T.C.
KAFKAS ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ TÜREV OPERATÖRÜ TARAFINDAN TANIMLANAN ANALİTİK FONKSİYONLARIN BELLİ ALT SINIFI

Öznur SENGER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN

Doç. Dr. Erhan DENİZ

HAZİRAN–2014
KARS

T.C Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Öğrencisi Öznur SENGER'in Doç.Dr Erhan DENİZ'in danışmanlığında yüksek lisans tezi olarak hazırladığı "Genelleştirilmiş Türev Operatörü Tarafından Tanımlanan Analitik Fonksiyonların Belli Alt Sınıfları" adlı bu çalışma, yapılan tez savunması sınavı sonunda jüri tarafından Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği uyarınca değerlendirilerek oy..birliği... ile kabul edilmiştir.

....18../..06..../2014

Adı ve Soyadı | İmza

Başkan: Doç.Dr. Nizami MUSTAFA ....

Üye : Doç.Dr. Erhan DENİZ ....

Üye : Yrd.Doç.Dr. Murat ÇAĞLAR ....

Bu tezin kabulü, Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ....../......../2014 gün ve ..../...........sayılı kararla onaylanmıştır.

Doç.Dr.Muzaffer ALKAN

Enstitü Müdürü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma Kafkas Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yapılmıştır. Tez konusunu veren, engin tecrübesiyle bana yol gösteren, çalışmalarım da etkin katkısı bulunan, vaktini ve bilgisini benden esirgemeyen Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi danışman hocam Sayın Doç. Dr. Erhan DENİZ'e, Kafkas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi Sayın Doç. Dr. Nizami MUSTAFA' ya ve Sayın Yrd. Doç. Dr. Murat ÇAĞLAR'a teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Emekleri ve sevgileriyle beni bugüne getiren, beni hiç yalnız bırakmayan, her zaman yanımda olan ve çok sevdiğim aileme sonsuz teşekkür ederim. Tezin hazırlanması sürecinde hiçbir zaman yardımını esirgemeyen, bu süreçte beni hiç yalnız bırakmayan ve daima yanımda olan en yakın arkadaşım, en büyük manevi destekçim olan sevgili eşim Kürşat SENGER'e teşekkürlerimi sunuyorum.

Kars-2014 **Öznur SENGER**

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Bu çalışmada, normalize edilmiş p-valent analitik fonksiyonlar sınıfını koruyan bir dönüşüm kullanılarak, p-valent analitik fonksiyonların yeni bir alt sınıfı tanıtılmıştır. Ayrıca, bu sınıfa ait fonksiyonların katsayı sınırları, distorsiyon ve büyüme teoremleri, yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı ile ekstemum noktaları, komşulukları ve kısmi toplamlarını da içeren diğer bazı özellikleri belirlenmiştir.

Son olarak, bu sınıfa ait fonksiyonların kesirsel türevi ve kesirsel integrali için alt ve üst sınırlar elde edilmiştir.

2014, 81 sayfa

Anahtar Kelimeler: Analitik Fonksiyon, p-valent Fonksiyon, Yıldızıl ve Konveks Fonksiyon, Kesirsal Türev ve İntegral, Katsayı Sınırları, Komşuluk, Kısmi Toplam, Subordinasyon.

ABSTRACT

In this thesis, we define a new subclass of p-valent analytic functions by using a general derivative operator that preserves the normalized p-valent analytic functions class. Furthermore, coefficient bounds of functions belonging to this classs, distorsion and growth theorems with extremal points, radii of starlikeness and convexity, neighborhood and partial sums are determined.

Finally, applications for fractional derivative and fractional integral belonging to this class are given.

2014, 81 pages

Keywords: Analytic Function, p-valent Function, Starlike and Convex Function, Fractional Derivative and Integral, Coefficient Bounds, Neighborhood, Partial Sum, Subordination.

SİMGELER DİZİNİ

$\mathcal{A}$	U birim diskinde analitik olan $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{A}_n$	U birim diskinde analitik olan $f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{A}(p)$	U birim diskinde analitik ve p-valent olan $f(z) = z^p + \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{A}(p,n)$	U birim diskinde analitik ve p-valent olan $f(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$(a)_v$	Pochhammer Sembolü
B	Beta fonksiyonu
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\tilde{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$
D^n	Salagean türev operatörü
D_p^m	p-valent analitik fonksiyonlar için verilen Salagean tipi türev operetörü
$D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)$	p-valent analitik fonksiyonlar için verilen Deniz ve Orhan tipi türev operetörü
$\mathfrak{D}_z^{-\delta} f(z)$	f fonksiyonunun kesirsel integrali
$\mathfrak{D}_z^{\delta} f(z)$	f fonksiyonunun kesirsel türevi
$f \prec g$	f fonksiyonu g fonksiyonuna subordinedir
$f * g$	f ile g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı
$\mathcal{H}$	U birim diskinde analitik olan fonksiyonların sınıfı
$\mathcal{H}[a,n]$	U birim diskinde analitik olan $f(z) = a + \sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{K}$	Konveks fonksiyonların kümesi
$\mathcal{K}(\alpha)$	$\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonların kümesi
$\mathcal{K}(p,n)$	p-valent konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{K}(p,n,\alpha)$	$\alpha-$mertebeden p-valent konveks fonksiyonlar sınıfı

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathcal{N}_\tau(f)$	f fonksiyonunun τ-komşuluğu
$\mathcal{N}_{n,\tau}(f)$	f fonksiyonunun (n,τ)-komşuluğu
$\emptyset$	Boş küme
$\mathcal{P}$	Pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonlar sınıfı
$Ref(z)$	f fonksiyonunun reel kısmı
$\mathcal{S}$	U birim diskinde ünivalent olan normalize $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ şeklindeki fonksiyonların kümesi
$\mathcal{S}^*$	Yıldızıl fonksiyonların kümesi
$\mathcal{S}^*(\alpha)$	$\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların kümesi
$\mathcal{S}^*(p,n)$	p-valent yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{S}(p,n,\alpha)$	$\alpha-$mertebeden p-valent yıldızıl fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{T}_n$	Negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}_n$ fonksiyonlarının kümesi
$\mathcal{T}(p)$	Negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonlarının kümesi
$\mathcal{T}(p,n)$	Negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonlarının kümesi
$\mathcal{T}^*(p,n,\alpha)$	$\mathcal{S}(p,n,\alpha) \cap \mathcal{T}(p,n)$
U	$U = \{z: z \in \mathbb{C}\ ve\ \lvert z\rvert < 1\}$ şelindeki açık birim disk
U_r	$U = \{z: z \in \mathbb{C}\ ve\ \lvert z\rvert < r < 1\}$ şeklindeki açık disk
$\overline{U_r}$	$U = \{z: z \in \mathbb{C}\ ve\ \lvert z\rvert \leq r < 1\}$ şeklindeki kapalı disk
$\mathcal{V}$	Schwarz fonksiyonlarının sınıfı
Γ	Gama fonksiyonu

ŞEKİLLER DİZİNİ

1. GİRİŞ

Multivalent ($p-$valent) fonksiyonlar teorisi, 1933 yılında P. Montel' in "Leçons sur les Fonctions Univalentes ou Multivalentes" isimli kitabında ilk kez multivalent fonksiyon kavramını tanıtmasıyla çalışılmaya başlanmıştır. f genişletilmiş kompleks düzlemdeki herhangi bir bölgede kompleks değişkenli analitik bir fonksiyon olmak üzere f fonksiyonu bu bölgedeki her değeri en fazla p ve en az bir değeri kesin p defa alıyorsa f fonksiyonuna p-valent veya $p.$ mertebeden multivalent fonksiyon denir. $p = 1$ olması durumunda f fonksiyonu aynı zamanda ünivalenttir. Dolayısıyla multivalent fonksiyon kavramı ünivalent fonksiyon kavramının doğal bir genellemesidir (Seidel 1942, Hummel 1960).

Multivalent fonksiyonların yeni alt sınıflarını tanıtarak bu sınıfların özelliklerinin incelenmesi, bu sınıflara ait katsayı sınırlarının ve distorsiyon eşitsizliklerinin verilmesi multivalent fonksiyonlar teorisinde pek çok araştırmacı tarafından ele alınan önemli problemlerdendir. Fekete and Szegö (1933), Goodman (1948), Hummel (1960), Keogh and Merkes (1969) bu özellikler üzerine önemli çalışmalar yapan araştırmacılardan bazılarıdır. Son yıllarda ise Ali *et al.* (2007), Ramachandran *et al.* (2007), Shanmugam *et al.* (2009), Srivastava and Aouf (1992,1995) ve Deniz and Orhan (2011) bu konuyla ilgili önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Ayrıca, Silverman *et al.* (1981), Patil and Thakare (1983), Owa (1991), Altıntaş (1991), Aouf (1988a, 1988b, 1989, 2000) ve Liu *et al.* (2009) multivalent fonksiyonların yeni alt sınıflarını tanıtarak bu sınıfların özelliklerini incelemişlerdir.

Multivalent fonksiyonlar teorisinde pek çok araştırmacı tarafından ele alınan önemli problemlerden bir diğeri de multivalent fonksiyonlar için yeni komşuluk tanımları verilerek bu komşulukların incelenmesidir. $\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonlarının komşuluklarıyla ilgili ilk çalışma 1957 de Goodman tarafından yapılmıştır. Ruscheweyh (1981), Goodman tarafından verilen komşuluk tanımını daha genel hale getirerek $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının δ-komşuluğu kavramını tanıtmıştır. 1985'de Brown Ruscheweyh tarafından elde edilen sonuçları genelleştirmiştir. 1990'da Walker pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonların komşuluklarını ele almış ve Walker tarafından verilen sonuçlar 1993 te Owa *et al.* tarafından genişletilmiştir. 1996 da, negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonlarının (n,δ)-komşuluğu Altıntaş and Owa tarafından verilmiştir. Son yıllarda ise Altıntaş *et al.* (2004), Orhan and Kadıoğlu (2004), Orhan and Kamali (2005), Srivastava and Patel (2005) Altıntaş (2007), Srivastava and Orhan (2007), Orhan (2007, 2009), Cataş (2009), Deniz and Orhan (2010a, 2011) ve Sağsöz and Kamali (2011) analitik fonksiyonların belli alt sınıflarının komşuluğu problemi üzerine önemli sonuçlar elde etmişlerdir.

Ünivalent fonksiyonlar teorisinde ilginç olan durumlardan biri şudur; $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu ünivalent olmasına rağmen bu fonksiyonun kısmi toplamları ünivalent olmayabilir. Buna en güzel örnek Koebe fonksiyonudur. Durum böyle olunca ünivalent dolayısıyla multivalent fonksiyonların kısmi toplamları üzerine çalışmak ayrı bir inceleme gerektirir. Silverman 1997 ilk defa $\alpha-$mertebeden yıldızıl ve $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonlar ve bunların kısmi toplamları arasındaki oranın reel kısmı için kesin sınırlar elde etmiştir. Son yıllarda ise $p-$valent fonksiyonların belli alt sınıflarının kısmi toplamları üzerine Liu (2007) ve Deniz and Orhan (2010a, 2011) önemli çalışmalar yapmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümünden sonra, Kuramsal Temeller adını alan ikinci bölümde, ilk olarak çalışmamızda kullandığımız temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Aynı bölümde multivalent fonksiyon kavramı tanıtılarak multivalent fonksiyonların katsayı sınırları ve distorsiyon eşitsizlikleri üzerine yapılan önemli bazı çalışmalara değinilmiştir.

Üçüncü bölümde tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılan bazı önemli tanım ve lemmaların verilmesinin yanı sıra tarihsel gelişim içerisinde multivalent fonksiyonların türev operatörü ve önemli bazı alt sınıfları ile ilgili bilgi verilmiştir.

Dördüncü bölümde, ilk olarak, $p-$valent fonksiyonların $\mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ ve $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ gibi iki yeni alt sınıfları tanıtılmış ve daha sonra bu sınıfların özellikleri incelenerek bu fonksiyon sınıflarına ait katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon sınırları ve ekstremum noktalar verilmiştir. Daha sonra bu sınıflara ait fonksiyonlar için yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı bulunmuş, bu sınıflar için yeni komşuluk tanımları verilerek bu komşuluklarla ilgili teoremler ifade edilmiş ve kısmi toplamları ile ilgili problem çözülmüştür. Son olarak, bu sınıflar için kesirsel türev ve integralin uygulamaları verilmiştir.

Beşinci bölümde ise, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçların bir özeti verilmiştir.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

Bu bölümde bazı temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1.1 (Komşuluk): $z_0 \in \mathbb{C}$ ve $\varepsilon > 0$ olmak üzere,

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı açık disk veya z_0 noktasının ε komşuluğu denir.

$$\overline{D(z_0, \varepsilon)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı kapalı disk,

$$\partial D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \varepsilon\}$$

kümesine z_0 merkezli ε yarıçaplı çember,

$$D^{\circ}(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \varepsilon\} = D(z_0, \varepsilon) - \{z_0\}$$

kümesine de z_0 noktasının ε delinmiş komşuluğu denir.

Tanım 2.1.2 (İç Nokta): $A \subset \mathbb{C}$ boş olmayan bir küme olsun. $z_0 \in A$ için $D(z_0, \varepsilon) \subseteq A$ olacak şekilde $\exists\ \varepsilon > 0$ sayısı varsa z_0 noktasına A kümesinin bir iç noktasıdır denir.

Tanım 2.1.3 (Açık ve Kapalı Küme): Her noktası iç nokta olan kümeye açık küme, tümleyeni açık olan kümeye ise kapalı küme denir.

Tanım 2.1.4 (Bağlantılı Küme): $A \subset \mathbb{C}$ kümesi verilsin. A kümesi boş olmayan ayrık ve açık iki kümenin birleşimi olarak gösterilemiyorsa, A kümesine bağlantılıdır denir. Yani,

i. $A \subseteq U \cup V$,

ii. $A \cap U \neq \emptyset$ ve $A \cap V \neq \emptyset$,

iii. $A \cap U \cap V = \emptyset$

olacak şekilde $U, V \subset \mathbb{C}$ gibi boş olmayan iki açık küme bulunamıyorsa A kümesine bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.5 (Bölge): Kompleks düzlemde boş olmayan, açık ve bağlantılı kümeye bölge denir.

Tanım 2.1.6 (Basit Bağlantılı Küme): Tümleyeni bağlantılı olan kümeye basit bağlantılı küme denir.

Tanım 2.1.7 (Diferensiyellenebilme): $A \subseteq \mathbb{C}$, $f: A \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve z_0, A'nın bir iç noktası olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

limiti var ise f fonksiyonuna z_0 noktasında diferensiyellenebilirdir denir. Bu limit değerine f fonksiyonunun z_0 noktasındaki türevi denir ve $f'(z_0)$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.8 (Analitik Fonksiyon): A kompleks düzlemin boş olmayan açık bir alt kümesi ve f fonksiyonu tanım kümesi A'yı kapsayan kompleks değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu A kümesine ait her noktada diferensiyellenebilir ise f fonksiyonu A kümesinde analitiktir (veya holomorftur) denir. Tanım kümesi açık bir küme ve bu kümede analitik olan fonksiyonlara analitik fonksiyon denir (Palka 1991).

U birim diskinde analitik olan fonksiyonların sınıfını $\mathcal{H} = \mathcal{H}(U)$ biçiminde gösterelim. $n \in \mathbb{N}_0$ ve $a, a_n, a_{n+1}, \ldots \in \mathbb{C}$ için,

$$\mathcal{H}[a,n] = \{f \in \mathcal{H}: f(z) = a + a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \cdots\}$$

olsun.

