha > 0,\ \beta \geq 1$ verilen sayılar olsun. Bu takdirde $\tilde{X}$ uzayında her yerde yoğun olan öyle bir G altkümesi vardır ki, $\forall w \in G$ için

$$J_\alpha(v) = I(v) + \alpha \|v - w\|_{\tilde{X}}^{\beta}$$

fonksiyoneli U kümesi üzerinde en küçük değerini alır. Eğer $\beta > 1$ ise $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli en küçük değerini U kümesi üzerinde bir tek noktada alır [10].

Teorem 2.6: U, B-Banach uzayının konveks bir alt kümesi, $J(u)$ fonksiyoneli bu kümede birinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyonel ve $U_* = \left\{ u \in U : \; J(u) = J_* = \inf\limits_{U} J(u) \right\}$ kümesi $J(u)$ fonksiyonelinin minimum noktalarının kümesi olsun. Bu takdirde $\forall u_* \in U_*$ ve $\forall u \in U$ için $\left(J'(u_*), u - u_* \right)_B \geq 0$ şartı sağlanır [30].

Teorem 2.7: $D \subset \mathbb{R}^n$, C^1 sınıfından sınırlı bir bölgesi olsun.

1. Eğer $p \geq 1,\ 1 \leq q < \infty,\ 0 \leq r < m,\ m - r - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} \geq 0$ ise $W_p^m(D)$ uzayı $W_q^r(D)$ uzayına (sürekli) gömülür. Eğer $m - r - \dfrac{n}{p} + \dfrac{n}{q} > 0$ ise bu gömülme kompakt olur.

2. Eğer $p(m-r) > n$ ise $W_p^m(D)$ uzayı $C^r(\bar{D})$ uzayına kompakt gömülür [28].

Lemma 2.1: $D \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir bölge olsun. Eğer $\{u_k(x)\}$ fonksiyonlar dizisi $L_q(D)\ (q \geq 1)$ uzayında bir $u(x)$ fonksiyonuna kuvvetli yakınsıyor ise bu takdirde $\{u_k(x)\}$ dizisinden $u(x)$ fonksiyonuna D de hemen hemen yakınsayan bir alt dizi seçmek mümkündür. Ayrıca $\{u_k(x)\}$ dizisinin D üzerinde $u(x)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsaması, D üzerinde hemen hemen düzgün yakınsamayı gerektirir [19].

Lemma 2.2: $\{u_k(x)\}$ bir fonksiyonlar dizisi olmak üzere, eğer $q > 1$ ve $k = 1, 2, \ldots$ için $\|u_k\|_{L_q(D)} \leq c$ ise bu durumda $\{u_k(x)\}$ den $L_q(D)$ de zayıf yakınsayan bir alt dizi seçmek mümkündür. Eğer $k = 1, 2, \ldots$ için $\{u_k(x)\}$, D üzerinde $u(x)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsıyorsa ve $q > 1$ için $\|u_k\|_{L_q(D)} \leq c$ ise bu durumda $\{u_k\}$ dizisi $q^* < q$ için $L_{q^*}(D)$ de u ya kuvvetli yakınsar; $L_q(D)$ de ise u ya zayıf yakınsar [20].

Lemma 2.3: $f(x,t,u)$ fonksiyonu $\{(x,t) \in \Omega,\ u \in (-\infty, \infty)\}$ kümesinde tanımlı ölçülebilir bir fonksiyon ve hemen hemen $(x,t) \in \Omega$ için u ya göre sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $L_1(\Omega)$ dan olan $\{u_k(x,t)\}$ dizisi, $L_1(\Omega)$ dan olan $u(x,t)$ fonksiyonuna hemen hemen yakınsıyorsa ve $q>1$ için $\|f(.,.,u_k(.,.))\|_{L_q(\Omega)} \le c$ ise bu durumda $q^* < q$ için $f(x,t,u_k(x,t))$ fonksiyonlar dizisi $L_{q^*}(\Omega)$ normunda $f(x,t,u(x,t))$ fonksiyonuna yakınsar; $L_q(\Omega)$ da ise zayıf yakınsar. Eğer $\{u_k(x,t)\}$ dizisi $L_1(\Omega)$ da u fonksiyonuna kuvvetli yakınsıyorsa ve $q>1$ için $\|u_k\|_{L_q(\Omega)} \le c$ ise bu takdirde $\{u_k(x,t)\}$ dizisi u ya $q^*<q$ için $L_{q^*}(\Omega)$ da kuvvetli yakınsar [19].

Lemma 2.4 (T. H. Gronwall): Eğer $g(t)$ fonksiyonu $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ve

$$0 \le g(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} g(s)ds$$

eşitsizliğini sağlarsa, $t_0 \le t \le t_1$ üzerinde

$$0 \le g(t) \le K\exp\left(L(t-t_0)\right)$$

dır. Burada K ve L negatif olmayan sabitlerdir [11].

Lemma 2.5 (Cauchy-Bunjakovskii Eşitsizliği): $u,v \in L_2(\Omega)$ elemanları için

$$\left|\int_\Omega u\bar{v}\,dx\,d\tau\right| \le \left(\int_\Omega |u|^2\,dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v|^2\,dx\,d\tau\right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

Lemma 2.6 (ε-Cauchy Eşitsizliği): Keyfi a,b sayıları ve herhangi $\varepsilon>0$ için

$$|ab| \le \frac{\varepsilon}{2}|a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon}|b|^2$$

eşitsizliği geçerlidir [20].

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Optimal Kontrol Probleminin Oluşturulması

Bu bölümde lineer olmayan kısmında kompleks katsayı olan Schrödinger denklemi için bir optimal kontrol problemi ele alınmaktadır. Burada olası kontroller kümesi ölçülebilir karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayıdır.

Optimal kontrol problemimiz

$$J_\alpha(v) = \beta_0 \int_\Omega \left|\psi(x,t;v) - y_0(x,t)\right|^2 dxdt + \beta_1 \int_0^l \left|\psi(x,T;v) - y_1(x)\right|^2 dx + \alpha \left\|v - w\right\|^2_{L_2(0,T)} \quad (1)$$

fonksiyonelinin

$$V \equiv \left\{ v = v(t) : v \in L_2(0,T), \quad \left\|v\right\|_{L_2(0,T)} \le b_0 \right\}$$

kümesi üzerinde

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - a(x)\psi - v(t)\psi + a_1 \left|\psi\right|^2 \psi = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \quad (2)$$

$$\psi(x,0) = \varphi(x), \quad x \in (0,l) \quad (3)$$

$$\psi(0,t) = \psi(l,t) = 0, \quad t \in (0,T). \quad (4)$$

şartları altında minimumunun bulunması problemidir.

Burada $l > 0,\ T > 0$, $\beta_0 > 0,\ \beta_1 > 0,\ a_0 > 0,\ b_0 > 0,\ \alpha \ge 0$ verilen sayılar ve $x \in (0,l),\ t \in (0,T),\ \Omega_t = (0,l) \times (0,t),\ \Omega = \Omega_T$ olmak üzere $\psi = \psi(x,t)$ dalga fonksiyonu, $i^2 = -1,\ a_1 \in \mathbb{C}$ kompleks sayı olup

$$\operatorname{Im} a_1 > 0, \quad \operatorname{Re} a_1 < 0, \quad \operatorname{Im} a_1 \ge 2\left|\operatorname{Re} a_1\right| \quad (5)$$

şartını sağlar; $a(x)$ -ölçülebilir sınırlı bir fonksiyon olup

$$0 \le a(x) \le \mu_0, \quad \left|\frac{da(x)}{dx}\right| \le \mu_1, \quad \overset{o}{\forall}\, x \in (0,l), \quad \mu_0, \mu_1 = sabit > 0 \quad (6)$$

şartını sağlar. Ayrıca $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları verilen fonksiyonlar olup

$$\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^2(0,l), \quad f \in \overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega) \quad (7)$$

şartını sağlar. $y_1(x)$ ve $y_0(x,t)$ fonksiyonları ise verilen fonksiyonlar olup sırasıyla $\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$, $\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)$ uzaylarına aittir.Burada kontrol fonksiyonu $v=v(t)$ olup V kümesinden seçilir.

Bu optimal kontrol problemini kısaca (1), (2)-(4) problemi olarak adlandıracağız.

Her bir $v \in V$ için (2)-(4) şartları altında $\psi=\psi(x,t)\equiv\psi(x,t;v)$ fonksiyonunun bulunması problemi lineer olmayan Schrödinger denklemi için bir başlangıç-sınır değer problemidir. Bu problemin çözümü olarak $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayına ait olan $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega$ için (2) şartını, $\overset{o}{\forall}\, x\in(0,l)$ ve $\overset{o}{\forall}\, t\in(0,T)$ için sırasıyla (3)-(4) şartlarını sağlayan hemen hemen çözüm anlaşılır. Burada $\overset{o}{\forall}$ işareti "hemen hemen her yerde" anlamına gelir.

3.2. Başlangıç sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği

Göz önüne alınan Schrödinger denklemi için başlangıç-sınır değer problemi [34] çalışmasında incelenmiş olup bu çalışmadaki sonuçları kullanarak aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 3.2.1: Farz edelim ki $a(x)$, $\varphi(x)$ ve $f(x,t)$ fonksiyonları (6)-(7) şartlarını ve $a_1 \neq 0$ kompleks sayı olup (5) şartını sağlasın. Bu durumda her bir $v\in V$ için (2)-(4) başlangıç-sınır değer probleminin $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayına ait olan çözümü vardır, tekdir ve bu çözüm için $\forall t\in[0,T]$ olduğunda

$$\|\psi(.,t)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\le c_0\left(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}+\|f\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)}\right) \quad (8)$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_0>0$ sayısı t den bağımsızdır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. Optimal Kontrol Probleminin Çözümünün Varlığı ve Tekliği

Bu bölümde, ele alınan optimal kontrol probleminin iyi konulması incelenir. Bu amaçla, önce optimal kontrol probleminin $\alpha > 0$ için tek çözüme, sonra $\alpha \geq 0$ için en az bir çözüme sahip olduğu gösterilir.

