T.C.

KAFKAS ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

SOFT MODÜLLERİN KOHOMOLOJİ MODÜLLERİ

Semra KORKMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç.Dr.Sadi BAYRAMOV

HAZİRAN-2014

KARS

T.C. Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi Semra KORKMAZ' ın Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV' un danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı " Soft Modüllerin Kohomoloji Modülleri " adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek **oy birliği** ile kabul edilmiştir.

13.06.2014

Adı ve Soyadı		İmza
Başkan:	Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV	....
Üye:	Doç. Dr. Çiğdem GÜNDÜZ (ARAS)	....
Üye:	Doç. Dr. Ömür DEVECİ	....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunun 13/06/2014 gün ve ..../ ....sayılı kararı ile onaylanmıştır.

....

Doç. Dr. Muzaffer ALKAN

Enstitü Müdürü

TEŞEKKÜR

Tez çalışmamda en büyük emeği geçen, yoğun çalışmalarından bana zaman ayırarak derin bilgilerinden faydalanma fırsatı veren, öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum, değerli bilim adamı, Sayın Doç. Dr. Sadi BAYRAMOV'a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca kendisinden görmüş olduğum destek ve güvenden dolayı anneme teşekkür ederim.

Semra KORKMAZ
Haziran 2014

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SOFT MODÜLLERİN KOHOMOLOJİ MODÜLLERİ

Semra KORKMAZ

Kafkas Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışmanı :Doç.Dr .Sadi BAYRAMOV

Doğa bilimlerinden ortaya çıkan bazı problemlerin çözümünde klasik matematiğin yöntemleri yetersiz kalmaktadır. Böyle problemlerin çözümü ile ilgili yeni yöntemler geliştirilmiştir. Bu yöntemlerle ilgi fuzzy kümeler, intuitionistic fuzzy kümeler, soft kümeler v.b. teoriler inşa edilmiştir.Matematiksel açıdan yeni kategoriler oluşturulmuş ve bu kategorilerin cebirsel işleme göre kapalılık problemi büyük önem taşır.

Bu tezde soft modüller kategorisinde kohomoloji teori inşa edilmiştir.

2014, 54 sayfa

Anahtar Kelime: Soft modül, Fuzzy soft modül ,Soft kohomoloji modül

ABSTRACT

M.Sc THESİS

COHOLOGY MODULES OF SOFT MODULES

Semra KORKMAZ

Kafkas University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor:Assoc.Prof.Dr.Sadi BAYRAMOV

Classic Mathematics methods are insufficient in solution of some problems occur in natural sciences. There has been developed new methods about the solution of these problems. Fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets, soft sets and etc. theories constructed about these methods.New categories formed in terms of mathematics and the closeness problem of these categories according to algebraic operations is of great importance.

In this thesis cohomology theory in the category of soft module is built.

2014, 54 pages

Keywords: Soft modul, Fuzzy soft modul ,Soft kohomoloji modul

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
U	: Herhangi bir evrensel küme
$P(U)$	: U ' nun kuvvet kümesi
E	: Parametreler kümesi
Imf	: f fonksiyonunun görüntüsü
$ker\ f$	: f fonksiyonunu çekirdeği
I^x	: X üzerindeki tüm fuzzy kümelerin ailesi
$PF(M)$	: M üzerindeki fuzzy kümelerin ailesi
FSM	:Fuzzy soft modüller kategorisi
$SCoC$	:Soft modüllerin ko-zincir kompleksler kategorisi

1.GİRİŞ

Sosyal bilimlerde, ekonomide, mühendislikte v.b. alanlarda karmaşık problemleri çözmek için klasik metotları kullanamayız. Bu tür problemlerin çözümü matematiksel temel prensipleri, belirsizliği ve kesinlik olmayan durumları içerir. Dolayısıyla, bu durumlarda klasik kümeler teorisi bu tür belirsizlik içeren problemlerin ele alınmasında tam olarak uygun olmayabilir. Bu tür belirsizliklerin etkili bir yolla ele alınmasını sağlayan birçok sayıda teori öne sürülmüştür. Bunlardan fuzzy kümeler teorisi, intuitionistic fuzzy kümeler teorisi, aralıklar matematik teorisi ve rough kümeler teorisi v.b.(Dubois and Prade 1980,1991; Pawlak 1982; Iwinski 1987; Klir and Folger 1988; Atanassov 1997; Hung and Yang 2008). Bu kavramlar oldukça geniş bir uygulama alanına sahiptir. Örneğin; mantık programlamada, tıbbı teşhislerde, karar analizlerinde, model tanımada v.b. alanlarda uygulamaya sahiptir (Zadeh 1965, 2005; Negoita and Ralescu 1975; Golan 1989; Pedryez *et al.*2001; Peter *et al.* 2003; Hung and Yang 2008; Xu *et al.* 2008). Bununla beraber bu teorilerin kendi zorlukları vardır.1999'da Molodtsov belirsizliği modellemek için tamamen yeni bir yaklaşım olan soft küme kavramını tanımlamış ve bazı özelliklerini vermiştir (Molodtsov 1999). Soft kümelerle ilgili olarak birçok araştırmalar ve incelemeler yapılmıştır.(Maji *et al.* 2001.2002.2003; Roy and Maji 2007). Bu yeni teorinin temel sonuçlarını sunmuş ve bunu başarılı bir şekilde fonksiyonların düzgünlüğü, oyun teorisi, işlemlerin araştırılması, Rieman integrasyonu, Peron integrasyonu, olasılık teorisi v.b. alanlara uygulanmıştır.

Cebirde soft kavramını ilk olarak Aktaş ve Çağman kullanarak, soft grup kavramını tanımlayarak bazı incelemeler yapmışlardır (Aktaş and Cağman 2007).Acar ve diğerleri soft halka kavramını, Sun ve diğerleri de soft modüller kavramını tanımlayarak bazı özelliklerini araştırmışlardır (Sun e*t al.* 2008; Acar *et al.*2010).

Cebirde fuzzy kavramını ilk olarak Rosenfeld kullanarak, fuzzy grup kavramını tanımlamıştır (Rosenfeld 1971). Bu çalışmadan sonra cebirde fuzzy yapılarla ilgili olarak bir çok çalışma yapılmıştır (Pan 1987;Permoth and Malik 1990;Permouth 1992; Zahedi and Ameri 1994,1995,1997;Ameri and Zahedi 2000;Ghadiri and Davvaz 2004;

Davvaz *et al.*2006 ; Bayramov and Gunduz (Aras) 2009,2011; Gunduz (Aras) and Bayramov 2011 a;Bayramov 2012).

Fuzzy soft yapısını cebire ilk olarak Jin-liang ve diğerleri taşıyarak fuzzy soft grup kavramını vermişlerdir.(Jin-liang *et al.*2008). Gündüz (Aras) ve Bayramov fuzzy soft modül ve intuitionistic fuzzy soft modüller kategorisini tanımlayarak bu kategoride bazı araştırmalar yapmışlardır (Gunduz (Aras) and Bayramov 2011b, 2011c).Yine soft ve fuzzy soft gruplar kategorisinde izomorfizma hakkında teoremler (Gunduz (Aras) and Bayramov 2010; Bayramov and Gunduz (Aras)2010)çalışmalarında ispatlanmıştır.

Cebirsel problemlerin araştırılmasında homoloji cebir yöntemleri büyük önem taşır (Cartan and Eilenberg 1956; Mac Lane 1963; Peter and Stammbach 1971; Dold1972;Herrlich and Strecker 1973; Hungerford 1973; Spanier 1975; Anderson and F uller1992)

Soft modüller kategorisi ve Fuzzy soft modüller kategorisi son iki yılın ürünüleridir.

Tezin giriş bölümünde; modüller, homoloji modülü, homoloji teori, zincir kompleksler, zincir komplekslerin tam dizisi, zincir komplekslerin homotop morfizmalar kavramlarıyla ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tezin materyal ve yöntem bölümünde; soft küme, soft grup, soft halka, soft modül, fuzzy soft küme , fuzzy soft grup, fuzzy soft modüller ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tezin araştırma bulguları bölümünde; tanımlanan soft modüller kategorisinde kozincir kompleksler kategorisi inşa edilir ve soft kohomoloji modüller tanımlanır. Daha sonra bu kategoride kozincir homotopya bağıntısı verilerek kohomoloji modüllerin bu bağıntıya göre invaryant olduğu ispatlanır. Son olarak soft kohomoloji modüllerin tam dizisi elde edilir.

2.KURAMSAL TEMELLER

2.1. Modüller

R bir halka ve $(M,+)$ değişmeli bir grup olsun.

Tanım 2.1.1. R'nin elemanları ve M'nin elemanları arasında aşağıdaki şartları sağlayan $f: RxM \to M$; r ∈ R ve m∈ M için
$f(r,m) = rm$ olarak tanımlanan bir f fonksiyonu varsa o takdirde M değişmeli grubuna bir sol R- modül denir.Her r, s ∈ R ve m, n ∈ M için ;

$\boldsymbol{M_1}$) $rm \in M$

$\boldsymbol{M_2}$) $r(m+n) = rm + rn$

$\boldsymbol{M_3}$) $(r+s)m = rm + sm$

$\boldsymbol{M_4}$) $s(rm) = (sr)m$

Ayrıca rm elemanına m'nin r ile (sol) skaler çarpımı denir.Diğer yandan R değişmeli bir halka ve M hem sol hem de sağ modül olarak alınabilir.

Örnek 2.1.2. R = Z tamsayılar halkası ve$(M,+)$ değişmeli bir grup olmak üzere

$$f: ZxM \to M$$

∀n ∈ Z ve m ∈ M olmak üzere

$$f(n,m) = nm = m + m + \cdots + m$$

(n tane m'nin M deki toplamı) şeklinde tanımlanırsa o zaman M bir Z-modüldür. Burada hemen belirtelim ki Z tamsayılar halkası değişmeli olduğunda sağ ya da sol modül ayrımı yapmaya gerek yoktur.

2.2.Homloji Teori

Top^2 ile topolojik uzayların çiftler kategoriyasını gösterelim.Yani bu kategoriyanın nesneleri(X,A)'dır.X topolojik uzay $A \subset X$ alt uzaydır.(*A,X'* in topolojisinde alt uzay topolojisine sahip.)
Buradaki morfizma ise ;

f: $(X.A) \;\;\rightarrow\;\; (Y,B)$ için

f: $X \;\;\rightarrow\;\; Y$ giden sürekli dönüşüm f(A) $\subset$ B ile tanımlanıyor.Bu Top^2 üzerinde bazı koşullar verelim.

1)$\forall(X,A) \in Top^2$ ile birlikte bu Top^2 kategoriyasına aşağıdaki çiftler eşittir.

$$\begin{array}{ccccc} & & (X,\emptyset) & & \\ (\emptyset,\emptyset) \subset (A,\emptyset) & \nearrow & & \searrow & (X,A) \subset (X,X) \\ & \searrow & (A,A) & \nearrow & \end{array}$$

2) $\forall$ $(X,A) \in$ Top^2 için bu kategoriya

$(X,A) \times$ I $= (X \times I, A \times I)$ burada I = [0,1] birim aralığıdır.

3) Eğer P = $\{*\}$ ise (1 noktalı uzay) o zaman(P, $\emptyset$) $\in Top^2$'dir.

Top^2 kategoriyasına bu koşullar altında homoloji teori için yararlı olan kategori denir.

Tanımı 2.2.1. Farz edelim ki Top^2 kategorisi homoloji teori için yaralı olan kategori olsun.,

$\forall$ q$\in$Z için H_q:Top^2 $\rightarrow$ Gurp kovaryant funktoru verilmiştir. $(X,A) \in Top^2$ için $H_q(X,A)$'a çiftine q-boyutlu homoloji gurubu denir.C, C' herhangi iki kategoriya farz edelim ki F öyle dönüşüm

I)$\forall X \in C \rightarrow F(X) \in C'$

$\forall$f$\in$ $Hom_C(X,Y) \rightarrow Hom_{C'}(F(X),F(Y))$ olsun.

$\forall$f:$X \rightarrow Y$,g:$Y \rightarrow Z$ $\qquad\qquad \Longrightarrow$ F(gof)=F(g)oF(f)

1_X:X$\rightarrow$X, F(1_X)= $1_{F(X)}$

$\forall f: (X,A) \rightarrow$(Y,B) için H_q(f):$H_q(X,A) \rightarrow H_q(Y,B)$ $\qquad H_q$(f)= f_{*q} ile gösterelim.

II)$\forall$q$\in$Z ve (X,A)$\in$ Top^2 için grupların $\partial_{q_{(x,A)}}$:$H_q(X,A) \rightarrow H_{q-1}(A,\emptyset)$

Homomorfizması verilmiş olsun I) 'de verilen funktor ve II) de ∂_q homomorfizması için aşağıdaki 7 koşul sağlanıyor;

1)H_q(gof)=H_q(g)oH_q(f)   (gof)$_{*q}$=g_{*q}of_{*q}

2)$H_q(1_{(X,A)})$= $1_{H_{q(X,A)}}$

3)Sınır Aksiyomu:

$\forall f$:(X,A)→(Y,B) için aşağıdaki diyagram komutatiftir.

$$\begin{tikzcd} H_q(X,A) \arrow[r, "\partial_{q(X,A)}"] \arrow[d, "f_{*q}"'] & H_{q-1}(A,\emptyset) \arrow[d, "(f\backslash A)_{*q-1}"] \\ H_q(Y,B) \arrow[r, "\partial_{q(Y,B)}"] & H_{q-1}(B,\emptyset) \end{tikzcd}$$

$\{\partial_{q_{1(X,A)}}\}_{(X,A)}$ ailesi H_q(X,A) → H_{q-1}(A,∅)'a giden funktorların morfizması için yukarıdaki diyagram komutatiftir.

f:(X,A)→(Y,B)   f(A) ⊂B , $f/_A$: A→ B

($f/_A$):(A,∅) →(B,∅)

4)Tamlık Aksiyomu:

∀ (X,A) ∈ Top^2 verilmiş olsun. i:A↪ X , j:(X,∅) ↪ (X,A) için gömme dönüşümleri olsun.(X,∅) çiftini X ile (A,∅)'u A ile gösterelim.O zaman j:X→(X,A) şeklinde verilebilir.∀(X,A) için homoloji grupların aşağıdaki gibi verilen ters dizisi tam olsun.

$$\ldots\leftarrow H_{q-2}(A)\xleftarrow{\partial_{q-1(X,A)}} H_{q-1}(X,A)\xleftarrow{J_{*q-1}} H_{q-1}(X)\xleftarrow{i_{*q-1}} H_{q-1}(A)\xleftarrow{\partial_{q_{1(X,A)}}} H_q(X,A)\xleftarrow{J_{*q}}$$

5)Homotopya Aksiyomu:

Eğer $\mathrm{f, g: (X, A)} \rightarrow \mathrm{(Y, B)}$ homotop dönüşümler ise o zaman

$f_{*q} = g_{*q} : H_q(\mathrm{X, A}) \rightarrow H_q(\mathrm{Y, B}) \quad \forall \mathrm{q} \in \mathrm{Z}$ için

Homotop dönüşümlerin H_q funktoru altındaki görüntüleri eşittir.