2.2. Analitik ve Ünivalent Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1: f fonksiyonu $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ şartlarını sağlıyorsa f fonksiyonuna normalize edilmiş fonksiyon denir (Duren 1983).

U birim diskinde analitik normalize edilmiş

$$f(z) = z + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k, \qquad (a_k \in \mathbb{C})$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}_n$ ile gösterilir. Bu sınıf $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$ olmak üzere,

$$\mathcal{A}_n = \{f \in \mathcal{H} : f(z) = z + a_{n+1} z^{n+1} + a_{n+2} z^{n+2} + \cdots\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$f(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| z^k \quad (n \in \mathbb{N})$$

şeklindeki negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}_n$ fonksiyonlarının sınıfı ise $\mathcal{T}_n$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.2 (Ünivalent Fonksiyon): f fonksiyonu herhangi bir $D \subseteq \mathbb{C}$ bölgesinde analitik olsun. $\forall\, z_1, z_2 \in D$ için,

$$z_1 \neq z_2 \text{ iken } f(z_1) \neq f(z_2)$$

oluyorsa, yani f fonksiyonu bu bölgede aynı değeri iki kez almıyorsa f fonksiyonuna D bölgesinde ünivalent (veya yalınkat) fonksiyon denir (Duren 1983).

U birim diskinde ünivalent olan normalize edilmiş

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n \qquad (2.1)$$

biçimindeki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in \mathcal{A} : f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n, f(z) \text{ fonksiyonu } U \text{ birim diskinde ünivalent} \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.3 (Maksimum Modül Prensibi): $D \subset \mathbb{C}$ sınırlı bir bölge ve f fonksiyonu D bölgesinde sabit olmayan bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu D bölgesinde analitik ve bu bölgenin sınırında sürekli ise

$$max\{|f(z)|: z \in \overline{D}\} = max\{|f(z)|: z \in \partial D\}$$

olur (Conway 1973).

Lemma 2.2.4 (Schwarz Lemması): f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve

i. $z \in U$ için $|f(z)| < 1,$

ii. $f(0) = 0$

olsun. Bu durumda, her $z \in U$ için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ olur. Ayrıca, herhangi bir $z \neq 0$ noktası için $|f(z)| = |z|$ veya $|f'(0)| = 1$ ise her $w \in U$ için $f(w) = cw$ olacak şekilde modülü $|c| = 1$ olan bir c sabiti vardır (Conway 1973).

Tanım 2.2.5 (Schwarz Fonksiyonu): φ, U birim diskinde analitik bir fonksiyon olsun. φ fonksiyonu $z \in U$ için $|\varphi(z)| < 1$ ve $\varphi(0) = 0$ şartlarını sağlarsa φ'ye Schwarz fonksiyonu denir ve Schwarz fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{V}$ ile gösterilir (Graham and Kohr 2003).

Başka bir değişle, U birim diskinde analitik olan ve Schwarz lemmasındaki hipotezleri sağlayan fonksiyonlara Schwarz fonksiyonu denir (Graham and Kohr 2003).

Tanım 2.2.6 (Pozitif Reel Kısımlı Fonksiyon): U birim diskinde $Reg(z) > 0$ olmak üzere U'da analitik olan

$$g(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n z^n$$

biçimindeki fonksiyonlara pozitif reel kısımlı fonksiyonlar denir ve bu fonksiyonların sınıfı $\mathcal{P}$ ile gösterilir (Goodman 1983a).

Tanım 2.2.7 (Subordinasyon): $f, g \in \mathcal{H}(U)$ fonksiyonları verilsin. U birim diskinde $f(z) = g\big(\varphi(z)\big)$ olacak şekilde bir $\varphi \in \mathcal{V}$ fonksiyonu varsa f fonksiyonu U'da g

fonksiyonuna subordinedir denir ve $f \prec g$ ile gösterilir. g fonksiyonunun ünivalent olması durumunda, $f \prec g \Leftrightarrow f(0) = g(0)$ ve $f(U) \subset g(U)$ olmasıdır (Miller and Mocanu 2000).

Tanım 2.2.8 (Hadamard Çarpımı): U birim diskinde analitik olan

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \text{ ve } g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

fonksiyonları verilsin. f ve g fonksiyonlarının Hadamard çarpımı $f * g$ ile gösterilir ve bu çarpım,

$$(f * g)(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n z^n$$

şeklinde tanımlanır (Miller and Mocanu 2000).

Tanım 2.2.9 (Yıldızıl Bölge): D kompleks düzlemde bir bölge ve $w_0 \in D$ olsun. Başlangıç noktası w_0 olan her ışın ile D bölgesinin arakesiti bir doğru parçası veya bir ışın ise D bölgesine w_0 noktasına göre **yıldızıl** bölge denir (Goodman 1983a).

Başka bir değişle, $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $\forall\, w \in D$ için $(1-t)w_0 + tw \in D$ ise D bölgesine w_0 noktasına göre yıldızıl denir.

Tanım 2.2.10 (Yıldızıl Fonksiyon): f fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun. U'yu w_0'a göre yıldızıl olan bir bölgeye resmeden f fonksiyonuna w_0'a göre yıldızıldır denir. $w_0 = 0$ ise f fonksiyonuna yıldızıl fonksiyon denir (Goodman 1983a).

Teorem 2.2.11 (Yıldızıl Fonksiyonların Analitik Karakterizasyonu): $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun U'da yıldızıl olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

olmasıdır (Goodman 1983a).

Normalize edilmiş yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*$ ile gösterelir ve bu sınıf

$$\mathcal{S}^* = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.12 (Konveks Bölge): $\forall\, w_1, w_2 \in D \subset \mathbb{C}$ için w_1 ve w_2'yi birleştiren doğru parçası D bölgesinde kalıyorsa, yani $0 \leq t \leq 1$ olmak üzere $tw_1 + (1-t)w_2 \in D$ ise D bölgesine konveks denir (Goodman 1983a).

Tanım 2.2.13 (Konveks Fonksiyon): f fonksiyonu U birim diskinde analitik olsun. U'yu konveks bir bölgeye resmeden f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Goodman 1983a).

Teorem 2.2.14 (Konveks Fonksiyonların Analitik Karakterizasyonu): $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonunun U'da konveks olabilmesi için gerek ve yeter şart her $z \in U$ için

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

olmasıdır (Goodman 1983a).

Normalize edilmiş konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{K} = \left\{ f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 2.2.15 (Alexander Teoremi): $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $f \in \mathcal{K}$ olması için gerek ve yeter şart $zf'(z) \in \mathcal{S}^*$ olmasıdır (Duren 1983).

Tanım 2.2.16: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U'da $\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyon denir (Miller and Mocanu 2000).

$\alpha-$mertebeden yıldızıl fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\mathcal{S}^*(\alpha)$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{S}^*(\alpha) = \left\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > \alpha\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.17: $f \in \mathcal{A}$ fonksiyonu verilsin. $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$Re\left\{1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\} > \alpha$$

ise f fonksiyonuna U'da $\alpha-$mertebeden konveks fonksiyon denir (Miller and Mocanu 2000).

$\alpha-$mertebeden konveks fonksiyonların sınıfı $0 \leq \alpha < 1$ olmak üzere $\mathcal{K}(\alpha)$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{K}(\alpha) = \left\{f \in \mathcal{A} : \mathrm{Re}\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) > \alpha\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.2.18: $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) > 0$ ve $\mathrm{Re}\,\varphi(\mathrm{z}) > 0$ koşulları altında U birim diskini reel eksene göre simetrik ve 1 e göre yıldızıl bir bölgeye resmeden φ analitik fonksiyonların sınıfına Ω sınıfındandır denilir.

Tanım 2.2.19: $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \Omega$ fonksiyonları verilsin. Her $z \in U$ için

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z)$$

subordinasyon şartını sağlayan f fonksiyonuna U'da Ma-Minda yıldızıl fonksiyon denir (Ma and Minda 1992).

Ma-Minda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(\varphi)$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{S}^*(\varphi) = \left\{ f \in \mathcal{A} : \frac{zf'(z)}{f(z)} \prec \varphi(z), \varphi \in \Omega \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Özel durumda

$$\mathcal{S}^*\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathcal{S}^* \quad \text{ve} \quad \mathcal{S}^*\left(\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right) = \mathcal{S}^*(\alpha), \ (0 \le \alpha < 1)$$

dır.

Tanım 2.2.20: $f \in \mathcal{A}$ ve $\varphi \in \Omega$ fonksiyonları verilsin. Her $z \in U$ için

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z)$$

subordinasyon şartını sağlayan f fonksiyonuna U'da Ma-Minda konveks fonksiyon denir (Ma and Minda 1992).

Ma-Minda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}(\varphi)$ ile gösterilir ve bu sınıf

$$\mathcal{K}(\varphi) = \left\{ f \in \mathcal{A} : 1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} \prec \varphi(z), \varphi \in \Omega \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Özel durumda

$$\mathcal{K}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\mathcal{K} \text{ ve } \mathcal{K}\left(\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right)=\mathcal{K}(\alpha), (0\leq\alpha<1)$$

dır.

Teorem 2.2.21 (De-Branges Teoremi): $f \in \mathcal{S}$ fonksiyonu verilsin. Buna göre her $n \geq 2$ için $|a_n| \leq n$ olur. Eşitlik durumu yalnızca $f(z) = z\left(1 - ze^{i\theta}\right)^{-2}$ Koebe fonksiyonları için geçerlidir (Hayman 1994).

Tanım 2.2.22 (Ölçülebilir Fonksiyon): $\mathcal{X}$ boştan farklı bir küme ve $\mathfrak{B}$ de bu kümenin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer $\mathfrak{B}$ ailesi için,

i. $\mathcal{X} \in \mathfrak{B}$

ii. $\forall E \in \mathfrak{B} \Rightarrow E^t = \mathcal{X} \setminus E \in \mathfrak{B}$

iii. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathfrak{B} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathfrak{B}$

şartları sağlanıyorsa $\mathfrak{B}$ ye $\mathcal{X}$ üzerinde bir σ-cebiri denir. $\mathfrak{B}$ deki her bir kümeye ölçülebilir küme ve $(\mathcal{X}, \mathfrak{B})$ ikilisine de ölçülebilir uzay denir. $\mathcal{X}$ ölçülebilir bir küme $f(x)$ de bu kümede tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Eğer α reel sayısı için

$$\{x \in \mathcal{X} : f(x) > \alpha\}$$

kümesi ölçülebilirse f ye bu kümede ölçülebilir fonksiyon denir.

Tanım 2.2.23: f analitik bir fonksiyon olmak üzere z_0, f nin bir sıfırı ve $n \in \mathbb{N}$ için $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ olsun. Buna göre f nin z_0 noktası civarındaki kuvvet serisi n. terimden başlar ve f, n. dereceden sıfıra sahiptir denir (Conway 1973).

2.3. $p-$valent Fonksiyonlar

Tanım 2.3.1: f fonksiyonu $D \subset \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bölgesinde analitik ve $w \in D$ için $f(z) = w$ denkleminin D bölgesindeki köklerinin sayısı $n(w)$ olsun. Burada dört durum karşımıza çıkar:

i. p pozitif bir tam sayı olmak üzere her $w \in D$ için $n(w) \leq p$ ise f fonksiyonuna D bölgesinde p-valent (veya p. mertebeden multivalent) fonksiyon denir. $p = 1$ olmak üzere f p-valent bir fonksiyon ise f ünivalenttir.

ii. Çoğu durumda sonuçları elde etmek için daha zayıf ortalama şartlar yeterlidir. $0 < R < \infty$ için

$$p(R) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} n\left(Re^{i\phi}\right)d\phi$$

$n(w)$ nın $|w| = R$ çemberi etrafındaki (Lebesgue) integral ortalaması olmak üzere $p(R) \leq p$ ise f fonksiyonuna çembersel ortalama p-valent fonksiyon denir. Bu durum, $|w| = R$ çemberleri üzerindeki w değerlerinin ortalama en fazla p kez alındığını söyler. Burada $n(w)$ ölçülebilir bir fonksiyon ve p herhangi bir pozitif sayıdır.

iii. f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve W, U birim diskinin f dönüşümü altındaki Riemann görüntüsü olsun. $W(R)$, W'nın $|w| = R$ çemberi içerisinde kalan kısmının alanını belirtmek üzere

$$W(R) = \frac{1}{\pi}\int_0^R tdt\int_0^{2\pi} n\left(te^{i\phi}\right)d\phi = \int_0^R 2p(t)dt \leq pR^2$$

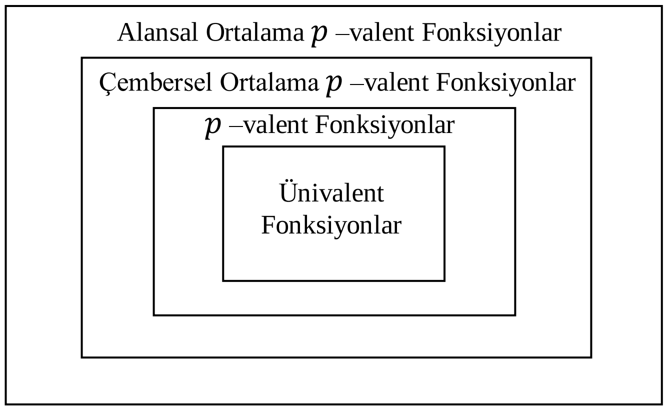
koşulunu sağlayan fonksiyonlara alansal ortalama p-valent fonksiyonlar denir. Alansal ortalama p-valent fonksiyon olma durumu yukarıda verilen tanımlara göre daha zayıf bir koşuldur.

iv. p pozitif tam sayı olmak üzere $0 < R < \infty$ için ya $n\left(Re^{i\phi}\right) = p$, $0 \leq \phi < 2\pi$ ya da $0 \leq \phi < 2\pi$ ve $n\left(Re^{i\phi}\right) < p$ olacak şekilde ϕ değeri vardır. Bu şartı sağlayan fonksiyonlara zayıf p-valent fonksiyonlar adı verilir (Hayman 1994).

Bir fonksiyon çembersel ortalama p-valent fonksiyon ise aynı zamanda alansal ortalama p-valent fonksiyondur; ancak bu ifadenin tersi geçerli değildir. Ayrıca her p-valent fonksiyon ortalama p-valent fonksiyondur (Goodman 1983b).

Yukarıda verilen tanımlar göz önüne alınarak aşağıdaki gerektirmeler yazılabilir:

f ünivalent $\Longrightarrow f$ p-valent $\Longrightarrow f$ çembersel ortalama p-valent $\Longrightarrow f$ alansal ortalama p-valent



Şekil 2.1. Fonksiyon Sınıfları Arasındaki Kapsama İlişkisi

p-valent fonksiyonlar üzerine yapılan çalışmalar p-valent fonksiyonlar sınıfının ortalama p-valent fonksiyonların bir alt sınıfı olarak göz önüne alınmasıyla büyük ilerleme kaydetmiştir.

Multivalent fonksiyonlar ünivalent fonksiyonlarınkine benzer pek çok ekstremal özelliğe sahiptir. Bu nedenle Bieberbach tahmini, distorsiyon teoremleri gibi ünivalent fonksiyonlar teorisinde klasikleşmiş bazı sonuçlar p-valent fonksiyonlar için genelleştirilebilir.

Teorem 2.3.2: p pozitif bir tam sayı olmak üzere,

$$f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \cdots$$

fonksiyonu U birim diskinde analitik ve p-valent ise

$$\left|a_{p+1}\right| \leq 2p$$

olur.