Teorem 4.1.1: Teorem 3.2.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $y_0 \in \overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega),\ \ y_1 \in \overset{0}{W}{}_2^{2}(0,l),\ \ w \in L_2(0,T),$ verilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde $L_2(0,T)$ uzayında hemen hemen her yerde yoğun olan G altkümesi vardır ki, $\forall w \in G$ ve $\forall \alpha > 0$ için (1), (2)-(4) optimal kontrol problemi tek çözüme sahiptir.

İspat: Önce

$$J_0(v) = \beta_0 \int_\Omega |\psi(x,t;v) - y_0(x,t)|^2\, dxdt + \beta_1 \int_0^l |\psi(x,T;v) - y_1(x)|^2 dx$$

fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. $\Delta v \in L_2(0,T)$ fonksiyonu $v + \Delta v \in V$ olacak şekilde herhangi $v \in V$ elemanına verilen bir artım olsun. $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ fonksiyonu (2)-(4) başlangıç-sınır değer probleminin $v \in V$ ye karşılık gelen çözümü olsun. Bu takdirde (2)-(4) probleminin çözümü $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$ artımını elde eder. Burada $\psi_\Delta(x,t) = \psi(x,t;v+\Delta v)$ ise (2)-(4) başlangıç-sınır değer probleminin $v + \Delta v \in V$ elemanına karşılık gelen çözümüdür. (2)-(4) şartlarından $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t)$ fonksiyonunun aşağıdaki sınır-değer probleminin çözümü olduğunu kolaylıkla elde ederiz:

$$\begin{aligned} & i\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \Delta\psi}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi + (v+\Delta v)\Delta\psi + a_1\left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)\Delta\psi + \\ & + a_1 \psi_\Delta \psi \Delta\bar{\psi} = -\Delta v \psi(x,t;v), \quad (x,t) \in \Omega \end{aligned} \tag{9}$$

$$\Delta\psi(x,0) = 0, \quad x \in (0,l) \tag{10}$$

$$\Delta\psi(0,t) = \Delta\psi(l,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{11}$$

Şimdi bu problemin çözümünü değerlendirelim. Bu amaçla (9) denkleminin her iki tarafını $\Delta\overline{\psi}(x,t)$ fonksiyonu ile çarpıp ve Ω_t bölgesi üzerinden integrallersek

$$\int_{\Omega_t}\Bigg[i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}\Delta\overline{\psi} - a_0\left|\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\right|^2 - a(x)\left|\Delta\psi\right|^2 + \left(v(t)+\Delta v(t)\right)\left|\Delta\psi\right|^2 +$$

$$a_1\left(\left|\psi_\Delta\right|^2 + \left|\psi\right|^2\right)\left|\Delta\psi\right|^2 + a_1\psi_\Delta\psi(\Delta\overline{\psi})^2\Bigg]dxd\tau = -\int_{\Omega_t}\Delta v(t)\psi\Delta\overline{\psi}dxd\tau$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik ile onun kompleks eşleniğini taraf tarafa çıkarırsak

$$\int_{\Omega_t} i\left(\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}\Delta\overline{\psi} + \frac{\partial\Delta\overline{\psi}}{\partial t}\Delta\psi\right)dxd\tau + \int_{\Omega_t} 2i\,\mathrm{Im}\,a_1\left(\left|\psi_\Delta\right|^2 + \left|\psi\right|^2\right)\left|\Delta\psi\right|^2 dxd\tau =$$

$$-2i\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(a_1\psi_\Delta\psi(\Delta\overline{\psi})^2\right)dxd\tau - 2i\int_{\Omega_t}\mathrm{Im}\left(\Delta v\psi\Delta\overline{\psi}\right)dxd\tau$$

olup burada $\Delta\psi(x,0)=0$ şartını kullanırsak ve her iki tarafın mutlak değerini alırsak

$$\left\|\Delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 2\,\mathrm{Im}\,a_1\int_{\Omega_t}\left(\left|\psi_\Delta\right|^2 + \left|\psi\right|^2\right)\left|\Delta\psi\right|^2 dxd\tau \le$$

$$2\left|a_1\right|\int_{\Omega_t}\left|\psi_\Delta\right|\left|\psi\right|\left|\Delta\psi\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}\left|\Delta v\right|\left|\psi\right|\left|\Delta\psi\right|dxd\tau,\ t\in[0,T]$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\left\|\Delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + 2\,\mathrm{Im}\,a_1\int_{\Omega_t}\left(\left|\psi_\Delta\right|^2 + \left|\psi\right|^2\right)\left|\Delta\psi\right|^2 dxd\tau \le$$

$$\left|a_1\right|\int_{\Omega_t}\left(\left|\psi_\Delta\right|^2 + \left|\psi\right|^2\right)\left|\Delta\psi\right|^2 dxd\tau + 2\int_{\Omega_t}\left|\Delta v\right|\left|\psi\right|\left|\Delta\psi\right|dxd\tau,\ t\in[0,T]$$

eşitsizliği yazılır. Bu eşitsizlikte $\left|a_1\right| \le \left|\mathrm{Re}\,a_1\right| + \left|\mathrm{Im}\,a_1\right|$ olduğu dikkate alınır ve $\mathrm{Im}\,a_1 \ge 2\left|\mathrm{Re}\,a_1\right|$ eşitsizliği kullanılırsa $\forall t\in[0,T]$ için

$$\left\|\Delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{1}{2}\mathrm{Im}\,a_1\int_{\Omega_t}\left(\left|\psi_\Delta\right|^2 + \left|\psi\right|^2\right)\left|\Delta\psi\right|^2 dxd\tau \le 2\int_{\Omega_t}\left|\Delta v\right|\left|\psi\right|\left|\Delta\psi\right|dxd\tau \qquad (12)$$

eşitsizliği elde edilir. $\mathrm{Im}\,a_1 > 0$ olduğundan

$$\left\|\Delta\psi(.,t)\right\|^2_{L_2(0,l)} \le 2\int_{\Omega_t}\left|\Delta v\right|\left|\psi\right|\left|\Delta\psi\right|dxd\tau$$

yazılır. Burada Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliği kullanılırsa $\forall t\in[0,T]$ için

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le \int_0^t \|\Delta\psi(.,\tau)\|^2_{L_2(0,l)}\, d\tau + \int_{\Omega_t} \left(|\Delta v(\tau)||\psi(x,\tau)|\right)^2 dx d\tau$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte

$$\int_{\Omega_t} \left(|\Delta v(\tau)||\psi(x,\tau)|\right)^2 dx d\tau \le \|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)} \max_{0\le t\le T} \|\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}$$

olduğu göz önüne alınır ve (8) kestirimi ile Gronwall Lemması kullanılırsa

$$\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_1 \|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)}, \quad \forall t \in [0,T] \tag{13}$$

eşitsizliği elde edilir. . Burada $c_1 > 0$ sayısı t ve Δv den bağımsızdır.

Şimdi $J_0(v)$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$ elemanı üzerindeki artımını hesaplayalım. $J_0(v)$ fonksiyoneli için olan formülü kullanırsak

$$\begin{aligned}
\Delta J_0(v) &= J_0(v+\Delta v) - J_0(v) \\
&= \beta_0 \int_\Omega |\psi(x,t;v+\Delta v) - y_0(x,t)|^2\, dxdt + \beta_1 \int_0^l |\psi(x,T;v+\Delta v) - y_1(x)|^2 dx \\
&\quad -\beta_0 \int_\Omega |\psi(x,t;v) - y_0(x,t)|^2\, dxdt - \beta_1 \int_0^l |\psi(x,T;v) - y_1(x)|^2 dx \\
&= \beta_0 \int_\Omega \left[\left(\psi_\Delta(x,t) - y_0\right)\left(\overline{\psi}_\Delta(x,t) - \overline{y}_0\right) - \left(\psi(x,t) - y_0\right)\left(\overline{\psi}(x,t) - \overline{y}_0\right)\right] dxdt \\
&\quad +\beta_1 \int_0^l \left[\left(\psi_\Delta(x,T) - y_1\right)\left(\overline{\psi}_\Delta(x,T) - \overline{y}_1\right) - \left(\psi(x,T) - y_1\right)\left(\overline{\psi}(x,T) - \overline{y}_1\right)\right] dxdt \\
&= \beta_0 \int_\Omega \left[|\Delta\psi(x,t)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\left(\psi(x,t) - y_0(x,t)\right)\Delta\overline{\psi}(x,t)\right)\right] dxdt \\
&\quad +\beta_1 \int_0^l \left[|\Delta\psi(x,T)|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\left(\psi(x,T) - y_1(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)\right)\right] dx
\end{aligned}$$

olup $J_0(v)$ fonksiyonelinin artımı

$$\begin{aligned}
\Delta J_0(v) = 2\beta_0 \int_\Omega \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,t) - y_0(x,t)\right)\Delta\overline{\psi}(x,t)\right] dxdt \\
+2\beta_1 \int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T) - y_1(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)\right] dx \\
+\beta_0 \|\Delta\psi\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta_1 \|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}
\end{aligned} \tag{14}$$

biçiminde buluruz. Burada Cauchy-Bunyakovskii eşitsizliğini kullanırsak

$$
\begin{aligned}
\left|\Delta J_0(v)\right| &\le 2\beta_0 \int_\Omega \left|\psi(x,t)-y_0(x,t)\right|\left|\Delta\psi(x,t)\right| dxdt \\
&+2\beta_1 \int_0^l \left|\psi(x,T)-y_1(x)\right|\left|\Delta\psi(x,T)\right| dx \\
&+\beta_0 \left\|\Delta\psi\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta_1 \left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)} \\
&\le 2\beta_0 \left(\int_\Omega \left|\psi(x,t)-y_0(x,t)\right|^2 dxdt \right)^{1/2} \left(\int_\Omega \left|\Delta\psi(x,t)\right|^2 dxdt \right)^{1/2} \\
&+2\beta_1 \left(\int_0^l \left|\psi(x,T)-y_1(x)\right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^l \left|\Delta\psi(x,T)\right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&+\beta_0 \left\|\Delta\psi\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta_1 \left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)} \\
&\le 2\beta_0 \left(\left\|\psi\right\|_{L_2(\Omega)} + \left\|y_0\right\|_{L_2(\Omega)} \right) \left\|\Delta\psi\right\|_{L_2(\Omega)} \\
&+2\beta_1 \left(\left\|\psi(.,T)\right\|_{L_2(0,l)} + \left\|y_1\right\|_{L_2(0,l)} \right) \left\|\Delta\psi(.,T)\right\|_{L_2(0,l)} \\
&+\beta_0 \left\|\Delta\psi\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta_1 \left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)}
\end{aligned}
$$

olup (8), (13) kestirimleri kullanılır ve $y_0 \in L_2(\Omega)$ ve $y_1 \in L_2(0,l)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$
\left|\Delta J_0(v)\right| \le c_2 \left(\left\|\Delta v\right\|_{L_2(0,T)} + \left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,T)} \right)
$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_2 > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Bu eşitsizlikten ve v nin V kümesinin herhangi bir elemanı olmasından dolayı $J_0(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli olduğu görülür.