6)Kesme Aksiyomu:

$\forall(\mathrm{X, A}) \in Top^2$ için $\mathrm{U} \subset \mathrm{A}$ açık alt kümesi olsun eğer $U^c \subset \mathrm{intA}$ ise;
$(\mathrm{X \backslash U, A \backslash U}) \in Top^2$ oluyor ve
$\dot{I}_u : (\mathrm{X \backslash U, A \backslash U}) \hookrightarrow (\mathrm{X, A})$ için
$(\dot{I}_u)_{*q} : H_q(\mathrm{X \backslash U, A \backslash U}) \hookrightarrow H_q(\mathrm{X, A})$ dönüşümü grupların izomorfizmasıdır.

7)Boyut Aksiyomu:
Eğer P={∗} ise ozaman $H_q(\mathrm{P}) : \begin{cases} \mathrm{G}, & \mathrm{q=0} \\ 0, & \mathrm{q \neq 0} \end{cases}$ sağlanır.

H_q funktorları ile ∂_q homomorfizmaları 7 koşuluda sağlıyorsa o zaman

$$\left\{ \{ H_q(\mathrm{X,A}) \}_{(X,A) \in Top,^2{}_{q \in Z}} , \{\partial_{q_1(X,A)}\}_{q_1(X,A)} \right\} \quad \ldots\ldots *$$

ailesine homoloji teori denir.

2.3. Zincir Kompleksler

$$C = \{G_q, \partial_q : G_q \to G_{q-1}\}_{q \in \mathrm{Z}}$$

Grupları , modüllerin ters dizisi olsun.

Tanım 2.3.1. Eğer C dizisinde $\forall q \in Z$ için $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ $(Im\partial_q \subset Ker\partial_{q-1})$ ise o zaman C dizisine zincir kompleksi denir. Eğer $\forall q \in Z$ için $Im\partial_q = Ker\partial_{q-1}$ ise böyle diziye tam dizi denir.

$$G_{q-2} \xleftarrow[\partial_{q-1}]{} G_{q-1} \xleftarrow[\partial_q]{} G_q$$

$C' = \{G_q{}' , \partial_q{}' : G_q{}' \to G_{q-1}{}'\}$ ters diziside bir zincir kompleksi olsun.Ters dizideki morfizma tanımı $\varphi = \{\varphi_q : G_q \to G_q{}'\}_q$ $(\forall q \; için)$

$$\begin{array}{ccc} G_q & \xrightarrow{\partial_q} & G_{q-1} \\ \varphi_q \downarrow & & \downarrow \varphi_{q-1} \\ G_q{}' & \xrightarrow[\partial_q{}']{} & G_{q-1}{}' \end{array}$$

şeklinde verilmiştir.

Zincir komplekslerin morfizmalarının bileşkesini verebiliriz. Eğer $\varphi : C \to C'$, $\Psi : C' \longrightarrow C''$, $\Psi = \{\Psi_q\}$, $\Psi \; ve \; \varphi$ morfizması için $\Psi_\circ\varphi = \{\Psi_q, \varphi_q\} : C \longrightarrow C''$ dür.Bu bileşke ters dizilerin morfizmasıdır. O halde zincir kompleksler ve onların morfizmaları bir kategoriya oluşturuyor. Bu kategoriyayı CC ile gösterelim.

Tanım 2.3.2. $C = \{G_q, \partial_q : G_q \;\to G_{q-1}\}_{q\in Z}$ bir zincir kompleksi olsun. Eğer $\forall q$ pozitif çift tamsayıları ile negatif tek tamsayıları için $\partial_q : G_q \to G_{q-1}$ izomorfizması ise o zaman C kompleksine noktaya benzer kompleks denir .

$$\ldots \leftarrow G_{-2} \xleftarrow[\partial_{-1}]{} G_{-1} \xleftarrow[\partial_0]{} G_0 \xleftarrow[\partial_1]{} G_1 \xleftarrow[\partial_2]{} G_2 \xleftarrow[\partial_3]{} G_3 \xleftarrow[\partial_4]{} G_4 \leftarrow \cdots$$

$\partial_{4,}\ \partial_2 \ldots \to$ izomorfizma

$\partial_{-1}, \partial_{-3} \ldots \to$ izomorfizma

Şimdi zincir kompleksinde homotopyaya bağıntısını tanımlayalım:

$\varphi, \Psi : C \to C'$ iki morfizma olsun

$\varphi = \{\varphi_q : G_q \to G_q{}'\}$

$\Psi = \{\Psi_q : G_q \quad \to G_q{}'\}$

Tanım 2.3.3. $\forall q \in Z \qquad D_{q-1}\partial_q + \partial_{q+1}{}' D_q = \varphi_q - \Psi_q$ koşulunu sağlayan $D_q : G_q \to G_{q+1}{}'$ homomorfizmaları var ise φ, Ψ morfizmalarına zincir homotop morfizmaları denir.

$$\begin{tikzcd}
G_{q-1} \arrow[dr, "D_{q-1}"'] & G_q \arrow[l, "\partial_q"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_q"'] \arrow[d, shift left, "\Psi_q"] \arrow[dr, "D_q"] & \\
& G_q{}' & G_{q+1}{}' \arrow[l, "\partial'_{q+1}"]
\end{tikzcd}$$

Teorem 2.3.4. Zincir homotopya bağıntısı denklik bağıntısıdır.Bu bağıntı bileşkeye göre invaryanttır.

$\varphi_0, \Psi_0 : C \to C'$ zincir homotop

$\varphi_1, \Psi_1 : \mathrm{C}' \to \mathrm{C}''$ zincir homotop ;

$\varphi_1\, \varphi_0$ ile $\Psi_1\Psi_0$ zincir homotoptur.

Tanım 2.3.5: C $=\{G_q\ ,\partial_q\}_q$ bir zincir kompleksi olsun.Eğer $\forall q$ için $H_q < G_q$ ve $\partial_q H_q \subset H_{q-1}$

$$H = \{H_q, {}^{\partial_q}\!/_{H_q}\}$$

grupların bir zincir kompleksidir. Buna C kompleksinin alt kompleksi denir. H=$\{H_q,\overline{\partial}_q\}$,$C = \{G_q, \partial_q\}$ un alt zincir kompleksi olsun. Her q için ${}^{G_q}\!/_{H_q}$ grubun

bölüm grubunu ele alalım ve $\delta_q: {}^{G_q}\!/_{H_q} \rightarrow {}^{G_{q-1}}\!/_{H_{q-1}}$ homomorfizasını

$\delta_q\big(x + H_q\big) = \partial_q(x) + H_{q-1}$ biçiminde tanımlayalım.

$$\begin{aligned}\delta_{q-1}\delta_q\big(x + H_q\big) &= \delta_{q-1}(\partial_q(x) + H_{q-1})\\ &=\partial_{q-1}\partial_q(x)+H_{q-2}\\ &=H_{q-2}\end{aligned}$$

olduğundan ${}^{C}\!/_{H} = \{{}^{G_q}\!/_{H_q}, \delta_q\}$ bir zincir kompleksidir.Bu komplekse bölüm kompleksi denir.

Tanım 2.3.6. $\forall k \in$ Z için için $C^{(k)} bir$ zincir kompleksi

$C^{(k)} = \{G_q{}^{(k)}, \partial_q{}^{(k)}: G_q{}^{(k)} \rightarrow G_{q-1}{}^{(k)}\ \}$ tanımlayalım

$\varphi_k: G^{(k)} \rightarrow G^{(k-1)}$ komplekslerin morfizması olsun.

$\{C^{(k)}, \varphi_k\}$ zincir komplekslerin ters dizisi denir.

$$
\begin{array}{ccccccc}
\ldots \leftarrow & G_{q-2}^{(k)} & \leftarrow & G_{q-1}^{(k)} & \xleftarrow{\partial_q^{(k)}} & G_q^{(k)} & \leftarrow \cdots \\
& \downarrow \varphi_{k,q-2} & & \downarrow \varphi_{k,q-1} & & \downarrow \varphi_{k,q} & \\
\ldots \leftarrow & G_{q-2}^{(k-1)} & \leftarrow & G_{q-1}^{(k-1)} & \xleftarrow{\partial_q^{(k-1)}} & G_q^{(k-1)} & \leftarrow \cdots \\
& \downarrow \varphi_{k-1,q-2} & & \downarrow \varphi_{k-1,q-1} & & \downarrow \varphi_{k-1,q} & \\
\ldots \leftarrow & G_{q-2}^{(k-2)} & \leftarrow & G_{q-1}^{(k-2)} & \xleftarrow[\partial_q^{(k-2)}]{} & G_q^{(k-2)} & \leftarrow \cdots
\end{array}
$$

Buradaki diyagramın her biri komutatiftir. Zincir komplekslerin her dizisi eğer $\forall q \in$ Z için $im\varphi_{k,q} = Ker\varphi_{k-1,q}$ şartı sağlıyorsa yani stunlar tam ise buna tam dizi denir.C, C', C'' zincir kompleksleri ve $i: C' \to C$, $j: C \to C''$ giden morfizma olsun.

Tanım 2.3.7. Zincir komplekslerin

$0 \xrightarrow{0} C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} C'' \xrightarrow{0} 0$ (5’li eleman var) tam dizisine kısa

tam dizi denir.

$C = \{G_q, \partial_q: G_q \to G_{q-1}\}$

$C' = \{G_q{}', \partial_q{}': G_q{}' \to G_{q-1}{}'\}$

$C'' = \{G_q{}'', \partial_q{}'': G_q{}'' \to G_{q-1}{}''\}$

i:$\{i_q: G_q{}' \to G_q\}$

j:$\{j_{q:} G_q \to G_q{}''\}$ şeklindedir

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\ldots & G_{q-2}' \arrow[l] \arrow[d, "i_{q-2}"] & G_{q-1}' \arrow[l, "\partial_{q-1}'"'] \arrow[d, "i_{q-1}"] & G_q' \arrow[l, "\partial_q'"'] \arrow[d, "i_q"] & \cdots \arrow[l] \\
\ldots & G_{q-2} \arrow[l] \arrow[d, "j_{q-2}"] & G_{q-1} \arrow[l, "\partial_{q-1}"'] \arrow[d, "j_{q-1}"] & G_q \arrow[l, "\partial_q"'] \arrow[d, "j_q"] & \cdots \arrow[l] \\
\ldots & G_{q-2}'' \arrow[l] \arrow[d] & G_{q-1}'' \arrow[l, "\partial_{q-2}''"] \arrow[d] & G_q'' \arrow[l, "\partial_q''"] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
\qquad \ldots(2.1)
$$

$\forall q$ için satırlar zincir kompleksi ve sütunlar ise tamdır. Ayrıca her bir diyagram komutatiftir. Herhangi bir sütuna bakalım

$0 \xrightarrow{0} G_q' \xrightarrow{i_q} G_q \xrightarrow{j_q} G_q'' \xrightarrow{0} 0$ bu grupların tam dizisidir.

Her zaman grupların bu şekildeki kısa tam dizisinden;

$0 \to H_q \to G_q \to {G_q}/{H_q} \to 0$ …(2.2)

Şeklindeki tam diziye geçebiliriz.(2.1) diyagramında her bir sütunun yerine (2.2) benzer bir tam dizi yapabiliriz.(2.1) diyagramından aşağıdaki diyagrama geçebiliriz;

Not: $H_q \subset G_q'$ nun alt grubu ise $G_q' \approx H_q$,$G_q'' \approx {G_q}/{H_q}$ dur.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots \leftarrow & & H_{q-2} & \leftarrow & H_{q-1} & \leftarrow & H_q & \leftarrow \cdots & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots \leftarrow & & G_{q-2} & \leftarrow & G_{q-1} & \leftarrow & G_q & \leftarrow \cdots & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\dots \leftarrow & & G_{q-2}/H_{q-2} & \leftarrow & G_{q-1}/H_{q-1} & \leftarrow & G_q/H_q & \leftarrow \cdots & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Satırlar zincir kompleksidir.Zincir komplekslerin keyfi

$$0 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow 0$$

kısa tam dizisini

$$0 \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow C/H \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow H_q \rightarrow G_q \rightarrow G_q/H_q \rightarrow 0$$

şeklinde dönüştürebiliriz

$H \subset C'$ nin alt kompleksi C/H ise bölüm kompleksidir. Bu yüzden

$$0 \rightarrow H \rightarrow C \rightarrow C/H \rightarrow 0$$

kısa tam diziye geçebiliriz.

CC zincir kompleksi $\forall \; C = \{G_q, \partial_q : G_q \rightarrow G_{q-1}\}$ zincir kompleksinin ele alalım.

$$\dots \leftarrow G_{q-1} \xleftarrow{\partial_q} G_q \xleftarrow{\partial_{q+1}} G_{q+1} \leftarrow \cdots$$

sağlanır.(Zincir kompleksin tanımından)

Burada $Im\partial_{q+1}$ $ve\ Ker\partial_q$ $G_q{}'$ nun alt gruplarıdır.G_q abel olduğundan $Im\partial_{q+1} \lhd Ker\partial_q$ dur .

O zaman $Ker\partial_q / Im\partial_{q+1}$ bölüm grubunu verebiliriz.

$Ker\partial_q / Im\partial_{q+1} = \overline{H}_q(C)'ye$ c kompleksinin q-boyutlu homoloji grubu denir.Eğer

$\mathrm{I}m\partial_{q+1} = Ker\partial_q$ ise zincir kompleksi tam oluyor.Bu durumda $\overline{H}_q(C) = 0$ olur.

Teorem 2.3.8. $0 \xrightarrow{0} C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{J} C'' \xrightarrow{0} 0$ zincir komplekslerinin keyfi tam dizisi olsun. O zaman $\forall q$ için hopmoloji grupların $\partial_{*q}: \overline{H}_q(C'') \to \overline{H}_{q-1}(C')$ homomorfizmasını tanımlayabiliriz ki homoloji grupların aşağıdaki dizisi tamdır.

$$\dots \leftarrow \overline{H}_{q-1}(C') \xleftarrow{\partial_{*q}} \overline{H}_q(C'') \xleftarrow{J_{*q}} \overline{H}_q(C) \xleftarrow{i_{*q}} \overline{H}_q(C') \xleftarrow{\partial_{*q+1}} \dots$$

ve $\{f_1, f_2, f_3\}$ 1. tam diziden 2. Tam diziye giden morfizma ise ;

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & C_1{}' & \to & C_1 & \to & C_1{}'' & \to 0 & & \dots.(1)\dots \\ & \downarrow f_1 & & \downarrow f_2 & & \downarrow f_3 & & & \\ 0 \to & C_2{}' & \to & C_2 & \to & C_2{}'' & \to 0 & & \dots(2)\dots \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_q(C_1{}'') & \xrightarrow{\partial_{1*q}} & H_{q-1}(C_1{}') \\ f_{3*q} \downarrow & & \downarrow f_{1*q-1} \\ H_q(C_2{}'') & \xrightarrow[\partial_{2*q}]{} & H_{q-1}(C_2{}') \end{array}$$

bu diyagram komutatiftir.