Ayrıca, $|z| = r\ (0 < r < 1)$ için,

$$\frac{r^p}{(1+r)^{2p}} \leq |f(z)| \leq \frac{r^p}{(1-r)^{2p}} \ ,$$

$$|f'(z)| \leq \frac{p(1+r)}{r(1-r)}|f(z)| \leq \frac{pr^{p-1}(1+r)}{(1-r)^{2p+1}}$$

eşitsizlikleri doğrudur (Hayman 1994).

Yukarıda verilen sonuçlar 1950 yılında Hayman tarafından çembersel ortalama p-valent fonksiyonlar için verilmiştir. $\left|a_{p+1}\right| \leq 2p$ eşitsizliği alansal ortalama p-valent fonksiyonlar için 1941 yılında Spencer tarafından ispatlanmıştır. Teoremdeki son ifade (p-valent fonksiyonların distorsiyon sınırları) ise 1954 yılında Garabedian ve Royden tarafından alansal ortalama p-valent fonksiyonlara genişletilmiştir (Hayman 1994).

Katsayı sınırları ve Goodman tahmini

p. dereceden polinomlar düzlemde p-valenttir. Bu nedenle f fonksiyonu U birim diskinde p-valent olduğunda önceki katsayılara bağlı olarak $\left|a_p\right|$ için sınır elde etmenin zor bir problem olduğu düşünülebilir. Ancak böyle fonksiyonlar için a_p den sonraki katsayıların a_0'dan a_p'ye kadar olan katsayılara bağlı olarak sınırlandırılabileceği 1935 yılında Cartwright tarafından gösterilmiştir. 1948 yılında ise Goodman tarafından aşağıdaki tahmin verilmiştir.

p pozitif bir tam sayı ve

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$$

fonksiyonu U birim diskinde p-valent olsun. Buna göre $n > p$ için

$$|b_n| \leq \sum_{k=1}^{p} \frac{2k(n+p)!}{(p+k)!\,(p-k)!\,(n-p-1)!\,(n^2-k^2)}|b_k|$$

olur.

Bu tahmin, $n.$ katsayının ilk p tane katsayının belli bir lineer kombinasyonu ile sınırlandırılabileceğini söyler. $p = 1$ olması durumunda ünivalent fonksiyonlar için verilen De-Branges Teoremi elde edilir (Hayman 1994).

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüme ilk olarak tezin temel kısmının oluşturulmasında kullanılan fonksiyon sınıflarını tanıtarak başlayalım ve yine bu bölümde bazı önemli tanım ve lemmaları verelim.

$U=\{z:z\in\mathbb{C},|z|<1\}$ açık birim diskinde analitik ve p-değerli olan

$$f(z)=z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}a_k z^k,\ \ (n,p\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}) \tag{3.1}$$

şeklindeki fonksiyonların sınıfı $\mathcal{A}(p,n)$ ile gösterilir.

$$f(z)=z^p+\sum_{k=1+p}^{\infty}a_k z^k,\ \ (p\in\mathbb{N}) \tag{3.2}$$

biçimindeki U da analitik ve p-valent olan fonksiyonların sınıfı ise $\mathcal{A}(p)$ ile gösterilir. Bu durumda $\mathcal{A}(p,1)=\mathcal{A}(p)$ ve $\mathcal{A}(1,1)=\mathcal{A}$ eşitliği yazılabilir.

$\mathcal{A}(p,n)$ sınıfının

$$f(z)=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_k|z^k \quad (n,p\in\mathbb{N}) \tag{3.3}$$

biçimindeki negatif katsayılı fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı $\mathcal{T}(p,n)$ ile gösterilmek üzere negatif katsayılı $f\in\mathcal{A}(p)$ fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{T}(p)$ ile gösterilir. Buradan $\mathcal{T}(p,1)=\mathcal{T}(p)$ olur.

Tanım 3.1 (Sălăgean Türev Operatörü): $f\in\mathcal{A}$ fonksiyonu için, Sălăgean türev operatörü $n\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere $D^n:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$

$$\begin{aligned} D^0f(z)&=f(z)\\ D^1f(z)&=Df(z)=zf'(z)\\ &\ \vdots\\ D^nf(z)&=D\left(D^{n-1}f(z)\right), \qquad (z\in U) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca D^n için rekürans formülü

$$D^{n+1}f(z) = z\left(D^n f(z)\right)'$$

biçiminde de yazılabilir (Sălăgean 1983).

$f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonuna Sălăgean türev operatörü uygulanırsa

$$D_p^0 f(z) = f(z)$$

$$D_p^1 f(z) = D_p f(z) = \frac{z}{p}\left(D_p^0 f(z)\right)' = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k}{p} a_k z^k$$

$$D_p^2 f(z) = D_p\left(D_p f(z)\right) = \frac{z}{p}\left(D_p f(z)\right)' = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \left(\frac{k}{p}\right)^2 a_k z^k$$

$$\vdots$$

$$D_p^m f(z) = D_p\left(D_p^{m-1} f(z)\right) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \left(\frac{k}{p}\right)^{\mathrm{m}} a_k z^k$$

eşitlikleri elde edilir (Salim and Mousa 2004).

$\mathcal{T}(p,n)$ sınıfına ait fonksiyonlar için

$$D_p^0 f(z) = f(z)$$

$$D_p^1 f(z) = D_p f(z) = \frac{z}{p}\left(D_p^0 f(z)\right)' = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k}{p} a_k z^k$$

$$D_p^2 f(z) = D_p\left(D_p f(z)\right) = \frac{z}{p}\left(D_p f(z)\right)' = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} \left(\frac{k}{p}\right)^2 a_k z^k$$

$$\vdots$$

$$D_p^m f(z) = D_p\left(D_p^{m-1} f(z)\right) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} \left(\frac{k}{p}\right)^{\mathrm{m}} a_k z^k$$

eşitlikleri yazılır.

Sălăgean türev operatöründeki mantık ile yola çıkıldığında Deniz ve Orhan 2011 yılında birçok operatörü de kapsayan genel bir diferansiyel operatörü aşağıdaki gibi tanımladılar.

Tanım 3.2 (Deniz ve Orhan Türev Operatörü): $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu için, Deniz ve Orhan türev operatörü $D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l):\mathcal{A}(p,n)\to\mathcal{A}(p,n)$ $p\in\mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\delta,\lambda,\mu,l\in\mathbb{R}$, $\lambda\geq\mu\geq 0$ ve $\delta,l\geq 0$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
&D_p^0(\lambda,\mu,l)\,f(z)=f(z)\\
&(p+1)D_p^1(\lambda,\mu,l)\,f(z)=(p+1)D_p(\lambda,\mu,l)\,f(z)=\lambda\mu z^2 f''(z)+\left(\lambda-\mu+(1-p)\lambda\mu\right)zf'(z)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\left(p(1-\lambda+\mu)+1\right)f(z)\\
&(p+1)D_p^2(\lambda,\mu,l)\,f(z)=(p+1)D_p(\lambda,\mu,l)\left(D_p(\lambda,\mu,l)\,f(z)\right)\\
&\qquad\qquad\qquad=\lambda\mu z^2\left[D_p^1(\lambda,\mu,l)\,f(z)\right]''+\left(\lambda-\mu+(1-p)\lambda\mu\right)z\left[D_p^1(\lambda,\mu,l)\,f(z)\right]'\\
&\qquad\qquad\qquad+\left(p(1-\lambda+\mu)+l\right)D_p^1(\lambda,\mu,l)\,f(z)\\
&\qquad\qquad\qquad\vdots\\
&D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)\,f(z)=D_p(\lambda,\mu,l)\left(D_p^{\delta-1}(\lambda,\mu,l)\,f(z)\right)
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)$ için rekürans formülü

$$
\begin{aligned}
(p+1)D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)\,f(z)&=\lambda\mu z^2\left[D_p^{\delta-1}(\lambda,\mu,l)\,f(z)\right]''\\
&+\left(\lambda-\mu+(1-p)\lambda\mu\right)z\left[D_p^{\delta-1}(\lambda,\mu,l)\,f(z)\right]'\\
&+\left(p(1-\lambda+\mu)+l\right)D_p^{\delta-1}(\lambda,\mu,l)\,f(z)
\end{aligned}
$$

biçiminde yazılabilir (Deniz ve Orhan 2011).

Ayrıca, $f \in \mathcal{A}(p,n)$ için $D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)$ operatörünün seri biçimi

$$
D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)\,f(z)=z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)a_k z^k
$$

olur. Burada

$$\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)=\left[\frac{(k-p)(\lambda\mu k+\lambda-\mu)+p+l}{p+l}\right]^{\delta} \tag{3.4}$$

dır.

Ayrıca Tanım 3.2 den yola çıkarak $p\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}_0,\ \delta,\lambda,\mu,l\in\mathbb{R},\ \lambda\geq\mu\geq 0$ ve $\delta,l\geq 0$ olmak üzere $D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l):\mathcal{T}(p,n)\to\mathcal{T}(p,n)$ operatörü

$$D_p^0(\lambda,\mu,l)f(z)=f(z)$$

$$\begin{aligned}(p+1)D_p^1(\lambda,\mu,l)f(z)&=(p+1)D_p(\lambda,\mu,l)f(z)=\lambda\mu z^2f''(z)+\left(\lambda-\mu+(1-p)\lambda\mu\right)zf'(z)\\&\quad+\left(p(1-\lambda+\mu)+1\right)f(z)\\&=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\phi_p^k(1,\lambda,\mu,l)a_kz^k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(p+1)D_p^2(\lambda,\mu,l)f(z)&=(p+1)D_p(\lambda,\mu,l)\left(D_p(\lambda,\mu,l)f(z)\right)\\&=\lambda\mu z^2\left[D_p^1(\lambda,\mu,l)f(z)\right]''+\left(\lambda-\mu+(1-p)\lambda\mu\right)z\left[D_p^1(\lambda,\mu,l)f(z)\right]'\\&\quad+\left(p(1-\lambda+\mu)+l\right)D_p^1(\lambda,\mu,l)f(z)\\&=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\phi_p^k(2,\lambda,\mu,l)a_kz^k\\&\ \ \vdots\end{aligned}$$

$$D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)=D_p(\lambda,\mu,l)\left(D_p^{\delta-1}(\lambda,\mu,l)f(z)\right)=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)a_kz^k$$

şeklinde tanımlanır.

$D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)$ operatörü birçok operatörün genelleştirilmiş halidir. $D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)$ operatörünün özel durumları aşağıdaki gibidir:

1. $D_1^{\delta}(1,0,0)f(z)\equiv D^{\delta}f(z),\ (\delta\in\mathbb{N}_0)$ Sălăgean diferansiyel operatörü (Sălăgean 1986)
2. $D_1^{\delta}(\lambda,0,0)f(z)=D_{\lambda}^{\delta}f(z),\ (\delta\in\mathbb{N}_0)$ Al-Oboudi operatörü (Al-Oboudi 2004)
3. $D_1^{\delta}(\lambda,\mu,0)f(z)=D_{\lambda,\mu}^{\delta}f(z)$ Deniz ve Orhan operatörü (Deniz and Orhan 2010b) bu operatör ilk olarak $0\leq\mu\leq\lambda\leq 1$ değerleri için Raducanu ve Orhan (2010) tarafından tanımlanmıştır.

4. $D_1^\delta(1,0,l)f(z)=I_l^\delta f(z),\ (\delta\in\mathbb{N}_0)$ Cho ve Srivastava operatörü (Cho ve Srivastava 2003) bağımsız olarak Cho ve Kim (2003) tarafından tanımlanmıştır.
5. $D_1^\delta(1,0,1)f(z)=I^\delta f(z),\ (\delta\in\mathbb{N}_0)$ Uralegaddi ve Somonatha operatörü (Uralegaddi ve Somonatha 1992)
6. $D_1^\delta(\lambda,0,0)f(z)=D_\lambda^\delta f(z),\ \left(\delta\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}\right)$ Acu ve Owa operatörü (Acu ve Owa 2006)
7. $D_1^\delta(\lambda,0,l)f(z)\equiv I(\delta,\lambda,l)f(z),\ \left(\delta\in\mathbb{R}^+\cup\{0\}\right)$ Cataş operatörü (Cataş 2009)
8. $D_p^\delta(1,0,0)f(z)=D_p^\delta f(z),\ \ (\delta\in\mathbb{N}_0)$ Shenan, Salim and Mousa operatörü (Shenan *et. al* 2004)
9. $D_p^\delta(\lambda,0,0)f(z)=D_{\lambda,p}^\delta f(z),\ \ (\delta\in\mathbb{N}_0)$ Kwon operatörü (Kwon 2008)
10. $D_p^\delta(1,0,l)f(z)=I_p(\delta,l)f(z)$ Kumar, Taneja and Ravichadran operatörü (Kumar *et. al* 2006)
11. $D_p^\delta(\lambda,0,l)f(z)=I_p(\delta,\lambda,l)f(z)$ Cataş, Oros and Oros operatörü (Cataş *et. al* 2008).

Ayrıca λ,μ,l ve p parametrelerinin özel değerleri için $D_p^\delta(\lambda,\mu,l)$ operatöründen

$$D_p^\delta(\lambda,\mu,1)=D_p^\delta(\lambda,\mu)$$
$$D_1^\delta(\lambda,\mu,l)=D^\delta(\lambda,\mu,l)$$

yeni operatörleri elde edilir

Tanım 3.3 (Gama Fonksiyonu): $x>0$ olmak üzere,

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}dt$$

biçiminde tanımlanan $\Gamma(x)$ fonksiyonuna Gama fonksiyonu denir (Goodman 1983a).

Tanım 3.4 (Beta Fonksiyonu): $x > 0$ ve $y > 0$ olmak üzere,

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$$

biçiminde tanımlanan $B(x,y)$ fonksiyonuna Beta fonksiyonu denir (Goodman 1983a).

Gama ve Beta fonksiyonları yukarıdaki gibi tanımlanmak üzere,

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

eşitliği yazılır.

Tanım 3.5 (Pochhammer Sembolü): $a, v \in \mathbb{C}$ olmak üzere,

$$(a)_v = \frac{\Gamma(a+v)}{\Gamma(a)} = \begin{cases} 1, & \big(v = 0, a \in \mathbb{C} - (0)\big) \\ a(a+1)\dots(a+n-1), & (v = n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{C}) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $(a)_v$ ifadesine Pochhammer sembolü denir (Altıntaş 2007).

Gama fonksiyonunun özelliklerinden dolayı $n \in \mathbb{N}_0$ için $(1)_n = n!$ olur.

Tanım 3.6 (Kesirsel İntegral): $f(z)$, $z - \xi > 0$ iken $\log(z-\xi)$ reel olacak şekilde $(z-\xi)^{v-1}$ in katlılıklarının kaldırıldığı ve orijini içeren z-düzlemindeki basit bağlantılı bir bölgede analitik bir fonksiyon olmak üzere f'nin v. mertebeden kesirsel integrali

$$\mathfrak{D}_z^{-v} f(z) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{1-v}} d\xi \quad (v > 0) \tag{3.5}$$

biçiminde tanımlanır (Owa 1978, Srivastava and Owa 1989).

Tanım 3.7 (Kesirsel Türev): $f(z)$, $(z-\xi)^{v-1}$ in katlılıklarının Tanım 3.5 teki gibi kaldırıldığı z-düzlemindeki basit bağlantılı bir bölgede analitik bir fonksiyon olmak üzere f'nin v. mertebeden kesirsel türevi

$$\mathfrak{D}_z^{v} f(z) = \frac{1}{\Gamma(1-v)} \frac{d}{dz} \int_0^z \frac{f(\xi)}{(z-\xi)^{v}} d\xi \quad (0 \leq v < 1) \tag{3.6}$$

biçiminde tanımlanır (Owa 1978, Srivastava and Owa 1989).