Ayrıca V kümesi $L_2(0,T)$ uzayında kapalı, sınırlı ve konveks bir kümedir ve $L_2(0,T)$ uzayı da düzgün konveks uzaydır. $J_0(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde süreklidir ve $\forall v \in V$ için $J_0(v) \ge 0$ dır. Yani alttan sınırlıdır. Bu takdirde [10] çalışmasındaki fonksiyonelin minimumunun varlığına ait olan teoreme göre (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.5), $L_2(0,T)$ uzayında hemen hemen her yerde yoğun olan öyle bir G altkümesi vardır ki, $\forall w \in G$ ve $\forall \alpha > 0$ için (1), (2)-(4) optimal kontrol problemi tek çözüme sahiptir. Teorem 4.1.1 ispatlandı.

Şimdi $\alpha \geq 0$ için (1), (2)-(4) optimal kontrol probleminin en az bir çözüme sahip olduğunu gösterelim.

Teorem 4.1.2: Farz edelim ki Teorem 3.2.1 nin şartları sağlanmış olsun ve $\alpha \geq 0$ verilen sayı olsun. Bu takdirde (1), (2)-(4) optimal kontrol problemi en az bir çözüme sahiptir.

İspat: $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli için

$$\lim_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = \inf_{v\in V} J_\alpha(v) = J_{\alpha*}$$

olacak şekilde herhangi $\{v^m\} \subset V$ minimalleştirici dizisini göz önüne alalım. $v^m \in V$ için (2)-(4) başlangıç-sınır değer probleminin çözümünü $\psi_m = \psi_m(x,t) \equiv \psi(x,t;v^m)$ olarak gösterelim. $v^m \in V$, $m = 1,2,...$ olduğu için Teorem 3.2.1 e göre her bir $m = 1,2,...$ için (2)-(4) başlangıç-sınır değer probleminin $C^0\left([0,T], \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right) \cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayına ait olan tek çözümü var ve bu çözüm için $\forall t \in [0,T]$ olduğunda

$$\left\|\psi_m(.,t)\right\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)} + \left\|\frac{\partial \psi_m(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)} \leq c_3 \tag{15}$$

kestirimi geçerlidir. Burada c_3 sayısı ile (8) kestiriminin sağ tarafı işaret gösterilmiştir ve m den bağımsızdır.

Tanıma göre V kümesi $L_2(0,T)$ Hilbert uzayının kapalı, sınırlı ve konveks bir kümesi olduğundan bu küme $L_2(0,T)$ de zayıf kompakt ve zayıf kapalı bir kümedir. Bu nedenle $\{v^m\}$ dizisinden $v \in V$ elemanına zayıf yakınsayan bir alt dizi seçebiliriz. Kolaylık için bu zayıf yakınsayan alt diziyi yine $\{v^m\}$ ile gösterelim. Bu takdirde $\forall q \in L_2(0,T)$ ve $m \to \infty$ için

$$\int_0^T v^m(t)q(t)dt \to \int_0^T v(t)q(t)dt \tag{16}$$

limit bağıntısını yazabiliriz. (15) kestiriminden $\{\psi^m(x,t)\}$ dizisinin $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayının normunda düzgün sınırlı olduğu elde edilir. Bu nedenle $\{\psi^m\}$ dizisinden belirli bir $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonuna $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayında zayıf yakınsayan alt dizi seçebiliriz. Kolaylık için bu zayıf yakınsayan alt diziyi yine $\{\psi^m\}$ ile gösterelim. Yani $\forall t\in[0,T]$ ve $m\to\infty$ için aşağıdaki limit bağıntılarını yazabiliriz:

$$\psi_m(.,t)\to\psi(.,t),\quad L_2(0,l) \text{ de zayıf} \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2\psi_m(.,t)}{\partial x^2}\to\frac{\partial^2\psi(.,t)}{\partial x^2},\quad L_2(0,l) \text{ de zayıf} \tag{18}$$

$$\frac{\partial\psi_m(.,t)}{\partial t}\to\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial t},\quad L_2(\Omega) \text{ de zayıf .} \tag{19}$$

Şimdi $\psi=\psi(x,t)$ fonksiyonunun $\forall(x,t)\in\overset{0}{(\Omega)}$ için (2) denklemini sağladığını gösterelim. $\psi_m(x,t)$ fonksiyonları her bir $m=1,2,...$ için (2)-(4) sınır-değer probleminin $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayına ait çözümü olduğundan $\forall g\in L_2(\Omega)$ için

$$\begin{aligned}\int_\Omega\Bigg[i\frac{\partial\psi_m(x,t)}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi_m(x,t)}{\partial x^2}-a(x)\psi_m(x,t)+v^m(t)\psi_m(x,t)+\\ +a_1|\psi_m(x,t)|^2\psi_m(x,t)-f(x,t)\Bigg]\bar{g}(x,t)dxdt=0\end{aligned} \tag{20}$$

integral özdeşliğini ve

$$\psi_m(x,0)=\varphi(x),\ \ x\in(0,l),\quad \psi_m(0,t)=\psi_m(l,t)=0,\ \ t\in[0,T] \tag{21}$$

şartlarını sağlar. (17)-(19) limit bağıntılarını kullanarak $\forall g\in L_2(\Omega)$ ve $m\to\infty$ için

$$\int_\Omega \left(i\frac{\partial \psi_m(x,t)}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi_m(x,t)}{\partial x^2} - a(x)\psi_m(x,t) \right) \bar{g}(x,t)dxdt \to \int_\Omega \left(i\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} + a_0 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} - a(x)\psi(x,t) \right) \bar{g}(x,t)dxdt \tag{22}$$

limit bağıntısını kolaylıkla yazabiliriz. Şimdi $\forall g \in L_2(\Omega)$ ve $m \to \infty$ için

$$\int_\Omega v^m(t)\psi_m(x,t)\bar{g}(x,t)dxdt \xrightarrow{zayıf} \int_\Omega v(t)\psi(x,t)\bar{g}(x,t)dxdt \tag{23}$$

$$\int_\Omega a_1 |\psi_m(x,t)|^2 \psi_m(x,t)\bar{g}(x,t)dxdt \xrightarrow{zayıf} \int_\Omega a_1 |\psi(x,t)|^2 \psi(x,t)\bar{g}(x,t)dxdt \tag{24}$$

limit bağıntılarının geçerli olduğunu gösterelim.

$C^0\left([0,T], \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right) \cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayı $C^0\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ uzayına kompakt gömüldüğünden $m \to \infty$ için $t \in [0,T]$ ye göre düzgün olarak

$$\left\| \psi_m(.,t) - \psi(.,t) \right\|_{L_2(0,l)} \to 0 \tag{25}$$

limit bağıntısını kolaylıkla yazabiliriz.

$$\begin{aligned} \int_\Omega v^m(t)\psi_m(x,t)\bar{g}(x,t)dxdt = &\int_\Omega \left(v^m(t) - v(t)\right)\psi(x,t)\bar{g}(x,t)dxdt \\ &+ \int_\Omega v^m(t)\left(\psi_m(x,t) - \psi(x,t)\right)\bar{g}(x,t)dxdt \\ &+ \int_\Omega v(t)\psi(x,t)\bar{g}(x,t)dxdt \end{aligned} \tag{26}$$

eşitliğinin geçerli olduğu açıktır. $\psi \in C^0\left([0,T], L_2(0,l)\right)$ ve $\bar{g} \in L_2(\Omega)$ olduğundan $\int_0^l \psi(x,t)\bar{g}(x,t) \in L_2(0,T)$ olup (16) dan $\forall g \in L_2(\Omega)$ için

$$\lim_{m\to\infty} \int_\Omega \left(v^m(t) - v(t)\right)\psi(x,t)\bar{g}(x,t)dxdt = 0 \tag{27}$$

eşitliği yazılır. Şimdi (26) nın sağ tarafındaki II. terimi değerlendirelim:

$$\left|\int_{\Omega} v^m(t)\left(\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right)\bar{g}(x,t)dxdt\right| \le \left\|v^m\right\|_{L_2(0,T)} \left\|g\right\|_{L_2(\Omega)} \max_{0\le t\le T}\left\|\psi_m(.,t)-\psi(.,t)\right\|_{L_2(0,l)}$$
$$\le b_0 \left\|g\right\|_{L_2(\Omega)} \left\|\psi_m-\psi\right\|_{C^0([0,T],L_2(0,l))}$$

olduğundan burada (25) i dikkate alarak limite geçersek $\forall g\in L_2(\Omega)$ için

$$\lim_{m\to\infty}\int_{\Omega} v^m(t)\left(\psi_m(x,t)-\psi(x,t)\right)\bar{g}(x,t)dxdt=0 \tag{28}$$

limit bağıntısını elde ederiz. (27) ve (28) limit bağıntılarını (26) da kullanarak limite geçersek (23) bağıntısının geçerli olduğu elde edilir.