$\varphi: G_{1\to}G_2$, $H_1 \lhd G_1$,$H_2 \lhd G_2$ ve $\varphi(H_1)\subset H_2$ için
φ_*:$G_1/_{H_1}\to G_2/_{H_2}$ homomorfizaması vardır.
$\varphi_q(\text{Ker}\partial_{1q})\subset \text{Ker}\partial_{2q}$
$\varphi_q(\text{Im}\partial_{1q+1}) \subset \text{Im}\partial_{2q+1}$ olduğundan

$$\varphi_{q*}\text{: } \underbrace{\text{Ker } \partial_{1q}/_{\text{Im}\partial_{1q+1}}}_{C_1\text{in q-boyutlu homoloji Grubu}} \to \underbrace{\text{Ker } \partial_{2q}/_{\text{Im}\partial_{2q+1}}}_{C_2\text{ nin q-boyutlu homoloji Grubu}}$$

tanımlayabiliriz.

φ_{q*}:$\overline{H_q}(C_1)\to \overline{H_q}(C_2)$ dir .O halde

1.C$\to \overline{H_q}$(C)

2. $\varphi: C_1 \to C_2 \to \varphi_{q*}$:$\overline{H_q}(C_1)\to \overline{H_q}(C_2)$ zincir kompleksler katagorisinden gruplar kategorisine giden kovaryant funktordur.
$\overline{H_q}(C_1) = \text{Ker}\partial_{1q}/_{\text{Im}\partial_{1q+1}}$

$\overline{H_q}(C_2) = \text{Ker } \partial_{2q}/_{\text{Im}\partial_{2q+1}}$

Z+ $\text{Im}\partial_{1q+1} \in \overline{H_q}(C_1)$ için φ_{q*} (Z $+$ $\text{Im}\partial_{1q+1}) = \varphi_q(Z) + \text{Im}\partial_{2q+1}$ (Z$\in$ Ker ∂_{1q})
Şeklinde tanımlanıyor.

Teorem 2.3.9. (1) ve (2) de verilen karşı gelmeler $\overline{H_q}$:CC$\to$Grup giden bir kovaryant funktordur.

İspat:a)$\varphi: C_{1\to}C_2$,$\psi: C_2 \to C_3$ zincir komplekslerin morfizması olsun.
gg:$(\psi o\varphi)_{*q}$=ψ_{*q}oφ_{*q}

$(\psi o \varphi)_{*q} = \overline{H_q}(C_1) \rightarrow \overline{H_q}(C_3)$

$\forall$ Z + $\mathrm{Im}\partial_{1q+1} \in \overline{H_q}(C_1)$ olsun.

$(\psi o \varphi)_{*q}(\mathrm{Z} + \mathrm{Im}\ \partial_{1q+1}) = \psi_q \varphi_q(\mathrm{Z}) + \mathrm{Im}\partial_{3q+1}$

$= \psi_{*q}(\varphi_q(\mathrm{Z}) + \mathrm{Im}\partial_{2q+1})$

$= \psi_{*q}\varphi_{*q}(\mathrm{Z} + \mathrm{Im}\partial_{1q+1})$

b)1_C:C→C birim morfizma olsun.

gg: $(1_C)_{*q} = 1_{\overline{H_q}(\mathrm{C})}$ dir.

$(1_C)_{*q}: \overline{H_q}(\mathrm{C}) \rightarrow \overline{H_q}(\mathrm{C})$

$\forall$ Z + $\mathrm{Im}\partial_{q+1} \in \overline{H_q}(\mathrm{C})$ olsun.

$(1_C)_{*q}(\mathrm{Z} + \mathrm{Im}\ \partial_{q+1}) = 1_C(\mathrm{Z}) + \mathrm{Im}\partial_{q+1}$

$= \mathrm{Z} + \mathrm{Im}\ \partial_{q+1}$

$= 1_{\overline{H_q}(\mathrm{C})}(\mathrm{Z} + \mathrm{Im}\ \partial_{q+1})$

$\Longrightarrow \overline{H_q}$:CC→Group kovaryant funktordur.

Tanım 2.3.10. $\varphi: C_{1\rightarrow}C_2$ giden zincir komplekslerin morfizması olsun $\forall$ q∈Z için $\varphi_{*q}: \overline{H_q}(C_1) \simeq \overline{H_q}(C_2)$ izomorfizma ise o zaman φ dönüşümüne kesme özelliğini sağlayan morfizma yada φ'ye kesme denir.

Görüldüğü gibi kesme aksiyomu tanımdan sağlanıyor. Yani kesme aksiyomunda homoloji grupların dönüşümü izomorfizmaydı. φ_{*q} ;tanımı gereği homoloji grubundan diğerine giden homoloji grupları arasındaki izomorfizmaydı.
Şimdi $\overline{H_q}$: CC→Group dönüşümün homoloji teori aksiyomlarını sağladığını gösterelim.6)Kesme aksiyomu sağlandı.
1),2) Funktor özelliği sağlandı.Şimdi homotopya aksiyomunu araştıralım.

Teorem 2.3.11. $\varphi, \psi: C_{1\rightarrow}C_2$ giden morfizmalar zincir homotop ise $\forall$ q∈Z için $\varphi_{*q} = \psi_{*q}: \overline{H_q}(C_1) \rightarrow \overline{H_q}(C_2)$ dır.

İspat: φ, ψ zincir homotop olduğundan $\exists\ D_q : G_{1q} \rightarrow G_{2q+1}$ öyle ki

$$\begin{tikzcd}
G_{1q-1} \arrow[dr, "D_{q-1}"'] & G_{1q} \arrow[l, "\partial_{1q}"'] \arrow[d, shift right, "\varphi_q"'] \arrow[d, shift left, "\psi_q"] \arrow[dr, "D_q"] & \\
& G_{2q} & G_{2q+1} \arrow[l, "\partial_{2q+1}"]
\end{tikzcd}$$

Diyagramı için ;

$D_{q-1}\partial_{1q}$+$\partial_{2q+1}D_q$=φ_q-ψ_q ……(2.3) …..yazılabilir.

φ_{*q}=ψ_{*q}: $\overline{H_q}(C_1)$→ $\overline{H_q}(C_2)$ olduğunu gösterelim.

gg:∀ Z + Im∂_{1q+1} ∈ $\overline{H_q}(C_1)$ için φ_{*q}(Z + Im∂_{1q+1})= ψ_{*q}(Z + Im∂_{1q+1})

φ_{*q}(Z + Im∂_{1q+1})= φ_q(Z) + Im ∂_{2q+1}

ψ_{*q}(Z + Im ∂_{1q+1})=ψ_q(Z) + Im ∂_{2q+1} olduğunu gösterelim

Z∈Ker∂_{1q} olduğundan ……(2.3)….eşitliğinden

$D_{q-1}\partial_{1q}(Z)$+$\partial_{2q+1}D_q$(Z)= $\partial_{2q+1}(D_q$(Z)) =φ_q(Z)-ψ_q(Z)

⟹ a ∉ φ_q(Z)-ψ_q(Z) için ∃b∈ D_q(Z): ∂_{2q+1}(b)=a

⟹ a ∈ Im ∂_{2q+1}

⟹ φ_q(Z)-ψ_q(Z) ∈ Im ∂_{2q+1}

H⊲G ve ${}^{G}/_{H}$ $[Z_1]$=$[Z_2]$ ⟹ Z_1-Z_2 ∈H idi.

$Im\partial_{2q+1}$ normal alt gruo olduğundan

$[\varphi_q$(Z)$]$=φ_q(Z) + Im ∂_{2q+1}

$[\psi_q$(Z)$]$=ψ_q (Z) + Im∂_{2q+1} yazılır.

⟹ φ_{*q}(Z + Im ∂_{1q+1})= ψ_{*q} (Z + Im∂_{1q+1}) bulunur.5)homotopya aksiyomuda sağlanmış olur.

Teorem 2.3.12. Eğer C={G_q,∂_q:G_q → G_{q-1}} zincir kompleksi noktaya benzer kompleks ise o zaman

$$\overline{H_q}(C)=\begin{cases} 0, & q\neq 0 \\ G_0, & q=0 \end{cases}$$ sağlanır.

İspat: C noktaya benzer kompleks olsun.O zaman ;

$$\left.\begin{array}{l} q>0 \text{ için } \partial_{2q} \\ q<0 \text{ için } \partial_{2q+1} \end{array}\right\}$$ izomorfizmalarıdır.

$$\ldots\leftarrow \quad G_{-2} \xleftarrow{\partial_{-1}} G_{-1} \xleftarrow{\partial_0} G_0 \xleftarrow{\partial_1} G_1 \xleftarrow{\partial_2} G_2 \xleftarrow{\partial_3} G_3 \xleftarrow{\partial_4} G_4 \leftarrow\ldots$$

Şimdi $\overline{H_3}$(C) ‘yi araştıralım.

$\overline{H_3}$(C)= ${}^{Ker\partial_3}/_{Im\partial_4}$ dir. q> 0, ∂_{2q} için ∂_4 izomorfizma olduğundan Im∂_4=G_3 olur.

Im∂_4=G_3 $\subset$ Ker∂_3 (zincir kompleksin tanımından)

$\Rightarrow$ G_3 $\subset$ Ker∂_3 olamayacağından G_3= Ker∂_3 yazılır.

$\Rightarrow$ $Im\ \partial_4$=G_3 $\subset$ Ker ∂_3

$\Rightarrow$ $\overline{H_3}$(C)= ${}^{Ker\partial_3}/_{Im\partial_4}$=${}^{G_3}/_{G_3}$=0 bulunur.

${}^{G_3}/_{G_3}$demek tüm grubu bir noktaya büzmek demek oda sıfırdır.

Şimdi $\overline{H_2}$(C) ‘yi bulalım.

$\overline{H_2}$(C)=${}^{Ker\partial_2}/_{Im\partial_3}$ $\Rightarrow$ G_3= Ker∂_3 olduğundan ∂_3 =0dır.Im ∂_3 =0

∂_2 izomorfizma olduğundan Ker∂_2=0 dır.

$\overline{H_2}$(C) =${}^0/_0$=0 oluyor.

Benzer şekilde $\overline{H}_1(C)$=0 dır.

$\overline{H}_1(C)$=${}^{Ker\partial_1}/_{Im\partial_2}$, q> 0, ∂_{2q} için ∂_2 izomorfizma olduğundan $Im\partial_2$=G_1 olur.

$Im\partial_2$=$G_1 \subset Ker\partial_1$, $G_1 \subset Ker\partial_1$olamayacağından $G_1 = Ker\partial_1$ yazılır.

$Im\partial_2$=$G_1 = Ker\partial_1$ $\overline{H}_1(C)$=${}^{Ker\partial_1}/_{Im\partial_2}$=${}^{0}/_{0} = 0$

Şimdi $\overline{H_0}$(C)'ye bakalım $\overline{H_0}$(C)=${}^{\mathrm{Ker}\partial_0}/_{Im\partial_1}$

Im$\partial_0 \subset$ Ker ∂_{-1} (zincir kompleksin tanımından)

∂_{-1} izomorfizma olduğundan biliniyorki izomorfizma ise çekirdek =0 dır.

Im$\partial_0 \subset$ Ker∂_{-1} =0 $\Longrightarrow$ Im∂_0=0

$\Longrightarrow$ ∂_0=0

$\Longrightarrow$ Ker∂_0=G_0 örtendir.

$Im\partial_2$ $\subset$Ker∂_1 $\Longrightarrow$ ∂_2izomorfizma olduğundan G_1= $Im\partial_2$ $\subset$Ker∂_1 oluyor.

$\Longrightarrow$ $G_1 \subset$ Ker∂_1

$\Longrightarrow$ $G_1 =$ Ker∂_1 olmak zorundadır.

$\Longrightarrow$ ∂_1=0

$\Longrightarrow$ Im ∂_1=0

$\overline{H_0}$(C)=${}^{\mathrm{Ker}\partial_0}/_{Im\partial_1}$=${}^{G_0}/_{0}$=$G_0$ bulunur 7) boyut aksiyomuda sağlanmış olur.

Tanım2.3.13.

$$\ldots \to H^q \xrightarrow{\partial^q} H^{q+1} \xrightarrow{\partial^{q+1}} H^{q+2} \to \cdots \qquad Im\partial^q \subset Ker\partial^{q+1}$$ ise böyle diziye ko-zincir kompleks denir ve $\partial^{q+1}{}_{o}\partial^q = 0$ şeklinde gözterilir.

3.MATERYAL Ve YÖNTEM

3.1. Soft Küme

U bir evrensel küme,E parametreler kümesi , P(U), U'nun kuvvet kümesi ve A$\subseteq E$ olsun.

Tanım 3.1.1. Her bir $F: A \rightarrow P(U)$ dönüşümüne U üzerinde bir soft küme denir ve (F, A) ile gösterilir.

Başka bir deyişle U üzerinde bir soft küme U 'nun alt kümelerinin bir parametrelenmiş ailesidir.ε ∈A için $F(\varepsilon)$,(F, A) soft kümenin ε-elemanlarının kümesi ya da soft kümenin ε-yaklaşımlarının kümesi olarak düşünülebilir.(Molodtsov 1999).

Örnek 3.1.2. Bir (F, A) soft kümesi X şahsının almak için düşündüğü evin özelliklerinin tasviri olsun.

Farz edelim ki U=$\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6\}$ durumunda altı ev vardır ve E=$\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ parametrelerinin kümesi olsun.e_i(1,2,3,4,5)sırasıyla "pahalı","güzel","ahşap","ucuz" ve "bahçeli" parametrelerinin birini işaret etmek üzere F dönüşümü "ev(.)" şeklinde verildiği düşünülsün.Örneğin $F(e_1)$,"ev(pahalı)"anlamındadır ve onun fonksiyon değeri {h∈U:h pahalı evdir} kümesidir.

Farz edelim ki $F(e_1)$=$\{h_2,h_4\}$,$F(e_2)$=$\{h_1,h_3\}$,$F(e_3)$=$\emptyset$,$F(e_4)$=$\{h_1,h_3,h_5\}$ ve $F(e_5)$=$\{h_1\}$ dır.O halde (F,E) soft kümesini yaklaşımların aşağıdaki gösterimini içeren bir küme olarak görebiliriz.(Molodtsov 1999)

(F,E)={$(pahalı\ ev, \{h_2,h_4\})$, $(güzel\ ev, \{h_1, h_3\})$, $(ahşap\ ev\ , \emptyset)$,(ucuz ev,$\{h_1, h_3, h_5\}$), $(bahçeli\ ev\ , \{h_1\})$}

Tanım 3.1.3. Eğer U üzerinde (F,A) ve (G,B) iki soft kümesi için

1) $A \subset B$ ve

2) $\forall \boldsymbol{\varepsilon} \in A$, $F(\varepsilon) \subset G(\varepsilon)$ ise

(F,A)'ya (G,B)'nin soft alt kümesi denir ve $(F,A) \tilde{\subseteq} (G,B)$ ile gösterilir.