Tanım 3.8: $0 \leq v < 1, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere Tanım 3.5 teki hipotezler altında $(n+v)$ mertebeden kesirsel türev

$$\mathfrak{D}_z^{n+v} f(z) = \frac{d^n}{dz^n} \mathfrak{D}_z^{v} f(z)$$

şeklinde tanımlanır (Altıntaş 2007, Srivastava and Owa 1989).

Tanım 3.9: $\vartheta \in \mathbb{R}, p \in \mathbb{N}$ **ve** $\vartheta + p > 0$ olmak üzere $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu için $\mathcal{I}_{\vartheta,p} f$ operatörü

$$\left(\mathcal{I}_{\vartheta,p} f\right)(z) = \frac{\vartheta + p}{z^p} \int_0^z t^{\vartheta-1} f(t) dt$$

şeklinde tanımlanır (Srivastava ve Owa 1992).

3.1. $p-$valent Fonksiyonların Bazı Özel Alt Sınıfları

Bu başlık altında 2.2 kısmında ifade edilen temel $p-$valent fonksiyon sınıfları dışında bu alanda yapılan araştırmalarda önemli bir yere sahip olan $p-$valent fonksiyonların özel alt sınıfları tanıtılarak bu sınıflara ait bazı katsayı eşitsizlikleri verilecektir.

Tanım 3.1.1: $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu verilsin. $\forall z \in U$ için

$$Re\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

ise f fonksiyonuna U'da p-valent yıldızıl fonksiyon denir (Hayman 1994).

p-valent yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(p,n)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.2: $f \in \mathcal{A}(p,n)$ fonksiyonu verilsin. $\forall z \in U$ için

$$Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0$$

ise f fonksiyonuna U'da p-valent konveks fonksiyon denir (Hayman 1994).

p-valent konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}(p,n)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.3: f fonksiyonu U birim diskinde analitik ve (2.1) şeklinde olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve her $z \in U$ için

i. $\dfrac{f(z)}{z}f'(z) \neq 0,$

ii. $Re\left[\alpha\left(1+\dfrac{zf''(z)}{f'(z)}\right)+(1-\alpha)\dfrac{zf'(z)}{f(z)}\right] \geq 0$

ise f'ye α-konveks fonksiyon denir (Goodman 1983a).

α-konveks bir fonksiyon $\alpha = 1$ için konveks, $\alpha = 0$ için yıldızıl olur.

α-konveks fonksiyon kavramı ilk olarak 1969'da Mocanu tarafından tanıtılmıştır.

1973 yılında Miller, Mocanu ve Reade tarafından α-konveks fonksiyonlarla ilgili aşağıdaki geometrik şartlar verilerek ispatlanmıştır (Goodman 1983a).

Teorem 3.1.4: α herhangi bir reel sayı ve f fonksiyonu α-konveks bir fonksiyon olsun.

i. $\alpha \geq 1$ ise f fonksiyonu konveks,

ii. $\alpha < 1$ ise f fonksiyonu yıldızıl olur (Goodman 1983a).

α-konveks kavramının tanıtılmasından çok önce 1962'de Sakaguchi, (3.1) biçimindeki daha genel fonksiyonlar için,

$$Re\left[1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}+k\frac{zf'(z)}{f(z)}\right]\geq 0 \quad (z\in U\,) \tag{3.7}$$

şartını vererek f fonksiyonunun

i. $0<k$ için p-valent yıldızıl,

ii. $-1<k\leq 0$ için p-valent konveks ve

iii. $k=-1$ için (3.7) şartını sağlayan yalnız bir fonksiyon olduğunu, yani $f(z)\equiv z^p$ olduğunu ispatlamıştır (Goodman 1983a).

Tanım 3.1.5: $f\in\mathcal{A}(p,n)$ ve $0\leq\alpha<p$ olmak üzere $\forall\, z\in U$ için

$$Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha$$

ise f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden p-valent yıldızıl fonksiyon denir (Altıntaş *et al.* 2004).

$\alpha-$mertebeden p-valent yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*(p,n,\alpha)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6: $f\in\mathcal{A}(p,n)$ ve $0\leq\alpha<p$ olmak üzere her $z\in U$ için

$$Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha$$

ise f fonksiyonuna $\alpha-$mertebeden p-valent konveks fonksiyon denir (Altıntaş *et al.* 2004).

$\alpha-$mertebeden p-valent konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}(p,n,\alpha)$ ile gösterilir.

1991 yılında Altıntaş $\mathcal{S}^*(p,n,\alpha)$ ve $\mathcal{K}(p,n,\alpha)$ sınıflarını birleştirerek aşağıdaki fonksiyon sınıfını tanımlamıştır.

Tanım 3.1.7: $f\in\mathcal{A}(p,n)$ olmak üzere $\alpha(0\leq\alpha<1), 0\leq\lambda\leq 1$ için f fonksiyonu

$$Re\left\{\frac{zf'(z)+\lambda z^2f''(z)}{\lambda zf'(z)+(1-\lambda)f(z)}\right\}>\alpha$$

şartını sağlarsa f fonksiyonu $\mathcal{P}(n,\lambda,\alpha)$ sınıfına ait bir fonksiyondur denir (Altıntaş 1991).

$\mathcal{S}^*(p,n,\alpha)$ ve $\mathcal{K}(p,n,\alpha)$ fonksiyon sınıfları Owa (1991) tarafından çalışılmıştır.

$\mathcal{S}^*(p,\alpha)=\mathcal{S}(p,1,\alpha)$ sınıfı ise Patil and Thakare (1983) tarafından ele alınmıştır.

Negatif katsayılı $\alpha-$mertebeden p-valent yıldızıl ve negatif katsayılı $\alpha-$mertebeden p-valent konveks fonksiyonlar sınıfı $0\le\alpha<p$ olmak üzere her $z\in U$ için sırasıyla,

$$\mathcal{T}^*(p,n,\alpha)=\mathcal{S}^*(p,n,\alpha)\cap\mathcal{T}(p,n)=\left\{f: f\in\mathcal{T}(p,n), Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha\right\},$$

$$\mathcal{C}(p,n,\alpha)=\mathcal{K}(p,n,\alpha)\cap\mathcal{T}(p,n)=\left\{f: f\in\mathcal{T}(p,n), Re\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>\alpha\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

$$\mathcal{T}^*(p,\alpha)=\mathcal{S}^*(p,\alpha)\cap\mathcal{T}_p;\ \mathcal{C}(p,\alpha)=\mathcal{K}(p,\alpha)\cap\mathcal{T}_p$$

fonksiyon sınıflarına ait katsayı eşitsizlikleriyle ilgili Owa tarafından aşağıdaki lemmalar verilmiştir.

Lemma 3.1.8: f fonksiyonu (3.3) deki gibi tanımlansın. Buna göre $f\in\mathcal{T}^*(p,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p+k+\alpha)a_{p+k}\le p-\alpha \tag{3.8}$$

olmasıdır. Bu sonuç kesindir (Owa 1985).

Lemma 3.1.9: f fonksiyonu (3.3) de ki gibi tanımlansın. Buna göre $f\in\mathcal{C}(p,\alpha)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=1}^{\infty}(p+k)(p+k-\alpha)a_{p+k} \leq p(p-\alpha) \tag{3.9}$$

olmasıdır. Bu sonuç kesindir (Owa 1985).

$\mathcal{T}^*(p,\alpha)$ sınıfına ait (3.3) biçiminde tanımlanan bir f fonksiyonu için Lemma 3.1.8 den

$$a_{p+1} \leq \frac{p-\alpha}{p+1-\alpha} \tag{3.10}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer taraftan, $\mathcal{C}(p,\alpha)$ sınıfına ait (3.3) biçiminde tanımlanan bir f fonksiyonu için Lemma 3.1.9 dan

$$a_{p+1} \leq \frac{p(p-\alpha)}{(p+1)(p+1-\alpha)} \tag{3.11}$$

olur. (3.10) ve (3.11) eşitsizliklerinden dolayı $\mathcal{T}^*(p,\alpha)$ nın

$$f(z) = z^p - \frac{(p-\alpha)\varepsilon}{p+1-\alpha}z^{p+1} - \sum_{k=2}^{\infty} a_{p+k}z^{p+k}$$

$$\left(a_{p+k} \geq 0, p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}-\{1\};\ 0 \leq \alpha < p; 0 \leq \varepsilon < 1\right)$$

şeklindeki fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı $\mathcal{T}_\varepsilon^*(p,\alpha)$ ve $\mathcal{C}(p,\alpha)$ nın

$$f(z) = z^p - \tfrac{p(p-\alpha)\varepsilon}{(p+1)(p+1-\alpha)}z^{p+1} - \textstyle\sum_{k=2}^{\infty} a_{p+k}z^{p+k} \tag{3.12}$$

$$\left(a_{p+k} \geq 0, p \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}-\{1\};\ 0 \leq \alpha < p; 0 \leq \varepsilon < 1\right)$$

şeklindeki fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı $\mathcal{C}_\varepsilon(p,\alpha)$ ile gösterilmek üzere, p-valent analitik fonksiyonların $\mathcal{T}_\varepsilon^*(p,\alpha)$ ve $\mathcal{C}_\varepsilon(p,\alpha)$ şeklinde iki farklı sınıfının tanıtılarak çalışılması doğaldır.

$\mathcal{T}_\varepsilon^*(p,\alpha)$ ve $\mathcal{C}_\varepsilon(p,\alpha)$ sınıfları Aouf *et. al.* (2000) tarafından çalışılmıştır.

$\mathcal{T}_\varepsilon^*(\alpha) = \mathcal{T}_\varepsilon^*(1,\alpha)$ ve $\mathcal{C}_\varepsilon(\alpha) = \mathcal{C}_\varepsilon(1,\alpha)$ sınıfları ise daha önce Silverman and Silvia (1981) tarafından göz önüne alınmıştır.

Tanım 3.1.10: $f \in \mathcal{A}(p,n)$ ve $\varphi \in \Omega$ fonksiyonları verilsin. Her $z \in U$ için

$$\frac{zf'(z)}{pf(z)} \prec \varphi(z)$$

subordinasyon şartını sağlayan f fonksiyonuna U'da $p-$valent Ma-Minda yıldızıl fonksiyon denir (Ma and Minda 1992).

$p-$valent Ma-Minda yıldızıl fonksiyonların sınıfı $\mathcal{S}^*_{p,n}(\varphi)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{S}^*_{p,n}(\varphi) = \left\{ f \in \mathcal{A}(p,n) : \frac{zf'(z)}{pf(z)} \prec \varphi(z), \varphi \in \Omega \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Özel durumda

$$\mathcal{S}^*_{p,n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \mathcal{S}^*(p,n) \text{ ve } \mathcal{S}^*_{p,n}\left(\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right) = \mathcal{S}^*(p,n,\alpha)\ (0 \le \alpha < 1)$$

dır.

Tanım 3.1.11: $f \in \mathcal{A}(p,n)$ ve $\varphi \in \Omega$ fonksiyonları verilsin. Her $z \in U$ için

$$\frac{1}{p}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec \varphi(z)$$

subordinasyon şartını sağlayan f fonksiyonuna U'da $p-$valent Ma-Minda konveks fonksiyon denir (Ma and Minda 1992).

$p-$ valent Ma-Minda konveks fonksiyonların sınıfı $\mathcal{K}_{p,n}(\varphi)$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{K}_{p,n}(\varphi) = \left\{ f \in \mathcal{A}(p,n) : \frac{1}{p}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec \varphi(z), \varphi \in \Omega \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Özel durumda

$$\mathcal{K}_{p,n}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\mathcal{K}(p,n) \text{ ve } \mathcal{K}_{p,n}\left(\frac{1+(1-2\alpha)z}{1-z}\right)=\mathcal{K}(p,n,\alpha), \quad (0\leq\alpha<1)$$

dır.

2007 yılında Ali *et al.* tarafından aşağıdaki fonksiyon sınıfları tanıtılmıştır.

Tanım 3.1.12: $\varphi(z)$, U birim diskini $w_0 = 1$ noktasına göre yıldızıl bir bölgeye resmeden, reel eksene göre simetrik $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) > 0$ olmak üzere U birim diskinde pozitif reel kısma sahip analitik bir fonksiyon olsun. $f \in \mathcal{A}(p)$ olmak üzere

$$1+\frac{1}{b}\left(\frac{1}{p}\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right) \prec \varphi(z) \quad (z \in U, b \in \mathbb{C}-\{0\}),$$

ve

$$1-\frac{1}{b}+\frac{1}{bp}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) \prec \varphi(z) \quad (z \in U, b \in \mathbb{C}-\{0\})$$

koşullarını sağlayan $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonlarına sırasıyla, $\mathcal{S}^*_{b,p}(\varphi)$ ve $\mathcal{K}_{b,p}(\varphi)$ fonksiyon sınıflarına aittir denir. Ayrıca, $f \in \mathcal{A}(p)$ fonksiyonu

$$1+\frac{1}{b}\left(\frac{f'(z)}{pz^{p-1}}-1\right) \prec \varphi(z) \quad (z \in U, b \in \mathbb{C}-\{0\})$$

koşulunu sağlarsa f fonksiyonu $\mathcal{R}_{b,p}(\varphi)$ sınıfına aittir denir (Ali *et al.* 2007).

$\mathcal{S}^*_{1,1}(\varphi) = \mathcal{S}^*(\varphi)$ ve $\mathcal{K}_{1,1}(\varphi) = \mathcal{K}(\varphi)$ olur. $\mathcal{S}^*(\varphi)$ ve $\mathcal{K}(\varphi)$ fonksiyon sınıfları Ma and Minda (1992) tarafından tanıtılan sınıflardır.

α. mertebeden yıldızıl fonksiyonların $\mathcal{S}^*(\alpha)$ sınıfı ve α. mertebeden konveks fonksiyonların $\mathcal{K}(\alpha)$ sınıfı, $0 \leq \alpha < 1$ ve $\varphi(z) = (1 + (1 - 2\alpha)z) \,/\, (1 - z)$ olmak üzere, sırasıyla, $\mathcal{S}^*_{1,1}(\varphi)$ ve $\mathcal{K}_{1,1}(\varphi)$ sınıflarının özel halidir.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde, çalışmamızda elde ettiğimiz sonuçlara yer verilmiştir. İlk olarak $D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)$ operatörünü kullanarak $\mathcal{A}(n,p)$ ve $\mathcal{T}(n,p)$ sınıfına ait fonksiyonların $\mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ ve $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ gibi iki yeni alt sınıfları tanımlanarak bu sınıflara ait katsayı eşitsizlikleri, distorsiyon sınırları, yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı, komşuluk problemi, kısmi toplamları ve kesirsel türev-integralin uygulamaları teoremler ve sonuçları şeklinde verilmiş ve ispatlanmıştır.

4.1. $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ Sınıfı ve Bu Sınıf İçin Katsayı Eşitsizlikleri

İlk olarak $D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)$ türev operatörünü kullanarak $p-$valent fonksiyonların yeni $\mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ altsınıfı aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 4.1.1: $f\in\mathcal{A}(p,n)$ ve $\varphi\in\Omega$ fonksiyonları verilsin. Her $z\in U$ için

$$\begin{gathered}\lambda,\mu,l,\delta,\sigma,A,B\in\mathbb{R};\ \lambda\geq\mu\geq 0,\ \ l,\delta\geq 0\\ -1\leq A<B\leq 1,\ 0<B\leq 1\ \text{ ve }\ 0\leq\sigma<p\end{gathered}$$

olmak üzere

$$\frac{1}{p-\sigma}\left(\frac{z\left[D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)\right]'}{D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)}-\sigma\right)\prec\frac{1+Az}{1+Bz}\qquad(z\in U)\tag{4.1}$$

koşulunu sağlanırsa f fonksiyonu $\mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfına aittir denir.