Şimdi (24) limit bağıntısının sağlandığını gösterelim. (25) bağıntısından

$$\psi_m(x,t)\xrightarrow{kuvvetli}\psi(x,t),\;\; L_2(\Omega) \text{ da}$$

yazılır. Bu durumda $\{\psi_m(x,t)\}$ dizisinden $\psi(x,t)$ fonksiyonuna Ω da hemen hemen yakınsayan bir alt dizi seçebiliriz. Kolaylık olsun diye bu alt diziyi yine $\{\psi_m(x,t)\}$ ile gösterelim. Ayrıca

$$\left\|\left|\psi_m\right|^2\psi_m\right\|_{L_2(\Omega)}\le\left\|\psi_m\right\|^3_{L_6(\Omega)}$$

$$\left\|\psi_m(.,t)\right\|_{L_6(0,l)}\le\beta\left\|\frac{\partial\psi_m(.,t)}{\partial x}\right\|^{1/3}_{L_2(0,l)}\left\|\psi_m(.,t)\right\|^{2/3}_{L_2(0,l)},\;\; t\in[0,T]$$

eşitsizlikleri geçerli olduğundan bu eşitsizlikler ve (8) kestirimi kullanılırsa

$$\left\|\left|\psi_m\right|^2\psi_m\right\|_{L_2(\Omega)}\le c_4,\;\; m=1,2,... \tag{29}$$

eşitsizliği yazılır. Yani $\left\{\left|\psi_m(.,t)\right|^2\psi_m(.,t)\right\}$ dizisi $L_2(\Omega)$ da düzgün sınırlıdır. Bu durumda [19] çalışmasından bilinen lemmanın (Bkz. Kuramsal Temeller, Lemma 2.3) hükmü kullanılırsa kolaylıkla (24) limit bağıntısının geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Böylece (22), (23), (24) limit bağıntılarını kullanarak (20) de limite geçersek $\forall g\in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left[i\frac{\partial\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-a(x)\psi+v(t)\psi+a_1\left|\psi\right|^2\psi-f\right]\bar{g}dxdt=0$$

integral özdeşliği sağlanır. Buradan da $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun (2) denklemini $\forall (x,t)\in \overset{\circ}{\Omega}$ için sağladığı elde edilir.

(21) başlangıç şartının, (25) limit bağıntısının $t=0$ daki değerini ve

$$\int_0^l |\psi(x,0)-\varphi(x)|^2 dx \le 2\int_0^l |\psi(x,0)-\psi_m(x,0)|^2 dx + 2\int_0^l |\psi_m(x,0)-\varphi(x)|^2 dx$$

eşitsizliğini kullanırsak

$$\int_0^l |\psi(x,0)-\varphi(x)|^2 dx = 0$$

bağıntısını elde ederiz. Yani, $\psi(x,t)$ limit fonksiyonu (3) başlangıç şartını *hemen hemen* $x\in(0,l)$ için sağlar.

Şimdi , $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun *hemen hemen* $t\in(0,T)$ için (4) sınır şartlarını sağladığını gösterelim. Bunun için (25) de bulunan sınır şartlarını ve $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayının $L_2(0,T)$ uzayına kompakt gömüldüğünü yani $m\to\infty$ için

$$\|\psi_m(s,.)-\psi(s,.)\|_{L_2(0,T)}\to 0,\quad s=0,l$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu ve $s=0,l$ için

$$\begin{aligned}
\|\psi(s,.)\|_{L_2(0,T)}^2 &= \int_0^T |\psi(s,t)|^2 dt = \int_0^T |\psi(s,t)-\psi_m(s,t)+\psi_m(s,t)|^2 dt \\
&\le \int_0^T \left(|\psi(s,t)-\psi_m(s,t)|+|\psi_m(s,t)|\right)^2 dt \\
&\le 2\int_0^T |\psi(s,t)-\psi_m(s,t)|^2\, dt + \int_0^T |\psi_m(s,t)|^2 dt \\
&= 2\|\psi(s,.)-\psi_m(s,.)\|_{L_2(0,T)}^2 + 2\|\psi_m(s,.)\|_{L_2(0,T)}^2
\end{aligned}$$

eşitsizliğini kullanırsak $s=0,l$ için $\|\psi(s,.)\|_{L_2(0,T)}^2=0$ bağıntısını elde ederiz. Yani, $\psi(x,t)$ limit fonksiyonunun *hemen hemen* $t\in(0,T)$ için (4) sınır şartlarını sağladığı elde edilir.

Böylece $\{v^m\}$ dizisinin limit fonksiyonu olan $v(x)$ fonksiyonuna karşılık gelen ve (2)-(4) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü olan fonksiyonun $\{\psi_m(x,t)\}$ dizisinin limit fonksiyonu olan $\psi(x,t)$ fonksiyonunun olduğu elde edilir. Yani, $\psi = \psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v)$ dir. (2)-(4) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü tek olduğundan $\psi \in C^0\left([0,T], \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right) \cap W_2^{0,1}(\Omega)$ dır. (15) kestiriminde alt limite geçersek $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonunun (8) kestirimini sağladığı kolaylıkla elde edilir.

$L_2(0,T)$ uzayında normun alttan zayıf yarı sürekli ve $\alpha \geq 0$ olduğunu göz önüne alırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin v elemanında alttan zayıf yarı sürekli olduğu elde edilir. Buna göre yukarıdaki $\{v^m\}$ ve $\{\psi_m(x,t)\}$ dizilerinin zayıf yakınsama özelliklerini kullanarak

$$J_{\alpha*} \leq J_\alpha(v) \leq \underline{\lim}_{m\to\infty} J_\alpha(v^m) = J_{\alpha*}$$

bağıntısını elde ederiz. Buradan da $v \in V$ elemanının (1), (2)-(4) optimal kontrol probleminin çözümü olduğu elde edilir. Böylece Teorem 4.1.2. ispatlanmış oldu.

4.2. Amaç Fonksiyonelinin Diferansiyellenebilirliği ve Gradyenti

Bu bölümde $J_a(v)$ fonksiyonelinin diferansiyellenebilir olduğunu göstereceğiz. Bu amaçla Lagrange fonksiyoneli kullanılarak elde edilen ve eşlenik problem olarak adlandırılan aşağıdaki sınır değer problemini göz önüne alalım:

$$i\frac{\partial \phi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - a(x)\phi + v(t)\phi + 2\overline{a}_1|\psi|^2\phi + a_1\psi^2\overline{\phi} = -2\beta_0\left(\psi(x,t) - y_0(x,t)\right), \qquad (30)$$

$$\phi(x,T) = -2\beta_1 i\left(\psi(x,T) - y_1(x)\right), \quad x \in (0,l) \qquad (31)$$

$$\phi(0,t) = \phi(l,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \qquad (32)$$

Burada $\psi = \psi(x,t)$ fonksiyonu (2)-(4) başlangıç sınır değer probleminin $v \in V$ elemanına karşılık gelen çözümüdür. Bu sınır değer probleminin çözümü olarak

$C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayına ait olan $\overset{0}{\forall}(x,t)\in\Omega$ için (30)-(32) şartlarını sağlayan $\phi=\phi(x,t)\equiv\phi(x,t;v)$ fonksiyonu anlaşılır.

Teorem 4.2.1: Teorem 3.2.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $y_1\in\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)$, $y_0\in\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)$ verilen fonksiyonlar olsun. Bu takdirde (30)-(32) sınır değer probleminin $C^0\left([0,T],\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right)\cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayına ait olan tek çözümü vardır ve bu çözüm için $\forall t\in[0,T]$ olduğunda

$$\|\phi(.,t)\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\left\|\frac{\partial\phi(.,t)}{\partial t}\right\|^2_{L_2(\Omega)}\le c_5\Bigg(\|\varphi\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\|f\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}+\|\varphi\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^1(0,l)}$$
$$+\|f\|^6_{\overset{0}{W}{}_2^{1,0}(\Omega)}+\|y_1\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^2(0,l)}+\|y_0\|^2_{\overset{0}{W}{}_2^{2,0}(\Omega)}\Bigg),\tag{33}$$

kestirimi geçerlidir. Burada $c_5>0$ sayısı t den bağımsız bir sabittir.

Bu teoremin ispatı Teorem 3.2.1 in ispatında olduğu gibi Galerkin yöntemi ile kolaylıkla ispatlanabilir.

Şimdi $\forall v\in V$ için $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artımını hesaplayalım. $\Delta v\in L_2(0,T)$ fonksiyonu $v+\Delta v\in V$ olacak şekilde herhangi $v\in V$ elemanına verilen artım olsun. Bu takdirde (1) ve (14) formüllerini dikkate alırsak $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\forall v\in V$ elemanı üzerindeki artımını aşağıdaki şekilde yazabiliriz:

$$\begin{aligned}\Delta J_\alpha(v)&=J_\alpha(v+\Delta v)-J_\alpha(v)\\
&=2\beta_0\int_\Omega \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,t)-y_0(x,t)\right)\Delta\overline{\psi}(x,t)\right]dxdt\\
&+2\beta_1\int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T)-y_1(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx\\
&+\beta_0\|\Delta\psi\|^2_{L_2(\Omega)}+\beta_1\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}\\
&+2\alpha\int_0^T\left(v(t)-w(t)\right)\Delta v(t)dt+\alpha\|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)}.\end{aligned}\tag{34}$$

Burada $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$ fonksiyonu (9)-(11) başlangıç-sınır değer probleminin çözümüdür.

Şimdi (34) eşitliğinin sağ tarafındaki birinci terimi dönüştürmeye çalışalım. Bu amaçla aşağıdaki lemmayı ispatlayalım:

Lemma 4.2.2:

$$
\begin{aligned}
&2\beta_0 \int_\Omega \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,t) - y_0(x,t)\right)\Delta\overline{\psi}(x,t)\right]dxdt + 2\beta_1 \int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T) - y_1(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)\right]dx \\
&= \int_\Omega \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)\right)\Delta v(t)dxdt + \tilde{R}(\Delta v)
\end{aligned} \tag{35}
$$

eşitliği geçerlidir. Burada $\tilde{R}(\Delta v)$ kalanı

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(\Delta v) = &\int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta\psi\overline{\phi}\right)\Delta v(t)dxdt + \int_\Omega \left(\left|\psi_\Delta\right|^2 - \left|\psi\right|^2\right)\mathrm{Re}\left(a_1\Delta\psi\overline{\phi}\right)dxdt \\
&+ \int_\Omega \mathrm{Re}\left(a_1\left|\Delta\psi\right|^2\psi\overline{\phi}\right)dxdt
\end{aligned} \tag{36}
$$

formülü ile tanımlanır.