Eğer(F,A),(G,B)'nin soft alt kümesi ve (G,B) de (F,A)'nın soft alt kümesi ise bu kümelere soft eşittir denir.(Maji et al.2003)

Tanım 3.1.4. U üzerindeki (F,A) ve (G,B) iki soft kümenin kesişimi (H,C) soft kümesidir. Burada $C = A \cap B$, $\forall \varepsilon \in \mathrm{C}$, $\mathrm{H}(\varepsilon) = \mathrm{F}(\varepsilon) \cap \mathrm{G}(\varepsilon)$ ve $(F,A) \tilde{\cap} (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.(Maji et al.2003)

Tanım 3.1.5. U üzerindeki (F,A) ve (G,B) iki soft kümenin birleşimi (H,C) soft kümesidir.Burada $C = A \cup B, \forall \varepsilon\ C$

$$\mathrm{H}(\varepsilon) = \begin{cases} \mathrm{F}(\varepsilon), & \text{eğer } \varepsilon \in A - B \text{ ise,} \\ \mathrm{G}(\varepsilon), & \text{eğer } \varepsilon \in B - A \text{ ise,} \\ \mathrm{F}(\varepsilon) \cup \mathrm{G}(\varepsilon), & \text{eğer } \varepsilon \in A \cap B \text{ ise.} \end{cases}$$

Bu işlem $(F,A) \tilde{\cup} (G,B) = (H,C)$ ile gösterilir.(Maji et al.2003)

Örnek 3.1.6. Farz edelim ki $U=\{h_1,h_2,h_3,h_4,h_5,h_6,h_7\}$, A={pahalı,orta,ucuz} ve B={güzel,modern.ucuz} dır.F(pahalı)=$\{h_2,h_4\}$,F(orta)=$\{h_1,h_3,h_5\}$,F(ucuz)=$\{h_6,h_7\}$, G(güzel)=$\{h_2,h_3,h_4\}$,G(modern)=$\{h_1,h_5,h_6\}$,G(ucuz)=$\{h_6,h_7\}$ olsun o halde:

$(F,A) \tilde{\cap} (G,B)=(H,C)$,$C=A\cap B$ olmak üzere H(ucuz)=$\{h_6,h_7\}$

$(F,A) \tilde{\cup} (G,B)=(H,C)$,$C=A\cup B$ olmak üzere H(pahalı)=$\{h_2,h_4\}$,

H(orta)=$\{h_1,h_3,h_5\}$,H(ucuz)=$\{h_6,h_7\}$,H(güzel)=$\{h_2,h_3,h_4\}$,

H(modern)=$\{h_1,h_5,h_6\}$ olur.(Maji et al.2003)

Tanım 3.1.7. $(F_i,A_i)_{i\in I}$, U üzerinde soft kümelerin boş olmayan bir ailesi olsun.Bu soft kümelerin birleşimi aşağıdaki koşulları sağlayan (H, C) soft kümesine denir.

1) $C = U_{i\in I} A_i$,
2)Her $\varepsilon \in C$ için $H(\varepsilon) = \cup_{i\in I(\varepsilon)} F_i(\varepsilon)$, burada $\mathrm{I}(\varepsilon) = \{\mathrm{i} \in I: \varepsilon \in A_i\}$.

Bu birleşim$U^{\sim}{}_{i\in I}(F_i,A_i) = (H, C)$ ile gösterilir.(Maji at al.2003).

Tanım 3.1.8. (F, A) ve $(G, B), U$ üzerinde iki soft küme ise $(F, A)\ \widetilde{\wedge}\ (G, B)$ şeklinde gösterilen"$(F, A) VE (G, B)$" , $(F, A)\ \widetilde{\wedge}\ (G, B) = (H, C)$ olarak tanımlanır.Burada C=A×B dır ve her (α,b)∈C için H(α,b)=F(α)∩G(b) dir.(Maji et al.2003)

Tanım 3.1.9. (F, A) ve $(G, B), U$ üzerinde iki soft küme ise $(F, A)\ \tilde{\vee}\ (G, B)$ şeklinde gösterilen"$(F, A)\ YA\ DA\ (G, B)$", $(F, A)\ \tilde{\vee}\ (G, B) = (H, C)$olarak tanımlanır.Burada C=A×B dır ve her (α,b)∈C için $H(\alpha, b) = F(\alpha) \cup G(b)$ dir(Maji et al.2003)

Tanım 3.1.10. Bir (F, A) soft kümesinin tümleyeni $(F, A)^c$ ile gösterilir ve $(F, A)^c = (\mathrm{F^c}, \mathrm{A})$ şeklinde tanımlanır. Burada F^c:A→P(U), her α ∈A için $F^c(\alpha)$=U\\$F(\alpha)$ dır (Maji et al.2003)

Tanım 3.1.11. (F,A), U üzerinde bir soft küme olsun.Her α ∈A için F(ε)=∅ ise o halde (F,A) soft kümesine boş soft küme denir ve Φ ile gösterilir.(Maji et al. 2003)

Tanım 3.1.12. (F, A) ,U üzerinde bir soft küme olsun.Her $\alpha \in A$ için $F(\varepsilon) = U$ ise o halde (F, A) , soft kümesine mutlak soft küme denir ve Ã ile gösterilir.

Açıktır ki $\tilde{A}^c$=Φ ve Φ^c=$\tilde{A}$ dır(Maji et al.2003)

3.2. Soft Grup

Bu bölüm boyunca , G Bir grup ve A boş olmayan herhangi bir küme olsun.R de,G' nin bir elemanı ile A' nın bir elemanı arasında herhangi bir ikili bağıntıyı temsil etsin.Küme değerli bir $F:A\rightarrow P(G)$ fonksiyonu $F(x)=\{y\in G:(x,y)\in R,\ x\in A$ ve $y\in G\}$ şeklinde tanımlanabilir.O halde (F, A), G üzerinde bir soft kümedir. A ' dan G ' ye tanımlanan bir küme değerli fonksiyon da $A\times G$ üzerinde bir ikili R bağıntısı tanımlar ve $R=\{(x,y)\in A\times G:\ y\in F(x)\}$ ile verilir. (A,G,R) üçlüsü bir yaklaşım kümesi olarak ifade edilir.

Tanım 3.2.1. (F,A), G üzerinde bir soft küme olsun.Eğer her $x\in A$ için $F(x)<G$ ise, (F,A)'ya G üzerinde bir soft grup denir(Aktaş and Cagman 2007)

Tanım 3.2.2. (F,A), G üzerinde bir soft grup olsun .O halde

1) Eğer e ,G 'nin birim elemanı olmak üzere her $x\in$A için $F(x)=\{e\}$ ise (F,A)' ya G üzerinde bir birim soft grup denir.
2) Her $x\in$A için $F(x)=G$ ise (F,A)'ya G üzerinde bir mutlak soft grup denir (Aktaş and Cagman 2007)

Tanım 3.2.3. (F,A) ve (H,K), G üzerinde iki soft grup olsun

1) $K\subset A$,
2) Her $x\in$K için $H(x)<F(x)$

koşulları sağlanırsa (H,K)' ya (F,A)' nın bir soft alt grubu denir ve $(H,K)\tilde{<}(F,A)$ ile gösterilir(Aktaş and Cagman 2007)

Tanım 3.2.4. (F,A) ve (H,B) G ve K üzerinde sırasıyla iki soft grup ve $f:G\rightarrow K$ ve $g:A\rightarrow B$ iki fonksiyon olsun.
1) f, G'den K'ya br homomorfizma ,
2) g, A'dan B'ya bir dönüşüm ve
3) $\forall x\in A$ için $f(F(x))=H(g(X))$

koşulları sağlanırsa (f,g)'ya soft grupların soft homomorfizması denir.Ayrıca (F,A) , (H,B)'ya soft homomorftur.

Bu tanımda , eğer f , G'den K'ya bir izomorfizm ve g, A'dan B'ye bir bire-bir dönüşüm ise o halde (f,g) ' ye soft izomorfizma denir.Ayrıca (F,A) ,(H,B)'ye soft izomorftur ve $(F,A)\simeq(H,B)$ ile gösterilir.(Aktaş and Cagman 2007)

Tanım 3.2.5. (F,A) ,G üzerinde bir soft grup ve (H.B), (F,A)' nın bir soft alt grubu olsun. $H(x)$, $F(x)$'in bir normal alt grubu yani,$\forall x \in B$ için $H(x) \lhd F(x)$ ise,(H,B) grubuna (F,A)'nın bir normal soft alt grubu denir ve $(H,B) \mathrel{\tilde{\lhd}} (F,A)$ile gösterilir.(Aktaş and Cagman 2007)

Tanım 3.2.6. (F,A) ve (H,B) , G ve K üzerinde sırasıyla iki soft grup olsun.(F,A) ve (H,B)'nin çarpımı $(F,A)\times(H,B)=(U,A\times B)$ şeklinde tanımlanır. Burada $\forall(x,y)\in A\times B$ için $U(x,y)=F(x)\times H(y)$ ile tanımlanır.(Aktaş and Cagman 2007)

3.3. Soft Halka

Bu bölümde R bir komutatif halka olsun.Tüm soft kümeler R üzerinde alınsın.

Tanım 3.3.1. (F,A) , R halkası üzerinde boş olmayan bir soft küme olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x)$, R' nin bir alt halkası ise (F,A)'ya R üzerinde bir soft halka denir.(Acar et al. 2010)

Teorem 3.3.2. (F,A) ve (G,B) , R üzerinde bir soft halka olsun

1) Eğer $(F,A)\tilde{\wedge}(G,B)$ boş değil ise ,R üzerinde bir soft halkadır.
2) Eğer $(F,A)\tilde{\cap}(G,B)$ kesişimi boş değil ise ,R üzerinde bir soft halkadır.(Acar et al 2010)

Tanım 3.3.3. (F,A) ve (G,B) , R üzerinde bir soft halka olsun.

1) $B \subset A$,
2) $\forall x \in B$ için $G(x)$,$F(x)$' in bir alt halkasıdır.

koşulları sağlanır ise, (G, B) , (F, A) 'nın bir soft alt halkasıdır denir(Acar et al.2010)

Teorem 3.3.4. (F,A) ve (G,B) , R üzerinde bir soft halka olsun.

1) Eğer $\forall x \in B \subset A$ için $G(x) \subset F(x)$ ise , (G,B), (F,A)'nın bir soft halkasıdır.
2) Eğer $(F,A) \tilde{\cap} (G,B)$ boş değil ise,(F,A) ve (G,B) soft halkaların her ikisinin de bir soft alt halkasıdır(Acar et al.2010)

3.4. Soft Modül

Bu bölümde, M bir sol R - modül ve A boş olmayan herhangi bir küme olsun.
$F : A \longrightarrow P(M)$ bir dönüşüm ve (F,A) çifti M üzerinde bir soft kümedir.

Tanım 3.4.1. (F,A) ,M üzerinde bir soft küme olsun.Her bir $x \in A$ için $F(x) < M$ ise , (F,A)'ya M üzerinde bir soft modül denir.(Sun et al.2008)

Önerme 3.4.2. (F,A) ve (G,B) ,M üzerinde iki soft modül olsun.

1) $(F,A) \tilde{\cap} (G,B)$, M üzerinde bir soft modüldür.
2) Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise $(F,A) \tilde{\cup} (G,B)$, M üzerinde bir soft modüldür.(Sun et al.2008).

Tanım 3.4.3. (F,A) ve (G,B), M üzerinde iki soft modül olsun. O halde $(F,A) \oplus (G,B)$, (H, AxB) olarak tanımlanır. Burada $\forall (x,y) \in AxB$ için $H(x,y)=F(x)+G(y)$ dir.(Sun et al.2008)

Önerme 3.4.4. (F,A) ve (G,B) , M üzerinde iki soft modül olsun. $(F,A) \oplus (G,B)$, M üzerinde bir soft modüldür.(Sun et al.2008)

Tanım 3.4.5. (F,A) ve (G,B) sırasıyla M ve N üzerinde iki soft modül olsun. O halde $\forall(x,y)\in(A\times B)$ için $(F,A)\times(G,B)=(H,A\times B)$, $H(x,y)=F(x)\times G(y)$ şeklinde tanımlanan soft modül (F,A) ve (G,B) soft modüllerinin çarpımı denir ve $(F,A)\times(G,B)$ ile gösterilir.(Sun et al.2008)

Önerme 3.4.6. (F,A) ve (G,B) sırasıyla M ve N üzerinde iki soft modül olsun.O halde (F,A)x(G,B) , M üzerinde bir soft modüldür.(Sun et al.2008)

Tanım 3.4.7. (F,A) ve (G,B) , M üzerinde iki soft modül olsun.Eğer

1) $B\subset A$ ve
2) $\forall x\in$B için G(x)<F(x)

koşulları sağlanıyor ise , (G,B)'ye (F,A)'nın bir soft alt modülü denir ve $(G,B)\widetilde{<}(F,A)$ ile gösterilir.(Sun et al.2008)

Önerme 3.4.8. (F,A), M üzerinde bir soft modül ve $\{(G_i,B_i)\backslash i\in I\}$, (F,A)'nın soft alt modüllerinin boş olmayan bir ailesi olsun.O halde

1)$\sum_{i\in I}(G_i,B_i)$,(F,A)'nın soft alt modülüdür.

2)$\bigcup_{i\in I}(G_i,B_i)$,(F,A)'nın bir soft alt modülüdür.

3)Eğer $\forall$ i,j$\in$ I için $B_i\cap B_j=\emptyset$ ise $\bigcup_{i\in I}(G_i,B_i)$,(F,A)'nın bir soft alt modülüdür.
(Sun et al.2008)

Önerme 3.4.9. (F,A) ve (G,B) , M üzerinde iki soft modül ve (G,B), (F,A) 'nın bir soft alt modülü olsun .Eğer f:$M\rightarrow N$ modüllerin homomorfizması ise,$(f(F),A)$ ve $(f(G),B)$, N üzerinde soft modüllerdir ve $(f(G),B)$,$(f(F),A)$'nın soft alt modülüdür.(Sun et al 2008).

Tanım 3.4.10. (F,A) ve (G,B) sırasıyla M ve N üzerinde iki soft modül,

f:$M \to N$ ve g:$A \to B$ iki fonksiyon olsun.

1) f:$M \to N$ modüllerin homomorfizması,
2) g:$A \to B$ bir dönüşüm,
3) $\forall x$∈A için f(F(x))=G(g(x))

koşulları sağlanıyorsa (f,g)'ye soft modüllerin soft homomorfizması denir.Aynı zamanda(F, A), (G, B)'ye soft homomorftur ve $(F, A) \simeq (G, B)$ ile gösterilir.

Bu tanımda f, M'den N'ye bir izomorfizm ve g, A'dan B'ye bir birebir dönüşüm ise o halde (f,g)'ye soft izomorfizma denir(Sun et al.2008)

Tanım 3.4.11. (F,A) , M üzerinde bir soft modül olsun.

1) Eğer $\forall x$∈A için $F(x)$=0 ise (F,A)'ya M üzerinde bir boş soft modül denir. Burada 0 ,M'nin sıfır elamanıdır.
2) Eğer $\forall x \in A$ için F(x) $= M$ ise(F, A)'ya M üzerinde bir mutlak soft modül denir.(Sun et al .2008)

Önerme 3.4.12.