Tanım 4.1.1 deki (4.1) subordinasyon şartı

$$\left| \frac{\dfrac{z\left(D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)\right)'}{D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)} - p}{B\dfrac{z\left(D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)\right)'}{D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)} - \left[pB + (A-B)(p-\sigma)\right]} \right| < 1 \quad (z \in U) \tag{4.2}$$

eşitsizliğine denktir.

$f \in \mathcal{T}(p,n)$ olmak üzere bundan sonra $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfını

$$\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p) = \mathcal{T}\left(p,n\right) \cap \mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$$

ile tanımlayacağız.

İlk olarak $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfı için elde edilen katsayı eşitsizliğini verelim.

Teorem 4.1.1: f fonksiyonu (3.3) deki gibi tanımlansın. Bu durumda, f fonksiyonunun $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfından olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \left[\left(k-p\right)\left(1+B\right) - (B-A)(p-\sigma)\right] \phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)\left|a_k\right| \le \left(B-A\right)(p-\sigma) \tag{4.3}$$

olmasıdır. Burada $\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)$, (3.4) formülünden tanımlanır.

İspat: Kabul edelim ki, (4.3) eşitsizliği sağlansın. Bu durumda (4.2) ve (4.3) ifadelerinden

$$\left| z\left[D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)\right]' - pD_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z) \right|$$

$$-\left| Bz\left[D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)\right]' - \left[pB + (A-B)(p-\sigma\right]D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l) \right|$$

$$=\left|z\left[pz^{p-1}-\sum_{k=n+p}^{\infty}k\phi_p^k\left(\delta,\lambda,\mu,l\right)\left|a_k\right|z^{k-1}\right]-p\left[z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\phi_p^k\left(\delta,\lambda,\mu,l\right)\left|a_k\right|z^k\right]\right|$$

$$-\left|B\left[pz^{p-1}-\sum_{k=n+p}^{\infty}k\phi_p^k\left(\delta,\lambda,\mu,l\right)\left|a_k\right|z^{k-1}\right]\right.$$

$$\left.-\left[pB+(A-B)(p-\sigma)\right]\left[z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}\phi_p^k\left(\delta,\lambda,\mu,l\right)\left|a_k\right|z^k\right]\right|$$

$$=\left|\left[pz^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}k\phi_p^k\left(\delta,\lambda,\mu,l\right)\left|a_k\right|z^k\right]-\left[pz^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}p\phi_p^k\left(\delta,\lambda,\mu,l\right)\left|a_k\right|z^k\right]\right|$$

$$-\left|\left[Bpz^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}pB\phi_p^k\left(\delta,\lambda,\mu,l\right)\left|a_k\right|z^k\right.\right.$$

$$\left.\left.+(A-B)(p-\sigma)z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}(A-B)(p-\sigma)\phi_p^k\left(\delta,\lambda,\mu,l\right)\left|a_k\right|z^k\right]\right|$$

$$=\left|-\sum_{k=n+p}^{\infty}(k-p)\phi_p^k\left(\delta,\lambda,\mu,l\right)\left|a_k\right|z^k\right|$$

$$-\left|-\left[(B-A)(p-\sigma)z^p+\sum_{k=n+p}^{\infty}B(k-p)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k\left(\delta,\lambda,\mu,l\right)\left|a_k\right|z^k\right|$$

$$\leq\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k\left(\delta,\lambda,\mu,l\right)\left|a_k\right|-(B-A)(p-\sigma)\leq 0$$

$$\left(z\in\partial U=\left\{z\in\mathbb{C}\ ve\left|z\right|=1\right\}\right)$$

eşitsizliğini bulunur. Böylece Maximum Modül teoremine göre

$$f(z)\in\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$$

dır.

Tersine, kabul edelim ki $f(z)\in\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ olsun. Bu durumda

$$\left| \frac{\dfrac{z\left[D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)\right]'}{D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)} - p}{B\left[\dfrac{z\left[D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)\right]'}{D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)}\right] - \left[pB + (A-B)(p-\sigma)\right]} \right|$$

$$= \left| \frac{\sum_{k=n+p}^{\infty} (k-p)\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)|a_k| z^k}{\sum_{k=n+p}^{\infty} \left[-B(k-p)+(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)|a_k| z^k + (B-A)(p-\sigma)z^p} \right|$$

eşitliğini elde ederiz.

Her z için $\operatorname{Re}(z) \leq |z|$ eşitsizliği geçerli olduğundan son eşitlikten,

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\sum_{k=n+p}^{\infty} (k-p)\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)|a_k| z^{k-p}}{\sum_{k=n+p}^{\infty} \left[-B(k-p)+(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)|a_k| z^{k-p} + (B-A)(p-\sigma)} \right) < 1 \quad (4.4)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan z nin değerleri reel olarak seçilirse,

$$\frac{z\left[D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)\right]'}{D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)}$$

ifadesi de reel olur. Sonrasında (4.4) ifadesinde $z \to 1^{-}$ için limite geçildiğinde

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} \left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)|a_k| \leq (B-A)(p-\sigma)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.2 den görüldüğü gibi $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfı için (4.3) katsayı eşitsizliği gerek ve yeter şart niteliğindedir. Bunun sebebi fonksiyonların negatif katsayılı olmasından kaynaklanır. Bu durum $\mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfı için her zaman doğru olmayabilir. $\mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfı için sadece yeter şart doğrudur. Bununla ilgili teorem aşağıdadır.

Teorem 4.1.2: f fonksiyonu (3.1) deki gibi tanımlansın. Bu durumda, eğer f fonksiyonu $\mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfından ise

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)|a_k|\leq(B-A)(p-\sigma)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)$, (3.4) formülünden tanımlanır.

Sonuç 4.1.1: f fonksiyonu (3.3) deki gibi tanımlansın. Bu durumda, eğer f fonksiyonu $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfından ise,

$$|a_k|\leq\frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}\qquad(k,p\in\mathbb{N})$$

dir. Eşitlik

$$f(z)=z^p-\frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}z^k\qquad(k,p\in\mathbb{N})$$

fonksiyonu için sağlanır.

4.2. $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ Sınıfı İçin Sınırlar ve Ekstremum Noktalar

$$f(z)=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_k|z^k \quad (n,p\in\mathbb{N})$$

olmak üzere f nin q. mertebeden türevi

$$f^{(q)}(z)=\frac{p!}{(p-q)!}z^{p-q}-\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}|a_k|z^{k-q}$$

bulunur.

Teorem 4.2.1 $f(z)\in\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ olsun. Bu durumda $\forall z\in U,\ p>q,\ q\in\mathbb{N}_0$ için

$$\begin{aligned}&\left(\frac{p!}{(p-q)!}-\frac{(B-A)(p-\sigma)(n+p)!}{(n+p-q)!\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}|z|^n\right)|z|^{p-q}\\ &\le\left|f^{(q)}(z)\right|\\ &\le\left(\frac{p!}{(p-q)!}+\frac{(B-A)(p-\sigma)(n+p)!}{(n+p-q)!\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}|z|^n\right)|z|^{p-q}\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitlik ancak

$$f(z)=z^p-\frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}z^{n+p}$$

fonksiyonu için geçerlidir.

İspat: Teorem 4.1.1 i dikkate aldığımızda,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{(B-A)(p-\sigma)}\left|a_k\right|\leq 1$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizliğin sol tarafının pay ve paydası $\frac{k!}{(k-q)!}$ ile çarpılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\frac{(n+p-q)!\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}{(B-A)(p-\sigma)(n+p)!}\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}\left|a_k\right|\leq 1$$

veya

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}\left|a_k\right|\leq\frac{(B-A)(p-\sigma)(n+p)!}{(n+p-q)!\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik kullanılarak

$$\begin{aligned}\left|f^{(q)}(z)\right| &= \left|\frac{p!}{(p-q)!}z^{p-q}-\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}\left|a_k\right|z^{k-q}\right| \\ &\leq \left|\frac{p!}{(p-q)!}z^{p-q}+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}\left|a_k\right|z^{k-q}\right| \\ &\leq \frac{p!}{(p-q)!}+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k!}{(k-q)!}\left|a_k\right| \\ &\leq \frac{p!}{(p-q)!}+\frac{(B-A)(p-\sigma)(n+p)!}{(n+p-q)!\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\left| f^{(q)}(z) \right| = \left| \frac{p!}{(p-q)!} z^{p-q} - \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left| a_k \right| z^{k-q} \right|$$

$$\geq \frac{p!}{(p-q)!} - \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{k!}{(k-q)!} \left| a_k \right|$$

$$\geq \frac{p!}{(p-q)!} - \frac{(B-A)(p-\sigma)(n+p)!}{(n+p-q)!\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlamış olur.

Teorem 4.2.1 de $q=0$ alındığında $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfı için aşağıdaki distorsiyon (bükülme) sonucu yazabiliriz.

Sonuç 4.2.1: $f(z) \in \mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ olsun. Bu durumda $\forall z \in U$ için

$$1 - \frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} \left| z \right|^{n+p}$$

$$\leq \left| f(z) \right| \leq 1 + \frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} \left| z \right|^{n+p}$$

eşitsizliği yazılır.

Teorem 4.2.1 de $q=1$ alındığında $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfı için aşağıdaki growth (büyüme) sonucu yazabiliriz.

Sonuç 4.2.2: $f(z) \in \mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ olsun. Bu durumda $\forall z \in U$ için

$$p - \frac{(B-A)(p-\sigma)(n+p)!}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} \left| z \right|^{n+p}$$

$$\leq \left| f'(z) \right| \leq p + \frac{(B-A)(p-\sigma)(n+p)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} \left| z \right|^{n+p}$$

eşitsizliği yazılır.

Şimdi $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfının ekstremum fonksiyonunu verelim.

Teorem 4.2.2: Kabul edelim ki

$$f_{n+p-1}(z)=z^{p}$$

ve

$$f_k(z)=z^{p}-\frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}z^{k}$$

olsun. Bu durumda $\gamma>0$ ve $\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\gamma_k=1$ olmak üzere

$$f\in\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$$

olması için gerek ve yeter şart

$$f(z)=\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\gamma_k f_k(z)$$

olmasıdır.

İspat: Farz edelim ki,

$$f(z)=\sum_{k=n+p-1}^{\infty}\gamma_k f_k(z)$$

olsun. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \gamma_k f_k(z) = \gamma_{n+p-1} f_{n+p-1} f(z) + \sum_{k=n+p}^{\infty} \gamma_k f_k(z) \\
&= \left(1 - \sum_{k=n+p}^{\infty} \gamma_k\right) z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \gamma_k f_k(z) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} \left[-f_k(z) + z^p\right]\gamma_k \\
&= z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} \left[-z^p + \frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)} z^k + z^p\right]\gamma_k \\
&= z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} \gamma_k \frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)} z^k
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi

$$
f \in \mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)
$$

olduğunu gösterelim. Bunu için (4.3) eşitsizliğini göstermek yeterlidir.

Bunun içinde yukarıdaki son eşitlik kullanılarak

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=n+p}^{\infty} \left[\frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{(B-A)(p-\sigma)} \gamma_k \right. \\
&\left. \times \frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}\right] \\
&= \sum_{k=n+p}^{\infty} \gamma_k = 1 - \gamma_{k+p-1} \le 1
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece ilk ve son eşitliklerden $f \in \mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ elde etmiş olduk.

Tersine, kabul edelim ki $f \in \mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ olsun. Bu durumda

$$|a_k| \leq \frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}, \quad (k=n+p,n+p+1,...)$$

eşitsizliğinden dolayı

$$\gamma_k = \frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{(B-A)(p-\sigma)}|a_k|, \ (k=n+p,n+p+1,...)$$

ve

$$\gamma_{n+p-1} = 1 - \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \gamma_k f_k(z)$$

eşitliği sağlanır. Böylece

$$f(z) = \sum_{k=n+p-1}^{\infty} \gamma_k f_k(z)$$

olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 4.2.3: $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfının ekstremum noktaları

$$f_k(z) = z^p - \frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)} z^k, \ (k=n+p,n+p+1,...)$$

şekilde fonksiyonlardır.

4.3. $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ Sınıfı İçin Yıldızıllık ve Konvekslik Yarıçapı

$\mathcal{S}$ **sınıfı için yıldızıllık yarıçapı:** $f\in\mathcal{S}$ olsun. $f(U_r)$ kümesi $\alpha-$mertebeden yıldızıl olacak şekilde bütün r sayılarının supremumuna $\mathcal{S}$ sınıfının $\alpha-$mertebeden yıldızıl yarıçapı denir. $\mathcal{S}$ sınıfının $\alpha-$mertebeden yıldızıl yarıçapı $r_{\mathcal{S}^*}(\alpha)$ ile gösterilir.

Kısaca $\alpha-$mertebeden yıldızıl yarıçapı

$$r_{\mathcal{S}^*}(\alpha)=\sup\left\{r>0:\ \forall z\in U_r \text{ için } \operatorname{Re}\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)>\alpha,\ 0\le\alpha<1\right\}$$

şeklinde de yazılabilir.

Eğer yukarıdaki tanımda $\alpha=0$ alınırsa $r_{\mathcal{S}^*}(0)=r_{\mathcal{S}^*}$ yıldızıl yarıçapı elde edilir. $r_{\mathcal{S}^*}$ yıldızıllık yarıçapı üzerine ilk çalışma Grunsky tarafından 1934 yılında yapılmıştır. Grunsky $r_{\mathcal{S}^*}=\dfrac{1-e^{-\pi/2}}{1+e^{-\pi/2}}=\tanh\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0.655794...$ olarak bulmuştur. Daha sonra Stankiewicz 1968 yılında $\alpha-$mertebeden yıldızıllık yarıçapınının $r_{\mathcal{S}^*}(\alpha)=\sin\left(\dfrac{\alpha\pi}{2}\right)$ olduğunu ispatlamıştır (Goodman 1983a, 1983b ve Duren 1983).

$\mathcal{S}$ **sınıfı için konvekslik yarıçapı:** $f\in\mathcal{S}$ olsun. $f(U_r)$ kümesi $\alpha-$mertebeden konveks olacak şekilde bütün r sayılarının supremumuna $\mathcal{S}$ sınıfının $\alpha-$mertebeden konvekslik yarıçapı denir. $\mathcal{S}$ sınıfının $\alpha-$mertebeden konvekslik yarıçapı $r_{\mathcal{K}}(\alpha)$ ile gösterilir.

Kısaca $\alpha-$mertebeden konvekslik yarıçapı

$$r_{\mathcal{K}}(\alpha)=\sup\left\{r>0:\ \forall z\in U_r \text{ için } \operatorname{Re}\left(1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right)>\alpha,\ 0\le\alpha<1\right\}$$

şeklinde de yazılabilir.

Eğer yukarıdaki tanımda $\alpha=0$ alınırsa $r_{\mathcal{K}}(\alpha)=r_{\mathcal{K}}$ konvekslik yarıçapı elde edilir. $r_{\mathcal{K}}$ konvekslik yarıçapı üzerine ilk çalışma Nevanlinna tarafından 1922 yılında yapılmıştır. Nevanlinna $r_{\mathcal{K}}=2-\sqrt{3}=0.267949....$ olarak bulmuştur. Daha sonra Srivastava ve Bajpai 1972 yılında $\alpha-$mertebeden konvekslik yarıçapınının $r_{\mathcal{K}}(\alpha)=\dfrac{2-\sqrt{3+\alpha^2}}{1+\alpha}$ olduğunu ispatlamıştır (Goodman 1983a, 1983b ve Duren 1983).