İspat: (2)-(4) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü $C^0\left([0,T], \overset{0}{W}{}_2^2(0,l)\right) \cap W_2^{0,1}(\Omega)$ uzayının elemanı olduğundan (9)-(11) başlangıç-sınır değer probleminin çözümü olan $\Delta\psi = \Delta\psi(x,t) \equiv \psi(x,t;v+\Delta v) - \psi(x,t;v)$ fonksiyonu $\forall \eta_1 \in L_2(\Omega)$ için

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \left[i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2} - a(x)\Delta\psi + (v(t) + \Delta v(t))\Delta\psi + \right. \\
&\left. + a_1\left(\left|\psi_\Delta\right|^2 + \left|\psi\right|^2\right)\Delta\psi + a_1\psi_\Delta\psi\Delta\overline{\psi}\right]\overline{\eta}_1(x,t)dxdt = -\int_\Omega \Delta v(t)\psi(x,t)\overline{\eta}_1(x,t)dxdt
\end{aligned} \tag{37}
$$

integral özdeşliğini ve

$$
\Delta\psi(x,0) = 0, \quad x \in (0,l); \quad \Delta\psi(0,t) = \Delta\psi(l,t) = 0, \quad \forall t \in [0,T] \tag{38}
$$

şartlarını sağlar. Ayrıca eşlenik problemin çözümü olan $\phi = \phi(x,t)$ fonksiyonu $\forall \eta_2 = \eta_2(x,t) \in L_2(\Omega)$ için

$$\int_{\Omega}\left(i\frac{\partial \phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}-a(x)\phi+v(t)\phi+2\overline{a}_1\left|\psi\right|^2\phi+a_1\psi^2\overline{\phi}\right)\overline{\eta}_2(x,t)dxdt$$

$$=\int_{\Omega}-2\beta_0\left(\psi-y_0\right)\overline{\eta}_2(x,t)dxdt$$

integral özdeşliğini ve (31), (32) koşullarını sağlar. Bu integral özdeşliğinde $\eta_2=\eta_2(x,t)$ fonksiyonunun yerine $\Delta\psi(x,t)$ fonksiyonunu alalım. Kısmi integrasyon formülünü kullanarak (31)-(32) ve (38) başlangıç ve sınır koşullarının yardımıyla aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\Omega}\left[\left(-i\frac{\partial\Delta\overline{\psi}}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\overline{\psi}}{\partial x^2}-a(x)\Delta\overline{\psi}+v(t)\Delta\overline{\psi}+2\overline{a}_1\left|\psi\right|^2\Delta\overline{\psi}\right)\phi+a_1\psi^2\Delta\overline{\psi}\overline{\phi}\right]dxdt$$

$$=-2\beta_0\int_{\Omega}\left(\psi-y_0\right)\Delta\overline{\psi}(x,t)dxdt-2\beta_1\int_0^l\left(\psi(x,T)-y_1(x)\right)\Delta\overline{\psi}(x,T)dx.$$

Bu durumda bu eşitliğin kompleks eşleniği

$$\int_{\Omega}\left[\left(i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2}-a(x)\Delta\psi+v(t)\Delta\psi+2a_1\left|\psi\right|^2\Delta\psi\right)\overline{\phi}+\overline{a}_1\left(\overline{\psi}\right)^2\Delta\psi\phi\right]dxdt$$

$$=-2\beta_0\int_{\Omega}\left(\overline{\psi}-\overline{y}_0\right)\Delta\psi(x,t)dxdt-2\beta_1\int_0^l\left(\overline{\psi}(x,T)-\overline{y}_1(x)\right)\Delta\psi(x,T)dx. \tag{39}$$

biçiminde olur. Ayrıca (37) integral özdeşliğinde $\eta_1=\eta_1(x,t)$ fonksiyonunun yerine $\phi(x,t)$ fonksiyonunu alalım. Bu durumda

$$\int_{\Omega}\left[i\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\psi}{\partial x^2}-a(x)\Delta\psi+(v(t)+\Delta v(t))\Delta\psi+\right.$$

$$\left.+a_1\left(\left|\psi_\Delta\right|^2+\left|\psi\right|^2\right)\Delta\psi+a_1\psi_\Delta\psi\Delta\overline{\psi}\right]\overline{\phi}(x,t)dxdt=-\int_{\Omega}\Delta v(t)\psi(x,t)\phi(x,t)dxdt$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten (39) eşitliğini taraf tarafa çıkarırsak

$$\int_\Omega \Delta\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\Delta v(t)dxdt + \int_\Omega a_1\left(\left|\psi_\Delta(x,t)\right|^2 - \left|\psi(x,t)\right|^2\right)\Delta\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)dxdt$$

$$\int_\Omega\left[a_1\psi_\Delta(x,t)\psi(x,t)\Delta\bar{\psi}(x,t)\bar{\phi}(x,t) - \bar{a}_1\left(\bar{\psi}(x,t)\right)^2\Delta\psi(x,t)\phi(x,t)\right]dxdt$$

$$= 2\beta_0\int_\Omega(\bar{\psi}-\bar{y}_0)\Delta\psi(x,t)dxdt + 2\beta_1\int_0^l\left(\bar{\psi}(x,T)-\bar{y}_1(x)\right)\Delta\psi(x,T)dx$$

$$-\int_\Omega\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\Delta v(t)dxdt$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitliği onun kompleks eşleniği ile toplarsak

$$2\beta_0\int_\Omega \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,t)-y_0(x,t)\right)\Delta\bar{\psi}(x,t)\right]dxdt + 2\beta_1\int_0^l \mathrm{Re}\left[\left(\psi(x,T)-y_1(x)\right)\Delta\bar{\psi}(x,T)\right]dx$$

$$= \int_\Omega \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)\Delta v(t)dxdt + \int_\Omega \mathrm{Re}\left(\Delta\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)\Delta v(t)dxdt$$

$$+\int_\Omega\left(\left|\psi_\Delta(x,t)\right|^2 - \left|\psi(x,t)\right|^2\right)\mathrm{Re}\left(a_1\Delta\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)dxdt$$

$$+\int_\Omega \mathrm{Re}\left(a_1\left|\Delta\psi(x,t)\right|^2\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)dxdt$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan da Lemma 4.2.2. nin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece Lemma 4.2.2. ispatlanmış oldu.

Şimdi (35) formülünü kullanarak fonksiyonelin artışı için olan formülü aşağıdaki şekilde yazalım:

$$\Delta J_\alpha(v) = \int_\Omega \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\bar{\phi}(x,t)\right)\Delta v(t)dxdt + 2\alpha\int_0^T\left(v(t)-w(t)\right)\Delta v(t)dt + R(\Delta v)$$

Burada $R(\Delta v) = \tilde{R}(\Delta v) + \beta_0\left\|\Delta\psi\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta_1\left\|\Delta\psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha\left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,T)}$ şeklinde tanımlanır. Şimdi $R(\Delta v)$ için

$$R(\Delta v) = o\left(\left\|\Delta v\right\|_{L_2(0,T)}\right)$$

olduğunu gösterelim. Bunun için önce $\tilde{R}(\Delta v)$ yi değerlendirelim. (36) formülünü kullanırsak

$$\left|\tilde{R}\right| \le \int_{\Omega} |\Delta\psi||\phi||\Delta v|\,dxdt + |a_1|\int_{\Omega} \left||\psi_\Delta|^2 - |\psi|^2\right||\Delta\psi||\phi|\,dxdt + |a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\psi||\phi|\,dxdt$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\phi|^2 |\Delta v|^2 dxdt + |a_1|\int_{\Omega} \left(|\psi_\Delta| + |\psi|\right)|\Delta\psi|^2 |\phi|\,dxdt$$

$$+|a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\psi||\phi|\,dxdt$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\phi|^2 |\Delta v|^2 dxdt + \frac{1}{2}|a_1|\int_{\Omega} \left(|\psi_\Delta| + |\psi|\right)^2 |\Delta\psi|^2 dxdt$$

$$+\frac{1}{2}|a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\phi|^2\, dxdt + \frac{1}{2}|a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\psi|^2\, dxdt + \frac{1}{2}|a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\phi|^2\, dxdt$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\phi|^2 |\Delta v|^2 dxdt + |a_1|\int_{\Omega} \left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2 dxdt$$

$$+|a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\phi|^2\, dxdt + \frac{1}{2}|a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\psi|^2\, dxdt$$

olup burada $|a_1|\int_{\Omega} \left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2 dxdt$ ifadesi yerine (12) eкitsizliĵ ini kullanērsak

$$\left|\tilde{R}\right| \le \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\phi|^2 |\Delta v|^2 dxdt + |a_1|\int_{\Omega} \left(|\psi_\Delta|^2 + |\psi|^2\right)|\Delta\psi|^2 dxdt$$

$$+|a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\phi|^2\, dxdt + \frac{1}{2}|a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\psi|^2\, dxdt$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\phi|^2 |\Delta v|^2 dxdt + \frac{4|a_1|}{\operatorname{Im} a_1}\int_{\Omega} |\psi||\Delta\psi||\Delta v| dxdt$$

$$+|a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\phi|^2\, dxdt + \frac{1}{2}|a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\psi|^2\, dxdt$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 dxdt + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\phi|^2 |\Delta v|^2 dxdt + \frac{2|a_1|}{\operatorname{Im} a_1}\int_{\Omega} |\psi|^2 |\Delta v|^2 dxdt +$$

$$\frac{2|a_1|}{\operatorname{Im} a_1}\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 dxdt + |a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\phi|^2\, dxdt + \frac{1}{2}|a_1|\int_{\Omega} |\Delta\psi|^2 |\psi|^2\, dxdt$$

elde edilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\left|\tilde{R}\right| &\le \left(\frac{1}{2}+\frac{2|a_1|}{\operatorname{Im} a_1}\right)\int_{\Omega}|\Delta\psi|^2 dxdt+\frac{1}{2}\int_{\Omega}|\phi|^2|\Delta v|^2 dxdt+\frac{2|a_1|}{\operatorname{Im} a_1}\int_{\Omega}|\psi|^2|\Delta v|^2 dxdt \\
&\quad +|a_1|\int_{\Omega}|\Delta\psi|^2|\phi|^2 dxdt+\frac{1}{2}|a_1|\int_{\Omega}|\Delta\psi|^2|\psi|^2 dxdt \\
&\le \left(\frac{1}{2}+\frac{2|a_1|}{\operatorname{Im} a_1}\right)\int_{\Omega}|\Delta\psi|^2 dxdt+\frac{1}{2}l\int_0^T|\Delta v|^2\times\|\phi(.,t)\|^2_{L_\infty(0,l)}dt \\
&\quad +\frac{2|a_1|}{\operatorname{Im} a_1}l\int_0^T|\Delta v|^2\times\|\psi(.,t)\|^2_{L_\infty(0,l)}dt+|a_1|\int_0^T\|\phi(.,t)\|^2_{L_\infty(0,l)}\times\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}dt \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_0^T\|\psi(.,t)\|^2_{L_\infty(0,l)}\times\|\Delta\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)}dt
\end{aligned}
\tag{40}
$$