1) (F,A) M üzerinde bir soft modül ve f:$M \to N$ bir homomorfizm olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x)$=ker f ise o halde (f(F),A) ,M üzerinde boş soft modüldür.
2) (F,A) ,M üzerinde bir mutlak soft modül ve f:$M \to N$ bir epimorfizm olsun.O halde (f(F),A) ,N üzerinde bir mutlak soft modüldür.(Sun et al.20078)

Önerme 3.4.13. (F,A) ,P modülü üzerinde bir boş soft modül ve (G,B) ,Q modülü üzerinde bir mutlak soft modül olsun.Eğer

$$0 \to P \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} Q \to 0$$

dizisi modüllerin kısa tam dizisi ise ,o halde $\forall x \in A$,y∈B için

$$0 \to F(x) \xrightarrow{\tilde{f}} M \xrightarrow{\tilde{g}} G(y) \to 0$$

dizisi soft modüllerin bir kısa tam dizisidir.(Sun et al.2008)

3.5. Fuzzy Soft Küme

Tanım 3.5.1. I^X , X üzerinde tüm fuzzy kümelerin ailesini göstersin ve $A \subset E$ olsun.Bir (F,A) çifti X üzerinde bir fuzzy soft küme olarak adlandırılır.Burada F,A'dan I^X'e giden bir dönüşümdür.Yani $\forall \alpha \in A$ için$F(\alpha) = F_\alpha : X \to$ I ,X üzerinde bir fuzzy kümedir.(Maji et al .2001)

Tanım 3.5.2. (F,A) ve (G,B) ,X üzerinde iki fuzzy soft küme olsun.

1) $A \subset B$,
2) $\forall \alpha \in A$ için $F_\alpha \leq G_\alpha$ yani , F_α, G_α 'nın bir fuzzy alt kümesi

koşulları sağlanır ise (F,A)'ya (G,B)'nin fuzzy soft alt kümesi denir.

Bu bağıntı $(F, A) \tilde{\subseteq} (G, B)$ ile gösterilir.Benzer şekilde, (G, B), (F, A)'nın fuzzy soft alt kümesi ise (F,A)' ya (G,B) 'nin fuzzy soft süper kümesi denir. Bu bağıntı da $(F, A) \tilde{\supseteq} (G, B)$ ile gösterilir.(Maji et al.2001)

Tanım 3.5.3. (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki fuzzy soft küme olsu. (F,A), (G,B)'nin fuzzy soft alt kümesi ve (G,B), (F,A)'nın fuzzy soft alt kümesi ise (F,A) ve (G,B) fuzzy soft eşittir denir.(Maji et al.2001)

Tanım 3.5.4. X üzerindeki (F,A) ve (G,B) iki fuzzy soft kümesinin birleşimi (H,C) fuzzy soft kümedir. Burada C=$A \cup B$ ve $\forall$c$\in C$ için,

$$H(c)=\begin{cases} F_c, & \text{eğer } c\in A-B \text{ ise,} \\ G_c, & \text{eğer } c\in B-A \text{ ise,} \\ F_c \vee G_c, & \text{eğer } c\in A\cap B \text{ ise,} \end{cases}$$

Bu işlem $(F,A)\,\tilde{\cup}\,(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir.(Maji et al.2001)

Tanım 3.5.6. X üzerindeki (F,A) ve (G,B) iki fuzzy soft kümesinin arakesiti (H,C) fuzzy soft kümedir.Burada $C=A\cap B$ ve $\forall c\in C$ için $H_c=F_c\wedge G_c$ dir. Bu işlem $(F,A)\,\tilde{\cap}\,(G,B)=(H,C)$ ile gösterilir.(Maji et al.2001)

Tanım 3.5.7. (F,A) ,X üzerinde bir fuzzy soft küme olsun.$\forall e\in A$ için $F_e=\tilde{0}$ ise,(F,A) bir boş fuzzy soft küme olarak adlandırılır ve $\tilde{\Phi}$ ile gösterilir. Burada $\tilde{0}$, X deki tüm x'ler için 0 değeri alan Xüzerindeki boş fuzzy kümedir(Maji et al.2001).

Tanım 3.5.8. (F,A), X üzerinde bir fuzzy soft küme olsun.$\forall e\in A$ için $F_e=\tilde{1}$ ise, (F,A) bir mutlak fuzzy soft küme olarak adlandırılır ve $\tilde{X}$ ile gösterilir. Burada $\tilde{1}$,X deki tüm x'ler için 1 değeri alan X üzerindeki mutlak fuzzy kümedir.(Maji et al.2001)

3.6. Fuzzy Soft Grup

Tanım 3.6.1. (F,A) ,G üzerinde bir fuzzy soft küme olsun .$\forall x\in A$ için $F(x)$, G'nin bir fuzzy alt grubu ise ,(F,A)'ya G üzerinde bir fuzzy soft grup denir.(Jin-liang et al.2008)

Teorem 3.6.2. (F,A) ve (H,A) ,G üzerinde iki fuzzy soft grup olsun.O halde $(F,A)\,\tilde{\cap}\,(H,A)$ kesişimi G üzerinde bir fuzzy soft gruptur(Jin-liang et al.2008)

Teorem 3.6.3. (F,A) ve (H,B) , G üzerinde iki fuzzy soft grup olsun. Eğer $A\cap B=\emptyset$ ise, $(F,A)\,\tilde{\cup}\,(H,B)$birleşimi G üzerinde bir fuzzy soft gruptur(Jin-liang et al.2008)

Teorem 3.6.4. (F,A) ve (H,B) ,G üzerinde iki fuzzy soft grup olsun.O halde $(F,A)\wedge(H,B)$,G üzerinde bir fuzzy soft gruptur(Jin-liang et al.2008)

Tanım 3.6.5. *(F,A)* ,*G* üzerinde bir fuzzy soft grup olsun.O halde:

1) $\forall x \in A$ için F(x)={e} ise ,(*F*,*A*)' ya *G* üzerinde bir birim fuzzy soft grup denir. Burada e ,*G*'nin birim elemanıdır.

2) $\forall x \in A$ için *F(x)=G* ise (*F*,*A*)'ya *G* üzerinde bir mutlak fuzzy soft grup denir.

(Jin –liang et al.2008)

Teorem 3.6.6.

1) (*F*,*A*) , *G* üzerinde bir fuzzy soft grup ve $f: G \to K$ bir homomorfizma olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x)$=ker f ise o halde $(f\ (F), A)$, *K* üzerinde bir birim fuzzy soft grupdur.

2) (*F*,*A*) 'ya *G* üzerinde bir mutlak fuzzy soft grup ve $f: G \to K$ bir homomorfizma olsun. O halde ($f(F)$,*A*) , *K* üzerinde bir mutlak fuzzy soft grubudur (Jin-liang et al.2008)

Tanım 3.6.7. *(F,A)* ve (*H*,*B*) ,G üzerinde iki soft grup olsun.Eğer

1)A⊂B,

2)$\forall \varepsilon \in A$ için F(ε), H(ε)'nun bir fuzzy alt grubu

koşulları sağlanır ise,(*F*,*A*)'ya (*H*,*B*)'nin bir fuzzy soft alt grubu denir.(Jin-liang et al.2008)

Teorem 3.6.8. (*F*,*A*) ve (*H*,*A*) ,*G* üzerinde iki fuzzy soft grup olsun.Eğer $\forall x \in$A için $F(x) \subseteq H(x)$ ise, (*F*,*A*) , (*H*,*A*)' nın bir soft alt grubudur.(Jin-liang et al.2008)

Teorem 3.6.9. (*F*,*A*), *G* üzerinde bir fuzzy soft grup ve $\{(H_i,B_i)$: i∈I}, (*F*,*A*)'nın fuzzy soft gruplarının boş olmayan ailesi olsun.Ohalde;

1) $\bigcap_{i\in I}(H_i, B_i)$, (*F*,*A*)'nın bir fuzzy soft alt grubudur.

2)$\bigwedge_{i\in I}(H_i, B_i)$,(*F*,*A*) 'nın bir fuzzy soft alt grubudur.

3)$\forall$i,j$\in$I için $B_i \cap B_j = \emptyset$ ise $\bigvee_{i\in I}(H_i, B_i)$,(*F*,*A*)'nın bir fuzzy soft alt grubudur(Jin-liang et al .2008)

Lemma 3.6.10. f:*G* → *K* bir homomorfizma olsun.O halde ;

1) *A*, *G*'nin bir fuzzy alt grubu ise , f(*A*), *K*'nın bir fuzzy alt grubudur.

2) *B*, *K*'nin bir fuzzy alt grubu ise f^{-1}(*B*), *G*'nın bir fuzzy alt gurubudur(Jin-liang et al .2008)

Teorem 3.6.11. (*F*,*A*) ve (*H*,*B*), *G* üzerinde iki fuzzy soft grup ve (*F*,*A*), (*H*,*B*)'nin bir fuzzy soft alt grubu olsun.Eğer f:*G* → *K* bir homomorfizma ise ,(f(*F*),*A*) ve (f(*H*),*B*) ikisi de *K* üzerinde fuzzy soft gruplardır ve (f(*F*),*A*), (f(*H*),*B*)'nin bir fuzzy soft alt grubudur.(Jin-liang et al.2008)

Tanım 3.6.12. (*F*,*A*) ,*G* üzerinde bir fuzzy soft grup ve (*F*,*A*) , (*H*,*B*)'nin bir fuzzy soft alt grubu olsun.$\forall x \in B$ için *F*(x), *H*(x)'in bir fuzzy normal alt grubu ise (*H*,*B*)'ya ,(*F*,*A*)'nın bir fuzzy normal soft alt grubu denir.(Jin-liang et al 2008).

Tanım 3.6.13. (*F*,*A*) ve (*H*,*B*), *G* ve *K* üzerinde sırasıyla iki fuzzy soft küme olsun. (*F*,*A*) ve (*H*,*B*) fuzzy soft kümelerinin çarpımı (*F*,*A*)×(*H*,*B*)=(*U*,*A*× B) şeklinde tanımlanır. Burada $\forall(x,y) \in A \times B$ için *U*(x,y) =*F*(x)× H(y) dir(Jin-Liang et al.2008)

Teorem 3.6.14. (*F*,*A*) ve (*H*,*B*), *G* ve *K* üzerinde sırasıyla iki fuzzy soft grup olsun. O halde (F,A)×(H,B) çarpımı G×K üzerinde fuzzy soft gruptur.(Jin-liang et al.2008)

Tanım 3.6.15. (*F*,*A*) ve (*H*,*B*) ,*G* ve *K* üzerinde sırasıyla iki fuzzy soft grup ve f:*G* → *K* ve $g: A \to B$ iki fonksiyon olsun.

1) f:*G* → *K* bir homomorfizma,

2) $g: A \to B$ bir dönüşüm ve

3) $\forall x \in A$ için $f(F(\mathrm{x})) = H(\mathrm{g(x)})$

koşulları sağlanırsa (f,g)'ye bir fuzzy soft homomorfizma denir.Eğer (f,g) bir fuzzy soft homomorfizma ve f,g ikiside bijektif ise; (f,g) fuzzy homomorfizması altında (F,A) , (H,B)'ye fuzzy soft homeomorftur.

Bu tanımda eğer f:G→ K bir izomorfizma ve $g: A \to B$ bir bire-bir örten dönüşüm ise o halde (f,g)'ye bir soft izomorfizma denir ve (f,g) fuzzy soft homomorfizması altında (F,A) ve (H,B) soft izomorfturlar denir.(Jin-liang et al.2008)

Teorem 3.6.16. (F,A) ve (H,B) ,G ve K üzerinde sırasıyla iki fuzzy soft grup olsun.Eğer (F,A) ,G üzerinde bir fuzzy soft alt grup ve (F,A) ,(H,B)'ye fuzzy soft izomorf ise (H,B) ,K üzerinde bir fuzzy soft alt gruptur(Jin-liang et al.2008)

Sonuç 3.6.17. (F,A) ve (H,B) ,G ve K üzerinde sırasıyla iki fuzzy soft grup ve (F,A), (H,B)'ye fuzzy soft izomorf olsun. Eğer $F(x)$, G'nin bir fuzzy alt grubu ise, o halde H(g(x)) , K ' nın bir fuzzy alt grubudur ve F(x)~H(g(x)) dir (Jin-liang et al.2008)

Şimdi fuzzy soft grupların fuzzy soft homomorfizmalarının çekirdek ve görüntü kavramlarını verelim.

(F,A) ve (H,B), G ve K üzerinde sırasıyla iki fuzzy soft grup ve (f,g): (F,A)→(H,B) fuzzy soft grupların bir fuzzy soft homomorfizması olsun. $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha)$:G→I fuzzy kümesini F_a şeklinde gösterelim(Bayramov and Gunduz(Aras)2010)

Önerme 3.6.18. (F,A) ve (H,B) , G ve K üzerinde sırasıyla iki fuzzy soft grup ve $(f, g): (F, A) \to (H, B)$ fuzzy soft grupların bir fuzzy soft homomorfizması olsun.O halde, $\forall \alpha \in A$ için $f: (G, F_a) \to (K, H_{g(a)})$ dönüşümü fuzzy grupların bir fuzzy homomorfizmasıdır(Bayramov and Gunduz (Aras)2010).

Önerme 3.6.19. (F,A) ,G üzerinde bir fuzzy soft grup ve f:$G \to K$ grupların bir homomorfizması olsun.O halde $(f(F), A)$, K üzerinde bir fuzzy soft gruptur.(Bayramov and Gunduz (Aras)2010).

Önerme 3.6.20. (H,A), K üzerinde bir fuzzy soft grup ve f:$G \to K$, grupların bir homomorfizması olsun.O halde $(f^{-1}(H),A)$,G üzerinde bir fuzzy soft gruptur (Bayramov and Gunduz(Aras)2010).

Sonuç 3.6.21. (F,A) ,G üzerinde bir fuzzy soft grup , $H<G$ ve $i:H\to G$ gömme homomorfizması olsun.Ohalde $(i^{-1}(F),A)$,H üzerinde bir fuzzy soft gruptur ve $(i^{-1}(F),A)$ ise (F,A)'nın bir fuzzy soft alt grubudur.$\forall\alpha \in A$ için $(i^{-1}(F))_{\alpha}$:$H\to I$ fuzzy kümesi F_{α} fuzzy kümesinin H'a kısıtlanmasıdır.(Bayramov and Gunduz(Aras)2010)

(F,A), G üzerinde bir fuzzy soft grup ,f:$G\to K$ grupların bir homomorfizması ve i:ker$f\to G$ gömme dönüşümü olsun.O halde $(i^{-1}(F),A)$, ker$f$ üzerinde bir fuzzy soft gruptur(Bayramov and Gunduz (Aras)2010)

Tanım 3.6.22. ker$f$ üzerinde $(i^{-1}(F),A)$ fuzzy soft grubuna f'nin çekirdeği denir. (Bayramov and Gunduz(Aras)2010)

Sonuç 3.6.23. Eğer $H\lhd G$, $p:G \to G/H$, grupların bir kanonik epimorfizması ve (F,A) , G üzerinde bir fuzzy soft grup ise $(p(F),A)$,G/H üzerinde bir fuzzy soft gruptur. $(p,1_A)$: $(F,A) \to (p(F),A)$ ise fuzzy soft grupların bir fuzzy soft homomorfizmasıdır.(Bayramov and Gunduz (Aras)2010).

$(f,1_A)$:$(F,A)\to$ (H,A) ,G ve K üzerinde sırasıyla fuzzy soft grupların fuzzy soft homomorfizması olsun.Eğer H=Imf ise H üzerinde aşağıdaki şekilde iki fuzzy soft grup yapısı tanımlanabilir(Bayramov and Gunduz (Aras)2010)

1)Eğer j:Im$f\to K$ bir gömme homomorfizması ise $(j^{-1}(H),A)$ fuzzy soft grubu H üzerinde bir fuzzy soft grubudur.
2)f:G →Imf için $(f(H),A)$,H üzerinde bir fuzzy soft gruptur.