Biz bu bölümde $f\in\mathcal{ST}^{\delta}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$ olması durumunda $\alpha-$mertebeden yıldızıl ve $\alpha-$mertebeden konvekslik yarıçapını elde edeceğiz.

Teorem 4.3.1: Eğer $f\in\mathcal{ST}^{\delta}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$ ise f fonksiyonu $0\le\alpha<p$ ve $p<k$ olmak üzere

$$|z|\le r_1=inf\left\{\frac{(p-\alpha)\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{(k-\alpha)(B-A)(p-\sigma)}\right\}^{1/(k-p)}$$

diskinde $\alpha-$mertebeden yıldızıldır.

İspat: $f\in\mathcal{ST}^{\delta}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$ olsun. Teoremi ispatlamak için $f\in\mathcal{A}(p,n)$ olmak üzere her $z\in U$ için

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-p\right|<p-\alpha$$

koşulunu sağlayan r_1 sayısını bulmak yeterlidir. Bu düşünceyle hareket edildiğinde

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-p\right|=\left|\frac{pz^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}k|a_k|z^k}{z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_k|z^k}-p\right|=\left|\frac{\sum_{k=n+p}^{\infty}(p-k)|a_k|z^k}{z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_k|z^k}\right|$$

$$\leq\frac{\sum_{k=n+p}^{\infty}(k-p)|a_k||z|^{k-p}}{1-\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_k||z|^{k-p}}<p-\alpha$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{(k-\alpha)|a_k|}{p-\alpha}|z|^{k-p}\leq 1$$

elde edilir. Bu durum her k için

$$\frac{(k-\alpha)}{p-\alpha}|z|^{k-p}\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_k|\leq 1$$

olmasını gerektirir. Son olarak Teorem 4.1.1 i kullanarak

$$|z|^{k-p}\leq\frac{(p-\alpha)\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{(k-\alpha)(B-A)(p-\sigma)}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

Teorem 4.3.2: Eğer $f\in\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ ise f fonksiyonu $0\leq\alpha<p$ ve $p<k$ olmak üzere

$$|z| \le r_2 = inf\left\{\frac{p(p-\alpha)\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{k(k-\alpha)(B-A)(p-\sigma)}\right\}^{1/(k-p)}$$

diskinde $\alpha-$mertebeden konvekstir.

İspat: $f \in \mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ olsun. Teoremi ispatlamak için Teorem 4.3.1 in ispatındaki yolu izleyeceğiz. Böylece $f \in \mathcal{A}(p,n)$ olmak üzere her $z \in U$ için

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1-p\right| < p-\alpha$$

koşulunu sağlayan r_2 sayısını bulmak yeterlidir. Bu düşünceyle hareket edildiğinde

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1-p\right| = \left|\frac{p(p-1)z^{p-1}-\sum_{k=n+p}^{\infty}k(k-1)|a_k|z^{k-1}}{pz^{p-1}-\sum_{k=n+p}^{\infty}k|a_k|z^k}+1-p\right|$$

$$=\frac{\sum_{k=n+p}^{\infty}k(p-k)|a_k||z|^{k-p}}{p-\sum_{k=n+p}^{\infty}k|a_k||z|^{k-p}} < p-\alpha$$

bulunur. Buradan

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{k(k-\alpha)|a_k|}{p\left(p-\alpha\right)}|z|^{k-p} \le 1$$

elde edilir. Bu durum her k için

$$\frac{k(k-\alpha)}{p(p-\alpha)}|z|^{k-p}\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_k|\leq 1$$

olmasını gerektirir. Son olarak Teorem 4.1.1 i kullanarak

$$|z|^{k-p}\leq\frac{p(p-\alpha)\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{k(k-\alpha)(B-A)(p-\sigma)}$$

bulunur. Böylece teorem ispatlanmış olur.

4.4. $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ Sınıfı İçin Komşuluk Problemi

$\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonlarının komşuluklarıyla ilgili ilk çalışma 1957 de Goodman tarafından yapılmıştır. Goodman tarafından yapılan bu çalışmada yer alan aşağıda verilen teorem komşuluk kavramının geliştirilmesi için temel oluşturmuştur.

Teorem 4.4.1: $|z|<1$ için,

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty}a_nz^n$$

olsun. Bu durumda,

$$\sum_{n=2}^{\infty}n|a_n|\leq 1$$

ise f fonksiyonu U birim diskinde ünivalenttir ve bu bölgeyi orijine göre yıldızıl bir bölgeye resmeder.

$$\sum_{n=2}^{\infty}n^2|a_n|\leq 1$$

ise f fonksiyonu U birim diskinde ünivalenttir ve bu bölgeyi konveks bir bölgeye resmeder (Goodman 1957).

1981 yılında Ruscheweyh, Goodman tarafından verilen komşuluk kavramını genelleştirerek $\mathcal{A}$ sınıfına ait f fonksiyonlarının τ-komşuluğunu aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 4.4.1: $f \in \mathcal{A}$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_{\tau}(f) = \left\{ g \in \mathcal{A} : g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} n|a_n - b_n| \leq \tau \right\}$$

kümesine f fonksiyonunun τ-komşuluğu denir (Ruscheweyh 1981).

Buna göre, $e(z) = z$ özdeşlik fonksiyonu için,

$$\mathcal{N}_{\tau}(e) = \left\{ g \in \mathcal{A} : g(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} n|b_n| \leq \tau \right\}$$

olur. Ayrıca $\mathcal{N}_1(e) \subset \mathcal{S}^*$ dır.

Pozitif reel kısma sahip analitik fonksiyonların komşuluğu 1990 yılında Walker tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 4.4.2: $p \in \mathcal{P}$ ve $\delta \geq 0$ için p nin δ-komşuluğu $\mathcal{N}_{\delta}(p)$ ile gösterilir ve bu küme

$$\mathcal{N}_{\tau}(p) = \left\{ q \in \mathcal{P} : q(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} q_n z^n, \sum_{n=2}^{\infty} |p_n - q_n| \leq \tau \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Walker 1990).

1996 yılında Altıntaş ve Owa tarafından negatif katsayılı $f \in \mathcal{A}_n$ fonksiyonlarının (n, τ)-komşuluğu kavramı verilmiştir.

Tanım 4.4.3: $f \in \mathcal{T}_n$ ve $\delta \geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_{n,\tau}(f) = \left\{ g \in \mathcal{A}_n : g(z) = z - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k z^k \ , \sum_{k=n+1}^{\infty} k|a_k - b_k| \leq \tau \right\}$$

kümesine f fonksiyonunun $(n,\ \tau\ )$-komşuluğu denir (Altıntaş and Owa 1996).

2004 te Altıntaş *et al.* Tanım 4.4.3 te verilen $(n,\ \tau\ )$-komşuluk kavramını negatif katsayılı analitik multivalent fonksiyonlar sınıfına genişlettiler.

Tanım 4.4.4: $f \in \mathcal{T}(p,n)$ $(p \in \mathbb{N})$ ve $\tau \geq 0$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_{n,\tau}(f;p) = \left\{ g \in \mathcal{T}(p,n) : g(z) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} b_k z^k , \sum_{k=n+p}^{\infty} k|a_k - b_k| \leq \tau \right\}$$

kümesine f fonksiyonunun $(n,\ \tau\ )$-komşuluğu denir.

$h(z) = z^p$ olmak üzere,

$$\mathcal{N}_{n,\tau}(h;p) = \left\{ g \in \mathcal{T}(p,n) : g(z) = z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} b_k z^k , \sum_{k=n+p}^{\infty} k|b_k| \leq \tau \right\}$$

olur (Altıntaş *et al.* 2004).

Ayrıca son yıllarda $\mathcal{A}$ sınıfına ait fonksiyonların belli altsınıfları için komşuluk problemi Owa *et. al* (1993), Orhan and Kadıoğlu (2004), Orhan and Kamali (2005), Orhan (2007), Cataş (2009) ve Deniz and Orhan (2010a) çalışmışken, $\mathcal{A}(n,p)$ sınıfına ait fonksiyonların belli altsınıfları için de Srivastava and Patel (2005), Altıntaş (2007), Srivastava and Orhan (2007), Orhan (2009), Deniz and Orhan (2011) ve Sağsöz and Kamali (2011) tarafından çalışılmıştır.

Şimdi bu bölümde biz önce $\mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfı için komşuluk kavramını tanımlayıp daha sonra bu sınıfın komşuluğuna ait bir içerme bağıntısı vereceğiz. Daha sonra aynı işlemi $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıf için yapacağız.

Tanım 4.4.5: $\tau > 0$ ve genel terimi

$$s_k = \frac{\left[\left(k-p\right)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{\left(B-A\right)\left(p-\sigma\right)} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

olan $S = \{s_k\}_{k=1}^{\infty}$, negatif olmayan bir dizi olsun. (3.1) şeklinde tanımlanan $f(z) \in \mathcal{A}(n,p)$ fonsiyonunun $(n,\tau)-$komşuluğu

$$\mathcal{N}_{n,p}^{\tau}(f) := \left\{ g : g(z) = z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} a_k z^k \in \mathcal{A}(n,p) \text{ and } \sum_{k=n+p}^{\infty} s_k \left|b_k - a_k\right| \le \tau \ (\tau > 0) \right\}.$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.4.5 de $s_k = k$ alınırsa Ruscheweyh' in $\mathcal{N}_\tau -$komşuluğu elde edilir.

Theorem 4.4.2: $f(z) \in \mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ fonksiyonu (3.1) şeklinde olsun. Eğer f fonksiyonu

$$\left(f(z) + \varepsilon z^p\right)\left(1+\varepsilon\right)^{-1} \in \mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p) \qquad \left(\varepsilon \in \mathbb{C}; \left|\varepsilon\right| < \tau; \tau > 0\right),$$

içerme bağıntısını sağlarsa bu durumda

$$\mathcal{N}_{n,p}^{\tau}(f) \subset \mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$$

dır.

İspat: $f(z) \in \mathcal{S}^{\delta}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{\dfrac{z\left(D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)\right)'}{D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)} - p}{B\dfrac{z\left(D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)\right)'}{D_p^{\delta}(\lambda,\mu,l)f(z)} - \left[pB + (A-B)(p-\sigma)\right]} \neq \varpi \quad \left(z \in U;\, \varpi \in \mathbb{C}, |\varpi| = 1\right)$$

olduğunu göstermek zor değildir. Yani bu ifade

$$\begin{aligned} h(z) &= z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} c_k z^k \\ &= z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{\left[(k-1) - \left(kB - (B-A)(p-\sigma)\right)\varpi\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{\varpi\left(B-A\right)\left(p-\sigma\right)} z^k \end{aligned} \tag{4.5}$$

olmak üzere

$$(f * h)(z)/z^p \neq 0 \quad (z \in U), \tag{4.6}$$

ifadesine denktir. (4.5) ifadesinden

$$\begin{aligned} |c_k| &= \left|\frac{\left[(k-1) - \left(kB - (B-A)(p-\sigma)\right)\varpi\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{\varpi\left(B-A\right)\left(p-\sigma\right)}\right| \\ &\leq \frac{\left[(k-1) - \left(kB - (B-A)(p-\sigma)\right)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{\left(B-A\right)\left(p-\sigma\right)} \qquad (k \in \mathbb{N}). \end{aligned} \tag{4.7}$$

olduğu kolayca görülür. Ayrıca, teoremin hipotezinden, (4.6) ifadesi

$$\frac{\left((f(z) + \varepsilon z^p)(1+\varepsilon)^{-1}\right) * h(z)}{z^p} \neq 0 \quad (z \in U)$$

ve

$$\frac{f(z)*h(z)}{z^p} \neq \varepsilon \quad (z \in U),$$

denk olarak

$$\frac{f(z)*h(z)}{z^p} \geq \tau \quad (z \in U\,;\, \tau > 0) \tag{4.8}$$

yazılır. Şimdi, eğer

$$g(z) := z^p + \sum_{k=n+p}^{\infty} b_k z^k \in \mathcal{N}_{n,p}^{\tau}(f),$$

alınırsa bu durumda

$$\left|\frac{\big(f(z)-g(z)\big)*h(z)}{z^p}\right| = \left|\sum_{k=n+p}^{\infty}(a_k-b_k)c_k z^{k-p}\right|$$
$$\leq \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{\big[(k-1)-\big(kB-(B-A)(p-\sigma)\big)\varpi\big]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{\varpi\big(B-A\big)\big(p-\sigma\big)} |a_k-b_k||z|^{k-p} < \tau$$

elde edilir. Böylece, $|\varpi| = 1$ olacak şekilde her kompleks ϖ sayısı için $(g*h)(z)/z^p \neq 0$ yazılır. Bu da $g \in \mathcal{S}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ demektir. Bununla teorem ispatlanmış olur.

Şimdi bir $f(z) \in \mathcal{T}(n,p)$ fonksiyonunun $(n,\tau)-$komşuluğunu tanımlayalım.

Tanım 4.4.6: $\tau > 0$ için, $f(z) \in \mathcal{T}(n,p)$ fonksiyonunun $(n,\tau)-$komşuluğunu

$$\mathcal{N}^{\tau}_{n,p}(f)=\left\{ g:g(z)=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_k|z^k \in \mathcal{T}(n,p) \text{ and} \right.$$
$$\left. \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{\left[\left(k-p\right)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{\left(B-A\right)\left(p-\sigma\right)}\left\||b_k|-|a_k|\right\|\le\tau \ \ (\tau>0)\right\} \tag{4.9}$$

şeklinde tanımlanır.

Theorem 4.4.3: $f(z)\in\mathcal{ST}^{\delta+1}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$ fonksiyonu (3.3) şeklinde olsun. Bu durumda

$$\mathcal{N}^{\tau}_{n,p}(f)\subset\mathcal{ST}^{\delta}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$$

dır. içerme bağıntısını sağlarsa bu durumda

$$\mathcal{N}^{\tau}_{n,p}(f)\subset\mathcal{S}^{\delta}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$$

dır. Burada

$$\tau=\frac{n[\lambda\mu(n+p)+\lambda-\mu]}{n[\lambda\mu(n+p)+\lambda-\mu]+p+l}$$

dır.

İspat: $f(z)\in\mathcal{ST}^{\delta+1}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$ fonksiyonu (3.3) formunda olsun. Bu durumda Teorem 4.1.1 den

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{\left[\left(k-p\right)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{\left(B-A\right)\left(p-\sigma\right)}|a_k|$$
$$\le\frac{p+l}{n[\lambda\mu(n+p)+\lambda-\mu]+p+l} \tag{4.10}$$

yazılır. Benzer şekilde

$$g(z)=z^p-\sum_{k=n+p}^{\infty}|b_k|z^k \in \mathcal{N}^{\tau}_{n,p}(f) \quad \left(\tau=\frac{n[\lambda\mu(n+p)+\lambda-\mu]}{n[\lambda\mu(n+p)+\lambda-\mu]+p+l}\right) \tag{4.11}$$

alalım. Böylece (4.9) dan

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{(B-A)(p-\sigma)}\left\||b_k|-|a_k|\right\| \le \tau \ \ (\tau>0) \tag{4.12}$$

bulunur. (4.11) ve (4.12) kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{(B-A)(p-\sigma)}|b_k| \\
&\le \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{(B-A)(p-\sigma)}|a_k| \\
&+\sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{(B-A)(p-\sigma)}\left\||b_k|-|a_k|\right\| \\
&\le \frac{p+l}{n[\lambda\mu(n+p)+\lambda-\mu]+p+l}+\tau=1
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece tekrar Teorem 4.1.1 göz önüne alındığında $g(z)\in \mathcal{ST}^{\delta+1}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$ bulunur.