yazılır. Bu eşitsizlikte $\|\psi(.,t)\|_{L_\infty(0,l)}$ ve $\|\phi(.,t)\|_{L_\infty(0,l)}$ normları için [20] çalışmasından bildiğimiz

$$
\|\psi(.,t)\|_{L_\infty(0,l)} \le \beta\left\|\frac{\partial\psi(.,t)}{\partial x}\right\|^{1/2}_{L_2(0,l)}\|\psi(.,t)\|^{1/2}_{L_2(0,l)}
$$

$$
\|\phi(.,t)\|_{L_\infty(0,l)} \le \beta\left\|\frac{\partial\phi(.,t)}{\partial x}\right\|^{1/2}_{L_2(0,l)}\|\phi(.,t)\|^{1/2}_{L_2(0,l)}
$$

eşitsizliklerini ve (8), (33) kestirimlerini kullanırsak $\forall t\in[0,T]$ için

$$
\|\psi(.,t)\|^2_{L_\infty(0,l)} \le c_6 \tag{41}
$$

$$
\|\phi(.,t)\|^2_{L_\infty(0,l)} \le c_7 \tag{42}
$$

kestirimleri elde edilir. Burada $c_6, c_7>0$, t den bağımsız sabitlerdir. (41), (42) kestirimleri ve (13) eşitsizliği (40) da kullanılırsa

$$
\left|\tilde{R}\right| \le c_8\|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)} \tag{43}
$$

eşitsizliği bulunur. Burada $c_8>0$ sabiti Δv den bağımsızdır.

$R(\Delta v)$ için olan formüle dikkat edersek dört terimin toplamı olduğu görülür. Bu durumda

$$\left|R(\Delta v)\right| \le \left|\tilde{R}(\Delta v)\right| + \beta_0 \left\|\Delta \psi\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \beta_1 \left\|\Delta \psi(.,T)\right\|^2_{L_2(0,l)} + \alpha \left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,T)}$$

olup burada (13) eşitsizliği kullanılırsa

$$\left|R(\Delta v)\right| \le c_9 \left\|\Delta v\right\|^2_{L_2(0,T)}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_9 > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Buradan da

$$R(\Delta v) = o\left(\left\|\Delta v\right\|_{L_2(0,T)}\right)$$

bağıntısının geçerli olduğu görülür. Bu durumda $\Delta J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin artışı için olan formülü kullanarak

$$\begin{aligned}
\Delta J_\alpha(v) &= \int_\Omega \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)\right)\Delta v(t)\,dxdt + 2\alpha\int_0^T \left(v(t)-w(t)\right)\Delta v(t)\,dt + o\left(\left\|\Delta v\right\|_{L_2(0,T)}\right) \\
&= \int_0^T \left[\left(\int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v(t)-w(t)\right)\right)\Delta v(t)\right]dt + o\left(\left\|\Delta v\right\|_{L_2(0,T)}\right) \qquad (44) \\
&= \left(\int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v(t)-w(t)\right), \Delta v(t)\right)_{L_2(0,T)} + o\left(\left\|\Delta v\right\|_{L_2(0,T)}\right)
\end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. $L_2(0,T)$ uzayında tanımlanan fonksiyonların Frechet anlamında diferansiyellenebilir olmasının tanımını dikkate alırsak (44) formülünden $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin $\forall v \in V$ elemanı üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilir olduğunu ve onun gradyenti için

$$J'_\alpha(v) = \int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi(x,t)\overline{\phi}(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v(t)-w(t)\right) \qquad (45)$$

formülünün geçerli olduğunu söyleyebiliriz. Burada $\psi = \psi(x,t)$, (2)-(4) başlangıç-sınır değer probleminin; $\phi = \phi(x,t)$ ise eşlenik problemin çözümleridir. Böylece aşağıdaki teorem ispatlanmış oldu:

Teorem 4.2.3: Teorem 4.2.1 in şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $w \in L_2(0,T)$ verilen bir fonksiyon olsun. Bu durumda $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onun gradyenti için (45) formülü geçerlidir.

4.3. Optimal Kontrol Probleminin Çözümü İçin Gerek Şart

Bu bölümde $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilir olmasından ve onun gradyentinden faydalanarak (1), (2)-(4) optimal kontrol probleminin çözümü için varyasyon eşitsizliği şeklinde bir gerek şart elde edilir. Bu amaçla aşağıdaki teoremi ifade edelim:

Teorem 4.3.1: Teorem 4.2.3 ün şartlarının sağlandığını kabul edelim ve $v^* \in V$, (1), (2)-(4) optimal kontrol probleminin herhangi bir çözümü olsun. Bu takdirde $\forall v \in V$ için

$$\int_0^T \left(\int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi^*(x,t)\overline{\phi}^*(x,t)\right)dx + 2\alpha\left(v^*(t)-w(t)\right)\right)\times\left(v(t)-v^*(t)\right) \ge 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada $\psi^* = \psi^*(x,t)$ ve $\phi^* = \phi^*(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla (2)-(4) ve (30)-(32) problemlerinin $v^* \in V$ elemanına karşılık gelen çözümleridir.

İspat: Teorem 4.2.3 ün hükmüne göre $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli V kümesi üzerinde Frechet anlamında diferansiyellenebilirdir ve onun gradyenti için (45) formülü geçerlidir. Önce bu formülü kullanarak gradyentin V kümesi üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. Yani $\forall v \in V$ için $\|\Delta v\|_{L_2(0,T)} \to 0$ iken

$$\left\|J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)\right\|_{L_2(0,T)} \to 0$$

limit bağıntısının geçerli olduğunu gösterelim. Gerçekten (45) formülünü kullanırsak

$$\begin{aligned} J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v) &= \int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi_\Delta \overline{\phi}_\Delta\right)dx + 2\alpha\left(\left(v+\Delta v\right)-w\right) - \int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi\overline{\phi}\right)dx - 2\alpha\left(v-w\right) \\ &= \int_0^l \mathrm{Re}\left(\left(\psi+\Delta\psi\right)\left(\overline{\phi}+\Delta\overline{\phi}\right)\right)dx - \int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi\overline{\phi}\right)dx + 2\alpha\Delta v(t) \\ &= \int_0^l \mathrm{Re}\left(\psi_\Delta \Delta\overline{\phi}\right)dx + \int_0^l \mathrm{Re}\left(\Delta\psi\overline{\phi}\right)dx + 2\alpha\Delta v(t) \end{aligned}$$

eşitliğini yazabiliriz. Burada $\Delta\psi(x,t)$, (9)-(11) sınır değer probleminin çözümü ve $\Delta\phi = \Delta\phi(x,t) \equiv \phi(x,t;v+\Delta v) - \phi(x,t;v)$ ise aşağıdaki sınır değer probleminin çözümüdür:

$$i\frac{\partial\Delta\phi}{\partial t}+a_0\frac{\partial^2\Delta\phi}{\partial x^2}-a(x)\Delta\phi+\left(v(t)+\Delta v(t)\right)\Delta\phi+2\overline{a}_1\left|\psi_\Delta\right|^2\Delta\phi+a_1\psi_\Delta^2\Delta\overline{\phi}=$$
$$=-2\overline{a}_1\overline{\psi}\phi\Delta\psi-2\overline{a}_1\psi_\Delta\phi\Delta\overline{\psi}-a_1\psi\overline{\phi}\Delta\psi-a_1\psi_\Delta\overline{\phi}\Delta\psi-\Delta v\phi-2\beta_0\Delta\psi,\ (x,t)\in\Omega \tag{46}$$

$$\Delta\phi(x,T)=-2\beta_1 i\Delta\psi(x,T),\quad x\in(0,l) \tag{47}$$

$$\Delta\phi(0,t)=\Delta\phi(l,t)=0,\quad t\in[0,T]. \tag{48}$$

Burada $\psi(x,t)$ ve $\psi_\Delta(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla $v\in V$ ve $v+\Delta v\in V$ için (2)-(4) başlangıç-sınır değer probleminin, $\phi=\phi(x,t)$ ve $\phi_\Delta(x,t)$ fonksiyonları ise sırasıyla $v\in V$ ve $v+\Delta v\in V$ elemanlarına karşılık gelen (30)-(32) eşlenik problemin çözümleridir.

Şimdi $\Delta\phi(x,t)$ fonksiyonu için bir kestirim elde etmeye çalışalım. Bu amaçla (46) denkleminin her iki tarafını $\Delta\overline{\phi}(x,t)$ ile çarparak $\tilde{\Omega}_t=(0,l)\times(t,T)$ bölgesi üzerinden integralleyelim. Bu takdirde

$$\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[i\frac{\partial\Delta\phi}{\partial t}\Delta\overline{\phi}-a_0\left|\frac{\partial\Delta\phi}{\partial x}\right|^2-a(x)\left|\Delta\phi\right|^2+\left(v(t)+\Delta v(t)\right)\left|\Delta\phi\right|^2+2\overline{a}_1\left|\psi_\Delta\right|^2\left|\Delta\phi\right|^2+\right.$$
$$\left.+a_1\psi_\Delta^2(\Delta\overline{\phi})^2\right]dxd\tau=-\int_{\tilde{\Omega}_t}\Delta v(t)\phi(x,\tau)\Delta\overline{\phi}(x,\tau)dxd\tau$$
$$-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[2\overline{a}_1\overline{\psi}\phi\Delta\psi\Delta\overline{\phi}+2\overline{a}_1\psi_\Delta\phi\Delta\overline{\psi}\Delta\overline{\phi}+a_1\psi\overline{\phi}\Delta\psi\Delta\overline{\phi}+a_1\psi_\Delta\overline{\phi}\Delta\psi\Delta\overline{\phi}+2\beta_0\Delta\psi\Delta\overline{\phi}\right]dxd\tau$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlikten onun kompleks eşleniğini çıkarırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz:

$$\int_{\tilde{\Omega}_t}i\frac{\partial}{\partial t}\left|\Delta\phi\right|^2dxd\tau+4i\,\mathrm{Im}\,a_1\int_{\tilde{\Omega}_t}\left|\psi_\Delta\right|^2\left|\Delta\phi\right|^2dxd\tau=-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[a_1\psi_\Delta^2(\Delta\overline{\phi})^2-\overline{a}_1\overline{\psi}_\Delta^2(\Delta\phi)^2\right]dxd\tau$$
$$-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[2\overline{a}_1\overline{\psi}\phi\Delta\psi\Delta\overline{\phi}-2a_1\psi\overline{\phi}\Delta\overline{\psi}\Delta\phi\right]dxd\tau-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[2\overline{a}_1\psi_\Delta\phi\Delta\overline{\psi}\Delta\overline{\phi}-2a_1\overline{\psi}_\Delta\overline{\phi}\Delta\psi\Delta\phi\right]dxd\tau$$
$$-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[a_1\psi\overline{\phi}\Delta\psi\Delta\overline{\phi}-\overline{a}_1\overline{\psi}\phi\Delta\overline{\psi}\Delta\phi\right]dxd\tau-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[a_1\psi_\Delta\overline{\phi}\Delta\psi\Delta\overline{\phi}-\overline{a}_1\overline{\psi}_\Delta\phi\Delta\overline{\psi}\Delta\phi\right]dxd\tau$$
$$-\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[\Delta v(t)\phi\Delta\overline{\phi}-\Delta v(t)\overline{\phi}\Delta\phi\right]dxd\tau-2\beta_0\int_{\tilde{\Omega}_t}\left[\Delta\psi\Delta\overline{\phi}-\Delta\overline{\psi}\Delta\phi\right]dxd\tau.$$