Lemma 3.6.24. f:$G \to K$ grupların homomorfizması olsun.

1) $(f\ ,1_A)$: $(F,A) \to (H,A)$ fuzzy soft grupların bir fuzzy soft homomorfizmasıdır⇔

$(f(F), A), (H, A)$'nın bir fuzzy soft alt grubudur.

2) $(f, 1_A): (F, A) \rightarrow (H, A)$ fuzzy soft grupların bir fuzzy soft homomorfizmasıdır⇔ $(f^{-1}(H), A), (F, A)$'nın bir fuzzy soft alt grubudur.

$(f,1_A)$:$(F,A) \rightarrow (H,A)$ fuzzy soft grupların bir fuzzy soft homomorfizması; $(\tilde{F},A)$ ve $(\widetilde{H}, A)$, ker$f$ ve Imf üzerinde sırasıyla fuzzy soft gruplar olsun. p:$G \rightarrow G/kerf$ kanonik epimorfizması ve G üzerinde (F,A) fuzzy soft grubu kullanılarak $(F, A)/(\tilde{F}, A)$ fuzzy soft grubu $p(F)$:$A \rightarrow$ p$\left({}^{G}/_{kerf} \right)$ şeklinde tanımlanır. Burada

$$\forall \alpha \in A, (\mathrm{p}(\mathrm{F}))_\alpha([x]) = \bigvee_{y \in [x]} (\mathrm{F})_\alpha(\mathrm{y})$$

(Bayramov and Gunduz(Aras)2010)

3.7.Fuzzy Soft Modül

Bu bölümde R, bir sıradan halkadır. M bir sol (ya da sağ) R –modül ve $A \neq \emptyset$ bir küme olsun. $PF(M), M$ üzerinde fuzzy kümelerin ailesini gösterelim.

Tanım 3.7.1. Eğer $F: A \rightarrow PF(M)$ dönüşümü ve $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha)$, M'nin bir fuzzy alt modülü koşulu sağlanırsa (F,A) çiftine M üzerinde bir fuzzy soft modül denir. $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha)$:$M \rightarrow I$ fuzzy kümesi F_a ile gösterilir(Gunduz(Aras) and Bayramov2011)

Tanım 3.7.2. (F,A) ve (H,B) , M ve N üzerinde sırasıyla iki fuzzy soft modül, f:$M \rightarrow N$ modüllerin bir homomorfizması ve g:$A \rightarrow B$ kümelerin bir dönüşümü olsun. Eğer $f(F_a)$=H(g(α))=$H_{g(a)}$ koşulu sağlanıyor ise , $(f$,g$)$:$(F, A) \rightarrow (H, B)$'ye fuzzy soft modüllerin bir fuzzy soft homomorfizması denir ve (F,A), (H,B)'ye fuzzy soft homomorftur denir.

Not edelim ki $\forall \alpha \in A$ için $f:(M, F_a) \rightarrow (N, H_{g(a)})$, fuzzy modüllerin bir fuzzy homomorfizmasıdır(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011).

Fuzzy soft modüller ve onların morfizmaları bir kategori oluşturur.Bu kategori FSM ile gösterilir(Gündüz(Aras) and Bayramov 2011)

Toerem 3.7.3. (F,A) ve (H,B), M üzerinde iki fuzzy soft modül olsun.O halde $(F, A) \cap (H, B)$ kesişimi , M üzerinde bir fuzzy soft modüldür.(Gunduz(Aras)and Bayramov 2011)

Teorem 3.7.4. (F,A) ve (H,B) ,M üzerinde iki fuzzy soft modül olsun. O halde $(F, A) \wedge (H, B), M$ üzerinde bir fuzzy soft modüldür.(Gunduz(Aras) and Bayramov 2011)

Teorem 3.7.5. (F,A) ve (H,B), M üzerinde iki fuzzy soft modül olsun.Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise o halde $(F, A) \cup (H, B), M$ üzerinde bir fuzzy soft modüldür.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Tanım 3.7.6. (F, A) ve (H, B) , M üzerinde iki fuzzy soft modül olsun.

1) $A \subset B$,
2) $\forall \boldsymbol{a} \in A$ için F_a ,H_a'nın bir fuzzy alt modülü ise

(F,A)'ya (H,B)'nin fuzzy soft alt modülü denir.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Teorem 3.7.7. (F,A) ve (H,B) ,M üzerinde iki fuzzy soft modül olsun.Eğer $\forall \alpha \in A$ için $F_a \leq H_a$ ise (F,A) ,(H,B)'nin fuzzy soft alt modülüdür.(Gunduz(Aras) and Bayramov 2011)

Tanım 3.7.8. $(F^{'}$,A) fuzzy soft modülüne $(f$,g)' nin çekirdeği denir ve ker(f,g) ile gösterili(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Şimdi B'=g(A) olsun. O halde ,$\forall b \in B'$ için g(α)=b olacak şekilde $\alpha \in A$ vardır. N'=Imf< N olsun .H':B' →$PF(N')$ dönüşümünü $H'(b')$=H(g(α))$|_{N'}$ şeklinde tanımlayalım. (f,g) bir fuzzy soft homomorfizm olduğundan , $\forall \alpha \in A$ için $f(F_a)$= $H_{g(a)}$ sağlanır. O halde (H', B') çifti , N' üzerinde bir fuzzy soft modüldür ve (H', B') ,(H,B)'nin bir fuzzy soft alt modülüdür.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011).

Tanım 3.7.9. (H', B') fuzzy soft modülüne (f,g)'nin görüntüsü denir ve Im(f,g) ile gösterilir.(Gundu(Aras) and Bayramov 2011)

Önerme 3.7.10. (F,A) , M üzerinde bir fuzzy soft modül , N bir R- modül ve f:$M \rightarrow N$, R-modüllerin bir homomorfizması olsun.O halde (f(F),A) ,N üzerinde bir fuzzy soft modüldür.(Gunduz(Aras) and Bayramov 2011)

Not edelim ki (f,1_A):(F, A) → $(f(F), A)$, fuzzy soft modüllerin bir fuzzy soft homomorfizmasıdır (Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Önerme 3.7.11. Eğer M bir R- modül , (H, A) , N üzerinde bir fuzzy soft modül ve f:$M \rightarrow N$,R- modüllerin bir homomorfizması ise o halde (f^{-1}(H),A) ,M üzerinde bir fuzzy soft modüldür.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011).

Açıktır ki , (f,1_A): (f^{-1}(H),A) → (H,A) fuzzy soft modüllerin bir fuzzy soft homomorfizmasıdır.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Lemma 3.7.12. M ve N iki R-modül f:$M \rightarrow N$, R –modüllerin bir homomorfizması ; (F, A) ve (H, A) , M ve N üzerinde sırasıyla iki fuzzy soft modül olsun .O halde :

1)(f,1_A):(F, A) → (H, A) ,bir fuzzy soft homomorfizmadır ancak ve ancak $\forall \alpha \in A$ için $H_a \geq f(F_a)$ ise.
2) (f,1_A):(F, A) → (H, A) , bir fuzzy soft homomorfizmadır ancak ve ancak $\forall \alpha \in A$ için (F_a)≤ $f^{-1}(H_a)$ ise (Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Şimdi fuzzy soft modüller üzerinde diğer cebirsel işlemleri tanımlayalım.Bunun için önce soft modüller üzerinde bu cebirsel işlemleri verelim.

$\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$,$\{M_i\}_{i\in I}$ üzerinde soft modüllerin bir ailesi olsun.

$$F:\prod_{i\in I} A_i \to \prod_{i\in I} M_i$$

Dönüşüm $F(\{\alpha_i\})=\prod_{i\in I} F(a_i)$ şeklinde tanımlanır. $\prod_{i\in I} F(a_i)$, $\prod_{i\in I} M_i$'nin alt modülü

olduğundan ,$\left(F,\prod_{i\in I} A_i\right)$, $\prod_{i\in I} M_i$ üzerinde bir soft modüldür. Bu soft modül

$\prod_{i\in I}(F_i,A_i)$ şeklinde gösterilir.(Gunduz (Aras)and Bayramov 2011).

Tanım3.7.13: $\prod_{i\in I}(F_i,A_i)$ soft modülüne soft modüllerin direkt çarpımı denir.(Gunduz

(Aras) and Bayramov2011)

Açıktır ki ,eğer $p_i:\prod_{i\in I} M_i \to M_i$ ve $q_i:\prod_{i\in I} A_i \to A_i$ projeksiyon dönüşümleri ise

$(p_i,q_i)=\prod_{i\in I}(F_i,A_i) \to (F_i,A_i)$ soft modüllerin soft homomorfizmasıdır (Gunduz

(Aras) and Bayramov 2011).

Önerme3.7.14. $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$ ve $\{(H_i,B_i)\}_{i\in I}$,$\{M_i\}_{i\in I}$ ve $\{N_i\}_{i\in I}$ üzerinde sırasıyla soft modüllerin iki ailesi ve $\forall i \in I$ için (f_i,g_i):$(F_i,A_i) \to (H_i,B_i)$ soft modüllerin bir soft homomorfizması olsun.O halde

$$\left[\prod_{i\in I} f_i,\ \prod_{i\in I} g_i\right] : \prod_{i\in I} (F_i,A_i) \rightarrow \prod_{i\in I} (H_i,B_i)$$

soft modüllerin bir soft homomorfizmasıdr.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011).

Önerme 3.7.15. $\prod$:$\prod$ $FSM \rightarrow FSM$ bir funktordur.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Şimdi $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$' nin parametreler kümesi belirli noktalı olsun.A_i' nin belirli noktası a_{0i} ve $F_i(a_{0i})$=0 olsun. $A=\prod_{i\in I} A_i$,$M=\bigoplus_{i\in I} M_i$ ve $\forall a = \{a_i\}\in A$ için F:$A\rightarrow M$ dönüşümü F(α):$\bigoplus_{i\in I}$F(a_i) ile tanımlansın. O halde (F,A) ,M üzerinde bir soft modüldür.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011).

Tanım 3.7.16. (F,A) soft modülüne $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$' nın direkt toplamı denir ve $\bigoplus_{i\in I}(F_i,A_i)$ ile gösterili (Gunduz (Aras) and Bayramov 2011).

φ_j:$A_j \rightarrow \prod_{i\in I} A_i$ dönüşümü i$\neq j$ ise a_i=a_{0i}, i=j ise a_i=α olmak üzere $\varphi_j(a_j)$={a_j} ile tanımlansın.q_j:$M_j \rightarrow\bigoplus_{i\in I} M_i$ gömme dönüşümü için de (q_j,φ_j):(F_j,A_j)→(F,A) soft modüllerin bir soft homomrfizmasıdır(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Önerme 3.7.17. $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$, $\{M_i\}_{i\in I}$' ler üzerinde soft modüllerin bir ailesi , $\{(H_i,B_i)\}_{i\in I}$, $\{N_i\}_{i\in I}$'ler üzerinde soft modüllerin bir ailesi ve $\forall i\in I$ için (f_i,g_i): (F_i,A_i) → (H_i,B_i) soft modüllerin bir soft homomorfizması olsun. Burada g_i:(A_i,a_{0i})→ (B_i,b_{0i}) belirli noktalı kümelerin bir dönüşümüdür ve $g_i(a_{0i})$= b_{0i} O halde

$$\left[\bigoplus_{i\in I} f_i, \prod_{i\in I} g_i\right] : \bigoplus_{i\in I}(F_i,A_i) \to \bigoplus_{i\in I}(H_i,B_i)$$

soft modüllerin bir soft homomorfizmasıdır(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Önerme 3.7.18. $\bigoplus : \prod FSM \to FSM$ bir funktordur(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Lemma 3.7.19.

1) $\{M_i\}_{i\in I}$ ve N modüller ve R-homomorfizmaların bir $A=\{f_i:M_i \to N\}_{i\in I}$ ailesi verilsin.Eğer $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$,$\{M_i\}_{i\in I}$' ler üzerinde fuzzy soft modüller ise N üzerinde

bir $\left(H, \prod_{i\in I} A_i\right)$ fuzzy soft modülü vardır öyle ki $\forall i \in I$ için

$$f_i: (F_i,A_i) \to \left(H, \prod_{i\in I} A_i\right)$$

fuzzy soft modüllerin bir fuzzy soft homomorfizmasıdır.

2) M ve $\{N_i\}_{i\in I}$ modüller ve R-homomorfizmaların bir B=$\{g_i:M\to N_i\}_{i\in I}$ ailesi verilsin.Eğer $\{(H_i,B_i)\}_{i\in I}$, $\{N_i\}_{i\in I}$' ler üzerinde fuzzy soft modüller ise M üzerinde

öyle $\left(F, \prod_{i\in I} A_i\right)$

fuzzy soft modülü varki $\forall i \in I$ için

$$g_i : \left(F, \prod_{i\in I} A_i\right) \to (H_i, B_i)$$

fuzzy soft modüllerin bir fuzzy soft homomorfizmasıdır(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Bu lemmayı kullanarak fuzzy modüller kategorisinde alt modül , bölüm modülü ,çarpım ve koçarpım işlemlerini tanımlayalım.

Uyarı 3.7.20. Eğer (F,A) M üzerinde bir fuzzy soft modül ,N, M'nin alt modülü ve $i{:}N\rightarrow M$ bir gömme dönüşümü ise o halde $(i^{-1}(F),A)$,N üzerinde bir fuzzy soft modüldür (Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Uyarı 3.7.21. Eğer (F,A) ,M üzerinde bir fuzzy soft modül ve $p{:}M\rightarrow M/\sim$ bir kanonik projeksiyon ise o halde $(p(F)\,,A)\,,M/\sim$ bölüm modülü üzerinde bir fuzzy soft modüldür.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Eğer $\{(F_i,A_i)\}_{i\in I}$,$\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesi üzerinde fuzzy soft modüllerin bir ailesi ise bu ailelerin çarpımı ve koçarpımılarını sırasıyla $\prod_{i\in I}(F_i,A_i)$ ve $\bigoplus_{i\in I}(F_i,A_i)$ ile tanımlayabiliriz.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Teorem 3.7.22. Fuzzy soft modüller kategorisi sıfır objesine, toplama, çarpma, çekirdeğe ve koçekirdeğe sahiptir (Gunduz (Aras)and Bayramov 2011)

M ve N, R halkası üzerinde sırasıyla sağ ve sol modüller olsun. (F,A) ve (G,B) Sırasıyla M ve N üzerinde iki soft modül olsun.Modüllerin tensör çarpımını $M\otimes N$ olarak düşünelim.

$$F\otimes G{:}A\times B\rightarrow M\otimes N$$

dönüşümü $\forall(a,b)\in A\times B$ için $(F\otimes G)(a,b)=\mathrm{F}(\alpha)\otimes G(b)$ ile tanımlansın. (Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Önerme 3.7.23. $(F \otimes G, A \times B), M \otimes N$ üzerinde bir soft modüldür (Gunduz(Aras) and Bayramov 2011)

Tanım 3.7.24. $(F \otimes G, A \times B)$ soft modülüne (F, A) ve (G, B) soft modüllerinin tensör çarpımı denir ve $(F, A) \otimes (G, B)$ ile gösterilir.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Şimdi (F, A) ve (G, B) sırasıyla M ve N üzerinde iki fuzzy soft modül olsun.

$$F \otimes G: A \times B \to M \otimes N$$

dönüşümü $\forall(a, b) \in A \times B$ için $(F \otimes G)(\alpha, b)$=$F_a \otimes G_b$ ile tanımlansın (Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

Teorem 3.7.24. $(F \otimes G, A \times B), M \otimes N$ üzerinde bir fuzzy soft modüldür(Gunduz (Aras)and Bayramov 2011)

Tanım 3.7.25. $(F \otimes G, A \times B)$ fuzzy soft modülüne (F, A) ve (G, B) fuzzy soft modüllerinin tensör çarpımı denir ve $(F, A) \otimes (G, B)$ ile gösterilir.(Gunduz (Aras) and Bayramov 2011)

4.ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1 Soft Modüllerin Ko-Zincir Kompleksleri

$\{(F^n, A)\}_{n \in Z}$ ailesi $\{M^n\}_{n \in Z}$ modüller üzerinde soft modüller ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $(\partial^n, 1_A) : (F^n A,) \to (F^{n+1}, A)$ soft modüllerin homomorfizması olsun.