Teorem 4.4.3 de kesinliği göstermek için, $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonlarını sırasıyla $\tau^*>\tau$ olmak üzere

$$f(z)=z^p-\left[\frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}\right]z^{n+p}\in \mathcal{ST}^{\delta+1}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$$

ve

$$g(z)=z^p-\left[\begin{array}{l}\dfrac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta+1,\lambda,\mu,l)}\\+\dfrac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}\tau^*\end{array}\right]z^{n+p}$$

alalım. Açık olarak, $g(z)$ fonksiyonu $\mathcal{N}_{n,p}^{\tau^*}(f)$ kümesine aittir. Diğer taraftan, Theorem 4.1.1 den $g(z)\notin\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ bulunur. Böylece teoremin ispatı tamamdır.

4.5. $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ Sınıfına Ait Fonksiyonların Kısmi Toplamları

Silverman 1997 de, $f(z)=z+\sum_{k=2}^{\infty}a_kz^k$ formunda aşağıdaki koşullardan birini karşılan f fonksiyonunu dikkate aldı,

$$\sum_{k=2}^{\infty}(k-\alpha)|a_k|\leq(1-\alpha)\ yada\ \sum_{k=2}^{\infty}k(k-\alpha)|a_k|\leq(1-\alpha)$$

burada $0\leq\alpha<1$ dir. Bu katsayı koşulu f fonksiyonunun α mertebeden yıldızıl yada α mertebeden konveks olması için yeterlidir. Eğer f fonksiyonu yukarıdaki eşitsizliklerin her ikisini sağlıyorsa, $f_n(z)=z+\sum_{k=2}^{n}a_kz^k$ kısmi toplamları da aynı eşitsizlikleri sağlar. Silverman bu çalışmasında, yukarıdaki eşitsizliklerden birini yada ikisini sağlayan f fonksiyonları için Re$\{f(z)/f_n(z)\}$, Re$\{f_n(z)/f(z)\}$, Re$\{f'(z)/f_n'(z)\}$ ve Re$\{f_n'(z)/f'(z)\}$ değerleri için kesin alt sınırlar elde etti. Son yıllarda ise $p-$valent fonksiyonların belli altsınıflarının kısmi toplamları üzerine Liu (2007) ve Deniz and Orhan (2010a, 2011) önemli çalışmalar yapmıştır.

(3.3) şeklinde verilmiş $f\in\mathcal{A}(n,p)$ fonksiyonun kısmi toplamı

$$\kappa_m(z)=\begin{cases} z^p, & m=1,2,...,n+p-1; \\ z^p-\sum_{k=n+p}^{m}|a_k|z^k, & m=n+p,n+p+1,.... \end{cases} \qquad (k\geq n+p;\, n,p\in\mathbb{N}) \tag{4.13}$$

şeklinde tanımlanır. Bu bölümde $f\in\mathcal{A}(n,p)$ fonksiyonu için $\mathrm{Re}\{f(z)/\kappa_m(z)\}$ ve $\mathrm{Re}\{\kappa_m(z)/f(z)\}$ oranları için kesin alt sınırlar vereceğiz.

Teorem 4.5.1: $f\in\mathcal{A}(n,p)$ ve $\kappa_m(z)$ sırasıyla (3.3) ve (4.13) şeklinde verilsin. Ayrıca farzedelim ki

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}\lambda_k|a_k|\leq 1 \quad \left(\lambda_k=\frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^k(\delta,\lambda,\mu,l)}{(B-A)(p-\sigma)}\right) \tag{4.14}$$

olsun. Bu durumda $m\geq k+p$ için

$$\mathrm{Re}\left(\frac{f(z)}{\kappa_m(z)}\right)>1-\frac{1}{\lambda_{m+1}} \tag{4.15}$$

ve

$$\mathrm{Re}\left(\frac{\kappa_m(z)}{f(z)}\right)>\frac{\lambda_{m+1}}{1+\lambda_{m+1}} \tag{4.16}$$

dır. Sonuçlar

$$f(z)=z^p-\frac{1}{\lambda_{m+1}}z^{m+1} \tag{4.17}$$

fonksiyonu için kesindir.

İspat: Teoremin hipotezi altında,

$$\lambda_{k+1} > \lambda_k > 1 \qquad (k \geq n+p).$$

yazılır. Böylece (4.14) hipotezini kullanarak

$$\sum_{k=n+p}^{m} |a_k| + \lambda_{m+1} \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| \leq \sum_{k=n+p}^{\infty} \lambda_k |a_k| \leq 1, \tag{4.18}$$

olur. Şimdi $\omega(z)$ fonksiyonunu

$$\begin{aligned} \omega(z) &= \lambda_{m+1}\left[\frac{f(z)}{\kappa_m(z)} - \left(1 - \frac{1}{\lambda_{m+1}}\right)\right] \\ &= 1 - \frac{\lambda_{m+1} \sum_{k=m+1}^{\infty} |a_k| z^{k-p}}{1 - \sum_{k=n+p}^{m} |a_k| z^{k-p}} \end{aligned} \tag{4.19}$$

şeklinde tanımlayalım. (4.15) eşitsizliğini göstermek için $\operatorname{Re}(\omega(z)) > 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. Diğer taraftan

$$\operatorname{Re}(\omega(z)) > 0 \Leftrightarrow \left|\frac{\omega(z)-1}{\omega(z)+1}\right| < 1$$

olduğundan (4.18) ve (4.19) ifadelerinden

$$\left|\frac{\omega(z)-1}{\omega(z)+1}\right| = \left|\frac{-\lambda_{m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k|\,z^{k-p}}{2-2\sum_{k=n+p}^{m}|a_k|\,z^{k-p}-\lambda_{m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k|\,z^{k-p}}\right|$$
$$\leq \frac{\lambda_{m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k||z|^{k-p}}{2-2\sum_{k=n+p}^{m}|a_k||z|^{k-p}-\lambda_{m+1}\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k||z|^{k-p}} \leq 1 \tag{4.20}$$

bulunur. Bu da $\mathrm{Re}\big(\omega(z)\big) > 0$ olması demektir. Böylece (4.15) ispatlanmış olur.

(4.17) ile verilen f fonsiyonu için sonucun kesin olduğunu göstermek için $z \to 1^{-}$ alındığında

$$\frac{f(z)}{\kappa_m(z)} = 1 - \frac{1}{\lambda_{m+1}} z^{m-p+1} \to 1 - \frac{1}{\lambda_{m+1}},$$

olur. Buda (4.15) deki sınırın kesin olduğunu gösterir.

Benzer şekilde, eğer

$$\psi(z) = (1+\lambda_{m+1})\left[\frac{\kappa_m(z)}{f(z)} - \frac{\lambda_{m+1}}{1+\lambda_{m+1}}\right]$$
$$= 1 + \frac{(1+\lambda_{m+1})\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k|\,z^{k-p}}{1-\sum_{k=n+p}^{m}|a_k|\,z^{k-p}} \tag{4.21}$$

alınırsa ve tekrar (4.18) kullanılırsa

$$\left|\frac{\psi(z)-1}{\psi(z)+1}\right| = \left|\frac{(1+\lambda_{m+1})\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k|z^{k-p}}{2-2\sum_{k=n+p}^{m}|a_k|z^{k-p}+(\lambda_{m+1}-1)\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k|z^{k-p}}\right|$$

$$\leq \frac{(1+\lambda_{m+1})\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k||z|^{k-p}}{2-2\sum_{k=n+p}^{m}|a_k||z|^{k-p}-(\lambda_{m+1}-1)\sum_{k=m+1}^{\infty}|a_k||z|^{k-p}} \leq 1 \tag{4.22}$$

elde edilir. (4.17) ile verilen f fonsiyonu için sonuç kesindir. Böylece (4.16) ispatlanmış olur.

4.6. $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ Sınıfı İçin Kesirsel Türev ve İntegralin Uygulamaları

Bu bölümde $\mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ sınıfına ait fonksiyonların $\mathcal{I}_{\vartheta,p}f$ operatörü, $\mathfrak{D}_z^{-\nu}$ kesirsel integrali ile $\mathfrak{D}_z^{\nu}$ kesrisel türevi altındaki değerinin alt ve üst sınırlarını belirleyeceğiz. Ana teoremlere geçmeden önce ispatlarda kullanacağımız bir lemma verelim.

Lemma 4.6.1: $f(z)\in\mathcal{T}(n,p)$ olsun. Bu durumda

$$\mathfrak{D}_z^{\nu}\{(\mathcal{I}_{\vartheta,p}f)(z)\} = \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\nu)}z^{p-\nu} - \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{(\vartheta+p)\Gamma(k+1)}{(\vartheta+k)\Gamma(k+1-\nu)}a_k z^{k-\nu} \tag{4.23}$$

$$(\nu\in\mathbb{R};\ \vartheta>-p;\ p,n\in\mathbb{N})$$

ve

$$\mathcal{I}_{\vartheta,p}\{(\mathfrak{D}_z^{\nu} f)(z)\} = \frac{(\vartheta+p)\Gamma(p+1)}{(\vartheta+p-\nu)\Gamma(p+1-\nu)} z^{p-\nu} - \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{(\vartheta+p)\Gamma(k+1)}{(\vartheta+k-\nu)\Gamma(k+1-\nu)} a_k z^{k-\nu} \tag{4.24}$$

$$(\nu \in \mathbb{R};\ \vartheta > -p;\ p, n \in \mathbb{N})$$

olur. Burada (4.23) ve (4.24) daki paydaların sıfırdan farklı olduğu kabul edilecektir (Chen *et. al* 1997).

Teorem 4.6.1: $f(z) \in \mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A, B; \sigma, p)$ olsun. Bu durumda

$$\left|\mathfrak{D}_z^{-\nu}\{(\mathcal{I}_{\vartheta,p} f)(z)\}\right| \geq \left\{ \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+\nu)} - \frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p+1)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1+\nu)\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} |z|^n \right\} |z|^{p+\nu} \tag{4.25}$$

$$(z \in U;\ \nu > 0;\ \vartheta > -p;\ p, n \in \mathbb{N})$$

ve

$$\left|\mathfrak{D}_z^{-\nu}\{(\mathcal{I}_{\vartheta,p} f)(z)\}\right| \leq \left\{ \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+\nu)} + \frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p+1)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1+\nu)\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} |z|^n \right\} |z|^{p+\nu} \tag{4.26}$$

$$(z \in U;\ \nu > 0;\ \vartheta > -p;\ p, n \in \mathbb{N})$$

dır. Ayrıca (4.25) ve (4.26) deki sınırlar kesindir.

İspat: Teorem 4.1.1 i kullanarak,

$$\frac{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}{(B-A)(p-\sigma)}\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_k| \leq \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{\left[(k-p)(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{k}(\delta,\lambda,\mu,l)}{(B-A)(p-\sigma)}|a_k| \leq 1 \tag{4.27}$$

ve buradan

$$\sum_{k=n+p}^{\infty}|a_k| \leq \frac{(B-A)(p-\sigma)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} \tag{4.28}$$

elde edilir. Şimdi $\mathcal{F}(z)$ fonksiyonunu

$$\mathcal{F}(z) := \frac{\Gamma(p+1-\nu)}{\Gamma(p+1)} z^{-\nu}\mathfrak{D}_z^{\nu}\{(\mathcal{I}_{\vartheta,p}f)(z)\}$$

$$= z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty}\frac{(\vartheta+p)\Gamma(k+1)\Gamma(p+1+\nu)}{(\vartheta+k)\Gamma(k+1+\nu)\Gamma(p+1)}|a_k| z^k$$

$$= z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty}\Theta(k)|a_k| z^k$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada

$$\Theta(k) := \frac{(\vartheta+p)\Gamma(k+1)\Gamma(p+1+\nu)}{(\vartheta+k)\Gamma(k+1+\nu)\Gamma(p+1)} \quad (k \geq p+n;\ p,n \in \mathbb{N};\ \nu > 0) \tag{4.29}$$

dır. Burada $\Theta(k)$ fonksiyonu $\nu > 0$ olmak üzere k ya göre azalan olduğundan

$$0<\Theta(k)\leq\Theta(n+p)=\frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p+1)\Gamma(p+1+\nu)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1+\nu)\Gamma(p+1)} \tag{4.30}$$

$$(\nu>0;\ \vartheta>-p;\ p,n\in\mathbb{N})$$

yazılır. Böylece (4.28) ve (4.30) den her $z\in U$ için

$$\left|\mathcal{F}(z)\right|\geq\left|z\right|^{p}-\Theta(n+p)\left|z\right|^{n+p}\sum_{k=n+p}^{\infty}\left|a_k\right|$$
$$\geq\left|z\right|^{p}-\frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p+1)\Gamma(p+1+\nu)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1+\nu)\Gamma(p+1)\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}\left|z\right|^{n+p}$$

ve

$$\left|\mathcal{F}(z)\right|\leq\left|z\right|^{p}+\Theta(n+p)\left|z\right|^{n+p}\sum_{k=n+p}^{\infty}\left|a_k\right|$$
$$\leq\left|z\right|^{p}+\frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p+1)\Gamma(p+1+\nu)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1+\nu)\Gamma(p+1)\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}\left|z\right|^{n+p}$$

elde edilir. Böylece teoremdeki (4.25) ve (4.26) eşitsizlikleri ispatlanmış olur. Diğer taraftan (4.25) ve (4.26) deki eşitsizliklerin eşitlik hali

$$\mathfrak{D}_z^{-\nu}\{(\mathcal{I}_{\vartheta,p}f)(z)\}=\left\{\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1+\nu)}\right.$$
$$\left.-\frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p+1)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1+\nu)\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}z^{n}\right\}z^{p+\nu}$$

veya denk olarak

$$(\mathcal{I}_{\vartheta,p} f)(z) = z^p - \frac{(\vartheta+p)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} z^{n+p}$$

olacak şekildeki f fonksiyonları için sağlanır.

Teorem 4.6.2: $f(z) \in \mathcal{ST}_{\lambda,\mu,l}^{\delta}(A,B;\sigma,p)$ olsun. Bu durumda

$$\left|\mathfrak{D}_z^{\nu}\{(\mathcal{I}_{\vartheta,p} f)(z)\}\right| \geq \left\{ \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\nu)} z^{p-\nu} - \frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p+1)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1-\nu)\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} |z|^n \right\} |z|^{p-\nu} \tag{4.31}$$

$$(z \in U;\ \nu > 0;\ \vartheta > -p;\ p,n \in \mathbb{N})$$

ve

$$\left|\mathfrak{D}_z^{\nu}\{(\mathcal{I}_{\vartheta,p} f)(z)\}\right| \leq \left\{ \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\nu)} z^{p-\nu} + \frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p+1)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1-\nu)\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} |z|^n \right\} |z|^{p-\nu} \tag{4.32}$$

$$(z \in U;\ \nu > 0;\ \vartheta > -p;\ p,n \in \mathbb{N})$$

olur. Ayrıca (4.31) ve (4.32) deki sınırlar kesindir.