Burada (31) ĸartēnē kullanērsak bu eĸitlikten

$$\|\Delta\phi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + 4\,\mathrm{Im}\,a_1\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi_\Delta|^2\,|\Delta\phi|^2\,dxd\tau = 2\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Im}\Big(a_1\psi_\Delta^2(\Delta\overline{\phi})^2\Big)dxd\tau$$

$$+4\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Im}\Big(\overline{a}_1\overline{\psi}\phi\Delta\psi\Delta\overline{\phi}\Big)dxd\tau + 4\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Im}\Big(\overline{a}_1\psi_\Delta\phi\Delta\overline{\psi}\Delta\overline{\phi}\Big)dxd\tau + 2\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Im}\Big(a_1\psi\overline{\phi}\Delta\psi\Delta\overline{\phi}\Big)dxd\tau$$

$$+2\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Im}\Big(a_1\psi_\Delta\overline{\phi}\Delta\psi\Delta\overline{\phi}\Big)dxd\tau + 2\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Im}\Big(\Delta v\phi\Delta\overline{\phi}\Big)dxd\tau$$

$$+4\beta_0\int_{\tilde{\Omega}_t}\mathrm{Im}\Big(\Delta\psi\Delta\overline{\phi}\Big)dxd\tau + 4\beta_1\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}$$

olup her iki tarafēn mutlak deĝeri alēnēr ve $\forall z\in\mathbb{C}$ için $|\mathrm{Im}\,z|\le|z|$ olduĝu kullanēlērsa $\forall t\in[0,T]$ için

$$\|\Delta\phi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + 4\,\mathrm{Im}\,a_1\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi_\Delta|^2\,|\Delta\phi|^2\,dxd\tau \le 2|a_1|\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi_\Delta|^2\,|\Delta\phi|^2\,dxd\tau$$

$$+6|a_1|\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi||\phi||\Delta\psi||\Delta\phi|\,dxd\tau + 6|a_1|\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi_\Delta||\phi||\Delta\psi||\Delta\phi|\,dxd\tau$$

$$+2\int_{\tilde{\Omega}_t}|\Delta v||\phi||\Delta\phi|\,dxd\tau + 4\beta_0\int_{\tilde{\Omega}_t}|\Delta\psi||\Delta\phi|\,dxd\tau + 4\beta_1\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}$$

eĸitsizliĝini elde ederiz. Bu eĸitsizlikte $2|a_1|\le 2\big(|\mathrm{Im}\,a_1|+|\mathrm{Re}\,a_1|\big)\le 3\,\mathrm{Im}\,a_1$ olduĝunu göz önüne alērsak $\forall t\in[0,T]$ için aĸaĝēdaki eĸitsizliĝi yazabiliriz:

$$\|\Delta\phi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \mathrm{Im}\,a_1\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi_\Delta|^2\,|\Delta\phi|^2\,dxd\tau \le 6|a_1|\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi||\phi||\Delta\psi||\Delta\phi|\,dxd\tau$$

$$+6|a_1|\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi_\Delta||\phi||\Delta\psi||\Delta\phi|\,dxd\tau + 2\int_{\tilde{\Omega}_t}|\Delta v||\phi||\Delta\phi|\,dxd\tau$$

$$+4\beta_0\int_{\tilde{\Omega}_t}|\Delta\psi||\Delta\phi|\,dxd\tau + 4\beta_1\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}.$$

Bu eĸitsizliĝin saĝ tarafēna ε -Cauchy eĸitsizliĝini uygularsak $\forall t\in[0,T]$ için

$$\|\Delta\phi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \mathrm{Im}\,a_1\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi_\Delta|^2\,|\phi\eta|^2\,dxd\tau \le 6|a_1|\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi||\phi||\Delta\psi||\Delta\phi|dxd\tau$$

$$+6|a_1|\frac{\varepsilon}{2}\int_{\tilde{\Omega}_t}|\psi_\Delta|^2\,|\Delta\phi|^2\,dxd\tau + 6|a_1|\frac{1}{2\varepsilon}\int_{\tilde{\Omega}_t}|\phi|^2\,|\Delta\psi|^2dxd\tau +$$

$$+2\int_{\tilde{\Omega}_t}|\Delta v||\phi||\Delta\phi|\,dxd\tau + 4\beta_0\int_{\tilde{\Omega}_t}|\Delta\psi||\Delta\phi|\,dxd\tau + 4\beta_1\|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)}$$

olup $\varepsilon = \dfrac{\operatorname{Im} a_1}{6|a_1|}$ olarak seçilirse ve bu eşitsizliğin sağ tarafındaki I., IV. ve V. terimlere $\forall a,b \in \mathbb{R}$ için $2ab \le a^2 + b^2$ eşitsizliğinin geçerli olduğu uygulanırsa aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\|\Delta\phi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{\operatorname{Im} a_1}{2}\int_{\Omega_t} |\psi_\Delta|^2 |\Delta\phi|^2 \, dxd\tau \le \left(3|a_1| + \frac{18|a_1|^2}{\operatorname{Im} a_1}\right)\int_{\Omega_t} |\phi|^2 |\Delta\psi|^2 dxd\tau$$
$$+3|a_1|\int_{\Omega_t} |\psi|^2 |\Delta\phi|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t} |\Delta v|^2 |\phi|^2 dxd\tau + \int_{\Omega_t} |\Delta\phi|^2 dxd\tau + 2\beta_0 \int_{\Omega_t} |\Delta\psi|^2 dxd\tau$$
$$+2\beta_0 \int_{\Omega_t} |\Delta\phi|^2 dxd\tau + 4\beta_1 \|\Delta\psi(.,T)\|^2_{L_2(0,l)} .$$

Burada (33), (41), (42) kestirimleri ve (13) eşitsizliği kullanılırsa $\forall t \in [0,T]$ için

$$\|\Delta\phi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} + \frac{\operatorname{Im} a_1}{2}\int_{\Omega_t} |\psi_\Delta|^2 |\Delta\phi|^2 \, dxd\tau \le c_{10} \|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)} + c_{11}\int_{\Omega_t} |\Delta\phi(x,\tau)|^2 \, dxd\tau$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliğe Gronwall lemması uygulanırsa $\forall t \in [0,T]$ için

$$\|\Delta\phi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{12} \|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)} \tag{49}$$

kestirimi elde edilir. Burada $c_{10}, c_{11}, c_{12} > 0$ sabitleri Δv ve t den bağımsızdır.

Şimdi $J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)$ farkını değerlendirelim:

$$\left|J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)\right| = \left|\int_0^l \operatorname{Re}\left(\psi_\Delta \Delta\bar{\phi}\right)dx + \int_0^l \operatorname{Re}\left(\Delta\psi\bar{\phi}\right)dx + 2\alpha\Delta v(t)\right|$$
$$\le \int_0^l |\psi_\Delta||\Delta\phi| dx + \int_0^l |\Delta\psi||\phi| dx + 2\alpha|\Delta v(t)|$$

ise

$$\left|J'_\alpha(v+\Delta v) - J'_\alpha(v)\right|^2 \le \left(\int_0^l |\psi_\Delta||\Delta\phi| dx + \int_0^l |\Delta\psi||\phi| dx + 2\alpha|\Delta v(t)|\right)^2$$
$$\le 3\left(\int_0^l |\psi_\Delta||\Delta\phi| dx\right)^2 + 3\left(\int_0^l |\Delta\psi||\phi| dx\right)^2 + 12\alpha^2 |\Delta v(t)|^2$$

olup

$$\int_0^T \left|J'_\alpha(v+\Delta v)-J'_\alpha(v)\right|^2 dt \le 3\int_0^T \left(\int_0^l |\psi_\Delta||\Delta\phi| dx\right)^2 dt + 3\int_0^T \left(\int_0^l |\Delta\psi||\phi| dx\right)^2 dt + 12\alpha^2\int_0^T |\Delta v|^2 dt$$

$$\le 3\int_0^T \|\psi_\Delta\|^2_{L_2(0,l)} \|\Delta\phi\|^2_{L_2(0,l)} dt + 3\int_0^T \|\Delta\psi\|^2_{L_2(0,l)} \|\phi\|^2_{L_2(0,l)} dt \qquad (50)$$

$$+12\alpha^2 \|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)}$$

eşitsizliği elde edilir.

(8) kestirimine dayanarak $\forall t \in [0,T]$ için

$$\|\psi_\Delta(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{13}, \quad \|\psi(.,t)\|^2_{L_2(0,l)} \le c_{13} \qquad (51)$$

kestirimlerini yazabiliriz. Burada $c_{13} > 0$ sayısı ile (8) kestiriminin sağ tarafı gösterilir.