Tanım 4.1.1. Eğer $\forall a \in A$ için $\{(F^n(\alpha)), \partial^n|_{F^n(a)}: F^n(a) \to F^{n+1}(\alpha)\}$ modüllerin bir ko-zincir kompleksi ise, yani $\partial^{n+1}|_{F^{n+1}(a)} \circ \partial^n|_{F^n(a)} = 0$ eşitliği sağlanır ise

$$\{(F^n, A), (\partial^n, 1_A) : (F^n, A) \to (F^{n+1}, A)\}$$

dizisine soft modüllerin ko-zincir kompleksi denir.

Tanım 4.1.2. $\{(F^n(\alpha)), \partial^n|_{F^n(a)}: F^n(a) \to F^{n+1}(\alpha)\}$ ko-zincir kompleksinde Im $\partial^n|_{F^n(a)}$ =ker$\partial^{n+1}|_{F^{n+1}(a)}$ şartı sağlanır ise

$$\{(F^n, A), (\partial^n, 1_A) : (F^n, A) \to (F^{n+1}, A)\}$$

dizisine soft modüllerin bir tam dizisi denir.

Şimdi soft modüllein ko-zincir komplekslerinin morfizmalarını tanımlayalım.

Tanım 4.1.3. $\{(F^n, A), \partial^n$ **}, { (**G^n **,**B **) ,** ∂'^n**}** dizileri sırasıyla $\{M^n\}$ ve $\{N^n\}$ modülleri üzerinde soft modüllerin ko- zincir kompleksleri $\{f^n: M^n \to N^n\}^n$ dönüşümleri modüllerin homomorfizması ve g:$A \to B$ kümelerin bir dönüşümü olsun Eğer $\forall \alpha \in A$ için aşağıdaki diyagram komutatif ise

$$\begin{tikzcd}
F^n(a) \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "f^n"'] & F^{n+1}(a) \arrow[d, "f^{n+1}"] \\
G^n(g(a)) \arrow[r, "\partial'^n"'] & G^{n+1}(g(a))
\end{tikzcd}$$

$(\{f^n\}$,g):$\{(F^n, A), \partial^n\} \to \{(G^n, B), \partial'^n\}$ çiftine soft modüllerin ko-zincir komplekslerinin morfizması denir.

Uyarı 4.1.4. Soft modüllerin ko-zincir kompleksleri ve onların morfizmaları bir kategori oluşturur.Bu kategoriyi SCoC ile gösterelim.

Tanım 4.1.5.

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r] & (F^{n-1}, A) \arrow[r, "\partial^{n-1}"] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & (F^n, A) \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[dl, "(D^n, g)"'] \arrow[d, shift right, "\Psi^n"'] \arrow[d, shift left, "\varphi^n"] & (F^{n+1}, A) \arrow[r] \arrow[dl, "(D^{n+1}, g)"'] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & {} \\
\arrow[r] & (G^{n-1}, B) \arrow[r, "\partial'^{n-1}"'] & (G^n, B) \arrow[r, "\partial'^n"'] & (G^{n+1}, B) \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

$(\{\varphi^n\}, g)$, $(\{\Psi^n\}, g)$:$\{(F^n, A), \partial^n\} \to \{(G^n, B), \partial'^n\}$ soft modüllerin ko- zincir kompleklerinin morfizmaları ve D = $\{(D^n, g)$: $(F^n, A) \to (G^{n-1}, B)\}$ soft modüllerin homomorfizmalarının bir ailesi olsun. Eğer $\varphi^n - \Psi^n = \partial'^{n-1} D^n + D^{n+1}\partial^n$ eşitliği sağlanırsa modüllerin homomorfizmalar ailesi $D = \{(D^n, g)$: $(F^n, A) \to (G^{n-1}, B)\}$ ko-zincir homotopya , $(\{\varphi^n\}, g)$, $(\{\Psi^n\}, g)$ dönüşümlerine ko-zincir homotop morfizmalar denir ve $(\{\varphi^n\}, g) \sim (\{\Psi^n\}, g)$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.6: Ko-zincir homotopya bağıntısı bir denklik bağıntısıdır ve bileşkeye göre invarianttır.

İspat:Öncelikle ko-zincir homotopya bağınıtısının bir denklik bağıntısı olduğunu gösterelim.

1) $(\{\varphi^n\}, g)$, $(\{\Psi^n\}, g)$: $\{(F^n, A), \partial^n\} \rightarrow \{(G^n, B), \partial'^n\}$ herhangi bir morfizma olsun. Eğer $D^n = 0$ ise $\varphi^n - \varphi^n$=0' dır.Yani $(\varphi, g) \sim (\varphi, g)$ sağlanır.

2) (φ, g) ile (Ψ, g) ko-zincir homotop olsun ,yani

$$\partial'^{n-1} D^n + D^{n+1} \partial^n = \varphi^n - \Psi^n$$

sağlanacak şekilde $\{D^n\}$ morfizmaları vardır .$\overline{D^n} = -D^n$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\partial'^{n-1}\overline{D}^n + \overline{D}^{n+1} \partial^n &= -\partial'^{n-1} D^n - D^{n+1} \partial^n \\
&= -(\partial'^{n-1} D^n + D^{n+1} \partial^n) \\
&= -(\varphi^n - \Psi^n) = \Psi^n - \varphi^n
\end{aligned}$$

sağlanır. O halde (Ψ, g) ile (φ, g) ko-zincir homotoptur.

3) $(\varphi, g) \sim (\Psi, g)$ ve $(\Psi, g) \sim (\gamma, g)$ ko-zincir homotop olsunlar .Şimdi (φ, g) ile (γ, g) ko-zincir homotop olduğunu gösterelim.

(φ, g) ile (Ψ, g) ko-zincir homotop olduğundan $\exists D^n \Rightarrow \partial'^{n-1} D^n + D^{n+1} \partial^n = \varphi^n - \Psi^n$
(Ψ, g) ile (γ, g) ko-zincir homotop olduğundan $\exists D'^n \Rightarrow \partial'^{n-1} D'^n + D'^{n+1} \partial^n = \Psi^n - \gamma^n$

Şimdi D''^n homomorfizmasını $D''^n = D^n + D'^n$ şeklinde tanımlayalım

$$\begin{aligned}
\partial'^{n-1} D''^n + D''^{n+1} \partial^n &= \partial'^{n-1}(D^n + D'^n) + (D^{n+1} + D'^{n+1}) \partial^n \\
&= \partial'^{n-1} D^n + \partial'^{n-1} D'^n + D^{n+1} \partial^n + D'^{n+1} \partial^n \\
&= (\partial'^{n-1} D^n + D^{n+1} \partial^n) + (\partial'^{n-1} D'^n + D'^{n+1} \partial^n) \\
&= (\varphi^n - \Psi^n) + (\Psi^n - \gamma^n) \\
&= \varphi^n - \gamma^n
\end{aligned}$$

Böylece $(\varphi, g) \sim (\gamma, g)$ dır.

Şimdi bileşkeye göre invariant olduğunu gösterelim.

$(\{\varphi^{0n}\},g) \sim (\{\Psi^{0n}\},g)$:$[\{(F^n,A),\partial^n\} \rightarrow \{(G^n, B),\partial'^n\}]$
$\partial'^{n-1}D^n + D^{n+1}\partial^n = \varphi^{0n} - \Psi^{0n}$

$(\{\varphi^{1n}\},h) \sim (\{\Psi^{1n}\},h)$:$[\{(G^n, B),\partial'^n\} \rightarrow \{(p^n,C),\partial''^n\}]$
$\partial''^{n-1}D'^n + D'^{n+1}\partial'^n = \varphi^{1n} - \Psi^{1n}$ sağlansın

$(\{\varphi^{1n}\},h) \circ (\{\varphi^{0n}\},g)$, $(\{\Psi^{1n}\},h) \circ (\{\Psi^{0n}\},g)$: $[\{(F^n,A), \partial^n\} \rightarrow \{(p^n,C),\partial''^n\}]$ dönüşümlerinin ko-zincir homotop olması için aşağıdaki şekilde bir homomorfizma tanımlamalıyız.
$(D''^n,\omega) = [\{(F^n,A),\partial^n\} \rightarrow \{(p^n,C),\partial''^n\}]$

$$\begin{tikzcd}
 & (F^n,A) \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[dl] \arrow[d, shift right, "\varphi^{0n}"'] \arrow[d, shift left, "\Psi^{0n}"] & (F^{n+1},A) \arrow[dl] \arrow[d, shift right, "\varphi^{0n+1}"'] \arrow[d, shift left, "\Psi^{0n+1}"] \\
(G^{n-1},B) \arrow[r, "\partial'^{n-1}"] \arrow[d, shift right, "\varphi^{1n-1}"'] \arrow[d, shift left, "\Psi^{1n-1}"] & (G^n,B) \arrow[r, "\partial'^n"] \arrow[dl] \arrow[d, shift right, "\varphi^{1n}"'] \arrow[d, shift left, "\Psi^{1n}"] & (G^{n+1},B) \arrow[dl] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\
(p^{n-1},C) \arrow[r, "\partial''^{n-1}"'] & (p^n,C) \arrow[r, "\partial''^n"'] & (p^{n+1},C)
\end{tikzcd}$$

gg: $\varphi^{1n}{}_{o}\varphi^{0n}$; $\Psi^{1n}{}_{o}\Psi^{0n}$:$(F^n,A) \rightarrow (p^n,C)$ ko-zincir homotop olması için
D^n: $(F^n,A) \rightarrow (G^{n-1},B)$ şeklinde homomorfizma yapmalıyız.
D'^n: $(G^n,B) \rightarrow (p^{n-1},C)$,
D'^{n+1}: $(G^{n+1},B) \rightarrow (p^n,C)$

$$
\begin{tikzcd}
 & (F^n, A) \arrow[rr, "\partial^n"] \arrow[dl, "\varphi^{1n-1}D^n"'] & & (F^{n+1}, A) \arrow[dl, "\varphi^{1n}D^{n+1}"] \\
(p^{n-1}, C) \arrow[rr, "\partial''^{n-1}"'] & & (p^n, C) &
\end{tikzcd}
$$

Şekil-I

$$
\begin{tikzcd}
(G^{n-1}, B) \arrow[r, "\partial'^{n-1}"] \arrow[d, "\varphi^{1n-1}"'] & (G^n, B) \arrow[d, "\varphi^{1n}"] \\
(p^{n-1}, C) \arrow[r, "\partial''^{n-1}"'] & (p^n, C)
\end{tikzcd}
$$

Şekil-II

$$
\begin{aligned}
\partial''^{n-1}\, \varphi^{1n-1}D^n + \varphi^{1n}D^{n+1}\partial^n &= \varphi^{1n}\, \partial'^{n-1}D^n + \varphi^{1n}D^{n+1}\partial^n \\
&= \varphi^{1n}(\ \partial'^{n-1}D^n + D^{n+1}\partial^n) \\
&= \varphi^{1n}(\varphi^{0n} - \Psi^{0n}) \\
&= \varphi^{1n}\varphi^{0n} - \varphi^{1n}\Psi^{0n} \\
&= \varphi^{1n}\varphi^{0n} \sim \varphi^{1n}\Psi^{0n}
\end{aligned}
$$

$$\begin{tikzcd}
& (F^n, A) \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[dl, "D'^n\Psi^{0n}"'] & (F^{n+1}, A) \arrow[dl, "D'^{n+1}\Psi^{0n+1}"] \\
(p^{n-1}, C) \arrow[r, "\partial''^{n-1}"'] & (p^n, C) &
\end{tikzcd}$$

Şekil-III

$$\begin{tikzcd}
(F^n, A) \arrow[r, "\partial^n"] \arrow[d, "\Psi^{0n}"'] & (F^{n+1}, A) \arrow[d, "\Psi^{0n+1}"] \\
(G^n, B) \arrow[r, "\partial'^n"] & (G^{n+1}, B)
\end{tikzcd}$$

Şekil-IV

$$\begin{aligned}
\partial''^{n-1}D'^n\Psi^{0n}+D'^{n+1}\Psi^{0n+1}\partial^n &= \partial''^{n-1}D'^n\Psi^{0n} + D'^{n+1}\Psi^{0n}\partial'^n \\
&= \Psi^{0n}(\partial''^{n-1}D'^n+D'^{n+1}\partial'^n) \\
&=\Psi^{0n}(\varphi^{1n} - \Psi^{1n}) \\
&=\Psi^{0n}\varphi^{1n} - \Psi^{0n}\Psi^{1n} \\
&=\Psi^{0n}\varphi^{1n}\sim\Psi^{0n}\Psi^{1n}
\end{aligned}$$

Böylece bu iki eşitlikten $(\{\varphi^{1n}\},\mathrm{h}) \circ (\{\varphi^{0n}\}, g)$, $(\{\Psi^{1n}\}, \mathrm{h}) \circ (\{\Psi^{0n}\},g)$'nin ko- zincir homotop olduğu elde edilir.

F=$\{(F^n, A), \partial^n\}$, $\{M^n\}$ modüller ailesi üzerinde soft modüllerin bir ko-zincir kompleksi olsun.$\forall a \in A$ ve $\{F^n(\alpha), \partial^n: F^n(\alpha) \to F^{n+1}(a)\}$ ko-zincir kompleksi için

$$H^n(F,a) = {}^{\mathrm{Ker}\partial^{n+1}}/_{Im\partial^n}$$

kohomoloji modülünü ele alalım.O halde . $\forall a \in A$ için $H^n(F,a)$ modülü M^n modülünde bölüm modülü olmaktadır. M^n 'nin alt modülleri ile M^n 'nin bölüm modülünün her alt modülleri arasında birebir ve örten bağıntı olduğundan $H^n(F,a)$ modülüne M^n 'nin alt modülü olarak algılayabiliriz.

Böylece $H^n(F,-)$: A→P(M^n) bir soft modüldür.

Tanım 4.1.7. $(H^n(F,-),A)$ soft modülüne $\{(F^n,A),\ \partial^n\}$ soft modüllerinin ko-zincir kompleksinin $n-$ boyutlu kohomoloji soft modülü denir.