İspat: Teorem 4.1.1 i kullanarak,

$$\sum_{k=n+p}^{\infty} k|a_k| \leq \frac{(n+p)(B-A)(p-\sigma)}{\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} \tag{4.33}$$

yazılır. Şimdi U da tanımlı $\mathcal{Q}(z)$ fonksiyonunu

$$\mathcal{Q}(z) := \frac{\Gamma(p+1-\nu)}{\Gamma(p+1)} z^{\nu} \mathcal{D}_z^{\nu}\{(\mathcal{I}_{\vartheta,p} f)(z)\}$$

$$= z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} \frac{(\vartheta+p)\Gamma(k)\Gamma(p+1-\nu)}{(\vartheta+k)\Gamma(k+1-\nu)\Gamma(p+1)} k\left|a_k\right| z^k$$

$$= z^p - \sum_{k=n+p}^{\infty} \wp(k) k\left|a_k\right| z^k$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Burada

$$\wp(k) := \frac{(\vartheta+p)\Gamma(k)\Gamma(p+1-\nu)}{(\vartheta+k)\Gamma(k+1-\nu)\Gamma(p+1)} \qquad (k \geq p+n;\ p,n \in \mathbb{N};\ 0 \leq \nu < 1). \tag{4.34}$$

dır. $0 \leq \nu < 1,$ olmak üzere $\wp(k)$ fonksiyonu k ya göre azalan olduğundan

$$0 < \wp(k) \leq \wp(n+p) = \frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p)\Gamma(p+1-\nu)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1-\nu)\Gamma(p+1)} \tag{4.35}$$

$$(0 \leq \nu < 1;\ \vartheta > -p;\ p,n \in \mathbb{N})$$

olur. Böylece her $z \in U$ için (4.33) ve (4.35) den

$$\left|\mathcal{Q}(z)\right| \geq |z|^p - \wp(n+p)|z|^{n+p} \sum_{k=n+p}^{\infty} k\left|a_k\right|$$

$$\geq |z|^p - \frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p+1)\Gamma(p+1-\nu)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1-\nu)\Gamma(p+1)\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}|z|^{n+p}$$

ve

$$|\mathcal{Q}(z)| \geq |z|^p + \wp(n+p)|z|^{n+p} \sum_{k=n+p}^{\infty} k|a_k|$$

$$\geq |z|^p + \frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p+1)\Gamma(p+1-\nu)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1-\nu)\Gamma(p+1)\left[n(1+B)-(B-A)(p-\sigma)\right]\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)}|z|^{n+p}$$

elde edilir. Böylece teoremin (4.31) ve (4.32) eşitsizlikleri ispatlanmış olur. (4.31) ve (4.32) deki eşitlikler

$$\mathcal{D}_z^{\nu}\{(\mathcal{I}_{\vartheta,p} f)(z)\} = \left\{ \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+1-\nu)} - \frac{(\vartheta+p)\Gamma(n+p+1)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)\Gamma(n+p+1-\nu)(1+B)\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} z^n \right\} z^{p-\nu}$$

veya denk olarak

$$(\mathcal{I}_{\vartheta,p} f)(z) = z^p - \frac{(\vartheta+p)(B-A)(p-\sigma)}{(\vartheta+n+p)(n+p)(1+B)\phi_p^{n+p}(\delta,\lambda,\mu,l)} z^{n+p}.$$

şartını sağlayan $f(z)$ fonksiyonları için sağlanır. Böylece Teorem 4.6.2 ispatlanmış olunur.

5. TARTIŞMA ve SONUÇ

Bu tez çalışmasında p-valent analitik fonksiyonların $\mathcal{S}^{\delta}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$ ve $\mathcal{ST}^{\delta}_{\lambda,\mu,l}(A,B;\sigma,p)$ alt sınıfları tanımlanarak bu sınıflarına ait fonksiyonlar için katsayı eşitsizliği, distorsion ve büyüme sınırları, yıldızıllık ve konvekslik yarıçapı, komşuluk problemi, kısmi toplamları ve kesirsel türev-integralin uygulamaları teoremler ve sonuçlar şeklinde verilmiş ve ispatlanmıştır. Çalışmada bulunan sonuçlar özgün niteliğindedir.

KAYNAKLAR

[1] Acu, M. and Owa S., 2006. “Note on a class of starlike functions”, RIMS, Kyoto,

[2] Al-Oboudi, F.M. 2004. “On univalent functions defined by a generalized Salagean operator”, Int. J. Math. Math. Sci. 27 (1), 429-1436.

[3] Aouf, M.K., 1989. “On certain subclass of analytic $p-$valent functions II”, Math. Japon. 34, 683–691.

[4] Aouf, M.K., 1988a. “A generalization of multivalent functions with negative coefficients II”, Bull. Korean Math. Soc. 25 (1988) 221–232.

[5] Aouf, M.K., 1988b. “Certain classes of $p-$valent functions with negative coefficients. II”, Indian J. Pure Appl. Math. 19, 761–767.

[6] Aouf, M.K. and Darwish, H.E., 1994. “Basic properties and characterizations of a certain class of analytic functions with negative coefficients II”, Utilitas Math. 46, 167–177.

[7] Aouf, M., Hossen, H. and Srivastava, H., 2000. “Some families of multivalent functions”. Computers & Mathematics with Applications, 39 (7-8), 39-48

[8] Ali, R.M., Ravichandran, V. and Seenivasagan, N., 2007. "Coefficient bounds for p valent functions", Applied Mathematics and Computation, 187 (1), 35-46.

[9] Altıntaş, O., 1991. "On a subclass of certain starlike functions with negative coefficients", Math. Japon., 36 (3), 489-495.

[10] Altıntaş, O., 2007. "Neighborhoods of certain p-valently analytic functions with negative coefficients", Applied Mathematics and Computation, 187 (1), 47-53.

[11] Altıntaş, O. and Owa, S., 1996. "Neighborhoods of certain analytic functions with negative coefficients", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 19 (4), 797-800.

[12] Altıntaş, O., Özkan, Ö. and Srivastava, H., 2004. "Neighborhoods of a certain family of multivalent functions with negative coefficients", Computers & Mathematics with Applications, 47 (10-11), 1667-1672.

[13] Brown, J.E., 1985. "Some sharp neighborhoods of univalent functions", American Mathematical Society, 287 (2).

[14] Cartwright, M., 1935. "Some inequalities in the theory of functions", Mathematische Annalen, 111 (1), 98-118.

[15] Cataş, A., 2009. "Neighborhoods of a certain class of analytic functions with negative coefficients", Banach J. Math. Anal. 3(1), 111-121.

[16] Cataş, A., Oros, G. I. and Oros, G., 2008. "Differential subordinations associated with multiplier transformations", Abstr. Appl. Anal. Art. ID 845724, 11 pp.

[17] Chen, M. P., Irmak, H. and Srivastava, H.M., 1997. "Some families of multivalently analytic functions with negative coefficients", J. Math. Anal. Appl. 214, 674–690.

[18] Cho, N. E. and Srivastava, H. M., 2003. "Argument estimates of certain analytic functions defined by a class of multiplier transformations", Math. Comput. Modelling, 37 (1-2), 39-49.

[19] Cho, N. E. and Kim, T. H., 2003. "Multiplier transformations and strongly close-to-convex functions", Bull. Korean Math. Soc. 40(3), 399-410.

[20] Conway, J.B., 1973. "Functions of one complex variable" AMS Subject Classification, Springer-Verlag, 313 p, New York.

[21] Duren, P.L., 1983. "Univalent functions", 259. Springer, 378 p, New York, USA.

[22] Deniz, E. and Orhan, H., 2010a. "Some properties of certain subclasses of analytic functions with negative coefficients by using generalized Ruscheweyh derivative operator", Czechoslovak Math. J. 60(3), 699-713.

[23] Deniz, E. and Orhan, H., 2010b. " The Fekete-Szegö problem for a generalized subclass of analytic functions", Kyungpook Math. J. 50, 37-47.

[24] Deniz, E. and Orhan, H., 2011. "Certain subclasses of multivalent defined by new multiplier transformations", Arab. J. Sci. Eng. 36, 1091-1112.

[25] Fekete, M. and Szegö, G., 1933. "Eine bemerkung über ungerade schlichte funktionen". Journal of the London Mathematical Society, 1 (2), 85-89.

[26] Garabedian, P.R. and Royden, H.L., 1954. "The One-quarter theorem for mean univalent functions", The Annals of Mathematics, 59 (2), 316-324.

[27] Goodman, A.W., 1948. "On some determinants related to p-valent functions" Trans. Amer. Math. Soc., 63, 175-192.

[28] Goodman, A.W., 1957. "Univalent functions and nonanalytic curves", Proc. Amer. Math. Soc., 8, 598–601.

[29] Goodman, A.W., 1983a. "Univalent Functions", Mariner Publ. Co., Tampa, Fl, vol.I, 246 p, Florida, USA.

[30] Goodman, A.W., 1983b. "Univalent Functions", Mariner Publ. Co., Tampa, Fl, vol.II, 311 p, Florida, USA.

[31] Graham, I.R. and Kohr, G., 2003. "Geometric function theory in one and higher dimensions", 255. CRC, 530 p, New York, USA.

[32] Hayman, W.K., 1994. "Multivalent functions", Cambridge Univ Pr, 263 p, New York, USA.

[33] Hummel, J.A., 1960. "Extremal problems in the class of starlike functions", Proc. Amer. Math. Soc, 11, 741-749.

[34] Keogh, F. and Merkes, E., 1969. "A coefficient inequality for certain classes of analytic functions", Proc. Amer. Math. Soc., 20, 8–12.

[35] Kwon, O. S., 2008. "Subordination properties of $p-$valent functions defined by generalized Salagean operator", Proc. Int. Symp. On development of geometric function theory and its applications, in Malaysia, pp.180-187.

[36] Liu, J. -L., 2007. "Further properties of a certain subclass of analytic and multivalent functions", Appl. Math. Comput. 187 (1), 290–294.

[37] Liu, J.L., 2009. "Some further properties of certain class of multivalent analytic functions", Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 25 (4), 369-376.

[38] Ma, W. C. and Minda, D., 1992. "A unified treatment of some special classes of univalent functions", in Proceedings of the Conference on Complex Analysis (Tianjin, 1992), 157–169, Conf. Proc. Lecture Notes Anal. I Int. Press, Cambridge, MA.

[39] Miller, S.S. and Mocanu, P., 2000. "Differential subordinations: theory and applications", 225. CRC, 459 p, New York, USA.

[40] Orhan, H. and Kadıoğlu, E., 2004. "Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coefficients", Tamsui Oxford Journal of Mathematical Sciences, 20 (2), 135-142.

[41] Orhan, H. and Kamali, M., 2005. "Neighborhoods of a class of analytic functions with negative coefficients", Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi.(NS), 21 (1), 55-61.

[42] Orhan, H., 2007. "On neighborhoods of analytic functions defined by using hadamard product". Novi Sad J. Math. 37(1), 17-25.

[43] Orhan, H., 2009. "Neighborhoods of a certain class of $p-$valent functions with negative coefficients defined by using a differential operator", Math. Ineq. Appl., 0(1).

[44] Owa, S., 1978. "On the distortion theorems. I", Kyungpook Math. J, 18 (1), 53-59.

[45] Owa, S., 1985. "On certain classes of p-valent functions with negative coefficients", Simon Stevin, 59 (4), 385–402.

[46] Owa, S., 1991. "Some properties of certain multivalent functions", Applied Mathematics Letters, 4 (5), 79-83.

[47] Owa, S. and Patel, J., 2000. "Properties of certain integral operators", Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 24 (3), 411-419.

[48] Owa, S., Saitoh, H. and Nunokawa, M., 1993. "Neighborhoods of certain analytic functions. Applied Mathematics Letters", 6 (4), 73-77.

[49] Owa, S., 1983. "On certain subclasses of analytic $p-$valent functions", J. Korean Math. Soc. 20 (1) (1983) 41-58.

[50] Raducanu, D. and Orhan, H., 2010. "Subclasses of analytic functions defined by a generalized differential operator". Int. J. Math. Anal. 4(1), 1–15.

[51] Palka, D., 1991. "An introduction to complex function theory", Springer, New York.

[52] Patil, D. and Thakare, N., 1983. "On convex hulls and extreme points of p-valent starlike and convex classes with applications", Bull. Math. Soc. Sci. Math. RS Roumanie (NS), 27 (75), 145–160.

[53] Ramachandran, C., Sivasubramanian, S. and Silverman, H., 2007. "Certain coefficient bounds for p-valent functions", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2007, 11.

[54] Ruscheweyh, S., 1981. "Neighborhoods of univalent functions", Proceedings of the American Mathematical Society, 81 (4), 521-527.

[55] Sağsöz, F. and Kamali, M., 2011. "On neighborhoods of two new subclasses of multivalent functions with negative coefficients", Computers and Mathematics with Applications, 62 (4), 1772-1779.

[56] Sălăgean, G., 1983. "Subclasses of univalent functions", Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 362-372 p.

[57] Seidel, W., 1942. "Book Review of "Les Fonctions Multivalentes ". Bull. Amer. Math. Soc., 48 (1).

[58] Shanmugam, T., Owa, S., Ramachandran, C., Sivasubramanian, S. and Nakamura, Y., 2009. "On certain coefficient inequalities for multivalent functions", J. Math. Inequal, 3, 31-41.

[59] Shenan, G.M., Salim, T. and Mousa, M.S., 2004. "A certain class of multivalent prestarlike functions involving the Srivastava-Saigo-Owa fractional integral operator", Kyungpook Math. J, 44 (3), 353–362.

[60] Silverman, H., 1997. "Partial sums of starlike and convex functions", J. Math. Anal. Appl. 209, 221-227.

[61] Silverman, H. and Silvia, E., 1981. "Fixed coefficients for subclasses of starlike functions", Houston J. Math, 7, 129-136.

[62] Sivaprasad Kumar, S., Taneja H. C. and Ravichandran, V., 2006. "Classes of multivalent functions defined by Dziok-Srivastava linear operator and multiplier transformations", Kyungpook Math, J. 46, 97-109.

[63] Srivastava, H.M. and Patel, J., 2005. "Some subclasses of multivalent functions involving a certain linear operator", J. Math. Anal. Appl. 310, 209–228.

[64] Srivastava, H.M. and Aouf, M.K., 1992, 1995. "A certain fractional derivative operator and its applications to a new class of analytic and multivalent functionswith negative coefficients. I and II", J. Math. Anal. Appl. 171, 1–13; J. Math. Anal. Appl. 192, 673–688.

[65] Srivastava, H. M. and Orhan, H., 2007. "Coefficient inequalities and inclusion relations for some families of analytic and multivalent functions", Appl. Math. Lett. 20, 686-691.

[66] Srivastava, H.M. and Owa, S., (Eds.), 1989. "Univalent Functions, Fractional Calculus, and their Applications", Halsted Press (Ellis Horwood Limited, Chichester), John Wiley and Sons, New York.

[67] Spencer, 1941. "On finitely mean valent functions", Proc.London Math. Soc., 47 (2), 201-211.

[68] Uralegaddi, B. A. and Somanatha, C., 1992. "Certain classes of univalent functions, Current Topics in Analytic Function Theory", (H. M Srivastava and S. Owa Eds.), pp. 371-374, World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong.

[69] Walker, J.B., 1990. "A note on neighborhoods of analytic functions having positive real part", International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 13 (3), 425-429.

ÖZGEÇMİŞ

20 Temmuz 1984 ‘de Kars’ta dünyaya geldi. İlk, orta ve lise öğrenimini Kars’ta tamamladı. 2001 yılında girdiği Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Lisans programından 2005 yılında mezun oldu. Aynı yıl Kafkas Üniversitesi Pedagojik Formasyon Eğitimine başladı, 2006 yılında mezun oldu.2005 yılında Kars Sınav Dershanesinde Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. 2011 yılından bu yana KAKÜV Orta Okulunda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.