(50) eşitsizliğinde (13), (33), (49) ve (51) kestirimlerini kullanırsak

$$\left\|J_\alpha'(v+\Delta v)-J'_\alpha(v)\right\|^2_{L_2(0,T)} \le c_{14}\|\Delta v\|^2_{L_2(0,T)} \qquad (52)$$

kestirimini elde ederiz. Burada $c_{14} > 0$ sayısı Δv den bağımsızdır. Bu kestirimden de

$$\|\Delta v\|_{L_2(0,T)} \to 0 \text{ iken } \|J'_\alpha(v+\Delta v)-J'_\alpha(v)\|_{L_2(0,T)} \to 0$$

olduğu elde edilir. Yani $J_\alpha(v)$ fonksiyonelinin V kümesi üzerinde sürekli diferansiyellenebilir olduğunu ispatlamış olduk.

V kümesi $L_2(0,T)$ uzayında konveks bir küme ve $J_\alpha(v)$ fonksiyoneli de bu küme üzerinde Frechet anlamında sürekli diferansiyellenebilir olduğundan [30] çalışmasından bilinen teoremin (Bkz. Kuramsal Temeller, Teorem 2.6) şartları sağlanır. Yani, eğer $v^* \in V$, $J_\alpha(v)$ fonksiyoneline minimum değer veren eleman ise bu takdirde $\forall v \in V$ için

$$\left(J'_\alpha(v^*), v-v^*\right)_{L_2(0,T)} \ge 0$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu eşitsizlikte (45) formülünü $v = v^*$ için kullanırsak teoremin hükmünün geçerli olduğunu elde ederiz. Böylece Teorem 4.3.1 ispatlanmış oldu.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Lineer ve lineer olmayan Schrödinger denklemi ile ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri daha önce [5], [8], [13], [14], [15], [16], [32], [33], [34], [37], [38], [39], [40] çalışmalarında incelenmiştir. Ayrıca Schrödinger denkleminin katsayısı olan kuantum mekanik potansiyelin ölçülebilir, karesel integrallenebilir fonksiyonlar uzayından olması durumunda, optimal kontrol problemleri ilk olarak [16], [6], [3], [34], [37], [40] çalışmalrında incelenmiştir. Ancak, [16] çalışmasında lineer Schrödinger denklemi için başlangıç-sınır değer problemiyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemi, [6] ve [3] çalışmalarında durumu Schrödinger denklemi için Cauchy problemiyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri ve [37] çalışmasında da kompleks potansiyelli lineer Schrödinger denklemi için optimal kontrol problemleri incelenmiştir. [34] ve [40] çalışmalarında ise, durumu lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç-sınır değer problemiyle ifade edilen sistemler için optimal kontrol problemleri ele alınmıştır ve olası kontroller kümesi [34] çalışmasında zaman değişkenine, [40] çalışmasında ise uzay değişkenine bağlıdır. Bu çalışmada ise durumu lineer olmayan Schrödinger denklemi için başlangıç-sınır değer problemiyle ifade edilen sistemler için bir optimal kontrol problemi incelenmiş olup amaç fonksiyonelinin farklı seçiminden dolayı bu çalışmadan elde edilen sonuçlar daha önceki çalışmaların sonuçlarından farklıdır. Dolayısıyla önceki çalışmalara göre daha günceldir.

KAYNAKLAR

[1] Adams, R. A., 1978. Sobolev spaces. Academic Press Inc., 268 s, California.

[2] Ahmedov, G. T., Ahiyev, S. S., 1972. Optimal kontrol teorisinin bazē problemleri için gerekli optimallēk kartlarē. Azerbaycan Bilimler Akademisi Bildirileri, 28 (25), 12-15.

[3] Baundoin, L., Kavian, O., Puel, J. P., 2005. Regularity for a Schrödinger equation with singuler potentials and application to bilinear optimal control. Journal Differential Equations, 2005, 216, 188-222.

[4] Bidaut, M. G.,1973. These Universite de Paris. ï VI.

[5] Butkovskiy, A.G., Samoilenko Yu.Ķ., 1984. Kuantum mekanik süreçlerin kontrolü. Nauka, 256 s, Moscow. (Rusça)

[6] Cances, E., Le Bris, G., Pilot, M., 2000. Controle optimal bilineare dûuna equation de Schrödinger. C. R. Acad. Sci., t.330, serie 1,567-571/ Controle optimal.

[7] Cavadov, A. V., Ķskenderov, A. D., 1965. Gartinhouse tipli potansiyele sahip çekirdeĵ in kararlē durumunun araķtērēlmasē. Azerbaycan Devlet Üniversitesinin bilim haberleri, Fizik ve Matematik serisi, 2, 77-84.

[8] Dēn Nēo Hao, 1986. Kuantum objektlerinin optimal kontrolü. Nauka, Moscow, N. 2, 14-20. (Rusça)

[9] Egorov, Yu. V., 1963. Optimal kontrolün bazē problemleri. Nümerik Analiz ve Matematiksel Fizik Dergisi, 3(5), 887-904. (Rusça)

[10] Goebel, M., 1979. On existence of optimal control. Math. Nachr., Vol 93, 67-73.

[11] Hsieh, P. F., Sibuya, Y., 1999. Basic theory of ordinary differential equations. Springer Verlag, 468 s, New york.

[12] Hunter, J. K., Nachtergaele, B., 2000. Applied analysis. 438 s, California.

[13] Ķskenderov, A. D., Tagiev, R. G., 1983. Parabolik denklemlerin katsayēlarēnda olan kontrolörle optimizasyon problemi. Diferansiyel Denklemler, 19 (8), 1324-1334.

[14] Ķskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., 1989. A variational method for solving the inverse problem of determining the quantum-mechanical potential. Soviet Math. Dok1., 38 (3), 637-641.

[15] Ķskenderov, A.D., Yagubov, G.Ya., 1989. Lineer olmayan kuantum mekanik sistemlerin optimal kontrolü.Otomatik ve Telemekanik, 12, 27-38. (Rusça)

[16] Ķskenderov, A.D., 2001. Durgun olamayan Schrödinger denkleminde potansiyelin bulunmasē. Matematik Modellemenin ve Optimal Kontrolün Problemleri Dergisi, Baku, 6-36. (Rusça)

[17] Ķskenderov, A. D., Tagiev, R. G., Yagubov, G. Ya., 2002. Optimalleєtirme metodlarē. Çakēoĵ lu, 400 s, Bakü.

[18] Kolmogorov, A. N., Fomin, S. V., 1975. Introductory real analysis. Dover Pub., 403 s, New york.

[19] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Uralĉceva, N. N., 1967. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. Nauka, 736 s, Moscow. (Rusça)

[20] Ladyzenskaja, O. A., Solonnikov, V. A., Uralĉceva, N. N., 1968. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type. American Math. Soc., 646 s, ABD. (Ķng.)

[21] Lions, J.L., 1971. Optimal control for systems governed by partial differential equations. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 400 s, New York.

[22] Lurye, K. A., 1975. Matematiksel Fiziĵ in Problemlerinde Optimal Kontrol. Nauka, 478 s, Moskova. (Rusça)

[23] Mikhailov, V. P., 1983. Kēsmi türevli diferansiyel denklemler. Nauka,424 s, Moskova. (Rusça)

[24] Musayev, B., Alp, M., 2000. Fonksiyonel analiz. 470 s, Kütahya.

[25] Plotnikov, V. Ķ., 1976. Optimal kontrol teorisinde varyasyon ve eєlenik problem hakkēnda. Fonksiyonel Analiz ve onun uygulamalarē, 10 (4), 95-96. (Rusça)

[26] Pontryagin, L. S., 1976. Adi diferansiyel denklemler. Nauka, 332 s, Moskova.(Rusça)

[27] Pontryagin, L. S., Boltyansky, V. G., Gamkrelidze, R. V., Miєenko, E. F., 1969. Optimal süreçlerin matematik teorisi. Nauka, 384 s, Moskova. (Rusça)

[28] Sobolev, S. L., 1988. Matematiksel fizikte fonksiyonel analizin bazē uygulamalarē. Nauka, 334 s, Moskova. (Rusça)

[29] Sokolowski, J., 1978. Remarks on existence of optimization problems for partial differential equations of parabolic type. Control and Cybernetics, 7 (2), 47-61.

[30] Vasilyev, F. P., 1981. Ekstremal problemlerin çözüm metodlarē. Nauka, 400 s, Moskova. (Rusça)

[31] Vorontsov, M. A., Shmalgauzen, V. I., 1985. Adaptiv optiĵ in prensipleri. Nauka, 336 s, Moskova. (Rusça)

[32] Yagubov, G.Ya., Musayeva, M.A., 1997. Lineer Olmayan Schrödinger Denklemi için Ķdentifikasyon Problemi Hakkēnda. Diferansiyel Denklemler, 33 (12), 1691-1698. (Rusça)

[33] Yagubov, G.Ya., 1994. Quazi-Lineer Schrödinger Denkleminin Katsayēsēyla Optimal Kontrol, Kiev, 318 s.

[34] Yagubov, G.Y., Gashimov S. A., 2008. About a problem of optimal control in unlimited time dependent potential in the nonlinear nonstationary Schrödinger equation. Transactions of Azerbaijan National Academy of Sciences series of Phys. Tech. and Math. Sciences, Informatics and control problems, vol. XXVIII, No:6, pp.19-24 (Rusça)

[35] Yakupov, S. Ya., 1970. Evolusyon Denklemler için Cauchy Probleminin Ķyi Konulmasē ve Onun Uygulamalarē. Moskova Matematik Derneĵi Eserleri, 4(3), 86-94. (Rusça)

[36] Yegorov, A. Ķ., 1978. Isē ve difüzyon süreçlerinin optimal kontrolü. Nauka, 463 s, Moskova. (Rusça)

[37] Yetiıkkin, H., Subaкē, M., 2010. On the optimal control problem for Schrödinger equation with complex potential. Applied Mathematics and Computation, 216 (7), pp. 1896-1902.

[38] Yēldēz, B., Yagubov, G.Ya., 1997. On an optimal control problem. Journal of computational and applied mathematics, vol 88 , 275-287.

[39] Yēldēz, B., Subaкē, M., 2001. On the optimal control problem for linear Schrödinger equation. Applied Mathematics and Computation, 121, 373-381.

[40] Yēldērēm Aksoy, N., Yēldēz, B. and Yetiıkkin, H., 2012. Variational problem with complex coefficient of a nonlinear Schrödinger equation. Proceedings Mathematical Sciences, Vol 122, Number 3, 469-484.