Şimdi kohomoloji soft modülün bir funktor olduğunu gösterelim.
$(\varphi=\{\varphi^n\},g)$: $\{(F^n,A),\ \partial^n\} \to \{(G^n,B),\partial'^n\}$ soft modüllerin ko-zincir kompleksinin bir morfizması olsun.$\forall a \in A$ için $\{\varphi^n: F^n \to G^n(\mathrm{g}(\alpha))\}$ ko-zincir komplekslerin morfizması olduğundan $\forall[x] \in H^n(F,a)$ için $\varphi^{n*}[x]$=$[\varphi_n(x)]$şeklinde tanımlanan

$$\varphi^{n*}: H^n(F,a) \to H^n(G,\mathrm{g}(\alpha))$$

dönüşümü modüllerin bir homomorfizmasıdır ve aşağıdaki diyagram komutatiftir.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{A} \arrow[r, "H^n(F,-)"] \arrow[d, "\mathrm{g}"'] & \mathrm{P}(M^n) \arrow[d, "\varphi^{n*}"] \\ \mathrm{B} \arrow[r, "H^n(G,-)"'] & \mathrm{P}(N^n) \end{tikzcd}$$

O halde (φ^{n*},g): $(H^n(F,-),A)$ →$(H^n(G,-),B)$ çift soft modüllerin homomorfizmasıdır.

Teorem 4.1.8. Soft modüllerin ko-zincir komplekslerinin kohomoloji funktoru ko-zincir homotopya bağıntısına göre invariyanttır, yani; $\varphi, \Psi: C_2 \to C_1$ giden morfizmalar ko-zincir homotop ve $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\varphi^{n*} = \Psi^{n*}: \overline{H}^n(C_2) \to \overline{H}^n(C_1)$

İspat: $\varphi \; ve \; \Psi$ ko-zincir homotop olduğundan

$\exists D^n: F^n \to G^{n-1}$

$$\begin{tikzcd}
& (F^n, A) \arrow[r, "\partial'^n"] \arrow[dl, "D^n"'] & (F^{n+1}, A) \arrow[dl, "D^{n+1}"'] \\
(G^{n-1}, B) \arrow[r, "\partial^{n-1}"] & (G^n, B) &
\end{tikzcd}$$

$$\partial^{n-1} D^n + D^{n+1} \partial'^n = \varphi^n - \Psi^n$$

$[Z] \in H^n(C_2) \Rightarrow [Z] = Z + \mathrm{Im}\partial'^{n-1} \qquad , H^n(C_2) = Ker\partial'^n$

$\varphi^{n*}(Z + \mathrm{Im}\partial'^{n-1}) = \varphi^n(Z) + \mathrm{Im}\partial^{n-1}$

$\Psi^{n*}(Z + \mathrm{Im}\partial'^{n-1}) = \Psi^n(Z) + \mathrm{Im}\partial^{n-1} \qquad , \quad Z \in Ker\partial'^n$

$(\partial^{n-1} D^n + D^{n+1} \partial'^n)(Z) = (\varphi^n - \Psi^n)(Z)$

$\partial^{n-1} D^n(Z) + D^{n+1} \partial'^n(Z) = \varphi^n(Z) - \Psi^n(Z)$

$\partial^{n-1} D^n(Z) = U \in Im\partial^{n-1}$

$\varphi^n(Z) - \Psi^n(Z) = U$

$\varphi^n(Z) = \Psi^n(Z) + U$

sağlanır.

Şimdi kohomoloji modüllerin tam dizisini oluşturacağız.

$$C = \{(F^n, B), (\partial^n, 1_B) : (F^n, B) \to (F^{n+1}, B)\}$$

$$C' = \{(F'^n, A), (\partial'^n, 1_A) : (F'^n, A) \to (F'^{n+1} A)\}$$

$$C'' = \{(F''^n, E), (\partial''^n, 1_E) = (F''^n, E) \to (F''^{n+1}, E)\}$$

Soft ko-zincir kompleksler ve onların morfizmaları olsun.

Tanım 4.1.9. C,C', C'' soft modüllerin ko-zincir kompleksleri ve (i,μ): $C' \to C$, (j,η): $C \to C''$ dönüşümleri ko- zincir komplekslerin morfizmaları olsun. Eğer $\forall a \in A$ için

$$0 \xrightarrow{0} F'^n(a) \xrightarrow{i^n} F^n\big(\mu(a)\big) \xrightarrow{j^n} F''^n(\eta\big(\mu(a)\big)) \xrightarrow{0} 0$$

modüllerin kısa dizisi tam ise

$$0 \xrightarrow{0} C' \xrightarrow{(i,\mu)} \mathrm{C} \xrightarrow{(j,\eta)} C'' \xrightarrow{0} 0$$

soft modüllerin ko-zincir komplekslerinin dizisine kısa tam dizi denir.

$$C = \{(F^n, A), (\partial^n, 1_A) \colon (F^n, A) \to (F^{n+1}, A)\}$$
$$C' = \{(F'^n, A), (\partial'^n, 1_A) \colon (F'^n, A) \to (F'^{n+1}, A)\}$$

soft modüllerin ko-zincir kompleksleri olsun.

Tanım 4.1.10. Eğer $\forall a \in A$ için $F'^n(a) < F^n(a)$ alt modülü ise C' ‘ ne C ‘nin alt kompleksi denir.

Tanım 4.1.11. Eğer $C' < C$ alt kompleksi ve $F^n|_{F'^n}$:A→ $P(M^n)$ dönüşümünü ($F^n|_{F'^n}$)(α)= $F^n(a)|_{F'^n(a)}$ şeklinde tanımlarsak {($F^n|_{F'^n}, A$)} soft modüllerin bir ko-zincir kompleksi olur .Bu ko-zincir kompleks $C/_{C'}$ bölüm kompleksi olarak adlandırılır.

Açıktır ki $C' < C$ ise soft modüllerin ko zincir komplekslerinin

$0 \to C' \to C \to C/_{C'} \to 0$ dizisi tamdır.

Tanım 4.1.12. $C/_{C'}$ kompleksinin soft kohomoloji modülüne (C, C') çiftinin soft kohomoloji modülü denir ve $H^n(C, C')$ ile gösterilir.

Teorem 4.1.13. Soft modüllerin ko-zincir komplekslerinin her (C, C') çifti için soft modüllerin $\partial^{n*}: H^n(C, C') \to H^{n+1}(C')$ homomorfizması vardır , öyle ki

1) Soft kohomoloji modüllerin

$$---\leftarrow H^{n+1}(C') \xleftarrow{\partial^{n*}} H^n(C, C') \leftarrow H^n(C) \leftarrow H^n(C') \leftarrow --- \ *(4.1)$$

dizisi tamdır.

2)Eğer $(\varphi, g): (C, C') \to (K, K')$ soft modüllerin ko-zincir komplekslerinin bir morfizması ise

$$\begin{tikzcd} H^n(C,C') \arrow[r, "\partial^{n*}"] \arrow[d, "H^n(\varphi,g)"'] & H^{n+1}(C') \arrow[d, "H^{n+1}(\varphi,g)"] \\ H^n(K,K') \arrow[r, "\partial'^{n*}"'] & H^{n+1}(K') \end{tikzcd}$$

diyagramı komutatiftir.

İspat: $\forall a \in A$ için modüllerin ko-zincir komplekslerinin

$$0 \to F'(a) \to F(a) \to {}^{F(a)}\!\big/\!{}_{F'(a)} \to 0 \qquad \ldots (4.2)$$

kısa dizisi tamdır.Bu durumda $\partial^{n*}(a)$:$H^n\big(F(a), F'(a)\big) \to H^{n+1}(F'(a))$ homomorfizması tanımlanabilir ve

$$(\partial^{n*}, 1_A):\{(H^n(F, F'), A) \to (H^{n+1}(F'), A)\}$$

soft modüllerin bir homomorfizmasıdır. (4.1) dizisinden kohomoloji modüllerin

$$--- \leftarrow H^{n+1}\big(F'(a)\big) \leftarrow H^n\big(F(a), F'(a)\big) \leftarrow H^n\big(F(a)\big) \leftarrow H^n\big(F'(a)\big) \leftarrow --- \ (4.3)$$

tam dizisi elde edilir.$\forall a \in A$ için (4.3) dizisi tam olduğundan soft kohomoloji modüllerin (4.1) dizisi tamdır .Eğer $(\varphi, g): (C, C') \to (K, K')$ soft modüllerin ko-zincir komplekslerinin bir morfizması ise $\forall a \in A$ için $\varphi = \{\varphi^n\}:\{F^n(a)\} \to \{G^n(g(a))\}$ modüllerin ko-zincir komplekslerin ko-zincir komplekslerinin morfizması olduğundan

$$\begin{tikzcd}
H^n(F'(a)) \arrow[d, "H^n(\varphi,g)"'] & H^{n+1}(F(a), F'(a)) \arrow[l, "\partial^{n+1*}"'] \arrow[d, "H^{n+1}(\varphi,g)"] \\
H^n(G'(a)) & H^{n+1}(G(g(a)), G'(g(a))) \arrow[l, "\partial'^{n+1*}"]
\end{tikzcd}$$

diyagramı komutatiftir.Buradan soft kohomoloji modülleri için

$$\begin{tikzcd}
H^n(F') \arrow[d] & H^{n+1}(F, F') \arrow[l] \arrow[d] \\
H^n(G') & H^{n+1}(G, G') \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

diyagramının komutatif olduğu elde edilir.

KAYNAKLAR

Acar U., Koyuncu F. and Tanay B., 2010. Soft Sets and Soft Rings. Comput. Math. Appl.,59, 3458-3463.

Aktaş H. and Cağman N., 2007 . Soft Sets and Soft Group. Information Science, 177, 2726-2735.

Ameri R. and Zahedi M.M., 2000.Fuzzy Chain Complex and Fuzzy Homotopy.Fuzzy Sets and Systems, 112, 287-297.

Anderson F. W. and Fuller K . R., 1992. Rings and Categories of Modules. Springer, Heidelberg, Germany.

Aygunoğlu A. and Aygün H., 2009. Introduction to Fuzzy Soft Groups .Comput.Math. Appl.,58,1279-1286.

Bayramov S. and Gunduz (Aras) C., 2009. Inverse and Direct Systems in the Category of İntuitionistic Fuzzy M-groups, Intern . Math. Forum, 19(4), 897-918.

Bayramov S. and Gunduz (Aras) C., 2010. On İsomorphism Theorems of Fuzzy Soft Groups.ICMS, Bolu Turkey, 23-27.

Bayramov S. and Gunduz (Aras) C., 2011. The Universal Coefficient Theorems for Fuzzy Homology Modules. Fuzzy Sets, Rouggh Sets and Multivalued Operations and Appications, 2(1), 41-50.

Bayramov S ., Gunduz (Aras) C. and Yazar M. İ., 2012. Inverse Systems of Fuzzy Soft Modules. Annals of Fuzzy Mathematics and İnformatics, 4(2),349-363.

Bayramov S., Gunduz (Aras) C .and Ozturk T.Y., 2012a. Homology Theory in the Category of Topological Spaces. Lambert Academic Publishing, 143 p, Deutschland, Germany.

Bayramov S., 2012. Fuzzy and Fuzzy Soft Structure in Algebra. Lambert Academic Publishing, 175 p, Deutschland, Germany.

Bourbaki N., 1980. Algebra Homologique. Masson-Paris, Newyork, Barcelone, Milan.

Cartan H. and Eılenberg S., 1956. Homological Algebra. Princeton University Press, 390 p, New Jersey, USA.

Chen D., 2005. The Parametrization Reduction of Soft Sets and its Applications. Comput.Math. Appl., 49,757-763.

Dold A., 1972.Lectures on Algebraic Topology.Springer – Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Eilenberg E. and Steenrood N., 1952. Foundations of Algebraic Topology. Princeton University Press, New Jersey, USA.

Feng F., Jun Y.B. and Zhao X., 2008. Soft Semirings. Comput. Math. Appl., 56, 2621-2628.

Gunduz (Aras) C. and Bayramov S., 2010. On Soft Isomorphism Theorems of Soft Groups.ICMS, Bolu, Turkey, 23-27.

Gunduz (Aras) C. and Davvaz B., 2010. The Universal Coefficient Theorem in the Category of Intuitionistic Fuzzy Modules. Utilitas Math., 81, 131-156.

Gunduz (Aras) C. and Bayramov S., 2011b. Fuzzy Soft Modules. International Mathematical Forum, 6(11), 517-527.

Gunduz (Aras) C. and Bayramov S., 2011c. Intuitionistic Fuzzy Soft Modules. Comp. Math.Apl., 62,2480-2486.

Herrlich H. And Strecker G. E., 1973. Category Theory. Ser. Adv. Math., Allyn and Bacon, Baston, USA.

Hungerford T. W ., 1973. Algebra. University of Washington, USA.

Jin-liang L., Rui-xia Y. and Bing–xue Y.,2008. Fuzzy Soft Sets and Fuzzy Soft Groups. Chinese Control and Decision Conference, 2626-2629.

Mac Lane S.1963.Homology.422 p Chicago, USA.

Maji P.K., Bismas R. and Roy A. R., 2001. Fuzzy Soft Sets. The Journal of Fuzzy Mathematics, 9(3), 589-602.

Maji P.K., Royn A.R. and Bismas R., 2002. An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem.Comput.Math.Appl., 44, 1077-1083.

Maji P.K., Bismas R. and Roy A.R., 2003. Soft set Theory. Comput. Math. Appl., 45, 555-562.

Massey W S., 1978. Homology and Cohomology Theory. New York –Bassel, USA.

Milnor J., 1962. On Axiomatic Homology Theory.Pac.J.Math.,12(1),337-341.

Molodtsov D., 1999.Soft Set Theory-First Results.Comput.Math.Appl.,37,19-31.

Ozturk T.Y. and Bayramov S., 2012. Category of Chain Complexes of Soft Modules. International Mathematical Forum,7(20),981-992.

Pawlak Z., 1982.Rough Sets.Int. J .Inform. Comput. Sci., 11,341-356.

Peter J.H. and Stammbach U., 1971. A Course in Homological Algebra. Springer, Verlag, New York, USA.

Rosenfeld A., 1971. Fuzzy Groups. Journ. Math. Anal. Appl.,35,512-517.

Roy A. R. and Maji P. K., 2007. A Fuzzy Soft Set Theoretic Approach to Decision Making Problems. Journal of Computational and Applied Mathematics, 203, 412-418.

Spanier E., 1975. Algebraic Topology.McGrane, New York, USA.

Sun Q.M., Zhang Z.L. and Liu J., 2008.Soft Sets and Soft Modules.Lecture Notes in Comput.Sci., 5009, 403-409.

Switzer R.M., 1975. Algebraic Topology- Homotopy and Homology. Springer –Verlag, Berlin, Heidelberg, New York.

Zadeh L. A., 1965. Fuzzy Sets.Information and Control, 8,338-353.

Zadeh L.A., 2005. Toward a Generalized Theory of Uncertainty (GTU)-an Outline. Inform. Sci.,172, 1-40.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılında Kars'ın Selim İlçesinde doğdu.İlk, orta ve lise öğrenimini Kars'ta tamamladı..2003 yılında Fırat Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü kazandı.2007 yılında bölümü bitirdi.2007-2009 yılları arası Kafkas Üniversitesinde Tezsiz Yüksek Lisans yaptı. 2011yılında Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans programına başladı.2010 Haziran ayından itibaren kamuda memur olarak çalışıyor.